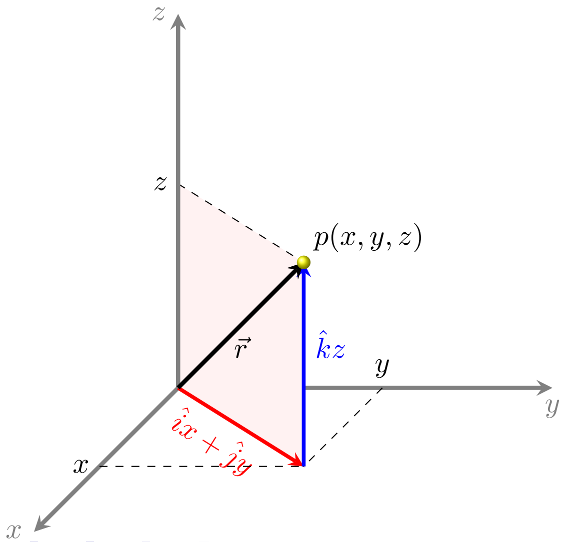
فیزیک ۱
دستگاه مختصات استوانه‌ای

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

مختصه‌های دستگاه مختصات استوانه‌ای



بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

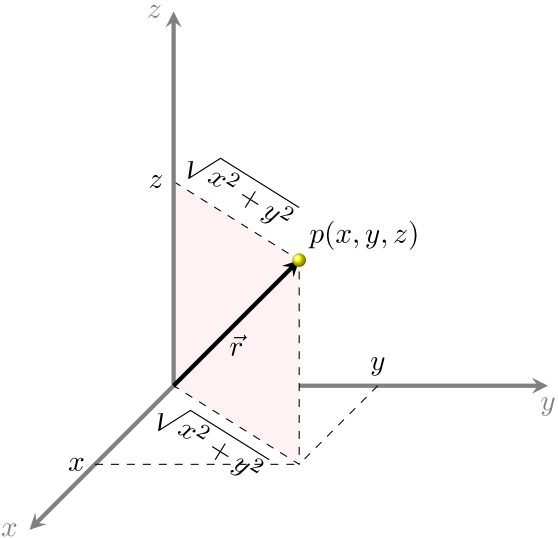
$$x = \hat{i} \cdot \vec{r}$$

$$y = \hat{j} \cdot \vec{r}$$

$$z = \hat{k} \cdot \vec{r}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

مختصه‌های دستگاه مختصات استوانه‌ای



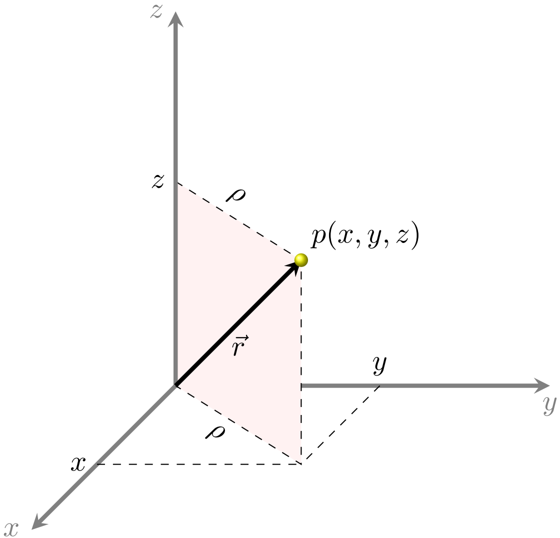
بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

