مکانیک تحلیلی

درسنامه سوم–نوسانگرها

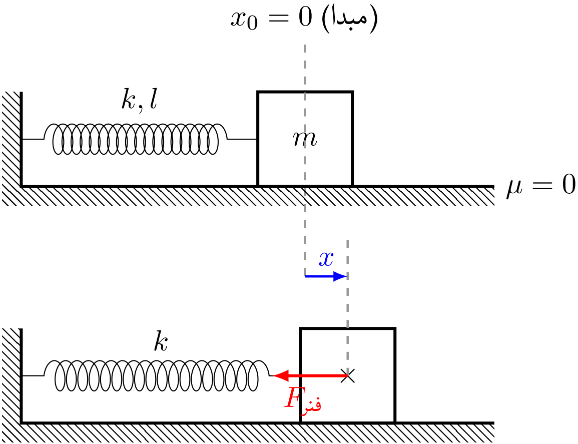
محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

نوسانگرهای هماهنگ

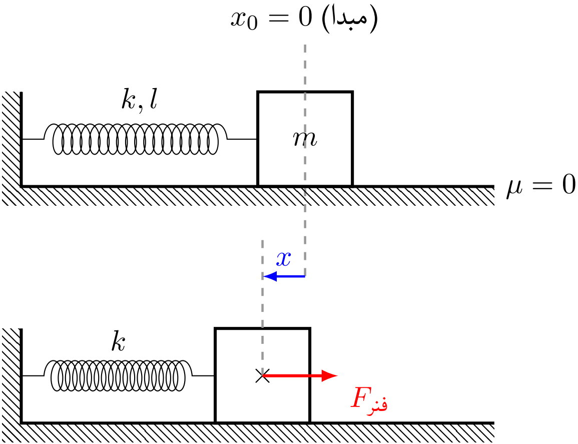
جرم و فنر



$$F_{\text{فنر}} = F_{\text{هوک}} = -kx, \quad [k] = N/m :$$ ثابت فنر

نوسانگرهای هماهنگ

جرم و فنر

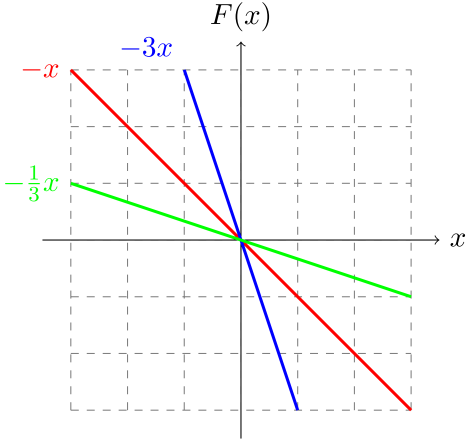


$$F_{\text{فنر}} = F_{\text{هوک}} = -kx$$

نوسانگرهای هماهنگ

جرم و فنر

$$F(x) = -kx$$



نوسانگرهای هماهنگ

معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر (از طریق انرژی)

$$F_{\text{فنر}} = F_{\text{هوک}} = -kx, \quad [k] = N/m : \text{ ثابت فنر}$$

$$V(x) - V(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x = k\int_{x_0}^{x} x\mathrm{d}x$$

مبدا و مرجع انرژي پتانسيل را در وضعیتی قرار می‌دهیم که فنر طول طبیعی دارد، یعنی

$$V(x_0) = V(0) = 0$$

$$V(x) - 0 = -k\int_{0}^{x} x\mathrm{d}x$$

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

انرژي سيستم جرم و فنر

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{ثابت}$$

نوسانگرهای هماهنگ

معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر (از طریق انرژی)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{ثابت}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

اگر $\dot{x}$ برابر صفر باشد، اصلا جرم حرکتی نخواهد داشت. بنابراین با فرض $\dot{x} \neq 0$ داریم

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

که معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر نامیده می‌شود. فرکانس هماهنگ یا طبیعی جرم و فنر بصورت

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

بررسی شود، در این صورت معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر بصورت زیر نیز نوشته می‌شود،

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

نوسانگرهای هماهنگ

معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر (از طریق قانون دوم نیوتن)

$$F_{\text{فنر}} = F_{\text{هوک}} = -kx, \quad [k] = N/m : \text{ ثابت فنر}$$

$$\boxed{W_{\text{فنر}}(x) = -\frac{1}{2}kx^2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0$$

$$\xrightarrow{\div m} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

معادله دیفرانسیلی حرکت $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{یا} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

نوسانگرهای هماهنگ

حل معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر با شرایط اولیه داده شده

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

بطورکلی معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر یک معادله دیفرانسیل **مرتبه دوم** با **ضرایب ثابت** است. در این چنین معادله دیفرانسیلی

$$x(t) = Ae^{rt}$$

جواب پیشنهادی می‌باشد. A از شرایط اولیه مسئله بدست می‌آید. برای پیدا کردن r در جواب پیشنهادی، از آن دو بار مشتق نسبت به زمان گرفته می‌شود،

$$\dot{x} = Are^{rt}$$

$$\ddot{x} = Ar^2e^{rt}$$

حالا $x = Ae^{rt}$ و $\ddot{x} = Ar^2e^{rt}$ را در داخل معادله دیفرانسیل

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

قرار داده و معادله‌ی مفسر (یا شاخص) زیر بدست می‌آید،

$$r^2 + \omega_0^2 = 0$$

نوسانگرهای هماهنگ

حل معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر با شرایط اولیه داده شده

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

بطورکلی معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر یک معادله دیفرانسیل **مرتبه دوم** با **ضرایب ثابت** است. در این چنین معادله دیفرانسیلی

$$x(t) = Ae^{rt}$$

جواب پیشنهادی می‌باشد. ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم مفسر مختلط می‌باشند،

$$r = \pm i\omega_0$$

بدین ترتیب جواب معادله دیفرانسیل جرم و فنر بصورت زیر می‌باشد،

$$x(t) = \mathcal{A}e^{i\omega_0 t} + \mathcal{B}e^{-i\omega_0 t}$$

در اینجا ثوابت $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ مختلط می‌باشند و مقادیر آنها با توجه به شرایط اولیه مسئله تعیین می‌شود.

نوسانگرهای هماهنگ

حل معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر با شرایط اولیه داده شده

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

بطورکلی معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر یک معادله دیفرانسیل **مرتبه دوم** با **ضرایب ثابت** است. در این چنین معادله دیفرانسیلی

$$x(t) = Ae^{rt}$$

جواب پیشنهادی می‌باشد. جواب معادله دیفرانسیل جرم و فنر بصورت زیر می‌باشد،

$$x(t) = \mathcal{A}e^{i\omega_0 t} + \mathcal{B}e^{-i\omega_0 t}$$

روش دیگر برای جواب معادله دیفرانسیل استفاده از معادله اولر است،

$$e^{\pm i\phi} = \cos\phi \pm i\sin\phi$$

نوسانگرهای هماهنگ

حل معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر با شرایط اولیه داده شده

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

بطورکلی معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر یک معادله دیفرانسیل **مرتبه دوم** با **ضرایب ثابت** است. در این چنین معادله دیفرانسیلی

$$x(t) = Ae^{rt}$$

جواب پیشنهادی می‌باشد. کلیه جوابهای ممکن معادله دیفرانسیل جرم و فنر بصورت زیر می‌باشند،

$$x(t) = \mathcal{A}_1 e^{i\omega_0 t} + \mathcal{A}_1 e^{-i\omega_0 t}$$

$$x(t) = \mathcal{B}_1 e^{i(\omega_0 t + \phi)}$$

$$x(t) = \mathcal{B}_2 e^{-i(\omega_0 t + \phi')}$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)$$

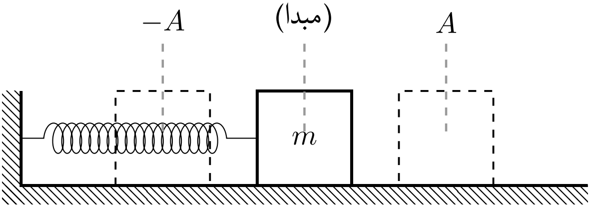
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$x(t) = B \sin(\omega_0 t + \beta)$$

نوسانگرهای هماهنگ

جوابهای معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$



$$\boxed{x = A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\sin(\omega_0 t)}$$

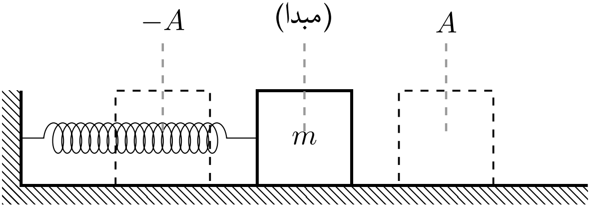
$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

$$t = 0 : \begin{cases} x_0 = A_1 \\ v_0 = A_2\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = v_0/\omega_0 \end{cases}$$

نوسانگرهای هماهنگ

جوابهای معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$



$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)}$$

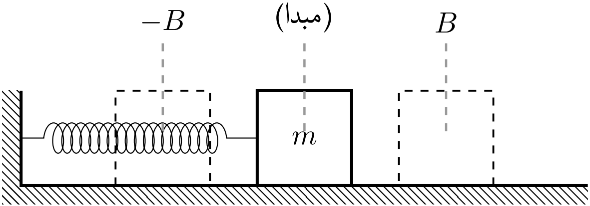
$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

$$t=0: \begin{cases} x_0 = A\cos\alpha \\ v_0 = -A\omega_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} \\ \alpha = -\tan^{-1}(v_0/x_0\omega_0) \end{cases}$$

نوسانگرهای هماهنگ

جوابهای معادله دیفرانسیل حرکت جرم و فنر

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$



$$\boxed{x = B\sin(\omega_0 t + \beta)}$$

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

$$t = 0 : \begin{cases} x_0 = B\sin\beta \\ v_0 = B\omega_0\cos\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2} \\ \beta = \tan^{-1}(x_0\omega_0/v_0) \end{cases}$$

نوسانگرهای هماهنگ

مثال–۱: معادله حرکت نوسانگر هماهنگی با فرکانس $\omega_0 = \pi$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = 0.2\text{m}$ و $v(t=0) = 0$ بدست آورید.

معادله حرکت

$$\boxed{x = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)}$$

معادله سرعت

$$v = -A_1 \pi \sin(\pi t) + A_2 \pi \cos(\pi t)$$

$$\begin{cases} x(t=0) = 0.2 = A_1 + 0 \\ v(t=0) = 0 = 0 + A_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = 0.2, \quad A_2 = 0$$

$$x = 0.2 \cos(\pi t)$$

مثال–۲: معادله حرکت نوسانگر هماهنگی با فرکانس $\omega_0 = \pi$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = 0.2\text{m}$ و $v(t=0) = 0$ بدست آورید.

معادله حرکت

$$\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)}$$

معادله سرعت

$$v = -A\pi\sin(\pi t + \alpha)$$

$$\begin{cases} x(t=0) = 0.2 = A\cos(\alpha) \\ v(t=0) = 0 = -A\pi\sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \alpha = 0, \quad A = 0.2$$

$$x = 0.2\cos(\pi t)$$

مثال–۳: معادله حرکت نوسانگر هماهنگی با فرکانس $\omega_0 = \pi$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = 0.2\text{m}$ و $v(t=0) = 0$ بدست آورید.

