مکانیک تحلیلی

جلسه دوم-دینامیک ذره در یک بعد

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

دینامیک ذره در یک بعد

فرض کنید که ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر چند نیروی $\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3, \cdots, \vec{F}_n$ قرار دارد. نیروی خالص وارد بر ذره برابر است با جمع تمامی نیروها

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{خالص}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n$$

و قانون دوم نیوتن وقتی جرم ذره تحت بررسی تغییر نمی‌کند بصورت زیر داده می‌شود،

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

اگر m کمیت ثابتی باشد با توجه به تعریف تکانه ذره، می‌توان قانون دوم نیوتن را بصورت

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = m\vec{a} = \vec{F}$$

نوشت.

دینامیک ذره در یک بعد

مولفه‌های رابطه برداری

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}$$

در دستگاه مختصات دکارتی بصورت

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z$$

داده می‌شود. با دانستن مولفه‌های نیروی $\vec{F}$، می‌توان مکان ذره را بصورت تابعی از زمان t بدست آورد، یعنی

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

دینامیک ذره در یک بعد

در حالت کلی نیروی وارد بر ذره می‌تواند تابعی از زمان و تمامی مولفه‌های سرعت و مکان ذره در دستگاه مختصات دکارتی باشد ، یعنی

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z})$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z})$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z})$$

که

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

چون حرکت تحت بررسی ذره در این فصل یک حرکت یک بعدی می‌باشد، بنابراین تنها معادله تحت بررسی مستقل از شاخص زیرین نیرو بصورت زیر داده می‌شود،

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F(t, x, \dot{x})$$

دینامیک ذره در یک بعد

در معادله دینامیکی ذره در یک بعد

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F(t, x, \dot{x})$$

نیرو اعمالی می‌تواند در شکل ساده تنها تابعی از یک متغییر باشد،

- نیرو اعمالی ثابت باشد

$$F = F_0 = \text{ثابت}$$

- نیرو اعمالی تابعی از زمان باشد

$$F = F(t)$$

- نیرو اعمالی تابعی از سرعت باشد

$$F = F(v)$$

- نیرو اعمالی تابعی از مکان باشد

$$F = F(x)$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی ثابت

برای شرایط اولیه

$$x(t=0)=x_0, \quad v(t=0)=v_0$$

و نیرو اعمالی ثابت، معادله دینامیکی ذره بصورت زیر داده می‌شود

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_0 \quad \text{یا} \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F_0$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$m\mathrm{d}v=F_0\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}v=\frac{F_0}{m}\mathrm{d}t$$

انتگرالگیری از طرفین رابطه دیفرانسیلی بالا برای شرایط اولیه داده شده،

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t\frac{F_0}{m}\mathrm{d}t$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی ثابت

کمیت ثابت F_0/m برابر شتاب ذره است

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \frac{F_0}{m}\int_0^t \mathrm{d}t = a\int_0^t \mathrm{d}t$$

بنابراین

$$[v]_{v_0}^{v} = a[t]_0^t \Rightarrow v - v_0 = a(t-0) \Rightarrow \boxed{v(t) = at + v_0}$$

برای بدست آوردن مکان بصورت تابعی از زمان، سرعت را بصورت $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ می‌نویسیم،

$$v = at + v_0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = at + v_0$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$\mathrm{d}x = (at + v_0)\mathrm{d}t$$

انتگرالگیری از طرفین رابطه دیفرانسیلی بالا برای شرایط اولیه داده شده،

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t (at + v_0)\mathrm{d}t$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی ثابت

پیگیری حل انتگرال

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t (at + v_0)\mathrm{d}t$$

انجام عملیات انتگرال‌گیری

$$[x]_{x_0}^{x} = \left[\frac{1}{2}at^2 + v_0 t\right]_0^t \Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

مکان ذره بر حسب تابعی از زمان

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0}$$

رابطه‌ی مستقل از زمان

$$\begin{cases} t = (v - v_0)/a \\ x - x_0 = (1/2)at^2 + v_0 t \end{cases} \Rightarrow 2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

برای شرایط اولیه

$$x(t=0)=x_0, \quad v(t=0)=v_0$$

و نیرو اعمالی تابع زمان، معادله دینامیکی ذره بصورت زیر داده می‌شود

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F(t) \quad \text{یا} \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F(t)$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$m\mathrm{d}v=F(t)\mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}v=\frac{1}{m}F(t)\mathrm{d}t$$

انتگرالگیری از طرفین رابطه دیفرانسیلی بالا برای شرایط اولیه داده شده،

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t\frac{1}{m}F(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{m}\int_0^t F(t)\mathrm{d}t$$

$$\boxed{v(t)=v_0+\frac{1}{m}\int_0^t F(t)\mathrm{d}t}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

$$v = v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\mathrm{d}t$$

برای بدست آوردن مکان بصورت تابعی از زمان، سرعت را بصورت $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ می‌نویسیم،

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\mathrm{d}t$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$\mathrm{d}x = \left[v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t$$

انتگرالگیری از طرفین رابطه دیفرانسیلی بالا برای شرایط اولیه داده شده،

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x = \int_0^t\left[v_0 + \frac{1}{m}\int_0^t F(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t = \int_0^t\left[v_0 + \frac{1}{m}\int_0^{\tau} F(\tau')\mathrm{d}\tau'\right]\mathrm{d}\tau$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t \left[v_0 + \frac{1}{m} \int_0^\tau F(\tau')\mathrm{d}\tau' \right] \mathrm{d}\tau$$

انجام عملیات انتگرالگیری

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \left[\int_0^\tau F(\tau')\mathrm{d}\tau' \right] \mathrm{d}\tau$$

مکان ذره بر حسب تابعی از زمان

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \left[\int_0^\tau F(\tau')\mathrm{d}\tau' \right] \mathrm{d}\tau}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۱: معادله حرکت یک الکترون به جرم m و بار $-e$ را در میدان الکتریکی

$$E(t) = E_0 \sin(\omega t + \phi)$$

وقتی $x(t=0) = x_0$ و $v(t=0) = v_0$ بدست آورید.
از فیزیک ۲ می‌دانیم که نیروی وارد بر یک الکترون در میدان الکتریکی بصورت

$$F(t) = -eE(t)$$

می‌باشد. بنابراین دینامیک حرکت الکترون بوسیله رابطه زیر داده می‌شود،

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(t) = -eE(t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{eE_0}{m}\sin(\omega t + \phi)$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$\mathrm{d}v = -\frac{eE_0}{m}\sin(\omega t + \phi)\mathrm{d}t$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۱:

$$\mathrm{d}v = -\frac{eE_0}{m}\sin(\omega t+\phi)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v = -\frac{eE_0}{m}\int_0^t \sin(\omega t+\phi)\mathrm{d}t$$

$$v-0 = -\frac{eE_0}{m}\left[-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t+\phi)\right]_0^t \Rightarrow v = \frac{eE_0}{m\omega}(\cos(\omega t+\phi)-\cos\phi)$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $\omega t \ll 1$

$$\cos(\omega t+\phi) = [1+\cdots]\cos\phi - [(\omega t)+\cdots]\sin\phi$$

$$v \simeq -\frac{eE_0}{m}t\sin\phi+\cdots$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۱:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{eE_0}{m\omega}(\cos(\omega t + \phi) - \cos\phi)$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$\mathrm{d}x = \frac{eE_0}{m\omega}\left[\cos(\omega t + \phi) - \cos\phi\right]\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \frac{eE_0}{m\omega}\int_0^t \left[\frac{eE_0}{m\omega}\cos(\omega t + \phi) - \cos\phi\right]\mathrm{d}t$$

$$x - 0 = -\frac{eE_0}{m\omega}\cos\phi\,[t]_0^t + \frac{eE_0}{m\omega}\left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega t + \phi)\right]_0^t$$

$$x(t) = -\frac{eE_0}{m\omega}t\cos\phi + \frac{eE_0}{m\omega^2}(\sin(\omega t + \phi) - \sin\phi)$$

$$x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2}[-(\omega t)\cos\phi + \sin(\omega t + \phi) - \sin\phi]$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۱:

$$x(t) = x(t) = -\frac{eE_0}{m\omega} t\cos\phi + \frac{eE_0}{m\omega^2}(\sin(\omega t+\phi) - \sin\phi)$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $\omega t \ll 1$

$$\sin(\omega t+\phi) = [(\omega t) + \cdots]\cos\phi + \left[1 - \frac{1}{2}(\omega t)^2 + \cdots\right]\sin\phi$$

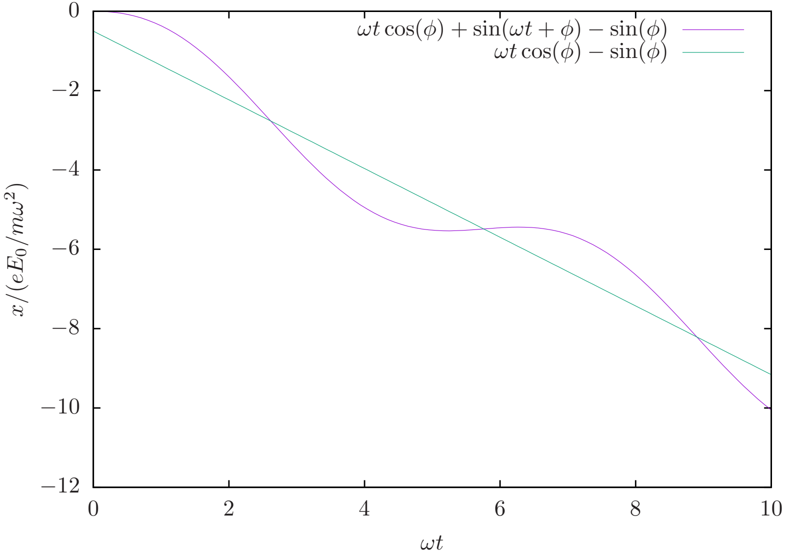
$$x \simeq -\frac{eE_0}{2m} t^2 \sin\phi + \cdots$$

یا

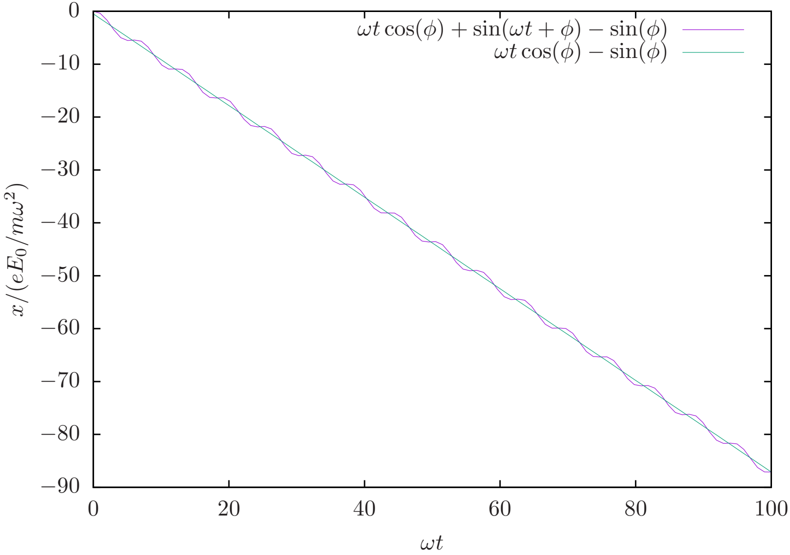
$$v \simeq -\frac{eE_0}{m} t\sin\phi + \cdots \Rightarrow \mathrm{d}x \simeq \left[-\frac{eE_0}{m} t\sin\phi + \cdots\right]\mathrm{d}t$$

$$x \simeq -\frac{eE_0}{2m} t^2 \sin\phi + \cdots$$

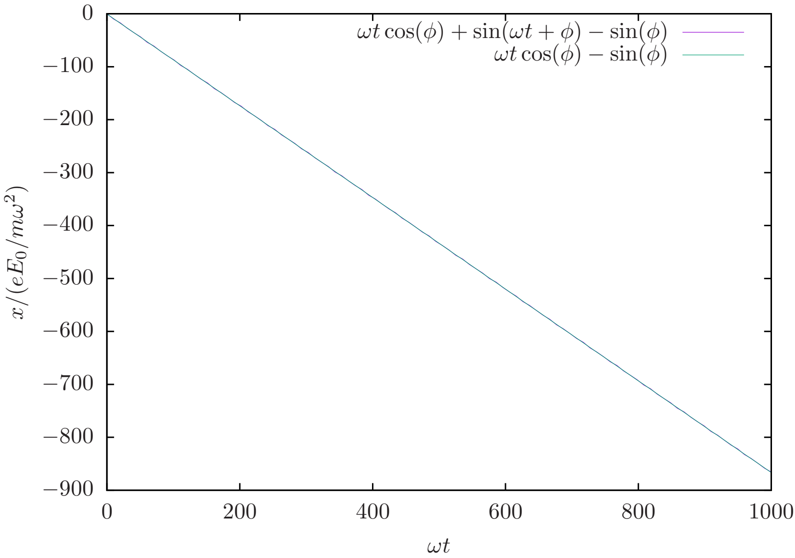
دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۲: جسمی به جرم m در روی سطح بدون اصطکاک در مبدا در حال سکون است. در لحظه‌ی $t=0$ یک نیروی کاهشی بصورت $F=F_0e^{-\lambda t}$ که λ یک ثابت مثبت است به آن اعمال می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ بدست آورید و حالتهای حدی آنها را زمانهای کوچک و زمانهای بزرگ مشخص کنید.