مختصه‌های دستگاه مختصات استوانه‌ای



<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

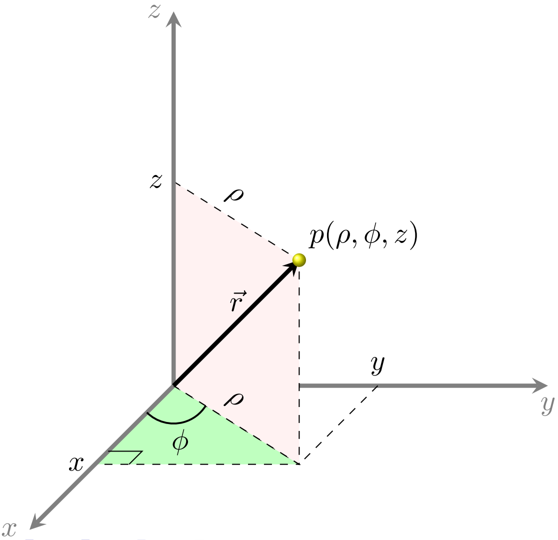
<u>بزرگی بردار مکان</u>

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

مختصه‌های دستگاه مختصات استوانه‌ای



بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

بزرگی بردار مکان

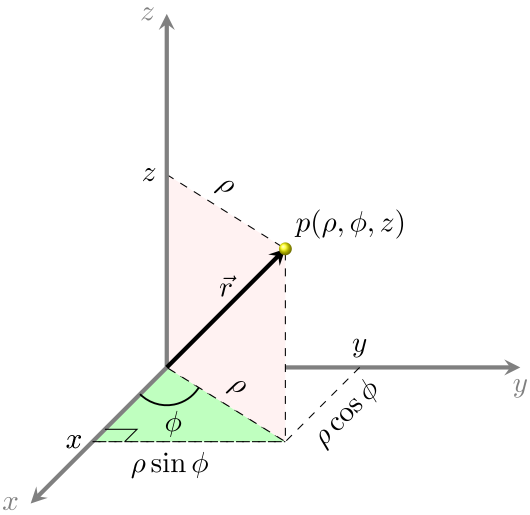
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

جهتهای بردار مکان

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

مختصه‌های دستگاه مختصات استوانه‌ای



<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

<u>بزرگی بردار مکان</u>

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

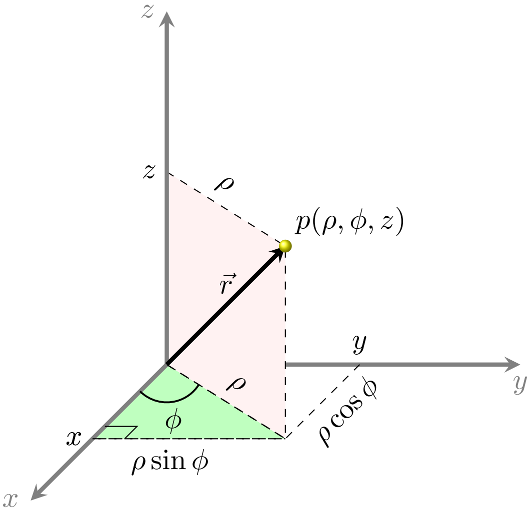
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

<u>جهتهای بردار مکان</u>

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

مختصه‌های دستگاه مختصات استوانه‌ای



<u>بزرگی بردار مکان</u>

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

<u>جهتهای بردار مکان</u>

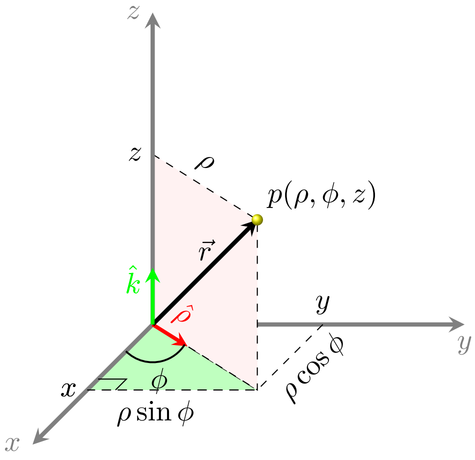
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = \hat{i}\rho\cos\phi + \hat{j}\rho\sin\phi + \hat{k}z$$