معادله حرکت

$$\boxed{x = B\sin(\omega_0 t + \beta)}$$

معادله سرعت

$$v = B\pi\cos(\pi t + \beta)$$

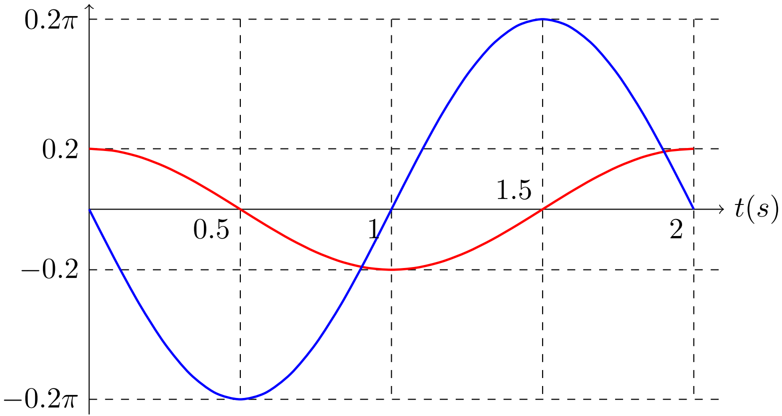
$$\begin{cases} x(t=0) = 0.2 = B\sin(\beta) \\ v(t=0) = 0 = B\pi\cos(\beta) \end{cases} \Rightarrow \beta = \pi/2, \quad B = 0.2$$

$$x = 0.2\sin(\pi t + \pi/2) = 0.2\cos(\pi t)$$

نوسانگرهای هماهنگ

نمودار حرکت

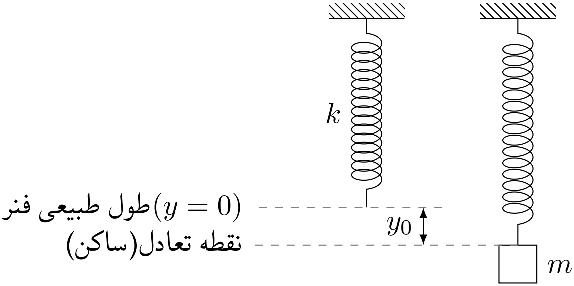
$$x = 0.2\cos(\pi t), \quad v = -0.2\pi\sin(\pi t)$$



نوسانگرهای هماهنگ

حرکت نوسانی در امتدا قائم

قانون هوک : $F = -ky$

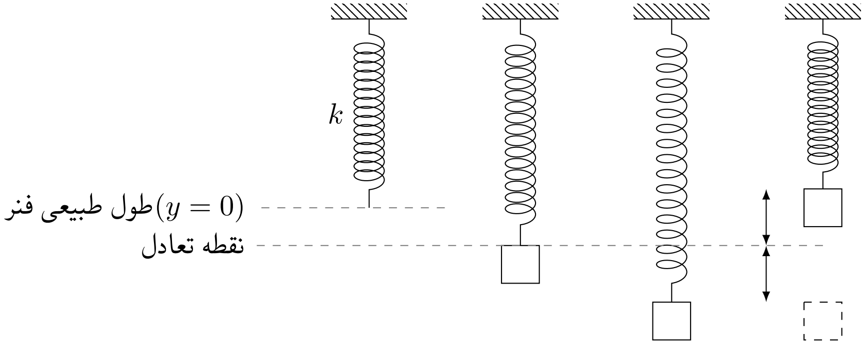


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -ky_0 - mg = 0 \Rightarrow y_0 = -\frac{mg}{k}$$

$$\boxed{y_0 = -\frac{g}{k}m}$$

نوسانگرهای هماهنگ

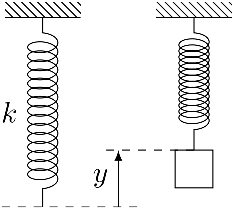
حرکت نوسانی در امتدا قائم



$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\sum F_y \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-ky-mg$$

نوسانگرهای هماهنگ

حرکت نوسانی در امتدا قائم (از طریق انرژی)



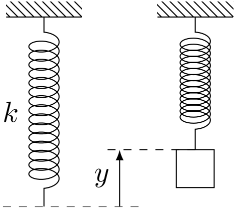
طول طبیعی فنر $(U_0 = 0)$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 + mgy = \text{ثابت}$$

$$\text{انرژی پایسته است} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + ky\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

حرکت نوسانی در امتدا قائم (از طریق انرژی)



طول طبیعی فنر $(U_0 = 0)$

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + ky\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$v\left(m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + ky + mg\right) = 0$$

منطبق با معادله بدست آمده از قانون دوم نیوتن $\quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -ky - mg,$

نوسانگرهای هماهنگ

حرکت نوسانی در امتدا قائم

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -ky - mg$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + ky = -mg$$

قسمت همگن:

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + ky = 0$$

$$y = A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t$$

قسمت ناهمگن: جواب پیشنهادی

$$y(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

از جواب پیشنهادی دوبار مشتق گرفته و آنرا در داخل معادله دیفرانسیل حرکت قرار می‌دهیم،

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c_1 + 2c_2 t, \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 2c_2$$

نوسانگرهای هماهنگ

حرکت نوسانی در امتدا قائم

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+ky=-mg$$

قسمت همگن:

$$y_{\text{همگن}}=A_1\cos\omega_0 t+A_2\sin\omega_0 t$$

قسمت ناهمگن: جواب پیشنهادی و مشتقات اول و دوم

$$y(t)=c_0+c_1t+c_2t^2,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=c_1+2c_2t,\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=2c_2$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+ky=-mg$$

$$2mc_2+k(c_0+c_1t+c_2t^2)=-mg$$

$$c_2=c_1=0,\ c_0=-mg/k$$

نوسانگرهای هماهنگ

حرکت نوسانی در امتدا قائم

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + ky = -mg$$

قسمت همگن:

$$y_{\text{همگن}} = A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t$$

قسمت ناهمگن:

$$y_{\text{ناهمگن}} = -mg/k$$

جواب نهایی:

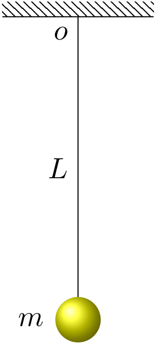
$$y = y_{\text{همگن}} + y_{\text{ناهمگن}}$$

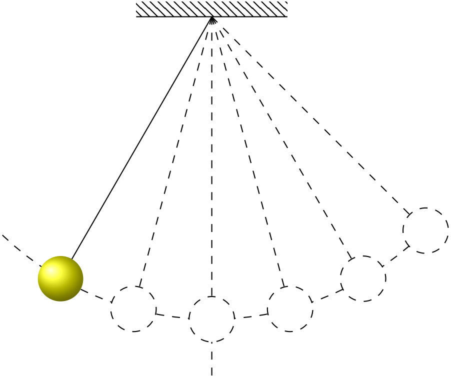
$$y = A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t - mg/k$$

که A_1 و A_2 با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آید.

نوسانگرهای هماهنگ

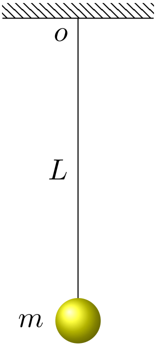
حرکت نوسانی آونگ ساده

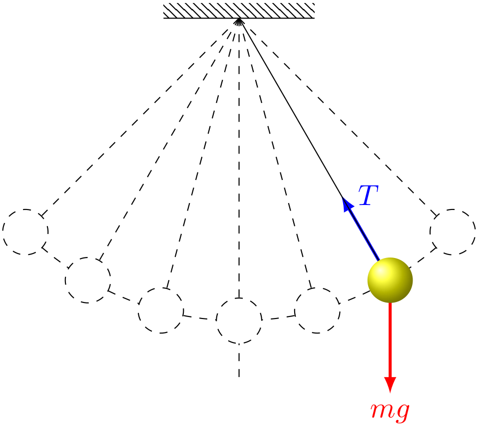




نوسانگرهای هماهنگ

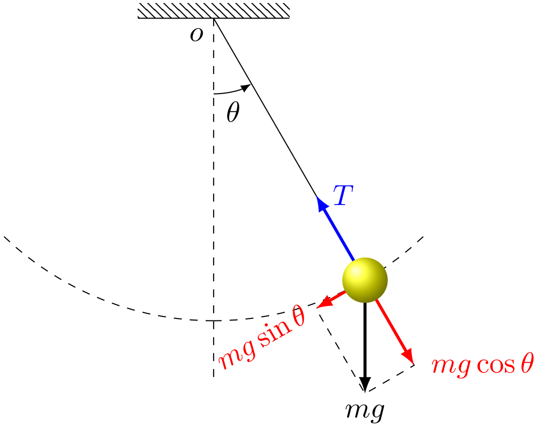
حرکت نوسانی آونگ ساده





نوسانگرهای هماهنگ

حرکت نوسانی آونگ ساده



نوسانگرهای هماهنگ

حرکت نوسانی آونگ ساده

بررسی نیروها و گشتاور نیروی وارد بر گوی

$$\sum F_r = 0$$

$$mg\sin\theta - T = 0$$

$$F_{\text{موثر}} = \sum F_\theta = -mg\sin\theta$$

$$\tau_{\text{گشتاور نیرو}} = \sum \tau_o = -Lmg\sin\theta$$

دینامیک دورانی آونگ حول نقطه o

$$\sum \tau_o = \mathbb{I}_o\ddot{\theta}, \quad \text{لختی دورانی آونگ} : \mathbb{I}_o = mL^2$$

$$-Lmg\sin\theta = mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

نوسانگرهای هماهنگ

حرکت نوسانی آونگ ساده

دینامیک دورانی آونگ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

برای زوایای کوچک $\theta < 7^\circ$ داریم

$$\sin\theta \sim \theta$$

بنابراین

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0\cdot$$

یادآوری

معادله بالا همان معادله دینامیکی نوسانگر ساده جرم–فنر

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

است که در آن $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ فرکانس نوسانات است.

نوسانگرهای هماهنگ

حرکت نوسانی آونگ ساده
دینامیک دورانی آونگ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

برای زوایای کوچک $\theta < 7^\circ$ داریم

$$\sin\theta \sim \theta$$

بنابراین

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

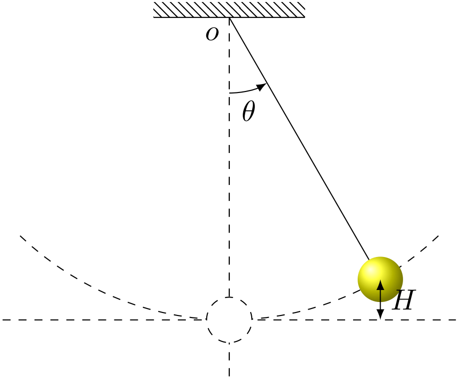
و

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

فرکانس نوسانات آونگ ساده است.