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F(t)=F_0e^{-\lambda t}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{F_0}{m}e^{-\lambda t}$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$\mathrm{d}v=\frac{F_0}{m}e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^v\mathrm{d}v=\frac{F_0}{m}\int_0^t e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$v=-\frac{F_0}{m\lambda}\left[e^{-\lambda t}\right]_0^t\Rightarrow v(t)=\frac{F_0}{m\lambda}\left[1-e^{-\lambda t}\right]$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۲:

$$v(t) = \frac{F_0}{m\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right]$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $\lambda t \ll 1$

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \cdots$$

$$v(t) \simeq \frac{F_0}{m} t + \cdots$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to \infty$ یا $\lambda t \gg 1$

$$e^{-\lambda t} \to 0$$

$$v(t) \to \frac{F_0}{m\lambda}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۲:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{F_0}{m\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right]$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$\mathrm{d}x = \frac{F_0}{m\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right]\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}x = \frac{F_0}{m\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right]\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \frac{F_0}{m\lambda}\int_0^t \left[1 - e^{-\lambda t}\right]\mathrm{d}t$$

$$x = \frac{F_0}{m\lambda}\left[t + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^t = \frac{F_0}{m\lambda}\left[t + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right] - \frac{F_0}{m\lambda}\left[\frac{1}{\lambda}\right]$$

$$x = \frac{F_0}{m\lambda}t - \frac{F_0}{m\lambda^2}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] = \frac{F_0}{m\lambda^2}(\lambda t - 1 + e^{-\lambda t})$$

مثال ۲:

$$x = \frac{F_0}{m\lambda}t - \frac{F_0}{m\lambda^2}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] = \frac{F_0}{m\lambda^2}(\lambda t - 1 + e^{-\lambda t})$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $\lambda t \ll 1$

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \cdots$$

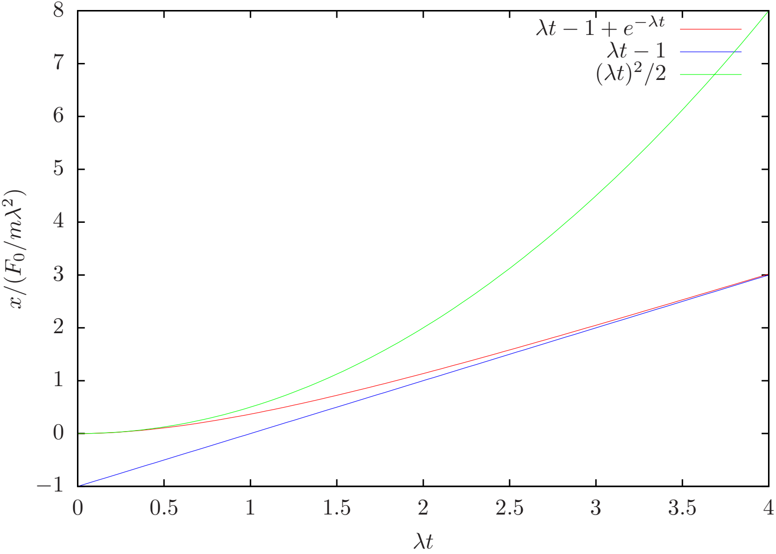
$$x(t) \simeq \frac{F_0}{2m}t^2 + \cdots = \frac{1}{2}\frac{F_0}{m\lambda^2}(\lambda t)^2 + \cdots$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to \infty$ یا $\lambda t \gg 1$

$$e^{-\lambda t} \to 0$$

$$x(t) \to -\frac{F_0}{m\lambda^2} + \frac{F_0}{m\lambda}t = \frac{F_0}{m\lambda^2}(\lambda t - 1)$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان



مثال ۳: جسمی به جرم m در مبدا در حال سکون است. در لحظه‌ی $t = 0$ یک نیروی $F = F_0(1 - \lambda t e^{-\lambda t})$ به آن اعمال می‌شود که λ یک ثابت مثبت است . $x(t)$ و $v(t)$ بدست آورید و حالتهای حدی آنها را زمانهای کوچک و زمانهای بزرگ مشخص کنید.

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_0(1 - \lambda t e^{-\lambda t}) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F_0}{m}(1 - \lambda t e^{-\lambda t})$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$\mathrm{d}v = \frac{F_0}{m}(1 - \lambda t e^{-\lambda t})\mathrm{d}t$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \frac{F_0}{m}\int_0^t (1 - \lambda t e^{-\lambda t})\mathrm{d}t$$

$$v = \frac{F_0}{m}t - \frac{F_0\lambda}{m}\int_0^t t e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۳:

$$v=\frac{F_0}{m}t-\frac{F_0\lambda}{m}\int_0^t te^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

مشتق		انتگرال
t	$+$	$e^{-\lambda t}$
1	$-$	$-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$
0		$\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}$

$$\int te^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{t}{\lambda}e^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}$$

$$\int te^{-\lambda t}\mathrm{d}t=-\left[\frac{t}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\right]e^{-\lambda t}$$

$$v=\frac{F_0}{m}t-\frac{F_0\lambda}{m}\int_0^t te^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$v=\frac{F_0}{m}t+\frac{F_0}{m}\left[t+\frac{1}{\lambda}\right]e^{-\lambda t}-\frac{F_0}{m\lambda}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۳:

$$v = \frac{F_0}{m}t + \frac{F_0}{m}\left[t + \frac{1}{\lambda}\right]e^{-\lambda t} - \frac{F_0}{m\lambda}$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $\lambda t \ll 1$

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \cdots$$

$$v(t) \simeq \frac{F_0}{m}t + \cdots$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to \infty$ یا $\lambda t \gg 1$

$$e^{-\lambda t} \to 0$$

$$v(t) \to \frac{F_0}{m}t - \frac{F_0}{m\lambda}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۳:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{F_0}{m}t + \frac{F_0}{m}\left[t + \frac{1}{\lambda}\right]e^{-\lambda t} - \frac{F_0}{m\lambda}$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{F_0}{m}t + \frac{F_0}{m}\left[t + \frac{1}{\lambda}\right]e^{-\lambda t} - \frac{F_0}{m\lambda}\right)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \left(\frac{F_0}{m}t + \frac{F_0}{m}\left[t + \frac{1}{\lambda}\right]e^{-\lambda t} - \frac{F_0}{m\lambda}\right)\mathrm{d}t$$

$$x = -\frac{F_0}{m\lambda}t + \frac{F_0}{2m}t^2 + \frac{F_0}{m}\int_0^t \left[t + \frac{1}{\lambda}\right]e^{-\lambda t}\mathrm{d}t$$

$$x = \frac{2F_0}{m\lambda^2} - \frac{F_0}{m\lambda}t + \frac{F_0}{2m}t^2 - \frac{F_0}{m}\left[\frac{t}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}\right]e^{-\lambda t}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۳:

$$x = \frac{2F_0}{m\lambda^2} - \frac{F_0}{m\lambda}t + \frac{F_0}{2m}t^2 - \frac{F_0}{m}\left[\frac{t}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}\right]e^{-\lambda t}$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $\lambda t \ll 1$

$$e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t + \cdots$$

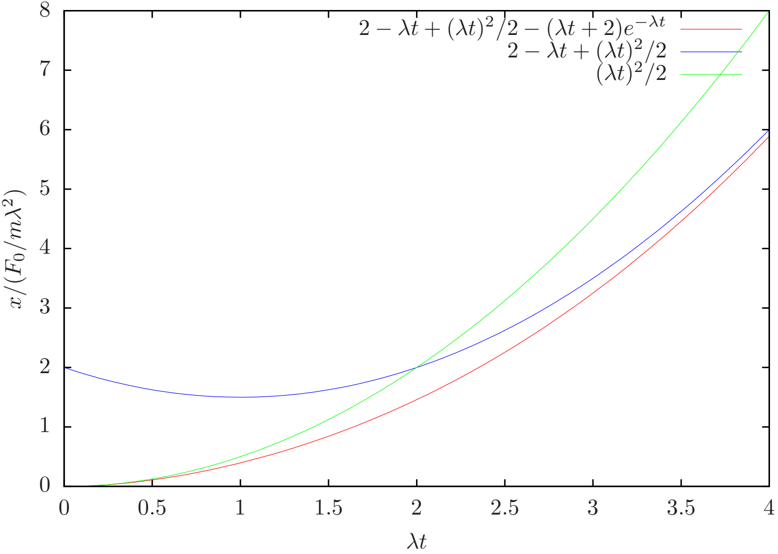
$$x(t) \simeq \frac{F_0}{2m}t^2 + \cdots$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to \infty$ یا $\lambda t \gg 1$

$$e^{-\lambda t} \to 0$$

$$x(t) \to \frac{2F_0}{m\lambda^2} - \frac{F_0}{m\lambda}t + \frac{F_0}{2m}t^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۴: ذره ای از حالت سکون از مبدا تحت تاثیر نیروی $F = F_0 \cos^2 \omega t$ به حرکت در می‌آید. $x(t)$ و $v(t)$ را بدست آورید و حالتهای حدی آنها را زمانهای کوچک مشخص کنید.

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_0 \cos^2 \omega t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{F_0}{m} \cos^2 \omega t$$

با ضرب کردن $\mathrm{d}t$ به طرفین رابطه بالا می‌توان نمایش دیفرانسیلی آنرا بدست آورد

$$\mathrm{d}v = \frac{F_0}{m} \cos^2 \omega t \ \mathrm{d}t = \frac{F_0}{2m}(1 + \cos 2\omega t)\mathrm{d}t$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v = \int_0^t \frac{F_0}{2m}(1 + \cos 2\omega t)\mathrm{d}t$$

$$v = \frac{F_0}{2m}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]_0^t$$

$$v = \frac{F_0}{2m}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۴:

$$v = \frac{F_0}{2m}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$

$$\sin 2\omega t = 2\omega t + \cdots$$

$$v(t) \simeq \frac{F_0}{m} t + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{F_0}{2m}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right] \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{F_0}{2m}\left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \frac{F_0}{2m}\int_0^t \left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right]\mathrm{d}t$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۴:

$$x = \frac{F_0}{2m}\int_0^t \left[t + \frac{1}{2\omega}\sin 2\omega t\right] \mathrm{d}t$$

$$x = \frac{F_0}{4m}t^2 - \frac{F_0}{8m\omega^2}\cos 2\omega t$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$

$$\cos 2\omega t = 1 - 2\omega^2 t^2 + \cdots$$

$$x(t) \simeq -\frac{F_0}{8m\omega^2} + \frac{F_0}{2m}t^2 + \cdots$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۵: اتومبیلی به جرم m ابتدا در حال سکون است. در زمان $t = 0$ توسط یک نیروی محرکه F_0بطرف جلو رانده می‌شود. بعد از گذشت t_1 ناگهان نیرو دو برابر می‌شود و به مقدار $2F_0$ می‌رسد و در این مقدار ثابت باقی می‌ماند. مسافت پیموده شده در مدت زمانی $2t_1$ را بدست آورید.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ 2F_0 & t_1 \leq t \end{cases}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(t) \Rightarrow \mathrm{d}v = \frac{F(t)}{m}\mathrm{d}t$$