بردارهای یکه



بزرگی بردار مکان

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

جهتهای بردار مکان

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

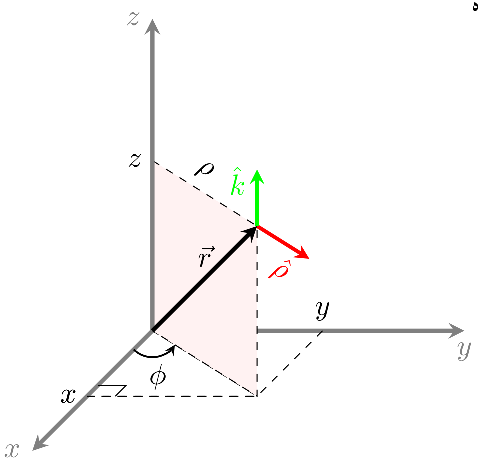
بردار مکان

$$\vec{r} = \rho(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi) + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi, \quad |\hat{\rho}| = 1$$

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

بردارهای یکه



یادآوری: بردارهای یکه در تمامی دستگاههای مختصات راستگرد هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی راستگردی بردارهای یکه بصورت زیر داده می‌شود،

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\quad \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\quad \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$$

بردار مکان در دستگاه مختصات استوانه‌ای با استفاده از بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ داده می شود،

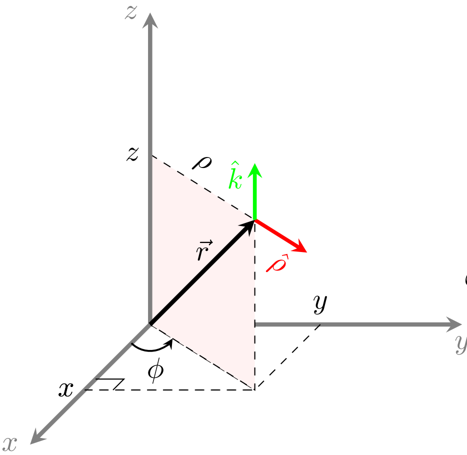
$$\vec{r}=\rho\hat{\rho}+\hat{k}z$$

که

$$\hat{\rho}=\hat{i}\cos\phi+\hat{j}\sin\phi$$

بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ در داخل صفحه‌ی صورتی رنگ قرار دارند و بر یکدیگر عمود می‌باشند.

بردارهای یکه



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ **در داخل صفحه‌ی صورتی رنگ** قرار دارند و بر یکدیگر عمود می‌باشند.

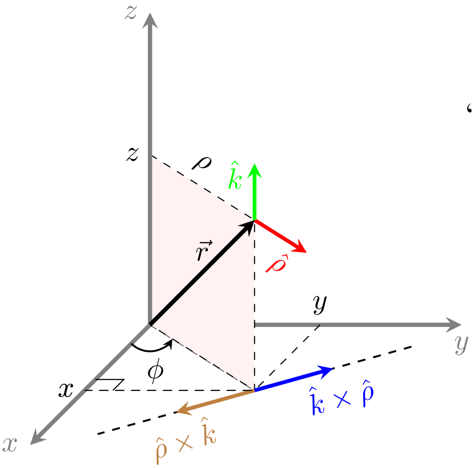
$$\hat{\rho} \cdot \hat{k} = 0$$

در دستگاه مختصات استوانه‌ای علاوه بر بردارهای یکه‌ی $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$، بردار یکه دیگری در جهت تغییرات زاویه‌ی ϕ وجود دارد که با $\hat{\phi}$ نمایش داده می‌شود.