حرکت نوسانی آونگ ساده (از طریق انرژی)

$$E=\frac{1}{2}\mathbb{I}_o\omega^2+V(\theta)=\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+mgL(1-\cos\theta)=\text{ثابت}$$



$$V=mgH=mgL(1-\cos\theta)$$

حرکت نوسانی آونگ ساده (از طریق انرژی)

$$E=\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2+mgL(1-\cos\theta)=\text{ثابت}$$

$$V(\theta)=mgL(1-\cos\theta)$$

$$\text{نقطه تعادل}:\ \frac{\mathrm{d}V(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0:\quad mgL\sin\theta=0\Rightarrow\theta=0$$

$$V(\theta)=V(0)+\left(\frac{\mathrm{d}V(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta=0}\theta+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=0}\theta^2+\cdots$$

$$V(\theta)=0+0+\frac{1}{2}mgL\theta^2+\cdots$$

$$E=\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}}\right)^2+\frac{1}{2}mgL\theta^2=\text{ثابت}$$

نوسانگرهای هماهنگ

حرکت نوسانی آونگ ساده (از طریق انرژی)

$$E = \frac{1}{2} m L^2 \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2} m g L \theta^2 = \text{ثابت}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = 0 \quad : \text{انرژی پایسته است}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E = m L^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + m g L \theta \dot{\theta} = 0$$

$$m L^2 \dot{\theta} \left(\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta\right) = 0$$

با فرض اینکه $\dot{\theta} \neq 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

نوسانگرهای هماهنگ

ملاحظات انرژی: آهنگ تغییرات انرژی

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

از طرفین نسبت به زمان مشتق گرفته شود،

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) \quad ①$$

در یک نوسانگر هماهنگ

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad ②$$

از ① و ② داریم

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0}$$

ملاحظات انرژی: متوسط **زمانی** انرژی جنبش

اگر

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\langle K\rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}mv^2 \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\right)\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \phi)\mathrm{d}t$$

$$\langle K\rangle_t = \left(\frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\right)\frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1-\cos 2(\omega_0 t + \phi)}{2}\right]\mathrm{d}t$$

$$\langle K\rangle_t = \left(\frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2\right)\frac{1}{T}\left[t - \frac{1}{2\omega_0}\sin 2(\omega_0 t + \phi)\right]_0^T$$

چون : $[\sin 2(\omega_0 t + \phi)]_0^T = 0$

$$\langle K\rangle_t = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2$$

ملاحظات انرژی: متوسط **زمانی** انرژی پتانسیل

اگر

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\langle V\rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kx^2 \mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2}kA^2\right)\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega_0 t + \phi)\mathrm{d}t$$

$$\langle V\rangle_t = \left(\frac{1}{2}kA^2\right)\frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1+\cos 2(\omega_0 t + \phi)}{2}\right]\mathrm{d}t$$

$$\langle V\rangle_t = \left(\frac{1}{4}kA^2\right)\frac{1}{T}\left[t + \frac{1}{2\omega_0}\sin 2(\omega_0 t + \phi)\right]_0^T$$

چون : $[\sin 2(\omega_0 t + \phi)]_0^T = 0$

$$\langle V\rangle_t = \frac{1}{4}kA^2 = \frac{1}{4}m\omega_0^2 A^2$$

نوسانگرهای هماهنگ

ملاحظات انرژی: متوسط **زمانی** انرژی جنبش و پتانسیل
اگر

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$\langle K\rangle_t = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2$$

$$\langle V\rangle_t = \frac{1}{4} kA^2 = \frac{1}{4} m\omega_0^2 A^2$$

$$\langle E\rangle_t = \langle K\rangle_t + \langle V\rangle_t = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$$

ملاحظات انرژی: متوسط **مکانی** انرژی جنبش
اگر

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) = -A\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

$$\langle K\rangle_x = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}mv^2\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\right)\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\left[1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$\langle K\rangle_x = \left(\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\right)\frac{1}{2A}\left[x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{A^2}\right)\right]_{-A}^{A} = \left(\frac{1}{2}m\omega_0^2A^2\right)\frac{1}{2A}\left[2A - \frac{1}{3}2A\right]$$

$$\langle K\rangle_x = \frac{1}{3}m\omega_0^2A^2$$

نوسانگرهای هماهنگ

ملاحظات انرژی: متوسط **مکانی** انرژی پتانسیل
اگر

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi) = -A\omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{x}{A}\right)^2}$$

$$\langle V\rangle_x = \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}kx^2\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}k\right)\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}x^2\mathrm{d}x$$

$$\langle V\rangle_x = \left(\frac{1}{2}k\right)\frac{1}{2A}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-A}^{A} = \left(\frac{1}{2}k\right)\frac{1}{2A}\left[\frac{1}{3}2A^3\right]$$

$$\langle V\rangle_x = \frac{1}{6}kA^2 = \frac{1}{6}m\omega_0^2A^2$$

ملاحظات انرژی: متوسط **مکانی** انرژی جنبش و پتانسیل

اگر

$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$
$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

در اینصورت

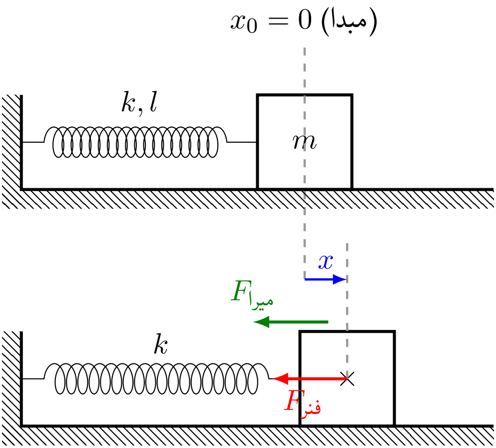
$$\langle K\rangle_x = \frac{1}{3} m\omega_0^2 A^2$$
$$\langle V\rangle_x = \frac{1}{6} kA^2 = \frac{1}{6} m\omega_0^2 A^2$$
$$\langle E\rangle_x = \langle K\rangle_x + \langle V\rangle_x = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2$$

نوسانگر هماهنگ

بطورکلی متوسط زمانی و مکانی انرژی در نوسانگرهای هماهنگ با هم برابرند،

$$\langle E\rangle_t = \langle E\rangle_x$$

نوسانگر هماهنگ میرا



$$F_{\text{فنر}} = -kx, \quad F_{\text{میرا}} = -b\dot{x}$$

نوسانگر هماهنگ میرا

$$F_{\text{فنر}} = -kx, \quad F_{\text{میرا}} = -b\dot{x}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_{\text{فنر}} + F_{\text{میرا}}$$

$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$: معادله دیفرانسیل نوسانگر میرا

$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت

برای سادگی معادله دیفرانسیل را بر m تقسیم می‌کنیم،

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

اگر $2\gamma = b/m$ و $\omega_0^2 = k/m$ تعریف کنیم، بنابراین

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

جواب پیشنهادی

$$x = Ae^{rt}$$

از جواب پیشنهادی دو بار نسبت به زمان مشتق گرفته می‌شود

$$\dot{x} = Are^{rt}, \quad \ddot{x} = Ar^2e^{rt}$$

با جایگذاری جواب پیشنهادی و مشتقات مربوطه در داخل معادله دیفرانسیل میرا داریم،

$$Ar^2e^{rt} + 2\gamma Are^{rt} + \omega_0^2 Ae^{rt} = 0$$

$$Ae^{rt}(r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2) = 0$$

چون مقدار e^{rt} برابر صفر نمی‌شود، بنابراین

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0 : \text{معادله مشخصه}$$

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

جواب پیشنهادی

$$x = Ae^{rt}$$

جوابهای معادله مشخصه

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

بنابراین جوابهای معادله میرا

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t})$$

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t})$$

بررسی حالتهای مختلف نوسانگر میرا

- تند میرا $\omega_0^2 < \gamma^2$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t})$$

یا

$$x = Ae^{-\gamma t}\cosh(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t + \phi)$$

ثوابت در هر دو جواب را می‌توان با شرایط اولیه بدست آورد. بعد از اعمال شرایط اولیه هر دو معادله شکل یکسانی خواهند داشت.

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t})$$

بررسی حالتهای مختلف نوسانگر میرا

- میرای بحرانی $\omega_0^2 = \gamma^2$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t)$$

ثوابت را می‌توان با شرایط اولیه بدست آورد.

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x_{\text{تندمیرا}} = e^{-\gamma t}(A_1 e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t})$$

$$x_{\text{میرای بحرانی}} = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t)$$

مثال–۴: معادله حرکت نوسانگر میرای $\gamma = \sqrt{2}\omega_0$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = x_0$ و $v(t=0) = 0$ بدست آورید.
چون $\gamma > \omega_0$، نوسانگر تحت بررسی یک نوسانگر تندمیرا می‌باشد

$$x = e^{-\sqrt{2}\omega_0 t}(A_1 e^{\omega_0 t} + A_2 e^{-\omega_0 t})$$

$$x(t=0) = x_0 = A_1 + A_2$$

$$v(t=0) = 0 = -\sqrt{2}\omega_0(A_1 + A_2) + \omega_0(A_1 - A_2) \Rightarrow A_1 - A_2 = \sqrt{2}x_0$$

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x_{\text{تندمیرا}} = e^{-\gamma t}(A_1 e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t})$$

$$x_{\text{میرای بحرانی}} = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t)$$

مثال-۴: معادله حرکت نوسانگر میرای $\gamma = \sqrt{2}\omega_0$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = x_0$ و $v(t=0) = 0$ بدست آورید.
چون $\gamma > \omega_0$، نوسانگر تحت بررسی یک نوسانگر تندمیرا می‌باشد

$$x = e^{-\sqrt{2}\omega_0 t}(A_1 e^{\omega_0 t} + A_2 e^{-\omega_0 t})$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ A_1 - A_2 = \sqrt{2}x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = x_0(1+\sqrt{2})/2 \\ A_2 = x_0(1-\sqrt{2})/2 \end{cases}$$

$$x = x_0 e^{-\sqrt{2}\omega_0 t}(\cosh(\omega_0 t) + \sqrt{2}\sinh(\omega_0 t))$$

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x_{\text{تندمیرا}} = e^{-\gamma t}(A_1 e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t})$$

$$x_{\text{میرای بحرانی}} = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t)$$

مثال-۵: معادله حرکت نوسانگر میرای $\gamma = \omega_0$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = x_0$ و $v(t=0) = 0$ بدست آورید.

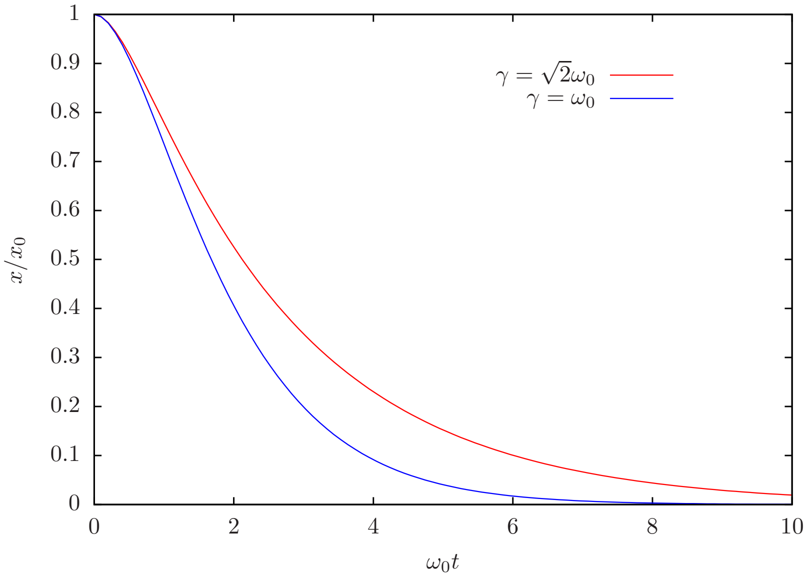
چون $\gamma = \omega_0$، نوسانگر تحت بررسی یک نوسانگر میرای بحرانی می‌باشد

$$x = e^{-\omega_0 t}(A_1 + A_2 t)$$

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = A_1 \\ v(t=0) = 0 = -\omega_0 A_1 + A_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = x_0, \quad A_2 = x_0\omega_0$$

$$x = x_0 e^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t)$$

نوسانگر هماهنگ میرا



نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t})$$

بررسی حالتهای مختلف نوسانگر میرا

- کند میرا $\omega_0^2 > \gamma^2$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t} + A_2 e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}t})$$

که $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ را فرکانس میرا ω_d می‌نامند. بنابراین

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$$

یا

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \phi)$$

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t})$$

بررسی حالتهای مختلف نوسانگر میرا

- کند میرا $\omega_0^2 > \gamma^2$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$$

یا

$$x = e^{-\gamma t}[B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)] \qquad \text{یا} \qquad x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \phi)$$

ثوابت در جوابها با شرایط اولیه بدست آورده می‌شوند. بعد از اعمال شرایط اولیه هر سه معادله شکل یکسانی خواهند داشت.