برای $0 \leq t \leq t_1$:

$$v(t) = \frac{F_0}{m}\int_0^t \mathrm{d}t = \frac{F_0}{m}t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m}\int_0^t t\mathrm{d}t = \frac{F_0}{2m}t^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۵:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & 0 \le t \le t_1 \\ 2F_0 & t_1 \le t \end{cases}$$

برای $t_1 \le t$:

$$\text{شرایط اولیه}:\ v(t_1) = \frac{F_0}{m} t_1, \quad x(t_1) = \frac{F_0}{2m} t_1^2$$

$$v - v(t_1) = \frac{2F_0}{m}(t - t_1) \Rightarrow v = \frac{F_0}{m} t_1 + \frac{2F_0}{m}(t - t_1)$$

$$x(t) - x(t_1) = \frac{F_0}{m} t_1 \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t + \frac{2F_0}{m} \int_{t_1}^{t} (t - t_1)\mathrm{d}t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{2m} t_1^2 + \frac{F_0}{m} t_1 (t - t_1) + \frac{F_0}{m}(t - t_1)^2$$

مثال ۵:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & 0 \le t \le t_1 \\ 2F_0 & t_1 \le t \end{cases}$$

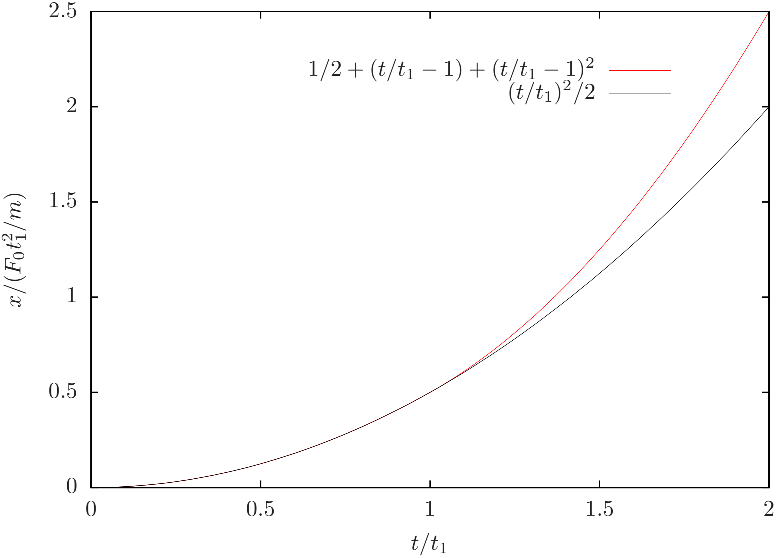
$$v(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m}t & 0 \le t \le t_1 \\ \frac{F_0}{m}t_1 + \frac{2F_0}{m}(t - t_1) & t_1 \le t \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{2m}t^2 & 0 \le t \le t_1 \\ \frac{F_0}{2m}t_1^2 + \frac{F_0}{m}t_1(t - t_1) + \frac{F_0}{m}(t - t_1)^2 & t_1 \le t \end{cases}$$

مسافت طی شده

$$d = x(t = 2t_1) = \frac{F_0}{2m}t_1^2 + \frac{F_0}{m}t_1^2 + \frac{F_0}{m}t_1^2 = \frac{5F_0}{2m}t_1^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان



مثال ۶: اتومبیلی به جرم m ابتدا در حال سکون است. در زمان $t = 0$ توسط یک نیروی محرکه F_0بطرف جلو رانده می‌شود. بعد از گذشت t_1 نیرو بطور خطی افزایش می‌یابد و به مقدار $2F_0$ می‌رسد و در این مقدار ثابت باقی می‌ماند. مسافت پیموده شده در مدت زمانی $2t_1$ را بدست آورید.

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ F_0 + \frac{F_0}{t_1}(t - t_1) & t_1 \leq t \end{cases}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(t) \Rightarrow \mathrm{d}v = \frac{F(t)}{m}\mathrm{d}t$$

برای $0 \leq t \leq t_1$:

$$v(t) = \frac{F_0}{m}\int_0^t \mathrm{d}t = \frac{F_0}{m}t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m}\int_0^t t\mathrm{d}t = \frac{F_0}{2m}t^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان

مثال ۶:

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t \leq t_1 \\ F_0 + \frac{F_0}{t_1}(t - t_1) & t_1 \leq t \end{cases}$$

برای $t_1 \leq t$:

$$\text{شرایط اولیه}: \; v(t_1) = \frac{F_0}{m} t_1, \quad x(t_1) = \frac{F_0}{2m} t_1^2$$

$$v - v(t_1) = \frac{F_0}{m}(t - t_1) + \frac{F_0}{2mt_1}(t - t_1)^2 \Rightarrow v = \frac{F_0}{m} t_1 + \frac{F_0}{m}(t - t_1) + \frac{F_0}{2mt_1}(t - t_1)^2$$

$$x(t) - x(t_1) = \frac{F_0}{m} t_1 \int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t + \frac{F_0}{m} \int_{t_1}^{t} (t - t_1)\mathrm{d}t + \frac{F_0}{2mt_1} \int_{t_1}^{t} (t - t_1)^2 \mathrm{d}t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{2m} t_1^2 + \frac{F_0}{m} t_1 (t - t_1) + \frac{F_0}{2m}(t - t_1)^2 + \frac{F_0}{6mt_1}(t - t_1)^3$$

مثال ۶:

$$F(t)=\begin{cases}F_0 & 0\leq t\leq t_1\\ 2F_0 & t_1\leq t\end{cases}$$

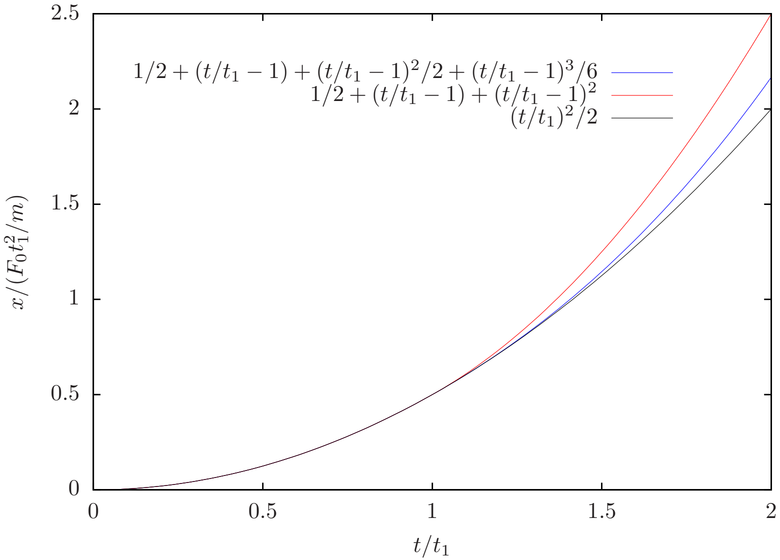
$$v(t)=\begin{cases}\frac{F_0}{m}t & 0\leq t\leq t_1\\ \frac{F_0}{m}t_1+\frac{F_0}{m}(t-t_1)+\frac{F_0}{2mt_1}(t-t_1)^2 & t_1\leq t\end{cases}$$

$$x(t)=\begin{cases}\frac{F_0}{2m}t^2 & 0\leq t\leq t_1\\ \frac{F_0}{2m}t_1^2+\frac{F_0}{m}t_1(t-t_1)+\frac{F_0}{2m}(t-t_1)^2+\frac{F_0}{6mt_1}(t-t_1)^3 & t_1\leq t\end{cases}$$

مسافت طی شده

$$d=x(t=2t_1)=\frac{F_0}{2m}t_1^2+\frac{F_0}{m}t_1^2+\frac{F_0}{2m}t_1^2+\frac{F_0}{6m}t_1^2=\frac{13F_0}{6m}t_1^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع زمان



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

نیروهای مقابله کننده با حرکت اجسام در سیال و گاز تابع سرعت جسم می‌باشد،

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(v)$$

اگر جای $\mathrm{d}t$ و $F(v)$ را عوض کنیم،

$$m\frac{\mathrm{d}v}{F(v)} = \mathrm{d}t$$

با انتگرالگیری داریم

$$t = m\int \frac{\mathrm{d}v}{F(v)}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۱: اتومبیلی رو سطح صاف بدون اصطکاکی با سرعت v_0 حرکت می‌کند و موتور ناگهان خاموش می‌شود. اگر مقاومت متناسب با سرعت باشد، $F=-kv$، تابع سرعت و تابع مکان را بر حسب زمان بدست آورید.

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\frac{k}{m}\int_0^t\mathrm{d}t\Rightarrow\ln\left(\frac{v}{v_0}\right)=-\frac{k}{m}t=-t/\tau,\quad \tau=\frac{m}{k}$$: مقیاس زمان

$$\frac{v}{v_0}=e^{-t/\tau}\Rightarrow v=v_0e^{-t/\tau}$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t\to 0$ یا $t\ll\tau$

$$v\simeq v_0[1-t/\tau+\cdots]$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۱:

$$v = v_0 e^{-(t/\tau)}$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to \infty$ یا $t \gg \tau$

$$v \to v_0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 e^{-(k/m)t} \Rightarrow \mathrm{d}x = v_0 e^{-(k/m)t}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^x \mathrm{d}x = v_0 \int_0^t e^{-(t/\tau)}\mathrm{d}t$$

$$x = v_0\tau\left[1 - e^{-(t/\tau)}\right]$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $t \ll \tau$

$$x \simeq v_0\tau[1 - (1 - (t/\tau) + (t/\tau)^2/2\cdots)]$$

$$x \simeq v_0 t - (v_0/\tau)t^2/2\cdots$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

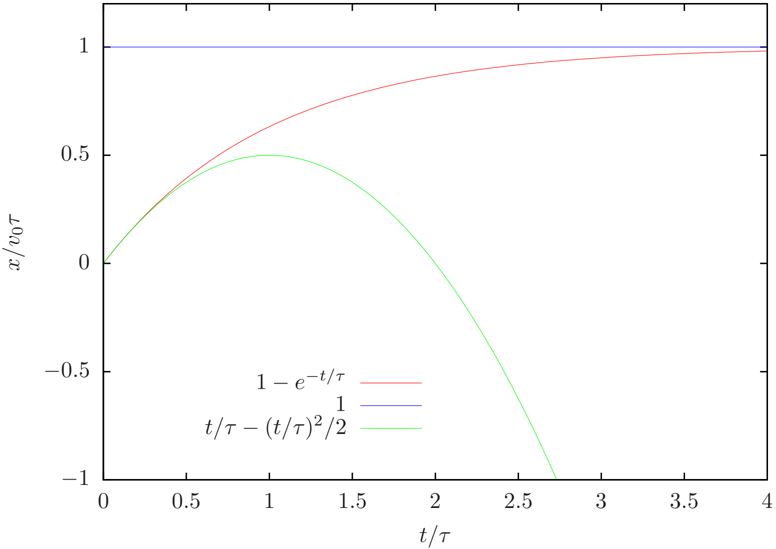
مثال ۱:

$$x = v_0\tau\left[1 - e^{-(t/\tau)}\right]$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to \infty$ یا $t \gg \tau$

$$x \to v_0\tau$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۲: سقوط جسمی در حالی که نیروی مقاومت متناسب با سرعت است.