بردار یکه $\hat{\phi}$ **عمود بر صفحه‌ی صورتی رنگ** است،

$$\hat{k} \cdot \hat{\phi} = \hat{\rho} \cdot \hat{\phi} = 0$$

بردارهای یکه



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

بردار یکه $\hat{\phi}$ عمود بر صفحه‌ی صورتی رنگ است،

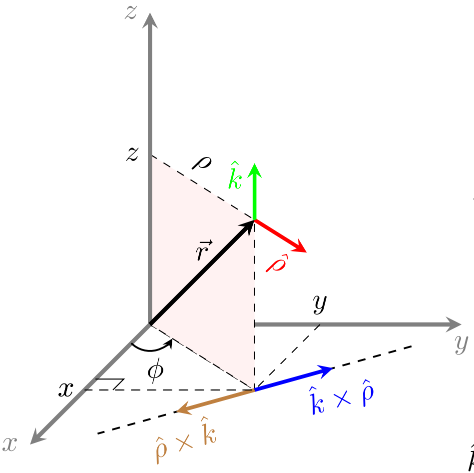
$$\hat{k}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = 0$$

بردارهای یکه $\hat{\phi}$ از ضرب خارجی $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ بدست می‌آید. بنابراین

$$\hat{\rho}\times\hat{k} = \hat{i}\sin\phi - \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{k}\times\hat{\rho} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

بردارهای یکه



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

$$\hat{k}\cdot\hat{\rho} = \hat{k}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = 0$$

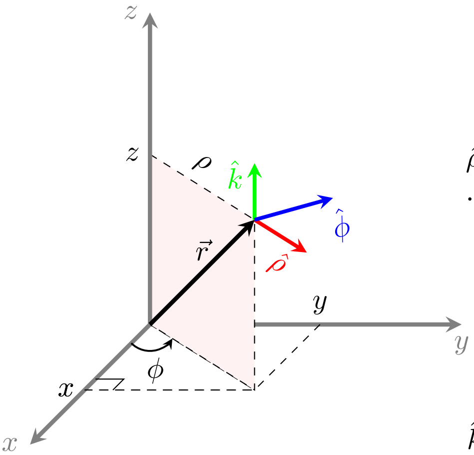
مطابق شکل $\hat{k}\times\hat{\rho}$ در جهت مثبت تغییرات ϕ است و $\hat{\rho}\times\hat{k}$ در جهت منفی تغییرات ϕ است. بنابراین

$$\hat{k}\times\hat{\rho} = \hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

برای دستگاه مختصات استوانه‌ای راستگردی بردارهای یکه بصورت زیر داده می‌شود،

$$\hat{k}\times\hat{\rho} = \hat{\phi}, \quad \hat{\rho}\times\hat{\phi} = \hat{k}, \quad \hat{\phi}\times\hat{k} = \hat{\rho}$$

بردارهای یکه



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi$$

$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

برخلاف $\hat{k}$ که جهت ثابتی دارد، بردارهای یکه‌ی $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ تابع ϕ هستند و جهت آن با ϕ تغییر می‌کند.

بردارهای یکه دو به دو برهم عمودند،

$$\hat{k}\cdot\hat{\rho} = \hat{k}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = 0$$

بردارهای یکه راستگردند،

$$\hat{k}\times\hat{\rho} = \hat{\phi}, \quad \hat{\rho}\times\hat{\phi} = \hat{k}, \quad \hat{\phi}\times\hat{k} = \hat{\rho}$$

بردارهای سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$
$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\hat{\rho}) + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

قاعده‌ی زنجیری

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j} = \hat{\phi}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \rho\hat{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

اگر

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}}$$

بردارهای سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}}$$

$$v_\rho = \dot{\rho}$$
$$v_\phi = \rho\dot{\phi}$$
$$v_z = \dot{z}$$

بردارهای سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\rho}\hat{\rho}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\dot{\phi}\hat{\phi}\right) + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi = \hat{\phi}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi} = -\hat{i}\cos\phi - \hat{j}\sin\phi = -\hat{\rho}$$