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$$

مثال–۶: معادله حرکت نوسانگر میرای $\gamma = \omega_0/4$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = x_0$ و $v(t=0) = 0$ بدست آورید.

$$\text{فرکانس نوسانگر کندمیرا} : \ \omega_d = \sqrt{15}\omega_0/4$$

$$x = e^{-\omega_0 t/4}(A_1 e^{i\sqrt{15}\omega_0 t/4} + A_2 e^{-i\sqrt{15}\omega_0 t/4})$$

$$x(t=0) = x_0 = A_1 + A_2$$

$$\begin{aligned} v = &-(\omega_0/4)e^{-\omega_0 t/4}(A_1 e^{i\sqrt{15}\omega_0 t/4} + A_2 e^{-i\sqrt{15}\omega_0 t/4}) \\ &+ (\sqrt{15}\omega_0/4)e^{-\omega_0 t/4}(iA_1 e^{i\sqrt{15}\omega_0 t/4} - iA_2 e^{-i\sqrt{15}\omega_0 t/4}) \end{aligned}$$

$$v(t=0) = 0 = -(\omega_0/4)(A_1 + A_2) + i(\sqrt{15}\omega_0/4)(A_1 - A_2)$$

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$$

مثال–۶: معادله حرکت نوسانگر میرای $\gamma = \omega_0/4$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = x_0$ و $v(t=0) = 0$ بدست آورید.

$$\omega_d = \sqrt{15}\omega_0/4$$: فرکانس نوسانگر کندمیرا

$$x = e^{-\omega_0 t/4}(A_1 e^{i\sqrt{15}\omega_0 t/4} + A_2 e^{-i\sqrt{15}\omega_0 t/4})$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ A_1 - A_2 = x_0/(i\sqrt{15}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = (x_0/2)[1 + 1/(i\sqrt{15})] \\ A_2 = (x_0/2)[1 - 1/(i\sqrt{15})] \end{cases}$$

$$x = x_0 e^{-\omega_0 t/4}\left[\cos(\sqrt{15}\omega_0 t/4) + \frac{1}{\sqrt{15}}\sin(\sqrt{15}\omega_0 t/4)\right]$$

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$$

مثال–۶: معادله حرکت نوسانگر میرای $\gamma = \omega_0/4$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = x_0$ و $v(t=0) = 0$ بدست آورید.

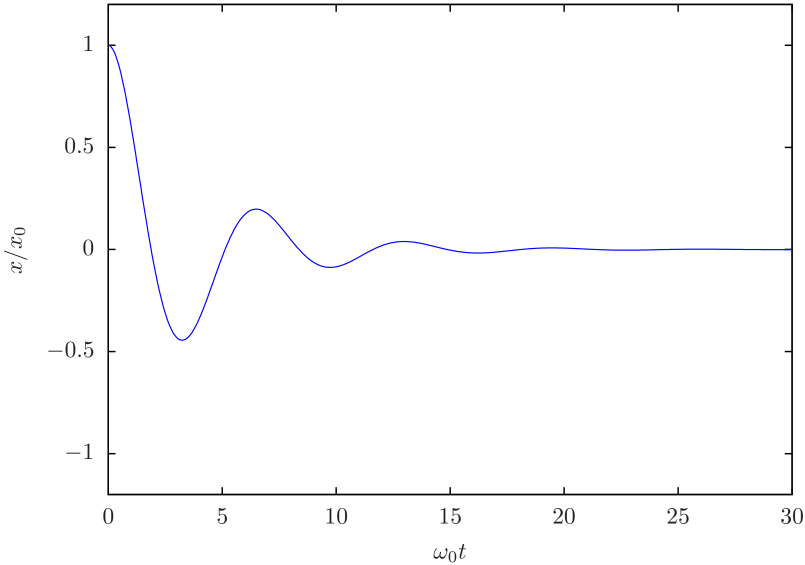
$$\text{فرکانس نوسانگر کندمیرا} : \quad \omega_d = \sqrt{15}\omega_0/4$$

$$x = e^{-\omega_0 t/4}(A_1 e^{i\sqrt{15}\omega_0 t/4} + A_2 e^{-i\sqrt{15}\omega_0 t/4})$$

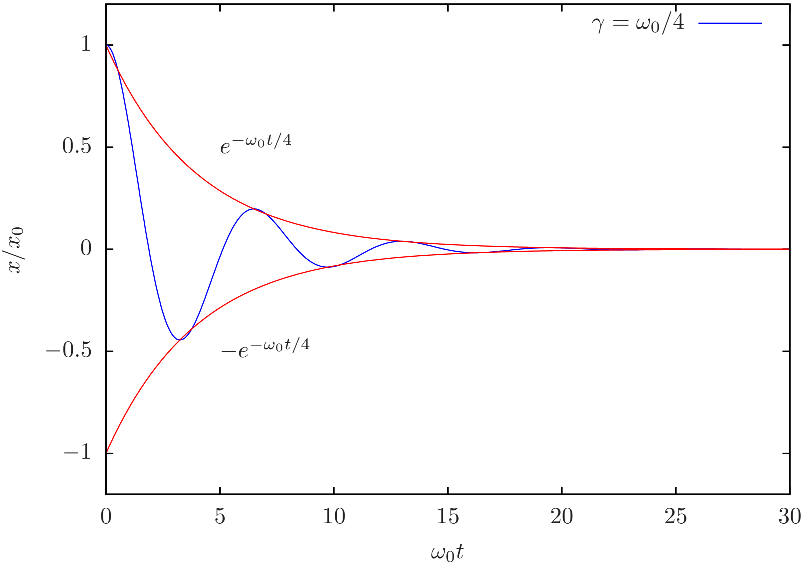
$$x = x_0 e^{-\omega_0 t/4}\left[\cos(\sqrt{15}\omega_0 t/4) + \frac{1}{\sqrt{15}}\sin(\sqrt{15}\omega_0 t/4)\right]$$

$$v = -\frac{x_0\omega_0}{4}e^{-\omega_0 t/4}\left[\cos(\sqrt{15}\omega_0 t/4) + \frac{1}{\sqrt{15}}\sin(\sqrt{15}\omega_0 t/4)\right]$$
$$-\frac{\sqrt{15}x_0\omega_0}{4}e^{-\omega_0 t/4}\left[\sin(\sqrt{15}\omega_0 t/4) - \frac{1}{\sqrt{15}}\cos(\sqrt{15}\omega_0 t/4)\right]$$

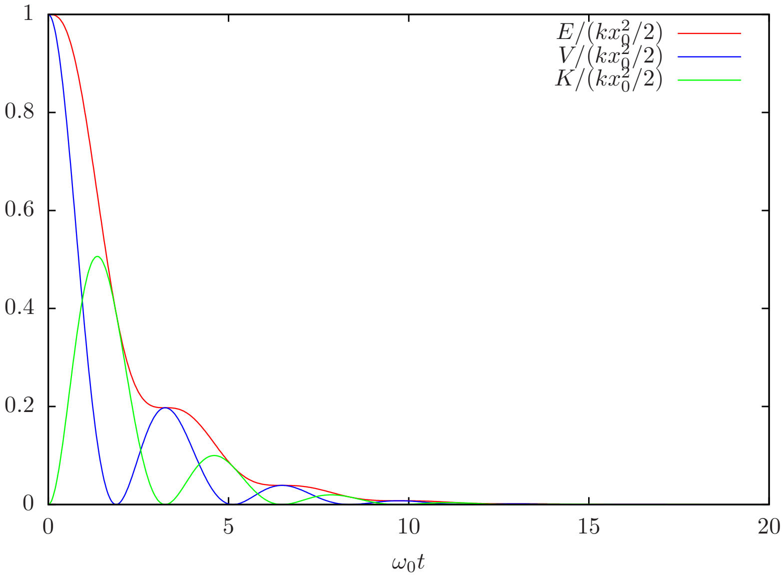
نوسانگر هماهنگ میرا



نوسانگر هماهنگ میرا



نوسانگر هماهنگ میرا



نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$$

مثال–۷: معادله حرکت نوسانگر میرای $\gamma = \omega_0/4$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = 0$ و $v(t=0) = v_0$ بدست آورید.

$$\text{فرکانس نوسانگر کندمیرا} \;:\; \omega_d = \sqrt{15}\omega_0/4$$

$$x = e^{-\omega_0 t/4}(A_1 e^{i\sqrt{15}\omega_0 t/4} + A_2 e^{-i\sqrt{15}\omega_0 t/4})$$

$$x(t=0) = 0 = A_1 + A_2$$

$$\begin{aligned} v = &-(\omega_0/4)e^{-\omega_0 t/4}(A_1 e^{i\sqrt{15}\omega_0 t/4} + A_2 e^{-i\sqrt{15}\omega_0 t/4}) \\ &+ (\sqrt{15}\omega_0/4)e^{-\omega_0 t/4}(iA_1 e^{i\sqrt{15}\omega_0 t/4} - iA_2 e^{-i\sqrt{15}\omega_0 t/4}) \end{aligned}$$

$$v(t=0) = v_0 = -(\omega_0/4)(A_1 + A_2) + i(\sqrt{15}\omega_0/4)(A_1 - A_2)$$

نوسانگر هماهنگ میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$$

مثال–۷: معادله حرکت نوسانگر میرای $\gamma = \omega_0/4$ را برای شرایط اولیه $x(t=0) = 0$ و $v(t=0) = v_0$ بدست آورید.