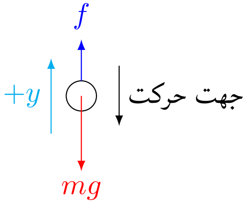
m

$v(t=0)=v_0$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg + f$$

در حال سقوط $f \propto v \Rightarrow f = -kv$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - kv$$



رابطه‌ی بالا را بصورت زیر باز آرایش می‌کنیم،

$$\frac{m\mathrm{d}v}{mg+kv} = -\mathrm{d}t$$

انتگرالگیری

$$m\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{mg+kv} = -\int_0^t \mathrm{d}t$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۲:

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{mg+kv}=-\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\frac{m}{k}\left[\ln(mg+kv)\right]_{v_0}^{v}=-t$$

$$\ln(mg+kv)-\ln(mg+kv_0)=-\frac{k}{m}t$$

$$\ln\left(\frac{mg+kv}{mg+kv_0}\right)=-\frac{k}{m}t,\qquad \tau=\frac{m}{k}$$: مقیاس زمان

$$\ln\left(\frac{mg+kv}{mg+kv_0}\right)=-t/\tau$$

$$\frac{mg+kv}{mg+kv_0}=e^{-t/\tau}\Rightarrow mg+kv=(mg+kv_0)e^{-t/\tau}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۲:

$$mg + kv = (mg + kv_0)e^{-t/\tau}$$

$$v = -\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_0\right) e^{-t/\tau}$$

مشخصه زمان : $\tau = \dfrac{m}{k}$,   مشخصه سرعت : $v_t = \dfrac{mg}{k}$

$$v = -v_t + (v_t + v_0)\, e^{-t/\tau}$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $t \ll \tau$

$$e^{-t/\tau} \simeq 1 - (t/\tau) + \cdots$$

$$v \simeq v_0 - (v_t + v_0)t/\tau + \cdots$$

مثال ۲:

$$mg + kv = (mg + kv_0)e^{-t/\tau}$$

$$v = -\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_0\right) e^{-t/\tau}$$

مشخصه زمان : $\tau = \frac{m}{k}$, مشخصه سرعت : $v_t = \frac{mg}{k}$

$$v = -v_t + (v_t + v_0)\, e^{-t/\tau}$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to \infty$ یا $t \gg \tau$

$$e^{-t/\tau} \to 0$$

سرعت مقیاس یا سرعت آستانه یا سرعت حد : $v_t = \frac{mg}{k}$, $v \to -v_t$,

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۲:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -v_t + (v_t + v_0)\, e^{-t/\tau}$$

ضرب $\mathrm{d}t$ به طرفین

$$\mathrm{d}y = \left[-v_t + (v_t + v_0)\, e^{-t/\tau}\right] \mathrm{d}t$$

انتگرالگیری

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t \left[-v_t + (v_t + v_0)\, e^{-t/\tau}\right] \mathrm{d}t$$

$$y = -v_t t - \left[(v_t + v_0)\tau e^{-t/\tau}\right]_0^t$$

$$y = -v_t t + (v_t + v_0)\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۲:

$$y = -v_t t + (v_t + v_0)\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $t \ll \tau$

$$y \simeq -v_t t + (v_t + v_0)\tau[1 - (1 - (t/\tau) + (1/2)(t/\tau)^2 + \cdots)]$$

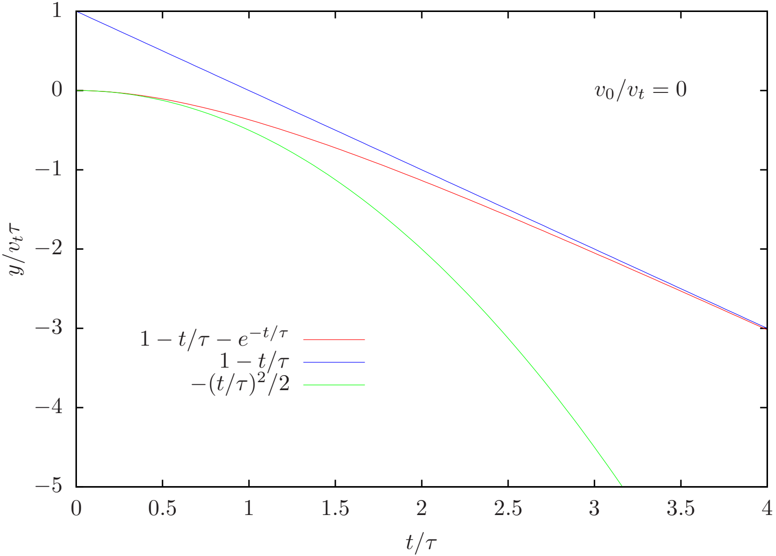
$$y \simeq -v_t t + (v_t + v_0)\tau[(t/\tau) - (1/2)(t/\tau)^2 + \cdots]$$

$$y \simeq v_0 t - \frac{1}{2}\frac{v_t + v_0}{\tau}t^2 + \cdots$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to \infty$ یا $t \gg \tau$

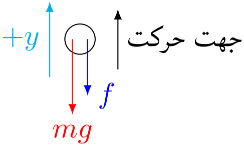
$$y \to -v_t t + (v_t + v_0)\tau$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۳: صعود جسمی در حالی که نیروی مقاومت متناسب با سرعت است.

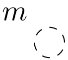


$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - f$$

در حال صعود $f \propto v \Rightarrow f = kv$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - kv$$

رابطه‌ی بالا را بصورت زیر باز آرایش می‌کنیم،



$v(t=0) = v_0$

$$\frac{m\mathrm{d}v}{mg + kv} = -\mathrm{d}t$$

انتگرالگیری

$$m\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{mg + kv} = -\int_0^t \mathrm{d}t$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۳:

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{mg+kv}=-\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$-\frac{m}{k}\left[\ln(mg+kv)\right]_{v_0}^{v}=-t$$

$$\ln(mg+kv)-\ln(mg+kv_0)=-\frac{k}{m}t$$

$$\ln\left(\frac{mg+kv}{mg+kv_0}\right)=-\frac{k}{m}t,\quad \tau=\frac{m}{k}$$: مقیاس زمان

$$\ln\left(\frac{mg+kv}{mg+kv_0}\right)=-t/\tau$$

$$\frac{mg+kv}{mg+kv_0}=e^{-t/\tau}\Rightarrow mg+kv=(mg+kv_0)e^{-t/\tau}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۳:

$$mg + kv = (mg + kv_0)e^{-t/\tau}$$

$$v = -\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_0\right) e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{m}{k}$$: مشخصه زمان

$$v = -g\tau + (g\tau + v_0)\, e^{-t/\tau}$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $t \ll \tau$

$$e^{-t/\tau} \simeq 1 - (t/\tau) + \cdots$$

$$v \simeq v_0 - (g\tau + v_0)t/\tau + \cdots$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۳:

$$mg + kv = (mg + kv_0)e^{-t/\tau}$$

$$v = -\frac{mg}{k} + \left(\frac{mg}{k} + v_0\right) e^{-t/\tau}$$

$$\text{مشخصه زمان} : \ \tau = \frac{m}{k}$$

$$v = -g\tau + (g\tau + v_0)\, e^{-t/\tau}$$

زمان اوج t_s

$$v = 0 \Rightarrow e^{-t_s/\tau} = \frac{g\tau}{g\tau + v_0} \Rightarrow t_s = \tau \ln\left(1 + \frac{v_0}{g\tau}\right)$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۳:

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -v_t + (v_t + v_0)\, e^{-t/\tau}$$

ضرب $\mathrm{d}t$ به طرفین

$$\mathrm{d}y = \left[-g\tau + (g\tau + v_0)\, e^{-t/\tau}\right] \mathrm{d}t$$

انتگرالگیری

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t \left[-g\tau + (g\tau + v_0)\, e^{-t/\tau}\right] \mathrm{d}t$$

$$y = -g\tau t - \left[(g\tau + v_0)\tau e^{-t/\tau}\right]_0^t$$

$$y = -g\tau t + (g\tau + v_0)\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

مثال ۳:

$$y = -g\tau t + (g\tau + v_0)\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $t \ll \tau$

$$y \simeq -g\tau t + (g\tau + v_0)\tau[1 - (1 - (t/\tau) + (1/2)(t/\tau)^2 + \cdots)]$$

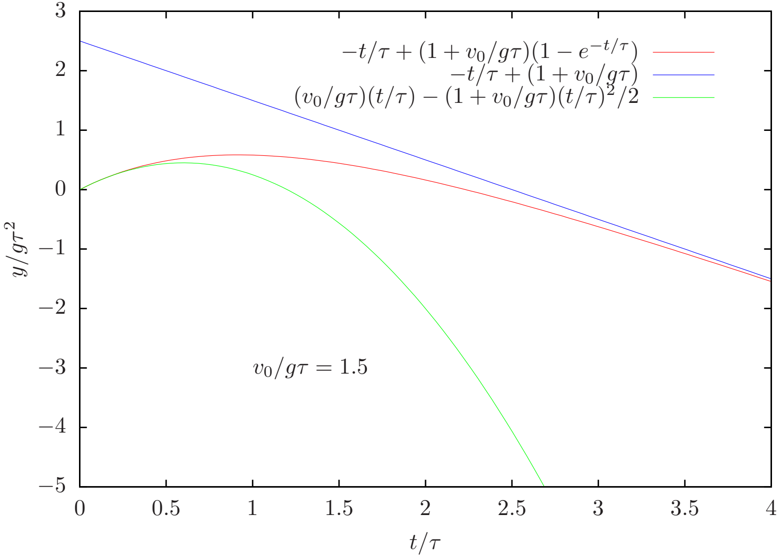
$$y \simeq -g\tau t + (g\tau + v_0)\tau[(t/\tau) - (1/2)(t/\tau)^2 + \cdots]$$

$$y \simeq v_0 t - \frac{1}{2}\left(g + \frac{v_0}{\tau}\right)t^2 + \cdots$$

ارتفاع اوج y_s

$$y_s = -g\tau t_s + (g\tau + v_0)\tau(1 - e^{-t_s/\tau}) = v_0\tau - g\tau^2 \ln\left(1 + \frac{v_0}{g\tau}\right)$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۴: سقوط جسمی در حالی که نیروی مقاومت متناسب با مجذور سرعت است.

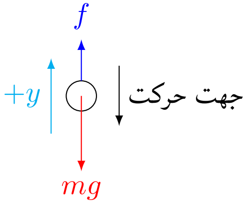
m

$v(t=0)=v_0$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg+f$$

در حال سقوط $f\propto v^2 \Rightarrow f=kv^2$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mg+kv^2$$



رابطه‌ی بالا را بصورت زیر باز آرایش می‌کنیم،

$$\frac{m\mathrm{d}v}{mg-kv^2}=-\mathrm{d}t$$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv^2}=-\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{1-(v/v_t)^2}=-g\mathrm{d}t$$

مقیاس سرعت : $v_t=\sqrt{\frac{mg}{k}}$

مثال ۴:

$$\frac{dv}{1-(v/v_t)^2} = -g dt, \qquad v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$: مقیاس سرعت

$$\int_0^v \frac{dv}{1-(v/v_t)^2} = -g\int_0^t dt$$

$$v_t\left[\tanh^{-1}\left(\frac{v}{v_t}\right)\right]_0^v = -gt \Rightarrow \tanh^{-1}\left(\frac{v}{v_t}\right) = -\frac{g}{v_t}t, \qquad \tau = \frac{v_t}{g}$$ مقیاس زمان

$$\tanh^{-1}\left(\frac{v}{v_t}\right) - \tanh^{-1}\left(\frac{v_0}{v_t}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$v = -v_t \tanh\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right), \quad c_0 = \tanh^{-1}\left(\frac{v_0}{v_t}\right)$$

مثال ۴:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v = -v_t \tanh\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right), \quad c_0 = \tanh^{-1}\left(\frac{v_0}{v_t}\right)$$

$$\mathrm{d}y = -v_t \tanh\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) \mathrm{d}t$$

$$\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y = -v_t \int_0^t \tanh\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) \mathrm{d}t$$

$$y = y_0 - v_t \tau \left[\ln\cosh\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) - \ln\cosh\left(c_0\right)\right]$$

برای $v_0 = 0$ و $y_0 = 0$

$$v = -v_t \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad y = -v_t \tau \ln\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

مثال ۴:

$$v = -v_t \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $t \ll \tau$

$$\tanh\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{t}{\tau} - \frac{1}{3}\left(\frac{t}{\tau}\right)^3 + \cdots$$

$$v \simeq -v_t\left(\frac{t}{\tau}\right) + \cdots = -gt + \cdots\,, \qquad \tau = \frac{v_t}{g}$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to \infty$ یا $t \gg \tau$

$$\tanh\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{e^{t/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}} \to 1$$

$$v \to -v_t$$

مثال ۴:

$$y=-v_t\tau\ln\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t\to 0$ یا $t\ll\tau$

$$\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+\cdots$$

$$\ln\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+\cdots$$

$$y\simeq-v_t\tau\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\tau}\right)^2+\cdots\right]=-\frac{1}{2}gt^2+\cdots,\quad \tau=\frac{v_t}{g}$$

مثال ۴:

$$y = -v_t \tau \ln \cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

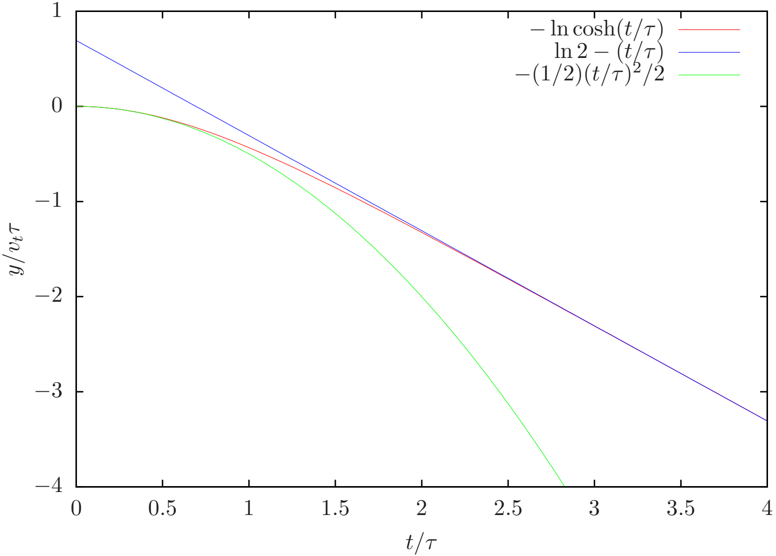
بررسی حالت حدی: وقتی $t \to \infty$ یا $t \gg \tau$

$$\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}}{2} \to \frac{e^{t/\tau}}{2}$$

$$\ln \cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) \to \frac{t}{\tau} - \ln 2$$

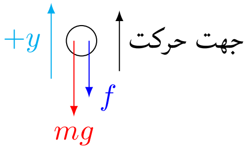
$$y \to v_t \tau \left(\ln 2 - \frac{t}{\tau}\right)$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۵: صعود جسمی در حالی که نیروی مقاومت متناسب با مجذور سرعت است.