بردارهای سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

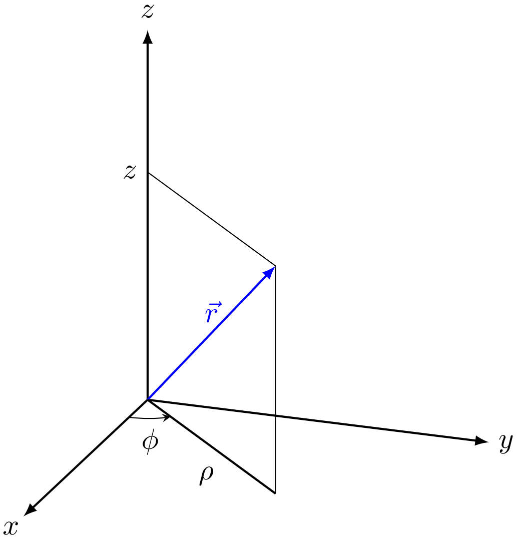
$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi = \hat{\phi}$$

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi} = -\hat{i}\cos\phi - \hat{j}\sin\phi = -\hat{\rho}$$

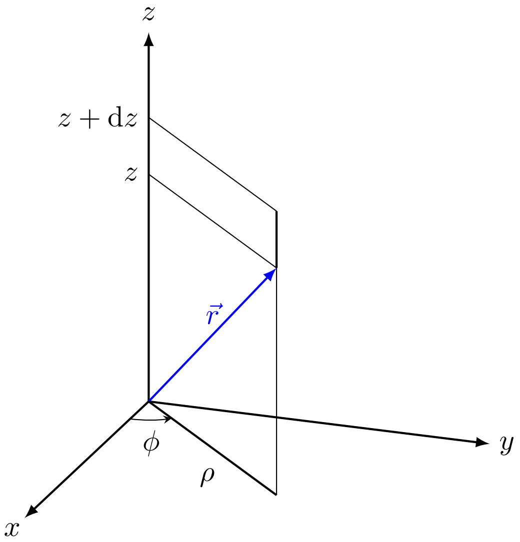
$$\ddot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}, \quad \ddot{z} = \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}$$

انتگرالگیری دوبعدی-پوسته یا قوطی استوانه‌ای

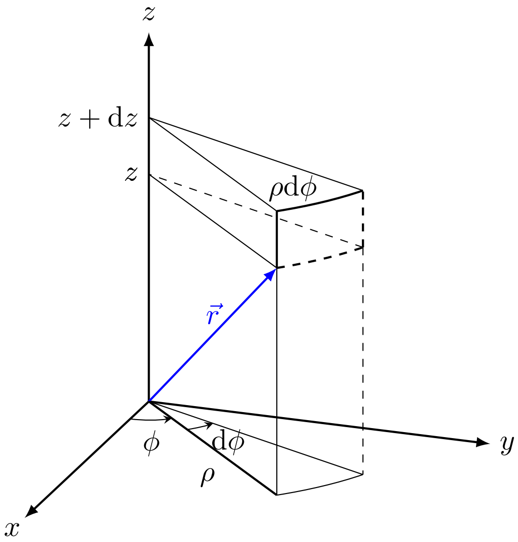


$\rho =$ ثابت

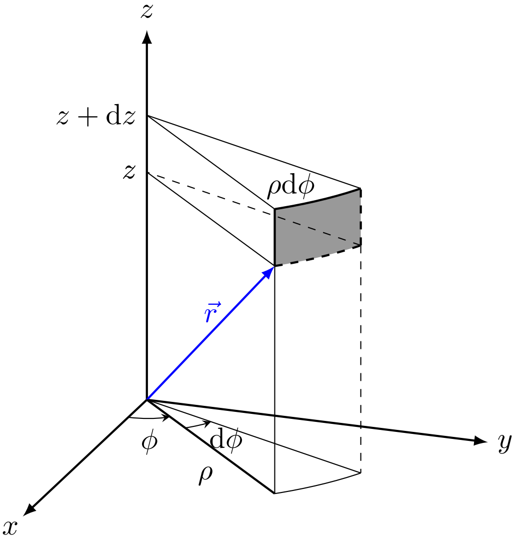
انتگرالگیری دوبعدی-پوسته یا قوطی استوانه‌ای