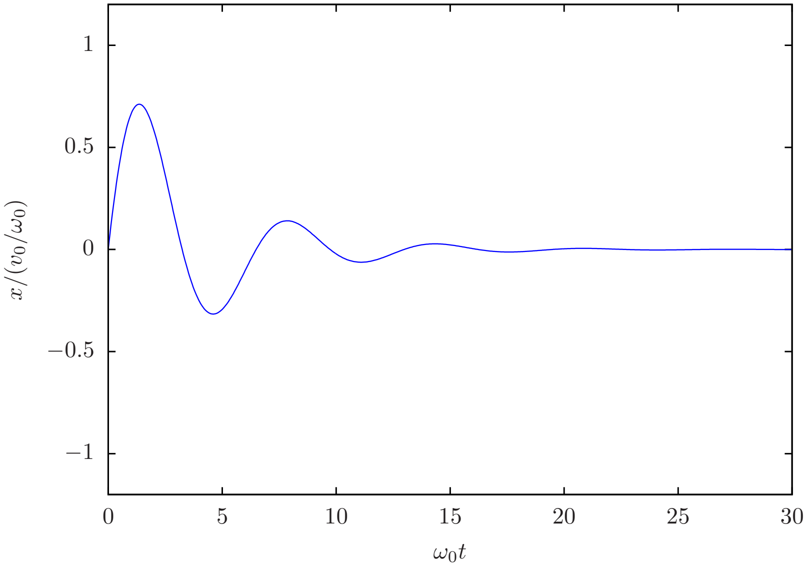
$$x = e^{-\omega_0 t/4}(A_1 e^{i\sqrt{15}\omega_0 t/4} + A_2 e^{-i\sqrt{15}\omega_0 t/4})$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 - A_2 = -i(4/\sqrt{15})(v_0/\omega_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -i(2/\sqrt{15})(v_0/\omega_0) \\ A_2 = +i(2/\sqrt{15})(v_0/\omega_0) \end{cases}$$

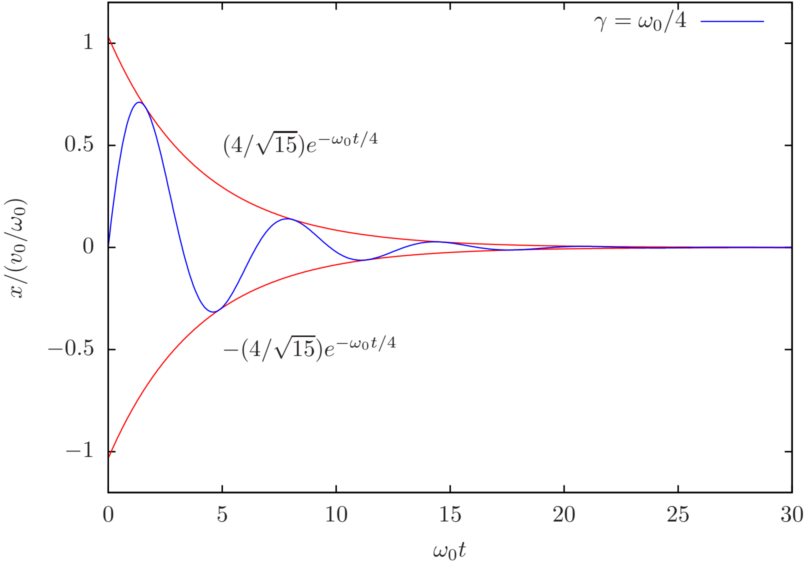
$$x = \left(\frac{4v_0}{\sqrt{15}\omega_0}\right) e^{-\omega_0 t/4} \sin(\sqrt{15}\omega_0 t/4)$$

$$v = v_0 e^{-\omega_0 t/4}\left[-\frac{1}{\sqrt{15}} \sin(\sqrt{15}\omega_0 t/4) + \cos(\sqrt{15}\omega_0 t/4)\right]$$

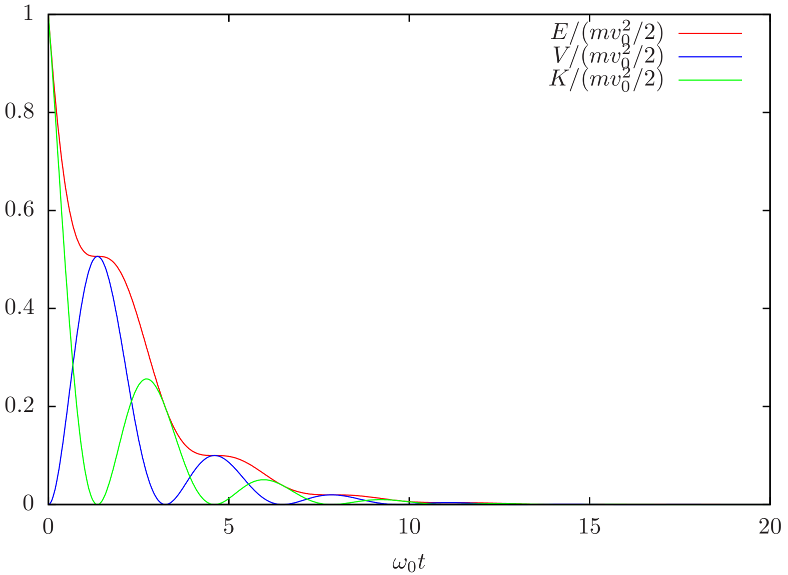
نوسانگر هماهنگ میرا



نوسانگر هماهنگ میرا



نوسانگر هماهنگ میرا



نوسانگر هماهنگ میرا

ملاحظات انرژی

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

از طرفین نسبت به زمان مشتق گرفته شود،

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) \quad (۱)$$

در یک نوسانگر هماهنگ میرا

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

که می‌توان نوشت

$$m\ddot{x} + kx = -b\dot{x} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) داریم

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(-b\dot{x}) \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -b\dot{x}^2}$$

نوسانگر هماهنگ میرا

ملاحظات انرژی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \phi)$$

$$v = -A\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \phi) - A\omega_d e^{-\gamma t}\sin(\omega_d t + \phi)$$

اگر ضریب میرایی γ در مقایسه با ω_0 خیلی کوچک باشد،

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2} = \omega_0\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2 + \cdots\right] \simeq \omega_0$$

$$v = -A\gamma e^{-\gamma t}\cos(\omega_0 t + \phi) - A\omega_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = -A\omega_0 e^{-\gamma t}\left[\frac{\gamma}{\omega_0}\cos(\omega_0 t + \phi) + \sin(\omega_0 t + \phi)\right] \simeq -A\omega_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_0 t + \phi)$$

نوسانگر هماهنگ میرا

ملاحظات انرژی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \phi)$$

اگر ضریب میرایی γ در مقایسه با ω_0 خیلی کوچک باشد،

$$v \simeq -A\omega_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 e^{-2\gamma t}\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}\cos^2(\omega_d t + \phi)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}\left[\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_d t + \phi)\right] = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}$$

ملاحظات انرژی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \phi)$$

اگر ضریب میرایی γ در مقایسه با ω_0 خیلی کوچک باشد،

$$v \simeq -A\omega_0 e^{-\gamma t}\sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 e^{-2\gamma t}, \quad E_0 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$$

در اینجا می توان یک مقیاس زمانی برای میرایی انرژی بدست آورد،

$$\tau = \frac{1}{2\gamma}, \quad 2\gamma = \frac{b}{m} \Rightarrow \tau = \frac{m}{b}$$

نوسانگر هماهنگ واداشته

معادله دیفرانسیل **نوسانگر هماهنگ واداشته** بصورت

$$m\ddot{x} = -kx + F_0\cos(\omega t)$$

داده می‌شود که ω فرکانس نوسانات واداشته است. اگر طرفین را بر m تقسیم کنیم،

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

که $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

نوسانگر هماهنگ واداشته

معادله دیفرانسیل **نوسانگر هماهنگ واداشته**

$$\ddot{x}+\omega_0^2 x=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب قسمت همگن،

$$\ddot{x}_{\text{همگن}}+\omega_0^2 x_{\text{همگن}}=0$$

$$x_{\text{همگن}}=A\cos(\omega_0 t+\phi)$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}}=B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t$$

برای پیدا کردن B_1 و B_2، از جواب پیشنهادی را داخل معادله دیفرانسیل حرکت قرار می‌دهیم،

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}}+\omega_0^2 x_{\text{ناهمگن}}=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)B_1\cos(\omega t)+(\omega_0^2-\omega^2)B_2\sin(\omega t)=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

نوسانگر هماهنگ واداشته

معادله دیفرانسیل **نوسانگر هماهنگ** واداشته

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب قسمت همگن،

$$x_{\text{همگن}} = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t$$

برای پیدا کردن B_1 و B_2، جواب پیشنهادی را داخل معادله دیفرانسیل حرکت قرار می‌دهیم،

$$(\omega_0^2 - \omega^2)B_1\cos(\omega t) + (\omega_0^2 - \omega^2)B_2\sin(\omega t) = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$\begin{cases} B_1 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \\ B_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t$$

نوسانگر هماهنگ واداشته

معادله دیفرانسیل **نوسانگر هماهنگ واداشته**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب قسمت همگن،

$$x_{\text{همگن}} = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

جواب قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t$$

جواب نهایی

$$x = x_{\text{همگن}} + x_{\text{ناهمگن}} = A\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t$$

که ϕ و A با توجه به شرایط اولیه مشخص می‌شود.

نوسانگر هماهنگ واداشته

معادله دیفرانسیل **نوسانگر میرای واداشته** بصورت

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

داده می‌شود که ω فرکانس نوسانات واداشته است. اگر طرفین را بر m تقسیم کنیم،

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

که $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ و $2\gamma = b/m$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

نوسانگر میرای واداشته

معادله دیفرانسیل **نوسانگر میرای واداشته**

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب قسمت همگن،

$$\ddot{x}_{\text{همگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{همگن}} + \omega_0^2 x_{\text{همگن}} = 0$$

$$\omega_0^2 < \gamma^2 :\ x_{\text{همگن}} = e^{-\gamma t}(A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}), \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_0^2 = \gamma^2 :\ x_{\text{همگن}} = (A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t}$$

$$\omega_0^2 > \gamma^2 :\ x_{\text{همگن}} = e^{-\gamma t}[A_1\cos(\omega_d t) + A_2\sin(\omega_d t)], \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t$$

برای پیدا کردن B_1 و B_2، جواب پیشنهادی را داخل معادله دیفرانسیل حرکت قرار می‌دهیم،

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

معادله دیفرانسیل نوسانگر میرای واداشته

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t$$

برای پیدا کردن B_1 و B_2، جواب پیشنهادی را داخل معادله دیفرانسیل حرکت قرار می‌دهیم،

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

$$[(\omega_0^2-\omega^2)B_1+(2\gamma\omega)B_2]\cos\omega t+[-(2\gamma\omega)B_1+(\omega_0^2-\omega^2)B_2]\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)B_1 + (2\gamma\omega)B_2 = F_0/m \\ -(2\gamma\omega)B_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)B_2 = 0 \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل **نوسانگر میرای واداشته**

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)B_1 + (2\gamma\omega)B_2 = F_0/m \\ -(2\gamma\omega)B_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)B_2 = 0 \end{cases}$$

$$B_1 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} F_0/m$$

$$B_2 = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} F_0/m$$

نوسانگر میرای واداشته

معادله دیفرانسیل نوسانگر میرای واداشته

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)B_1 + (2\gamma\omega)B_2 = F_0/m \\ -(2\gamma\omega)B_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)B_2 = 0 \end{cases}$$

$$B_1 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

$$B_2 = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

نوسانگر میرای واداشته

معادله دیفرانسیل **نوسانگر میرای واداشته**

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)B_1 + (2\gamma\omega)B_2 = F_0/m \\ -(2\gamma\omega)B_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)B_2 = 0 \end{cases}$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \Bigg[\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \cos\omega t + \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \sin\omega t \Bigg]$$

نوسانگر میرای واداشته

معادله دیفرانسیل نوسانگر میرای واداشته

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t$$

$$\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = \cos\phi$$
$$\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = \sin\phi$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}\left[\cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi\right]$$

نوسانگر میرای واداشته

معادله دیفرانسیل نوسانگر میرای واداشته

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}\left[\cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi\right]$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t - \phi)$$

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

نوسانگر میرای واداشته

معادله دیفرانسیل **نوسانگر میرای واداشته**

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب قسمت ناهمگن،

$$x_{\text{ناهمگن}} = A\cos(\omega t - \phi)$$

دامنه

$$\boxed{A = A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}}$$

زاویه فاز

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \boxed{\phi = \phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}$$

نوسانگر میرای واداشته

معادله دیفرانسیل **نوسانگر میرای واداشته**

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

جواب قسمت همگن و قسمت ناهمگن،

- $\omega_0^2 < \gamma^2$

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t}) + A\cos(\omega t - \phi)$$

- $\omega_0^2 = \gamma^2$

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\gamma t} + A\cos(\omega t - \phi)$$

- $\omega_0^2 > \gamma^2$

$$x = e^{-\gamma t}[A_1\cos(\omega_d t) + A_2\sin(\omega_d t)] + A\cos(\omega t - \phi)$$

مقادیر A_1 و A_2 در همه‌ی حالتها با اعمال شرایط اولیه بدست می‌آید.