$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - f$$

در حال صعود $f \propto v^2 \Rightarrow f = kv^2$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - kv^2$$

رابطه‌ی بالا را بصورت زیر باز آرایش می‌کنیم،

m

$v(t=0) = v_0$

$$\frac{m\mathrm{d}v}{mg + kv^2} = -\mathrm{d}t$$

مقیاس سرعت : $v_t = \sqrt{\dfrac{mg}{k}}$

$$m\frac{\mathrm{d}v}{mg + kv^2} = -\mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{1 + (v/v_t)^2} = -g\mathrm{d}t$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت

مثال ۵:

$$\frac{\mathrm{d}v}{1+(v/v_t)^2} = -g\mathrm{d}t, \qquad v_t = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$: مقیاس سرعت

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{1+(v/v_t)^2} = -g\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$v_t\left[\tan^{-1}\left(\frac{v}{v_t}\right)\right]_0^v = -gt, \qquad \tau = \frac{v_t}{g}$$ مقیاس زمان

$$\tan^{-1}\left(\frac{v}{v_t}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{v_t}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$v = -v_t \tan\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right), \quad c_0 = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{v_t}\right)$$

مثال ۵:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v = -v_t \tan\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right), \quad c_0 = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{v_t}\right)$$

$$\mathrm{d}y = -v_t \tan\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) \mathrm{d}t$$

$$\int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y = -v_t \int_0^t \tan\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) \mathrm{d}t$$

$$y = y_0 + v_t \tau \left[\ln\cos\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) - \ln\cos\left(c_0\right)\right], \quad \cos(c_0) = \frac{v_t}{\sqrt{v_0^2 + v_t^2}}$$

برای $y_0 = 0$

$$v = -v_t \tan\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right), \quad y = v_t \tau \left[\ln\cos\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) - \ln\cos\left(c_0\right)\right]$$

مثال ۵:

$$v = -v_t \tan\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right)$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $t \ll \tau$

$$\tan\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) = -\tan(c_0) + (1 + \tan^2(c_0))\frac{t}{\tau} + \cdots$$

$$v \simeq v_t \tan(c_0) - v_t(1 + \tan^2(c_0))\frac{t}{\tau} + \cdots$$

زمان اوج

$$v = 0 \Rightarrow t_{\text{اوج}} = c_0\tau = \tau \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{v_t}\right)$$

مثال ۵:

$$y = v_t\tau\left[\ln\cos\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) - \ln\cos\left(c_0\right)\right]$$

بررسی حالت حدی: وقتی $t \to 0$ یا $t \ll \tau$

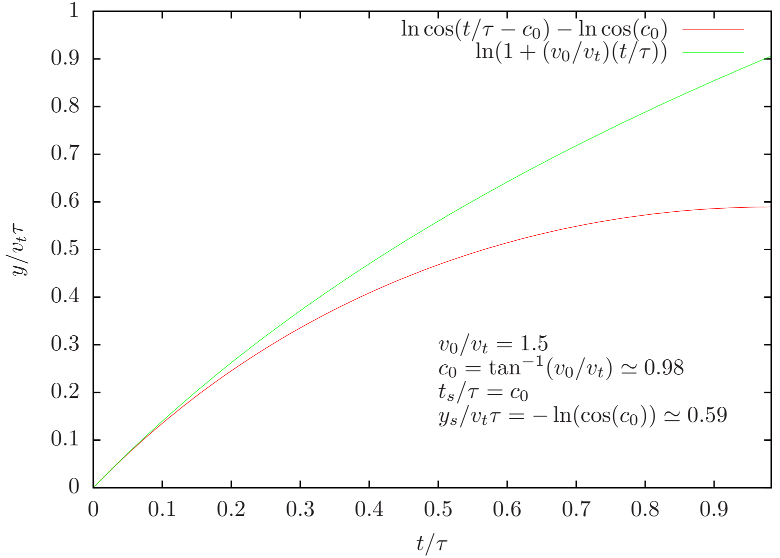
$$\cos\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) = \cos(c_0) + \sin(c_0)\frac{t}{\tau} + \cdots$$

$$\ln\cos\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) = \ln\cos(c_0) + \ln\left(1 + \tan(c_0)\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\ln\cos\left(\frac{t}{\tau} - c_0\right) = \ln\cos(c_0) + \ln\left(1 + \frac{v_0}{v_t}\frac{t}{\tau}\right)$$

$$y \simeq v_t\tau\ln\left(1 + \frac{v_0}{v_t}\frac{t}{\tau}\right)$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع سرعت



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

موارد زیادی وجود دارد که نیرو می‌تواند تابع مکان باشد، که نام آشناترین آنها عبارتند از

- نیروی گرانشی

$$F(x) = -\frac{GMm}{x^2}$$

- نیروی کولنی

$$F(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{x^2}$$

- نیروی فنر

$$F(x) = -kx$$

در اینجا قصد داریم **روش انرژی** را برای بررسی نیروهای وابسته به زمان پیش بگیریم. قانون دوم نیوتن بصورت زیر داده می‌شود،

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(x)$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

قانون دوم نیوتن

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(x)$$

استفاده از قاعده زنجیری

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x)$$

در اینجا $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v$ بنابراین

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = F(x)$$

طرفین را در $\mathrm{d}x$ ضرب کرده

$$mv\mathrm{d}v = F(x)\mathrm{d}x$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

$$mv\mathrm{d}v = F(x)\mathrm{d}x$$

با انتگرالگیر از طرفین داریم

$$m\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

$$V(x) - \int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

کمیت $K = \frac{1}{2}mv^2$ انرژی جنبشی نام دارد. کار انجام شده بوسیله نیروی $F(x)$ بصورت زیر داده می‌شود

$$W_F = \int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

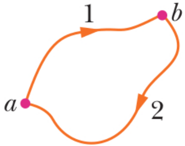
قضیه کار و انرژی: تغییرات انرژی جنبشی ذره برابر با کار نیروی وارد بر ذره می‌باشد،

$$\Delta K = K - K_0 = W_F$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

نیروهای تابع مکان در یک بعد معمولا پایستار هستند. دو راه تشخیص نیروی پایستار:

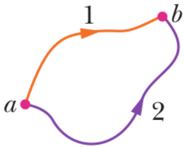
- کار انجام شده بوسیله‌ی نیروی $F(x)$ در یک مسیر بسته (یا یک مسیر رفت و برگشت) برابر صفر باشد.



$$W_{\text{کل}} = W^{(1)}_{a\to b} + W^{(2)}_{b\to a} = 0$$

$$W_{\text{کل}} = \oint F(x)\mathrm{d}x = 0$$

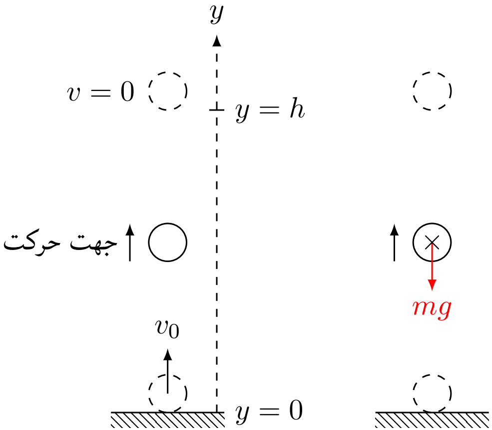
- کار انجام شده بوسیله‌ی نیروی $F(x)$ به مسیر حرکت ذره بستگی **نداشته** باشد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر حرکت بستگی **داشته** باشد.



$$W^{(1)}_{a\to b} = W^{(2)}_{a\to b}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

کار نیروی گرانش در یک مسیر رفت:



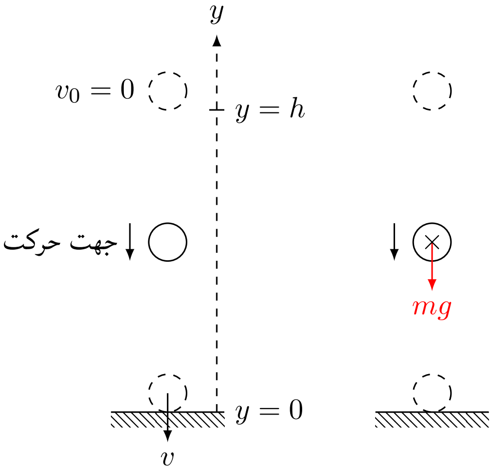
$$W_g = W_{\text{گرانش}} = -\int_0^h mg\mathrm{d}y$$

$$W_g = -mg[y]_0^h = -mgh$$

$$W_g = -mgh$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

کار نیروی گرانش در مسیر برگشت:



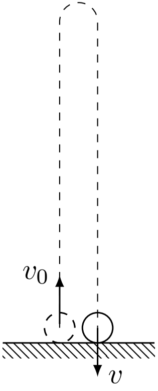
$$W_g = W_{\text{گرانش}} = -\int_h^0 mg\,dy$$

$$W_g = -mg[y]_h^0 = mgh$$

$$W_g = mgh$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

کار نیروی گرانش در یک مسیر رفت و برگشت:



در مسیر رفت : $W_g^{(1)} = -mgh$

در مسیر برگشت : $W_g^{(2)} = mgh$

$$W_g^{\text{کل}} = \left(-\int_0^h mg\mathrm{d}y\right) + \left(-\int_h^0 mg\mathrm{d}y\right)$$

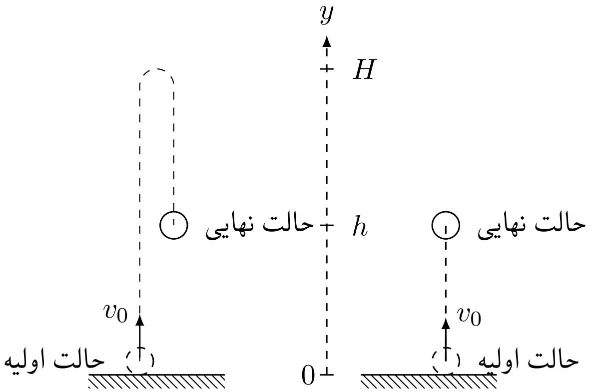
$$W_g^{\text{کل}} = W_g^{(1)} + W_g^{(2)}$$

$$W_g^{\text{کل}} = -mgh + mgh = 0$$

$$W_g^{\text{کل}} = -\oint mg\mathrm{d}y = 0$$

نتیجه‌ی اول: کار نیروی گرانش در یک مسیر رفت و برگشت برابر صفر است. در این شرایط **نیروی گرانش را یک نیروی پایستار** می‌نامند.