انتگرالگیری دوبعدی-پوسته یا قوطی استوانه‌ای



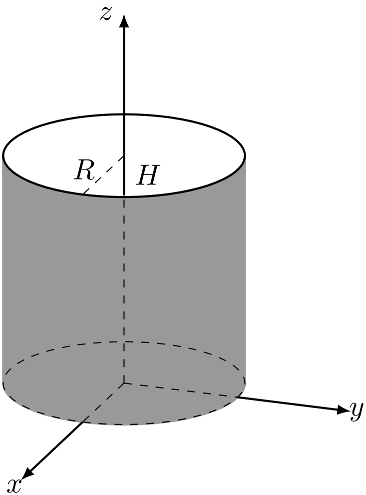
انتگرالگیری دوبعدی-پوسته یا قوطی استوانه‌ای



مساحت تشکیل شده از دیفرانسیلهای $\rho\mathrm{d}\phi$ و $\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}S = \rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

انتگرالگیری دوبعدی-پوسته یا قوطی استوانه‌ای



$$\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

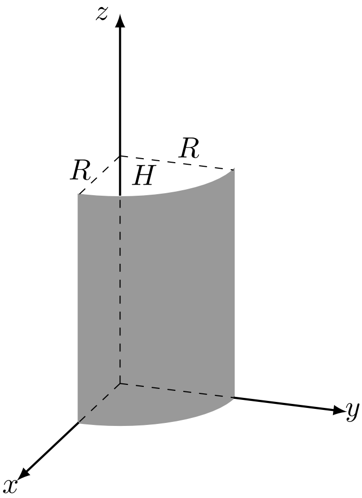
$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq H$$

$$S = R\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{H} \mathrm{d}z\right)$$

$$S = R\left[\phi\right]_0^{2\pi}\left[z\right]_0^{H} = 2\pi RH$$

انتگرالگیری دوبعدی-پوسته یا قوطی استوانه‌ای



$$\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

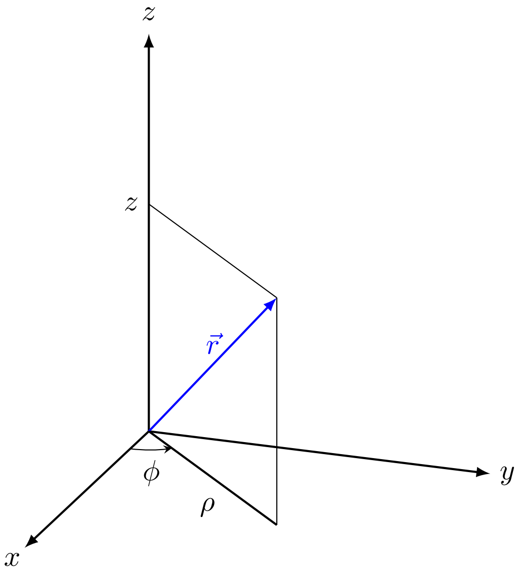
$$\boxed{0 \leq \phi \leq \pi/2}$$

$$0 \leq z \leq H$$

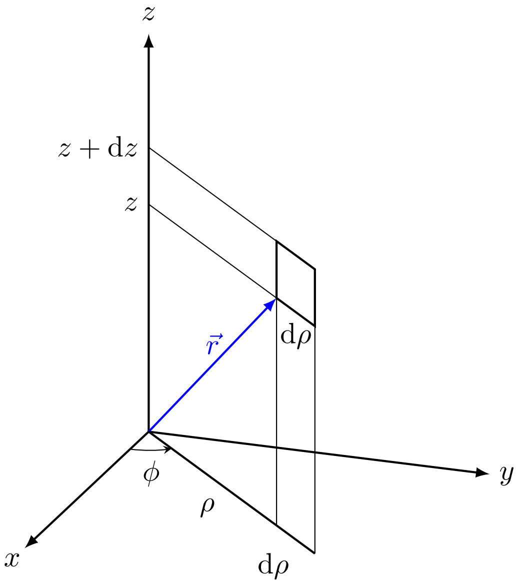
$$S = R\left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{H} \mathrm{d}z\right)$$