نوسانگر میرای واداشته

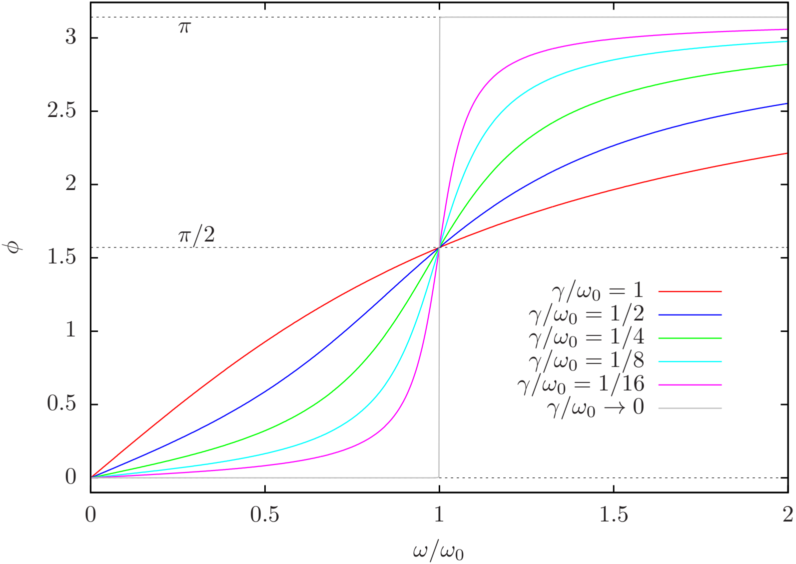
بررسی **زاویه فاز** در جواب قسمت ناهمگن معادله‌ی حرکت نوسانگر میرای واداشته

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

صورت و مخرج را بر $1/\omega_0^2$ ضرب و تقسیم می‌کنیم،

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2(\gamma/\omega_0)(\omega/\omega_0)}{1 - (\omega/\omega_0)^2}\right)$$

نوسانگر هماهنگ میرا



نوسانگر میرای واداشته

بررسی **تشدید دامنه** در جواب قسمت ناهمگن معادله‌ی حرکت نوسانگر میرای واداشته

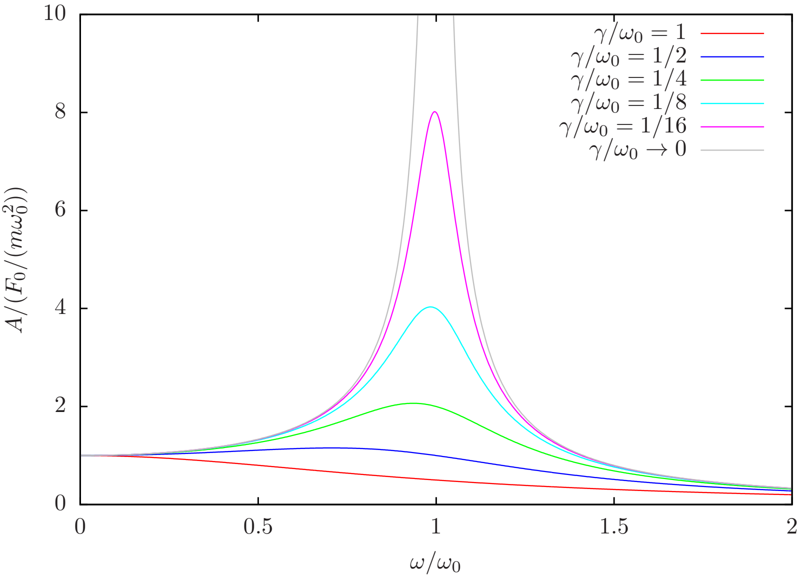
$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

صورت و مخرج را بر $1/\omega_0^2$ ضرب و تقسیم می‌کنیم،

$$A = \frac{F_0/(m\omega_0^2)}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_0)^2]^2 + [2(\gamma/\omega_0)(\omega/\omega_0)]^2}}$$

$$A/(F_0/(m\omega_0^2)) = \frac{1}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_0)^2]^2 + [2(\gamma/\omega_0)(\omega/\omega_0)]^2}}$$

نوسانگر هماهنگ میرا



نوسانگر میرای واداشته

بررسی **تشدید دامنه** در جواب قسمت ناهمگن معادله‌ی حرکت نوسانگر میرای واداشته

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} = 0$$

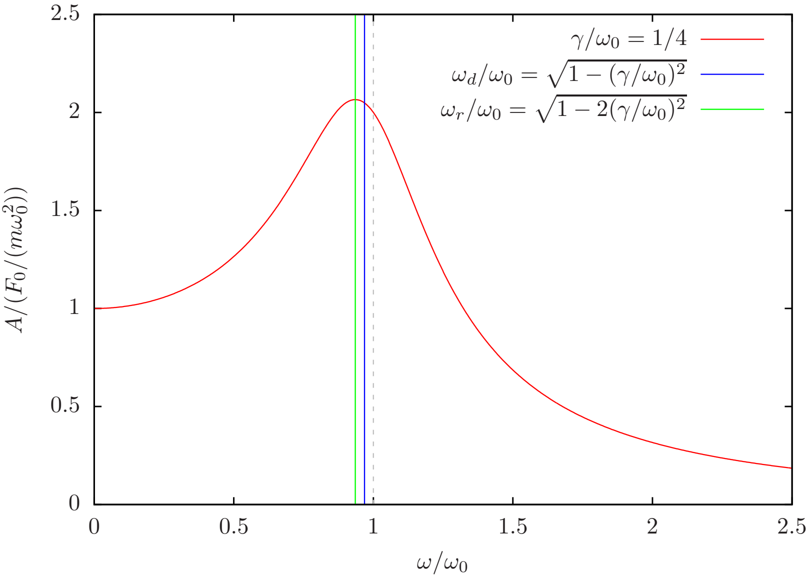
$$F_0/m\left[\frac{2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+2(2\gamma\omega)(2\gamma)}{2[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2]^{3/2}}\right] = 0$$

$$-4\omega(\omega_0^2-\omega^2)+8\gamma^2\omega = 0, \quad \omega \neq 0$$

فرکانس تشدید : $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2} = \omega_r}$

$$\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2} < \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} < \omega_0 \Rightarrow \omega_r < \omega_d < \omega_0$$

نوسانگر میرای واداشته



نوسانگر میرای واداشته

تشدید انرژي

- در بیشتر وضعیتهای فیزیکی در طبیعت، آنچه بطور تجربی مشاهده می‌شود، انرژي سیستم در نزدیکی فرکانس تشدید می‌باشد.
- انرژی کل متناسب با مجذور دامنه در نزدیکی تشدید است.
- در نوسانگر میرا واداشته قسمت پایا حرکت که با گذر زمان دامنه ثابت دارد، جواب قسمت ناهمگن معادله حرکت است.

$$x_{\text{ناهمگن}} = A\cos(\omega t - \phi) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t - \phi)$$

- انرژی کل

$$E = K + V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2_{\text{ناهمگن}} + \frac{1}{2} k x^2_{\text{ناهمگن}}$$

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t - \phi)$$

تشدید انرژي

$$E = K + V = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t - \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t - \phi)$$

$$\langle \sin^2(\omega t - \phi)\rangle_t = \langle \cos^2(\omega t - \phi)\rangle_t = \frac{1}{2}$$

$$\langle \sin^2(\omega t - \phi)\rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - \phi)\mathrm{d}t \qquad \text{که} \qquad \omega = 2\pi/T$$

$$\langle \sin^2(\omega t - \phi)\rangle_t = \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{1-\cos 2(\omega t - \phi)}{2}\right]\mathrm{d}t$$

$$\langle \sin^2(\omega t - \phi)\rangle_t = \frac{1}{2T}\left[t - \frac{\sin 2(\omega t - \phi)}{2\omega}\right]_0^T = \frac{1}{2}$$

نوسانگر میرای واداشته

تشدید انرژي

$$E = K + V = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t - \phi)$$

$$\langle \sin^2(\omega t - \phi) \rangle_t = \langle \cos^2(\omega t - \phi) \rangle_t = \frac{1}{2}$$

$$\langle \cos^2(\omega t - \phi) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - \phi) \mathrm{d}t \qquad \text{که} \qquad \omega = 2\pi / T$$

$$\langle \cos^2(\omega t - \phi) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{1 + \cos 2(\omega t - \phi)}{2} \right] \mathrm{d}t$$

$$\langle \cos^2(\omega t - \phi) \rangle_t = \frac{1}{2T} \left[t + \frac{\sin 2(\omega t - \phi)}{2\omega} \right]_0^T = \frac{1}{2}$$

نوسانگر میرای واداشته

تشدید انرژی

$$E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t - \phi)$$

$$\langle \sin^2(\omega t - \phi) \rangle_t = \langle \cos^2(\omega t - \phi) \rangle_t = \frac{1}{2}$$

$$\langle E \rangle_t = \langle K \rangle_t + \langle V \rangle_t = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \langle \sin^2(\omega t - \phi) \rangle_t + \frac{1}{2} k A^2 \langle \cos^2(\omega t - \phi) \rangle_t$$

$$\langle E \rangle_t = \langle K \rangle_t + \langle V \rangle_t = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 + \frac{1}{4} k A^2$$

نوسانگر هماهنگ : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\langle E \rangle_t = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 + \frac{1}{4} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{4} m (\omega^2 + \omega_0^2) A^2 = \frac{F_0^2}{4m} \frac{(\omega^2 + \omega_0^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

تشدید انرژي

$$\langle K\rangle_t = \frac{F_0^2}{4m}\frac{\omega^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega)^2} = \langle K(\omega)\rangle$$

$$\langle V\rangle_t = \frac{F_0^2}{4m}\frac{\omega_0^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega)^2} = \langle V(\omega)\rangle$$

$$\langle E\rangle_t = \langle K\rangle_t + \langle V\rangle_t = \frac{F_0^2}{4m}\frac{(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega)^2} = \langle E(\omega)\rangle$$

فرکانس بیشینه متوسط انرژی جنبشی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید،

$$\frac{\mathrm{d}\langle K(\omega)\rangle}{\mathrm{d}\omega} = 0 \Rightarrow \omega_K = \omega_0$$

فرکانس بیشینه متوسط انرژی پتانسیل از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید،

$$\frac{\mathrm{d}\langle V(\omega)\rangle}{\mathrm{d}\omega} = 0 \Rightarrow \omega_V = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \omega_r$$

نوسانگر میرای واداشته

تشدید انرژي

$$\langle E\rangle_t = \langle K\rangle_t + \langle V\rangle_t = \frac{F_0^2}{4m}\frac{(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega)^2} = \langle E(\omega)\rangle$$

فرکانس بیشینه متوسط انرژی جنبشی،

$$\omega_K = \omega_0$$

فرکانس بیشینه متوسط انرژی پتانسیل،

$$\omega_V = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \omega_r$$

برای میرایی‌های ضعیف $\gamma \ll \omega_0$

$$\omega_V \simeq \omega_K = \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} \omega^2+\omega_0^2 = 2\omega_0^2 \\ \omega^2-\omega_0^2 = (\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0) = 2\omega_0(\omega-\omega_0) \\ 2\gamma\omega = 2\gamma\omega_0 \end{cases}$$