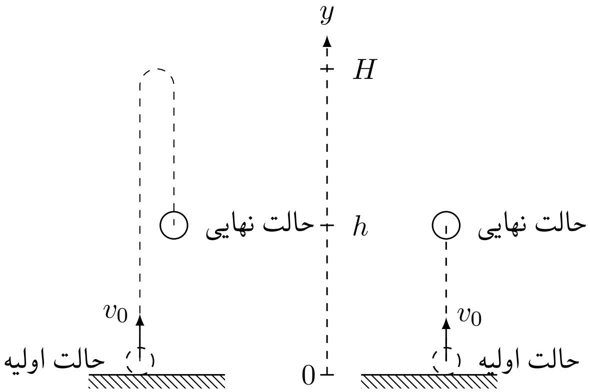
دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان



$$W_g^{(1)} = -\int_0^H mg\mathrm{d}y - \int_H^h mg\mathrm{d}y = -mg[y]_0^H - mg[y]_H^h$$

$$W_g^{(1)} = (-mgH) + (-mgh + mgH) = -mgh$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

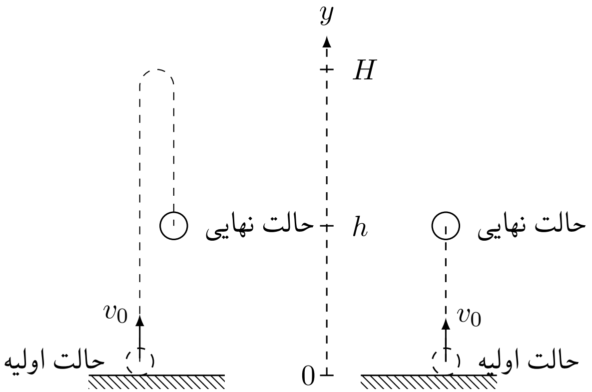


$$W_g^{(2)} = -\int_0^h mg\mathrm{d}y = -mg[y]_0^h$$

$$W_g^{(2)} = -mgh$$

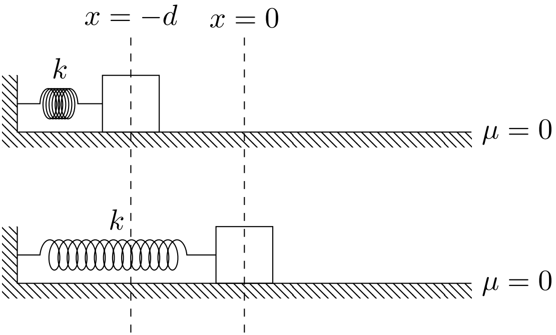
$$W_g^{(1)} = W_g^{(2)} = -mgh$$

نتیجه‌ی دوم: کار نیروی گرانش به مسیر بستگی ندارد و فقط به حالتهای اولیه و نهایی مسیر بستگی دارد. در این شرایط **نیروی گرانش را یک نیروی پایستار** می‌نامند.



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

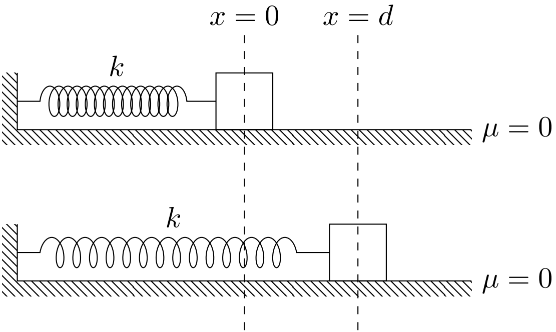
کار نیروی فنر



$$W_{\text{فنر}} = W_s^{(1)} = -k\int_{-d}^{0} x\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-d}^{0} = \frac{1}{2}kd^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

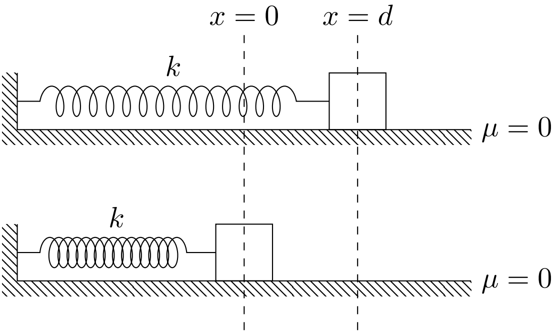
کار نیروی فنر



$$W^{(2)}_{\text{فنر}} = W^{(2)}_s = -k\int_0^d x\,\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^d = -\frac{1}{2}kd^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

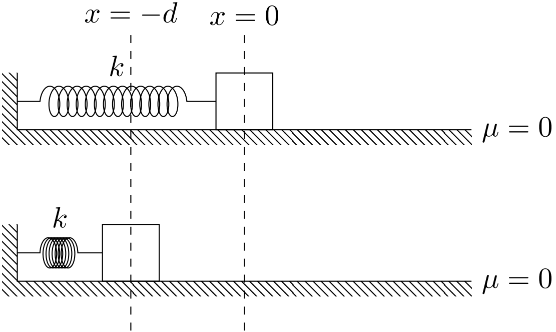
کار نیروی فنر



$$W^{(3)}_{\text{فنر}} = W^{(3)}_{s} = -k \int_{d}^{0} x \mathrm{d}x = -k \left[\frac{1}{2} x^{2}\right]_{d}^{0} = \frac{1}{2} k d^{2}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

کار نیروی فنر



$$W_{\text{فنر}} = W_s^{(4)} = -k\int_0^{-d} x\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{-d} = -\frac{1}{2}kd^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

کار نیروی فنر در یک مسیر رفت و برگشت برابر صفر است.

$$W_s^{(1)} = \frac{1}{2}kd^2$$
$$W_s^{(2)} = -\frac{1}{2}kd^2$$
$$W_s^{(3)} = \frac{1}{2}kd^2$$
$$W_s^{(4)} = -\frac{1}{2}kd^2$$

$$W_{\text{کل}} = -k\int_{-d}^{0} x\mathrm{d}x - k\int_{0}^{d} x\mathrm{d}x - k\int_{d}^{0} x\mathrm{d}x - k\int_{0}^{-d} x\mathrm{d}x$$

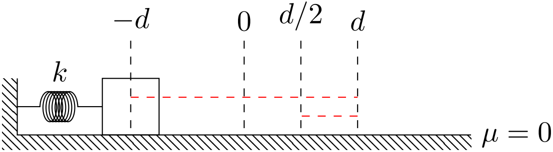
$$W_{\text{کل}} = W_s^{(1)} + W_s^{(2)} + W_s^{(3)} + W_s^{(4)}$$

$$W_{\text{کل}} = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

کار نیروی فنر مستقل از مسیر است.

– مسیر اول:



$$W_s^{\text{مسیر اول}} = -k\int_{-d}^{d} x\mathrm{d}x - k\int_{d}^{d/2} x\mathrm{d}x$$

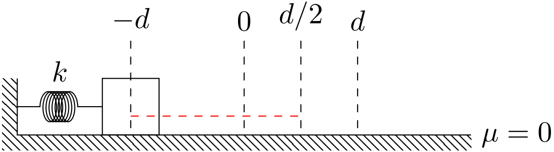
$$W_s^{\text{مسیر اول}} = 0 - \frac{1}{2}k[d^2/4 - d^2]$$

$$W_s^{\text{مسیر اول}} = \frac{3}{8}kd^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

کار نیروی فنر مستقل از مسیر است.

- مسیر دوم:



$$W_s^{\text{مسیر دوم}} = -k\int_{-d}^{d/2} x\mathrm{d}x$$

$$W_s^{\text{مسیر دوم}} = -\frac{1}{2}k[d^2/4 - d^2]$$

$$W_s^{\text{مسیر دوم}} = \frac{3}{8}kd^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

– اگر ذره‌ای تحت تاثیر نیروی پایستار $F(x)$ حرکت کند، کار انجام شده بین دو نقطه‌ی مسیر حرکت بوسیله تابع تغییرات انرژی پتانسیل بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$V(x) - V(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

– شکل دیفرانسیلی رابطه‌ی بالا بصورت زیر داده می‌شود،

$$\mathrm{d}V = -F(x)\mathrm{d}x$$

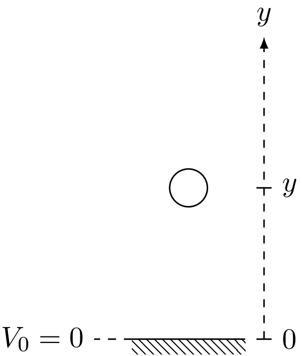
– بدین‌ترتیب در صورت در اختیار داشتن تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ می‌توان نیروی را بصورت زیر بدست آورد،

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

انرژی پتانسیل نیروی وزن: حالت اولیه در تغییرات انرژی پتانسیل بصورت مرجع پتانسیل در نظر گرفته می‌شود که معمولا مقداری برابر صفر برای آن درنظر می‌گیرند،

$$V_0 = 0$$



$$V - V_0 = -\left(-mg\int_0^y \mathrm{d}y\right)$$

$$V - 0 = mg[y]_0^y$$

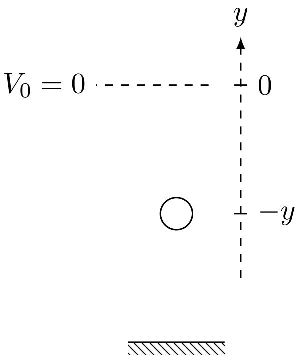
$$V(y) = mgy$$

وقتی ذره در ارتفاع y بالای مرجع پتانسیل قرار داشته باشد، انرژي پتانسیل برابر mgy است.

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

انرژی پتانسیل نیروی وزن: حالت اولیه در تغییرات انرژی پتانسیل بصورت مرجع پتانسیل در نظر گرفته می‌شود که معمولا مقداری برابر صفر برای آن درنظر می‌گیرند،

$$V_0 = 0$$



$$V - V_0 = -\left(-mg\int_0^{-y} \mathrm{d}y\right)$$

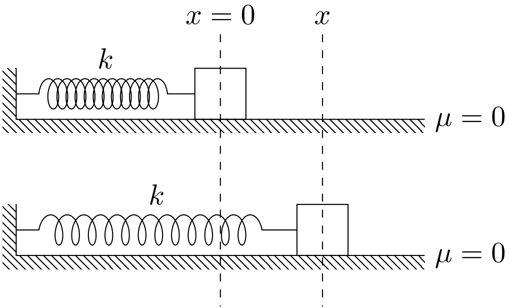
$$V - 0 = mg[y]_0^{-y}$$

$$V(y) = -mgy$$

وقتی ذره در ارتفاع y پایین مرجع پتانسیل قرار داشته باشد، انرژي پتانسیل برابر $-mgy$ است.