$$S = R\left[\phi\right]_0^{\pi/2}\left[z\right]_0^{H} = \frac{1}{2}\pi RH$$

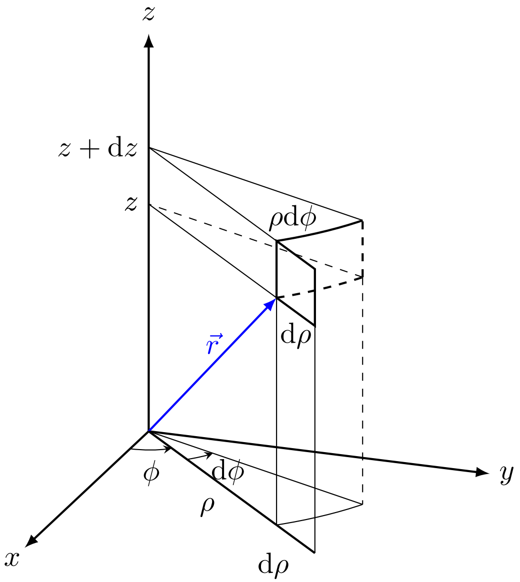
انتگرالگیری سه‌بعدی



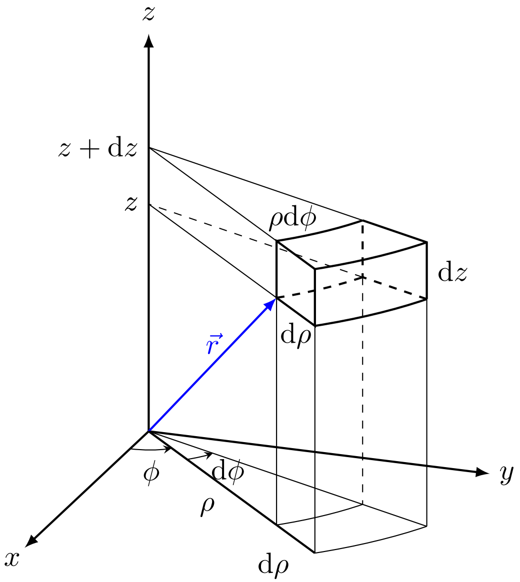
انتگرالگیری سه‌بعدی



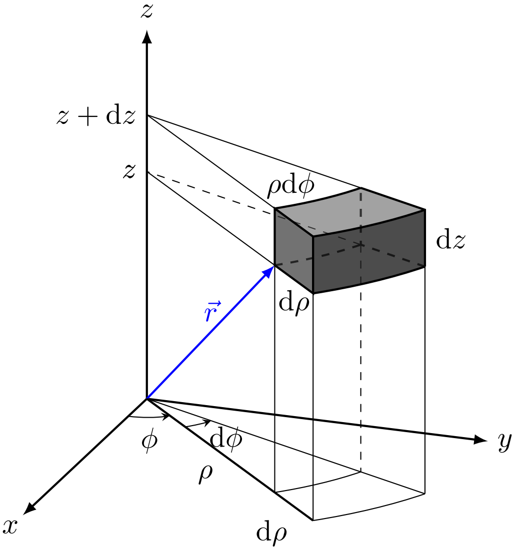
انتگرالگیری سه‌بعدی



انتگرالگیری سه‌بعدی



انتگرالگیری سه‌بعدی

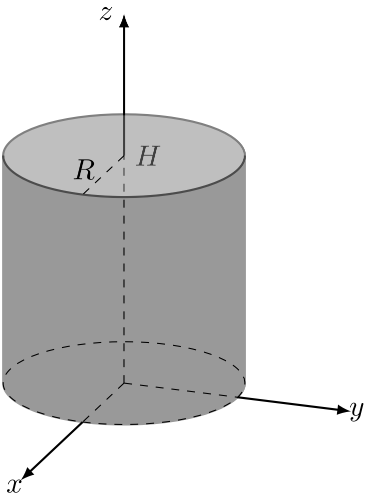


حجم تشکیل شده از دیفرانسیلهای $\mathrm{d}\rho$، $\rho\mathrm{d}\phi$ و $\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}V = (\mathrm{d}\rho)(\rho\mathrm{d}\phi)(\mathrm{d}z)$$