نوسانگر میرای واداشته

تشدید انرژي

$$\langle E\rangle_t = \langle K\rangle_t + \langle V\rangle_t = \frac{F_0^2}{4m}\frac{(\omega^2+\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega)^2} = \langle E(\omega)\rangle$$

برای میرایی‌های ضعیف $\gamma \ll \omega_0$

$$\omega_V \simeq \omega_K = \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} \omega^2+\omega_0^2 = 2\omega_0^2 \\ \omega^2-\omega_0^2 = (\omega+\omega_0)(\omega-\omega_0) = 2\omega_0(\omega-\omega_0) \\ 2\gamma\omega = 2\gamma\omega_0 \end{cases}$$

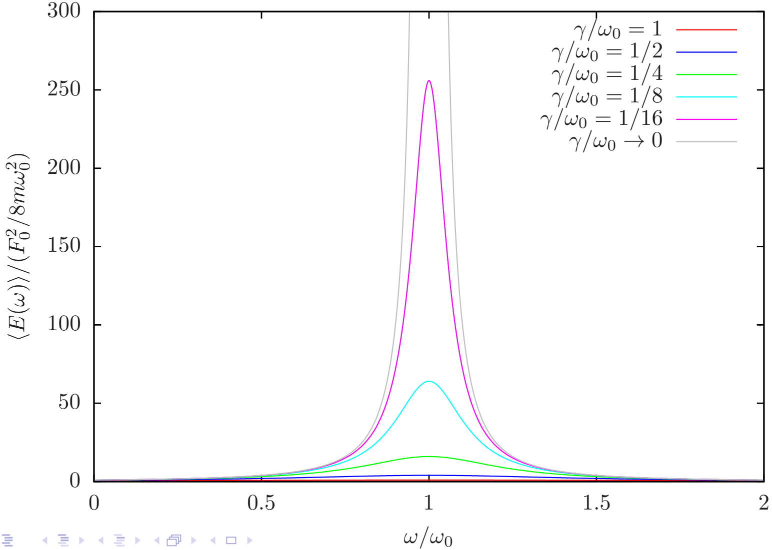
$$\langle E(\omega)\rangle = \frac{F_0^2}{8m}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}$$

$$\langle E(\omega)\rangle/(F_0^2/8m) = \boxed{\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2} \ : \ \text{تابع لورنتس}}$$

$$\langle E(\omega)\rangle/(F_0^2/8m\omega_0^2) = \frac{1}{[(\omega/\omega_0)-1]^2+(\gamma/\omega_0)^2}$$

نوسانگر میرای واداشته

نمودار تشدید انرژي



نوسانگر میرای واداشته

آهنگ اتلاف انرژی

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$$

طرفین را در $\dot{x}$ ضرب می‌کنیم،

$$m\dot{x}\ddot{x} + b\dot{x}^2 + k\dot{x}x = F_0 \dot{x} \cos \omega t$$

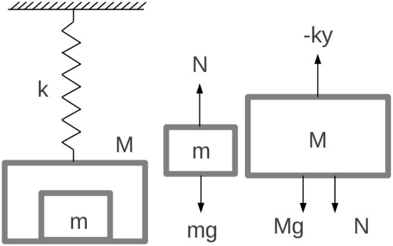
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) + b\dot{x}^2 = F_0 \dot{x} \cos \omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E + b\dot{x}^2 = F_0 \dot{x} \cos \omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = -b\dot{x}^2 + F_0 \dot{x} \cos \omega t$$

بخشی که با آن انرژی تامین می‌شود + بخشی که با آن انرژی تلف می‌شود = آهنگ اتلاف انرژی

مسئله-۱ جرم کوچک m در داخل یک جعبه‌ای به جرم M قرار دارد. جعبه بزرگ به فنر قائمی با ثابت فنر k بسته شده است. وقتی جعبه از حالت تعادلش به اندازه y_0 جابجا می‌شود و رها می‌شود، حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد. واکنش بین m و M را بصورت تابعی از زمان بدست آورید.



قانون دوم نیوتن برای جرم کوچک m

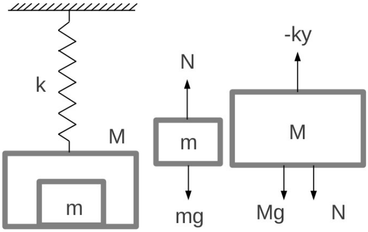
$$m\ddot{y} = N - mg$$

قانون دوم نیوتن برای جعبه‌ی به جرم M

$$M\ddot{y} = N - Mg - ky$$

نوسانگرها

مسئله-۱



قانون دوم نیوتن برای جرم کوچک m

$$m\ddot{y} = N - mg$$

قانون دوم نیوتن برای جعبه‌ی به جرم M

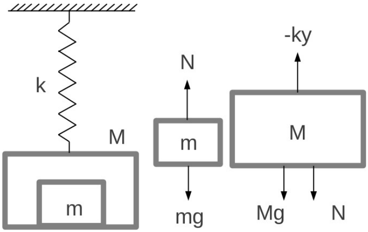
$$M\ddot{y} = N - Mg - ky$$

معادله دیفرانسیل حرکت

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = -g$$

که $\omega_0 = \sqrt{k/(M+m)}$

مسئله–۱



معادله دیفرانسیل حرکت

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -g, \quad \omega_0 = \sqrt{k/(M+m)}$$

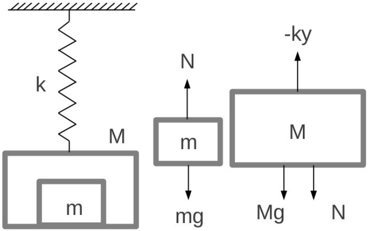
جواب قسمت همگن و ناهمگن

$$y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t - \frac{g}{\omega_0^2}$$

ثوابت A و B با توجه به شرایط اولیه مسئله بدست می‌آیند.

نوسانگرها

مسئله-۱



$$y = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t - \frac{g}{\omega_0^2}$$

اعمال شرایط اولیه

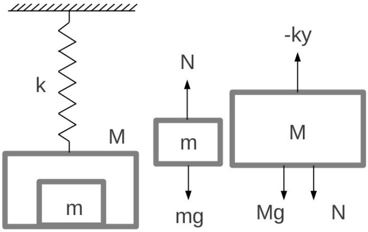
$$y(t=0) = -y_0 \Rightarrow A - \frac{g}{\omega_0^2} = -y_0 \Rightarrow A = \frac{g}{\omega_0^2} - y_0$$

$$v(t=0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

بنابراین

$$y = \left(\frac{g}{\omega_0^2} - y_0\right)\cos\omega_0 t - \frac{g}{\omega_0^2}$$

مسئله-۱



$$y=\left(\frac{g}{\omega_0^2}-y_0\right)\cos\omega_0 t-\frac{g}{\omega_0^2}$$

با استفاده از معادله $m\ddot{y}=N-mg$ داریم

$$N=m\ddot{y}+mg\Rightarrow N=m(-g+\omega_0^2 y_0)\cos\omega_0 t+mg$$

مسئله–۲ یک انتهای فنری با ثابت فنر k تثبیت شده است و انتهای دیگر آن به جرم m بسته شده است. برای مدت زمان t_0 تحت تاثیر نیروی ثابت افقی F قرار می‌گیرد. نشان دهید که مکان جرم m پس از قطع نیرو با رابطه زیر داده می‌شود،

$$x = x_0 + \frac{F}{k}\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_0) - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

بازای $t \leq t_0$ معادله دیفرانسیل حرکت ذره برابر

$$m\ddot{x} + kx = F \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

که جواب قسمت همگن و ناهمگن معادله بالا برابر

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{F}{m\omega_0^2}$$

اگر فرض کنیم $x(t=0) = 0$ و $v(t=0) = 0$ داریم

$$x(t=0) = 0 = A + \frac{F}{m\omega_0^2} \Rightarrow A = -\frac{F}{m\omega_0^2}, \qquad v(t=0) = 0 = \omega_0 B \Rightarrow B = 0$$

مسئله-۲

بازای $t \leq t_0$ معادله دیفرانسیل حرکت ذره برابر

$$m\ddot{x} + kx = F \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

که جواب قسمت همگن و ناهمگن معادله بالا برابر

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{F}{m\omega_0^2}$$

اگر فرض کنیم $x(t=0) = 0$ و $v(t=0) = 0$ داریم

$$x(t=0) = 0 = A + \frac{F}{m\omega_0^2} \Rightarrow A = -\frac{F}{m\omega_0^2}, \qquad v(t=0) = 0 = \omega_0 B \Rightarrow B = 0$$

بنابراین

$$x = -\frac{F}{m\omega_0^2}\cos\omega_0 t + \frac{F}{m\omega_0^2}$$

مسئله–۲ بازای $t > t_0$ معادله دیفرانسیل حرکت ذره برابر

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

که جواب معادله دیفرانسیل بالا برابر

$$x = A' \cos\omega_0(t - t_0) + B' \sin\omega_0(t - t_0)$$

از قسمت قبل مسئله داریم $x(t = t_0) = -\frac{F}{m\omega_0^2}\cos\omega_0 t_0 + \frac{F}{m\omega_0^2}$ و $v(t = t_0) = \frac{F}{m\omega_0}\sin\omega_0 t_0$، پس

$$A' = -\frac{F}{m\omega_0^2}\cos\omega_0 t_0 + \frac{F}{m\omega_0^2}$$

$$B' = \frac{F}{m\omega_0^2}\sin\omega_0 t_0$$

بنابراین

$$x = \frac{F}{m\omega_0^2}(\cos\omega_0(t - t_0) - \cos\omega_0 t) = \frac{F}{k}\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

مسئله–۳ نوسانگر نامیرائی به جرم m و فرکانس طبیعی ω_0 در لحظه‌ی $t = 0$ با سرعت اولیه v_0 از مبدا شروع به حرکت می‌کند و تا $t = \frac{3\pi}{2\omega_0}$ به آزادی نوسان می‌کند. از این لحظه به بعد نیروی $F = F_0 \cos(\omega t + \theta)$ اعمال می‌شود. معادله حرکت را پیدا کنید.