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

انرژی پتانسیل نیروی فنر



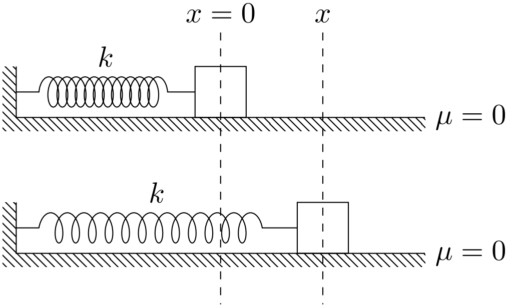
$$V(x)-V(x_0)=-\int_{x_0}^{x}F(x)\mathrm{d}x$$

مرجع پتانسیل را در طول طبیعی فنر انتخاب می‌کنیم، $V(0)=0$

$$V(x)-0=-\int_0^x(-kx)\mathrm{d}x \Rightarrow \boxed{V(x)=\frac{1}{2}kx^2}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

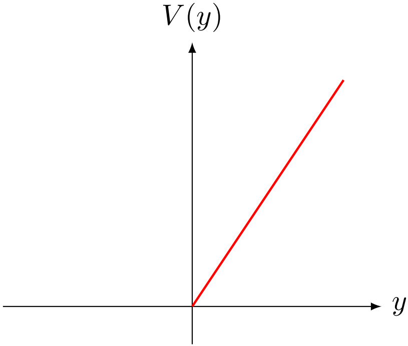
انرژی پتانسیل نیروی فنر



$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2$$

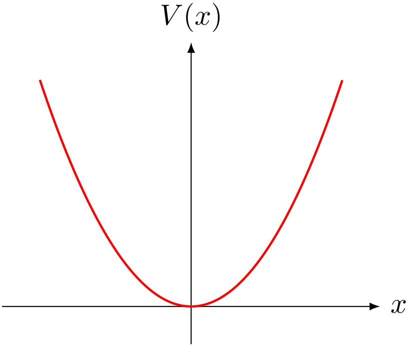
$$F=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=-kx$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان



$$V_0 = V(y=0) = 0$$

$$V(y) = mgy$$



$$V_0 = V(x=0) = 0$$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

- قضیه کار و انرژی

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

- تغییرات انرژی پتانسیل،

$$V(x) - V(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

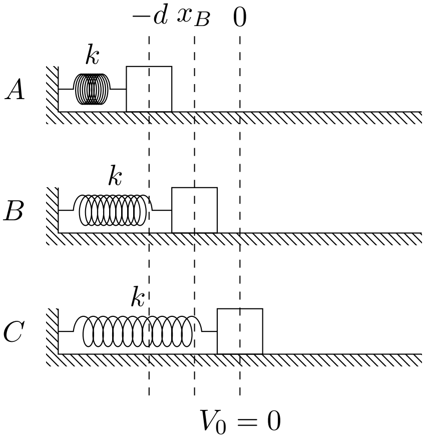
و

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -(V(x) - V(x_0))$$

- انرژی کل ذره و پایستگی انرژی،

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}mv_0^2 + V(x_0) = E = \text{ثابت}}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان



$$A:\ \ E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

$$E_A = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

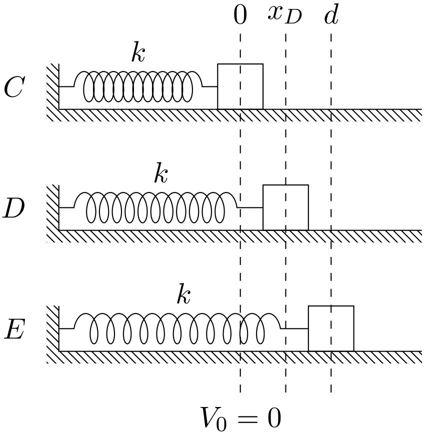
$$B:\ \ E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2$$

$$C:\ \ E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}kx_C^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + 0$$

$$E_A = E_B = E_C = E$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان



$$C: \; E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}kx_C^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + 0$$

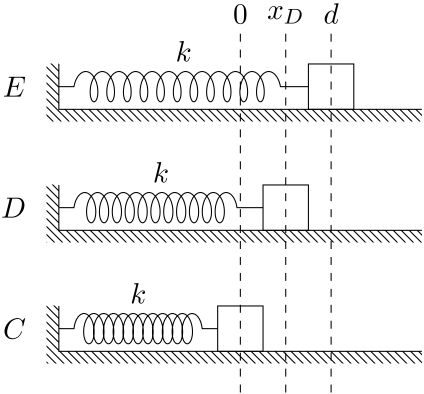
$$D: \; E_D = \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}kx_D^2$$

$$E: \; E_E = \frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2}kx_E^2$$

$$E_E = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$E_C = E_D = E_E = E$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان



$$V_0 = 0$$

$$E_E = E_D = E_C = E$$

$$E: \quad E_E = \frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2}kx_E^2$$

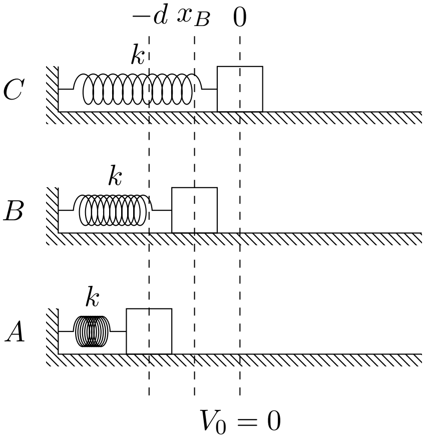
$$E_E = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$D: \quad E_D = \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}kx_D^2$$

$$C: \quad E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}kx_C^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + 0$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان



$$C: \quad E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}kx_C^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + 0$$

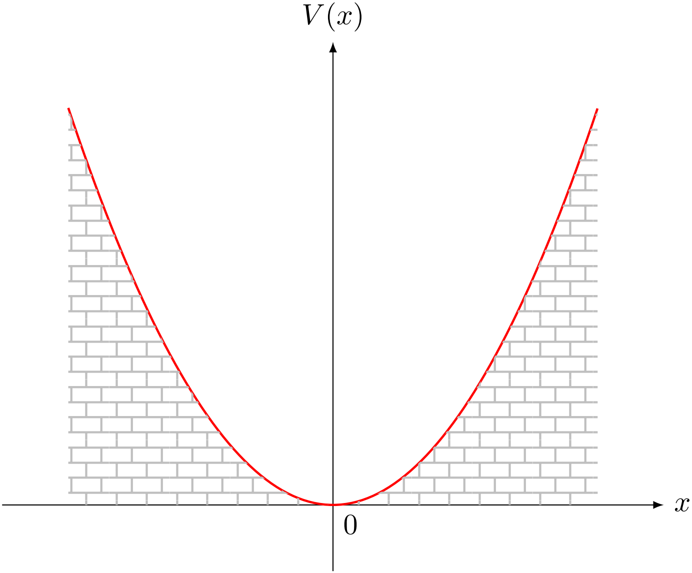
$$B: \quad E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2$$

$$A: \quad E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

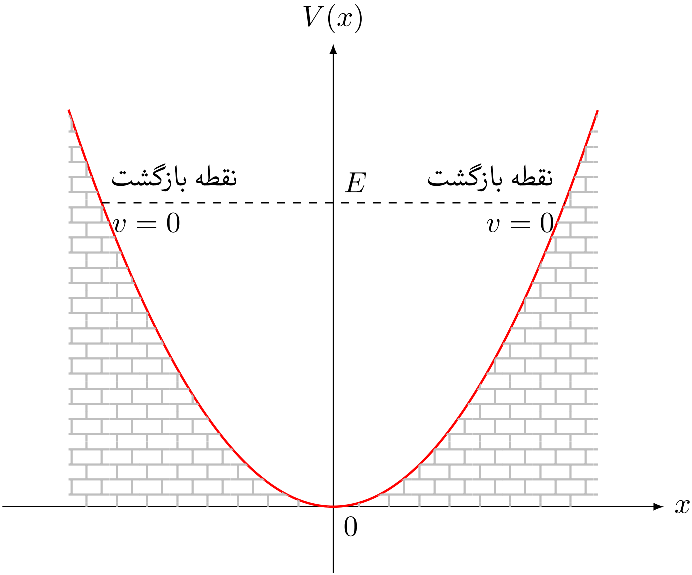
$$E_A = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$E_C = E_B = E_A = E$$

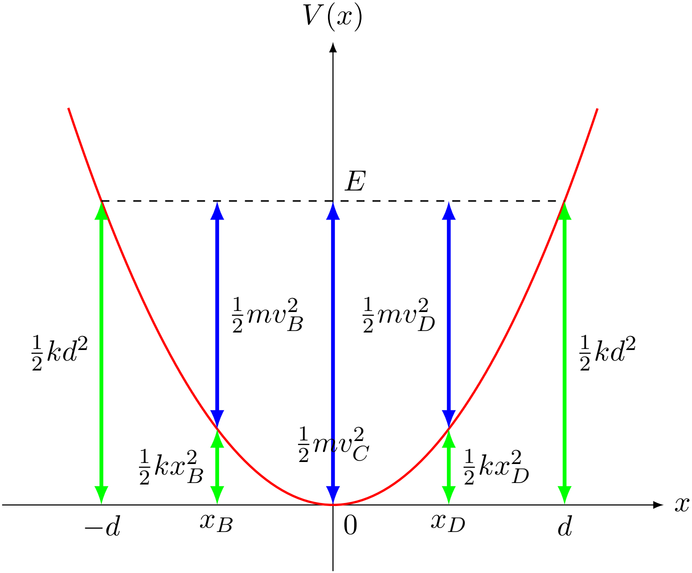
دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

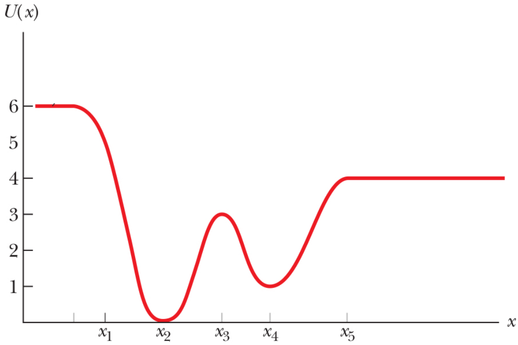


دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

تحلیل تابع انرژی پتانسیل

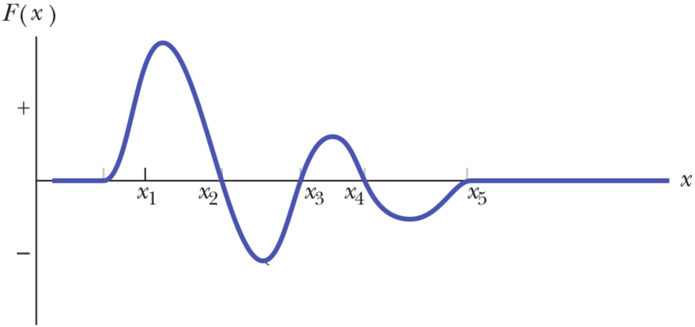


نقاط اکسترمم x_2 و x_4 (مینیمم) و x_3 (ماکزیمم) از برابر صفر قرار دادن مشتق تابع انرژي پتانسیل $V(x)$ نسبت به x بدست می‌آید، یعنی

$$F = 0, \quad \text{یا} \quad \frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = 0$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

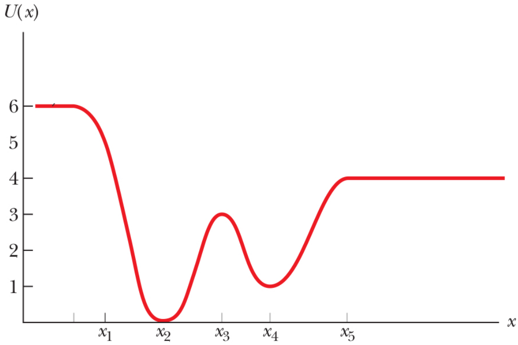
تحلیل تابع انرژی پتانسیل



نقاط اکسترمم x_2 و x_4 (مینیمم) و x_3 (ماکزیمم) از برابر صفر قرار دادن مشتق تابع انرژي پتانسیل $V(x)$ نسبت به x بدست می‌آید، یعنی

$$F = 0, \quad \text{یا} \quad \frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = 0$$

تحلیل تابع انرژی پتانسیل



تعیین علامت نقطه ماکزیمم در x_3

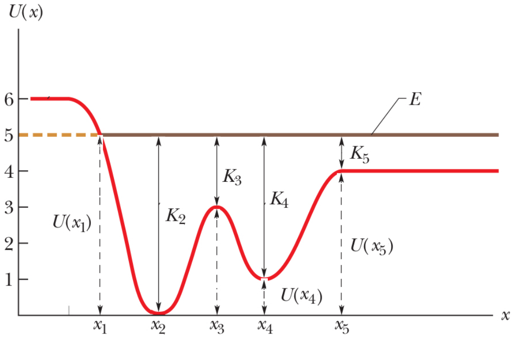
$$\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2} < 0$$

تعیین علامت نقاط مینیمم در x_2 و x_4

$$\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2} > 0$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