$$\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

انتگرالگیری سه‌بعدی



$$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

$$0 \leq \rho \leq R$$

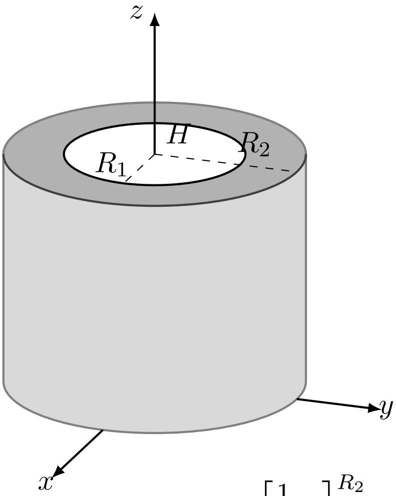
$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq H$$

$$V = \left(\int_0^R \rho \mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^H \mathrm{d}z\right)$$

$$V = \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_0^R [\phi]_0^{2\pi} [z]_0^H = \pi R^2 H$$

انتگرالگیری سه‌بعدی



$$dV = \rho d\rho d\phi dz$$

$$\boxed{R_1 \leq \rho \leq R_2}$$

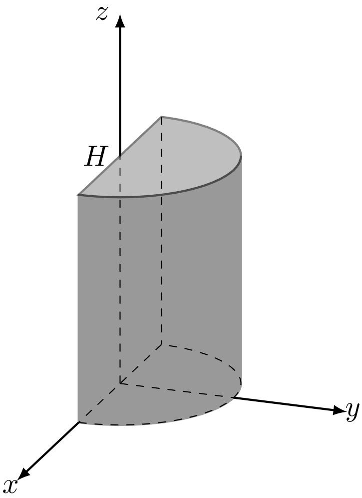
$$0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq H$$

$$V = \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho d\rho\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_0^{H} dz\right)$$

$$V = \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{R_1}^{R_2} [\phi]_0^{2\pi} [z]_0^H = \pi(R_2^2 - R_1^2)H$$

انتگرالگیری سه‌بعدی



$$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

$$0 \leq \rho \leq R$$

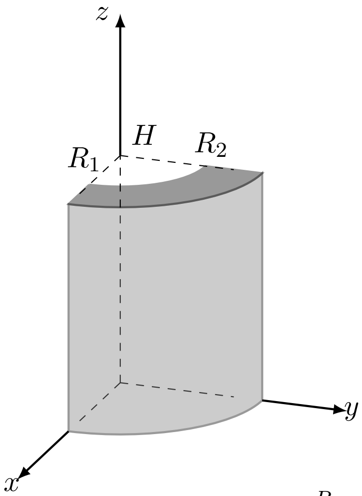
$$\boxed{0 \leq \phi \leq \pi}$$

$$0 \leq z \leq H$$

$$V = \left(\int_0^R \rho \mathrm{d}\rho \right) \left(\int_0^\pi \mathrm{d}\phi \right) \left(\int_0^H \mathrm{d}z \right)$$

$$V = \left[\frac{1}{2}\rho^2 \right]_0^R [\phi]_0^\pi \, [z]_0^H = \frac{1}{2}\pi R^2 H$$

انتگرالگیری سه‌بعدی



$$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

$$\boxed{R_1 \leq \rho \leq R_2}$$

$$\boxed{0 \leq \phi \leq \pi/2}$$

$$0 \leq z \leq H$$

$$V = \left(\int_{R_1}^{R_2} \rho \mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{H} \mathrm{d}z\right)$$

$$V = \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{R_1}^{R_2} [\phi]_0^{\pi/2} [z]_0^H = \frac{1}{4}\pi(R_2^2 - R_1^2)H$$