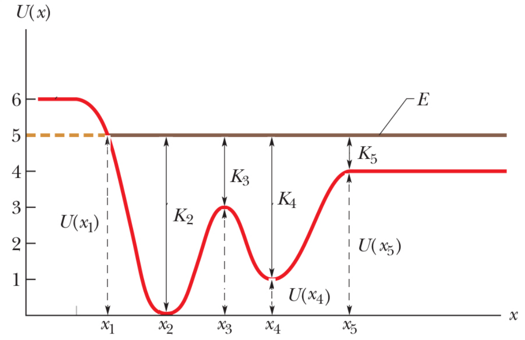
تحلیل تابع انرژی پتانسیل



ذره‌ای با انرژي E در خلاف جهت محور x به نمودار پتانسیل را در x_1 برخورد می‌کند. نقطه‌ی x_1 بعنوان نقطه بازگشت شناخته می‌شود که در آن انرژی جنبشی یا سرعت ذره صفر می‌شود. ذره پس از برخورد به دیوار انرژی پتانسیل در جهت محور x باز می‌گردد. در نقطه‌ی x_1، مقدار انرژی ذره برابر با انرژی پتانسیل می‌شود، یعنی

$$E = V(x_1)$$

تحلیل تابع انرژی پتانسیل



$$E = V(x_1)$$

$$E = K_2$$

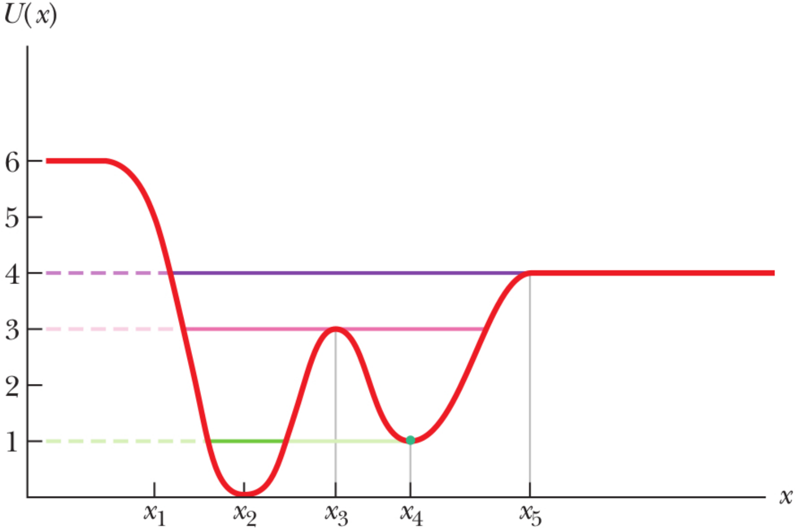
$$E = K_3 + V(x_3)$$

$$E = K_4 + V(x_4)$$

$$E = K_5 + V(x_5)$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

تحلیل تابع انرژی پتانسیل



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

- پایستگی انرژي برای فنر

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \text{ثابت}$$

- برای یک پتانسیل دلخواه

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E = \text{ثابت}$$

اگر برای پتانسیل $V(x)$، نقطه‌ی x_0 یک نقطه تعادل پایدار باشد، یعنی

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0} = 0, \qquad k = \left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_0} > 0$$

می‌توان پتانسیل $V(x)$ را حول نقطه‌ی x_0 بسط تیلور داد،

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0}(x-x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0}(x-x_0)^2 + \cdots$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

- پایستگی انرژي برای فنر

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \text{ثابت}$$

- برای یک پتانسیل دلخواه

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E = \text{ثابت}$$

اگر برای پتانسیل $V(x)$، نقطه‌ی x_0 یک نقطه تعادل پایدار باشد، یعنی

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} = 0, \qquad k = \left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0} > 0$$

می‌توان پتانسیل $V(x)$ را حول نقطه‌ی x_0 بسط تیلور داد،

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0}(x - x_0)^2 + \cdots$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

– پایستگی انرژي برای فنر

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \text{ثابت}$$

– برای یک پتانسیل دلخواه

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E = \text{ثابت}$$

اگر برای پتانسیل $V(x)$، نقطه‌ی x_0 یک نقطه تعادل پایدار باشد، یعنی

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} = 0, \qquad k = \left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0} > 0$$

می‌توان پتانسیل $V(x)$ را حول نقطه‌ی x_0 بسط تیلور داد،

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \cdots$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

– پایستگی انرژي برای فنر

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \text{ثابت}$$

فرکانس نوسانات

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

– برای یک پتانسیل دلخواه حول نقطه‌ی تعادل x_0

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2 = E - V(x_0) = \text{ثابت}$$

فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه‌ی تعادل x_0

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0}}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

مثال ۱: ذره‌ای به جرم m در چاه پتانسیل زیر حرکت می کند،

$$V(x) = -V_0 \frac{a(a^2+x^2)}{8a^2+x^4}$$

الف) $V(x)$ و $F(x)$ را رسم کنید. ب) درباره‌ی حرکات ممکن بحث کنید. تمام نقاط تعادل را معین کنید و فرکانس نوسانهای کوچک حول هر یک از نقاط تعادل که پایدارند را بدست آورید.

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

$$F(x) = V_0 \frac{2a^2x(8a^4-2a^2x^2-x^4)}{(8a^4+x^4)^2}$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

مثال ۱:

$$V(x) = -V_0 \frac{a^2(a^2+x^2)}{8a^4+x^4}$$

انرژي پتانسیل در نمایش بی‌بعد:

$$V(x)/V_0 = -\frac{1+(x/a)^2}{8+(x/a)^4}$$

$$F(x) = V_0 \frac{2a^2x(8a^4-2a^2x^2-x^4)}{(8a^4+x^4)^2}$$

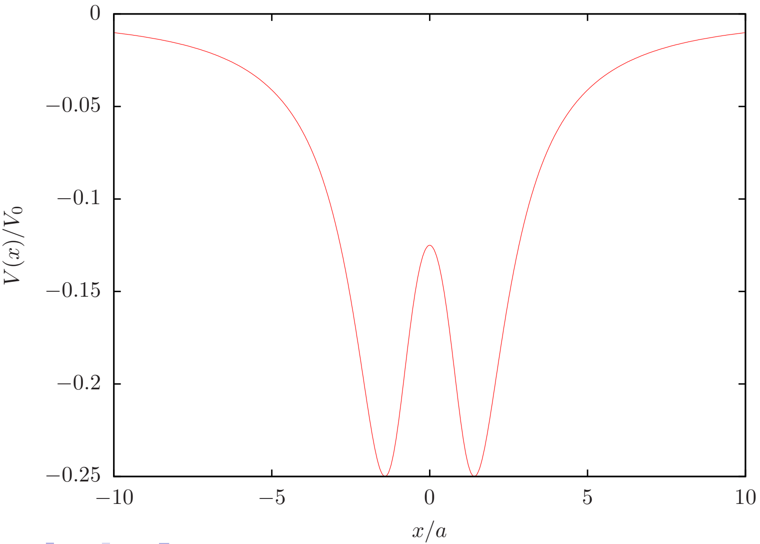
نیرو در نمایش بی‌بعد:

$$F(x)/(V_0/a) = \frac{2(x/a)(8-2(x/a)^2-(x/a)^4)}{(8+(x/a)^4)^2}$$

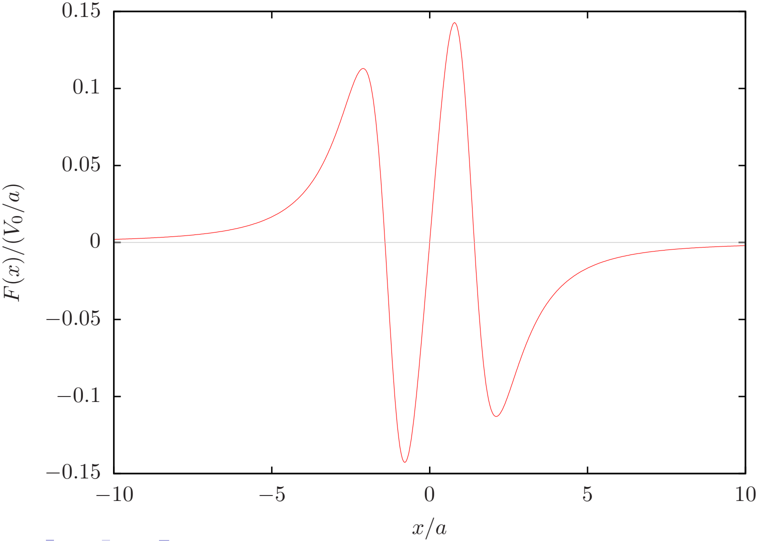
در اینجا V_0 بعد انرژی و V_0/a بعد نیرو دارد.

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

مثال ۱:



مثال ۱:



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

مثال ۱:

- انرژی پتانسیل سه نقطه تعادل در $x_1 = 0$، $x_2 = \sqrt{2}a$ و $x_3 = -\sqrt{2}a$ دارد.
- با توجه منحنی انرژی پتانسیل x_1 نقطه تعادل ناپایدار و x_2 نقطه تعادل پایدار می‌باشد.

$$k = \frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{V_0}{a^2}\frac{2(64 - 48(\frac{x}{a})^2 - 96(\frac{x}{a})^4 + 10(\frac{x}{a})^6 + 3(\frac{x}{a})^8)}{(8 + (\frac{x}{a})^4)^3}$$

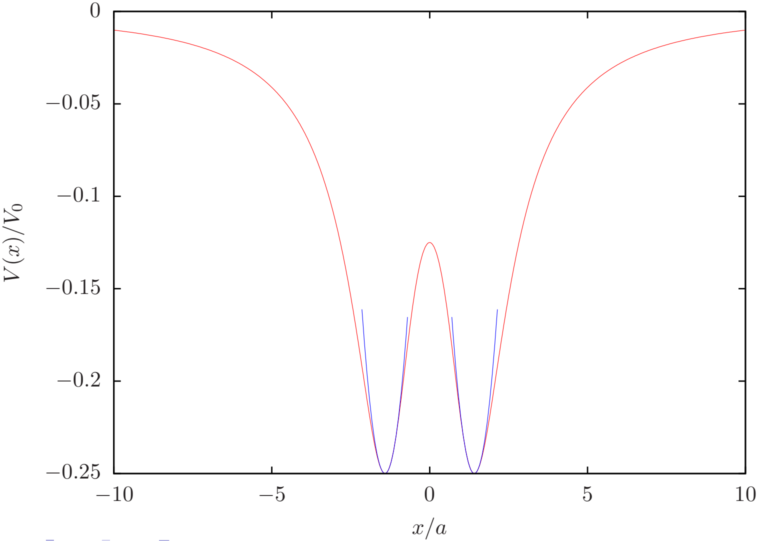
- نقطه x_1 دارای تعادل ناپایدار است، چون $k = -\frac{V_0}{4a^2} < 0$
- نقاط x_2 و x_3 دارای تعادل پایدارند، چون $k = \frac{V_0}{3a^2} > 0$.
- فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه تعادل x_2 برابر

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{V_0}{3ma^2}}$$

$$V_\pm(x) = -\frac{1}{4}V_0 + \frac{1}{2}\frac{V_0}{3a^2}(x \mp \sqrt{2}a)^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

مثال ۱:



دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

- پایستگی انرژي

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = E = \text{ثابت}$$

بدست آورد سرعت

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$$

رابطه بالا به ازای $E \geq V(x)$ برقرار است. بازای نقطه‌ای x_0 که $E = V(x_0)$ سرعت صفر می‌شود و نقطه‌ی x_0 را **نقطه بازگشت** حرکت می‌نامند.

فرم دیفرانسیلی و انتگرالگیری از آن

$$\pm\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = \mathrm{d}t \Rightarrow \pm\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = t - t_0$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

پتانسیل فنر

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - kx^2/2]}} = t$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2E}{m}\left[1 - (x/\sqrt{2E/k})^2\right]}} = t$$

تغییر متغیر

$$\frac{1}{\sqrt{2E/k}}x = \sin\theta, \qquad \frac{1}{\sqrt{2E/k}}\mathrm{d}x = \cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\sqrt{\frac{m}{2E}}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\sqrt{2E/k}\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = t \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k}}\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = t$$

پتانسیل فنر

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-kx^2/2]}} = t$$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta \mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = t \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{d}\theta = \omega t$$

که $\omega = \sqrt{k/m}$ فرکانس نوسانات طبیعی فنر است.

$$\theta - \theta_0 = \omega t \Rightarrow \theta = \theta_0 + \omega t$$

$$\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right) = \omega t + \theta_0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin(\omega t + \theta_0)$$

دامنه حرکت A برابر است با

$$\sqrt{\frac{2E}{k}} = A \Rightarrow E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

دینامیک ذره در یک بعد: نیروی اعمالی تابع مکان

پتانسیل فنر

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - kx^2/2]}} = t$$

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \theta_0) = A \sin(\omega t + \theta_0)$$

که $\omega = \sqrt{k/m}$ فرکانس نوسانات طبیعی فنر است و رابطه دامنه حرکت A و انرژی E بصورت زیر داده می‌شود،

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}, \qquad E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \text{ثابت}$$

مقدار x_0 برابر است با

$$x_0 = A \sin\theta_0$$

که برای تعیین مقدار θ_0 نیاز به سرعت اولیه ذره است.