بازای $t \le 3\pi/(2\omega_0)$ معادله دیفرانسیل حرکت ذره برابر

$$m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

که جواب معادله دیفرانسیل بالا برابر

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

با اعمال شرایط اولیه داریم

$$x = \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

مسئله-۳

بازای $t \geq 3\pi/(2\omega_0)$ معادله دیفرانسیل حرکت ذره برابر

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t + \theta)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \theta) \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \theta)$$

که جواب قسمت همگن و ناهمگن معادله دیفرانسیل بالا برابر

$$x = A' \cos\omega_0(t - \frac{3\pi}{2\omega_0}) + B' \sin\omega_0(t - \frac{3\pi}{2\omega_0}) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t + \theta)$$

$$x = A' \cos(\omega_0 t - \frac{3\pi}{2}) + B' \sin(\omega_0 t - \frac{3\pi}{2}) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t + \theta)$$

$$x = -A' \sin\omega_0 t + B' \cos\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t + \theta)$$

مسئله-۳

بازای $t \geq 3\pi/(2\omega_0)$

$$x = -A' \sin\omega_0 t + B' \cos\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \theta)$$

از قسمت قبل مسئله داریم $x(t = \frac{3\pi}{2\omega_0}) = -\frac{v_0}{\omega_0}$ و $v(t = \frac{3\pi}{2\omega_0}) = 0$، پس

$$A' = -\frac{v_0}{\omega_0} - \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\frac{2\pi\omega}{3\omega_0} + \theta)$$

$$B' = \frac{F_0 \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)\omega_0} \sin(\frac{2\pi\omega}{3\omega_0} + \theta)$$

بنابراین

$$x = \left(\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\frac{2\pi\omega}{3\omega_0} + \theta)\right) \sin\omega_0 t$$
$$+ \left(\frac{F_0 \omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)\omega_0} \sin(\frac{2\pi\omega}{3\omega_0} + \theta)\right) \cos\omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \theta)$$

مسئله–۴ نیروی $F_0(1-e^{-at})$ بر نوسانگر وارد می‌شود که در لحظه $t=0$ ساکن است. جرم نوسانگرد m و ثابت فنر $k=4ma^2$ و $b=ma$ است. معادله حرکت را پیدا کنید. با توجه به قانون دوم نیوتن معادله دیفرانسیل حرکت برابر

$$m\ddot{x}+ma\dot{x}+4ma^2x=F_0(1-e^{-at}) \Rightarrow \ddot{x}+a\dot{x}+4a^2x=\frac{F_0}{m}(1-e^{-at})$$

$$\gamma=a/2, \quad \omega_0=2a$$

جواب قسمت همگن

$$m\ddot{x}_{\text{همگن}}+ma\dot{x}_{\text{همگن}}+4ma^2x_{\text{همگن}}=0$$

$$x_{\text{همگن}}=e^{-at/2}\left(A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}\right), \quad \lambda_{1,2}=\pm i\frac{\sqrt{15}}{2}a$$

$$x_{\text{همگن}}=e^{-at/2}\left(A_1e^{i\sqrt{15}at/2}+A_2e^{-i\sqrt{15}at/2}\right)$$

مسئله–۴

$$x^{(1)}_{\text{ناهمگن}} = A, \quad \dot{x}^{(1)}_{\text{ناهمگن}} = \ddot{x}^{(1)}_{\text{ناهمگن}} = 0$$

$$\ddot{x}^{(1)}_{\text{ناهمگن}} + a\dot{x}^{(1)}_{\text{ناهمگن}} + 4a^2 x^{(1)}_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{m}$$

$$x^{(1)}_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{4ma^2}$$

$$x^{(2)}_{\text{ناهمگن}} = Be^{-at}, \quad \dot{x}^{(2)}_{\text{ناهمگن}} = -Bae^{-at}, \quad \ddot{x}^{(2)}_{\text{ناهمگن}} = Ba^2 e^{-at}$$

$$\ddot{x}^{(2)}_{\text{ناهمگن}} + a\dot{x}^{(2)}_{\text{ناهمگن}} + 4a^2 x^{(2)}_{\text{ناهمگن}} = -\frac{F_0}{m} e^{-at}$$

$$4a^2 B e^{-at} = -\frac{F_0}{m} e^{-at} \Rightarrow B = -\frac{F_0}{4ma^2}$$

$$x^{(2)}_{\text{ناهمگن}} = -\frac{F_0}{4ma^2} e^{-at}$$

مسئله-۴

$$x_{\text{ناهمگن}} = x^{(1)}_{\text{ناهمگن}} + x^{(2)}_{\text{ناهمگن}}$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{4ma^2}(1 - e^{-at})$$

جواب قسمت همگن و ناهمگن برابر

$$x = e^{-at/2}\left(A_1 e^{i\sqrt{15}at/2} + A_2 e^{-i\sqrt{15}at/2}\right) + \frac{F_0}{4ma^2}(1 - e^{-at})$$

یا

$$x = e^{-at/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{15}at}{2} + B\sin\frac{\sqrt{15}at}{2}\right) + \frac{F_0}{4ma^2}\left(1 - e^{-at}\right)$$

با اعمال شرایط اولیه داریم

$$x = -\frac{F_0}{4ma^2}e^{-at/2}\left(\cos\frac{\sqrt{15}at}{2} + \frac{3}{\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}a}{2}\right) + \frac{F_0}{4ma^2}\left(1 - e^{-at}\right)$$

نوسانگرها

مسئله-۵ معادله حرکت $x(t)$ یک نوسانگر میرا وقتی ذره m تحت تاثیر یک نیروی هماهنگ میرا $F_0e^{-\alpha t}\cos\omega t$ قرار دارد را بدست آورید.

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F_0e^{-\alpha t}\cos\omega t \Rightarrow \ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{F_0}{m}e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

که $\omega_0^2=k/m$ و $2\gamma=b/m$ است.

جواب قسمت همگن

$$\ddot{x}_{\text{همگن}}+2\gamma\dot{x}_{\text{همگن}}+\omega_0^2x_{\text{همگن}}=0$$

- برای $\gamma>\omega_0$

$$x_{\text{همگن}}(t)=e^{-\gamma t}(A_1e^{\beta t}+A_2e^{-\beta t})$$

که $\beta=\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$

- برای $\gamma=\omega_0$

$$x_{\text{همگن}}(t)=e^{-\gamma t}(A_1+A_2t)$$

مسئله-۵

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

جواب قسمت همگن

$$\ddot{x}_{\text{همگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{همگن}} + \omega_0^2 x_{\text{همگن}} = 0$$

< برای $\gamma < \omega_0$

$$x_{\text{همگن}}(t) = e^{-\gamma t}(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t)$$

که $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

مسئله-۵

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

جواب قسمت ناهمگن

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

جواب پیشنهادی

$$x_{\text{ناهمگن}} = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\text{ناهمگن}} = & -\alpha e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t) \\ & + \omega e^{-\alpha t}(-B_1\sin\omega t + B_2\cos\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} = & (\alpha^2 - \omega^2)e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t) \\ & - 2\alpha\omega e^{-\alpha t}(-B_1\sin\omega t + B_2\cos\omega t)\end{aligned}$$

مسئله–۵

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t} \cos\omega t$$

جواب قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{\text{ناهمگن}} = &-\alpha e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)\\ &+ \omega e^{-\alpha t}(-B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} = &(\alpha^2 - \omega^2)e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)\\ &- 2\alpha\omega e^{-\alpha t}(-B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\alpha^2 - \omega^2)e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) - 2\alpha\omega e^{-\alpha t}(-B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t)\\ &- 2\gamma\alpha e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) + 2\gamma\omega e^{-\alpha t}(-B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t)\\ &+ \omega_0^2 e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) = (F_0/m)e^{-\alpha t} \cos\omega t\end{aligned}$$

مسئله-۵

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t} \cos\omega t$$

جواب قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha^2 - \omega^2) e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) - 2\alpha\omega e^{-\alpha t}(-B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t)\\
&- 2\gamma\alpha e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) + 2\gamma\omega e^{-\alpha t}(-B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t)\\
&+ \omega_0^2 e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) = (F_0/m) e^{-\alpha t} \cos\omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha^2 - \omega^2)(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) - 2\alpha\omega(-B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t)\\
&- 2\gamma\alpha(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) + 2\gamma\omega(-B_1 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t)\\
&+ \omega_0^2(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t) = (F_0/m) \cos\omega t + 0 \sin\omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)B_1 - 2\omega(\alpha - \gamma)B_2 = F_0/m\\
2\omega(\alpha - \gamma)B_1 + (\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)B_2 = 0
\end{cases}$$

مسئله-۵

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

جواب قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = e^{-\alpha t}(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t)$$

$$\begin{cases}(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)B_1 - 2\omega(\alpha - \gamma)B_2 = F_0/m\\ 2\omega(\alpha - \gamma)B_1 + (\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)B_2 = 0\end{cases}$$

$$B_1 = \frac{(F_0/m)(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)}{(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)^2 + 4\gamma^2(\alpha - \gamma)^2}$$

$$B_2 = \frac{-(F_0/m)2\gamma(\alpha - \gamma)}{(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)^2 + 4\gamma^2(\alpha - \gamma)^2}$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$$

مسئله-۵

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t} \cos\omega t$$

جواب قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega t + B_2 \sin\omega t)$$

$$B_1 = \frac{(F_0/m)(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)}{(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)^2 + 4\gamma^2(\alpha - \gamma)^2}$$

$$B_2 = \frac{-(F_0/m)2\gamma(\alpha - \gamma)}{(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)^2 + 4\gamma^2(\alpha - \gamma)^2}$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$B = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)^2 + 4\gamma^2(\alpha - \gamma)^2}}, \tan\phi = \frac{2\gamma(\alpha - \gamma)}{\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha}$$

مسئله-۵

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

جواب قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$B = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)^2 + 4\gamma^2(\alpha - \gamma)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma(\alpha - \gamma)}{\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha}\right)$$

جواب نهایی

- برای $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A_1 e^{\beta t} + A_2 e^{-\beta t}) + Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$$

که $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

- برای $\gamma = \omega_0$

$$x(t) = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t) + Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$$

مسئله-۵

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

جواب قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$B = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha)^2 + 4\gamma^2(\alpha - \gamma)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma(\alpha - \gamma)}{\alpha^2 - \omega^2 + \omega_0^2 - 2\gamma\alpha}\right)$$

جواب نهایی

> برای $\gamma < \omega_0$

$$x_{\text{همگن}}(t) = e^{-\gamma t}(A_1\cos\omega_d t + A_2\sin\omega_d t) + Be^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi)$$

که $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

مسئله–۶ معادله حرکت $x(t)$ یک نوسانگر میرا بحرانی وقتی ذره m از مبدا با سرعت اولیه v_0 تحت تاثیر یک نیروی واداشته $F_0 \sin \omega t$ شروع به حرکت می‌کند را بدست آورید.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t$$

شرایط اولیه

$$x(t=0) = 0, \quad v(t=0) = v_0$$

میرای بحرانی $\gamma = \omega_0$

$$x_{\text{همگن}} = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t)$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$$

$$\dot{x}_{\text{ناهمگن}} = \omega(-B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t)$$

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} = -\omega^2(B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t)$$

مسئله-۶

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

شرایط اولیه

$$x(t=0) = 0, \quad v(t=0) = v_0$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = \omega(-B_1\sin\omega t + B_2\cos\omega t)$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = -\omega^2(B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t)$$

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)(B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t)+2\gamma\omega(-B_1\sin\omega t+B_2\cos\omega t) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

مسئله-۶

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

شرایط اولیه

$$x(t=0) = 0, \quad v(t=0) = v_0$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t$$

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

$$(\omega_0^2-\omega^2)(B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t)+2\gamma\omega(-B_1\sin\omega t+B_2\cos\omega t) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2-\omega^2)B_1 + 2\gamma\omega B_2 = 0 \\ -2\gamma\omega B_2 + (\omega_0^2-\omega^2)B_2 = F_0/m \end{cases}$$

نوسانگرها

مسئله–۶

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

شرایط اولیه

$$x(t=0) = 0, \quad v(t=0) = v_0$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)B_1 + 2\gamma\omega B_2 = 0 \\ -2\gamma\omega B_2 + (\omega_0^2 - \omega^2)B_2 = F_0/m \end{cases}$$

$$B_1 = \frac{-(F_0/m)(2\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} = \frac{-F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}\,\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)}}$$

$$B_2 = \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}\,\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)}}$$

نوسانگرها

مسئله-۶

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

شرایط اولیه

$$x(t=0) = 0, \quad v(t=0) = v_0$$

جواب پیشنهادی قسمت ناهمگن

$$x_{\text{ناهمگن}} = B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t$$

$$B_1 = \frac{-(F_0/m)(2\gamma\omega)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}, \quad B_2 = \frac{(F_0/m)(\omega_0^2-\omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = B\sin(\omega t - \phi)$$

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}, \quad \tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

نوسانگرها

مسئله–۶

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

شرایط اولیه

$$x(t=0)=0, \quad v(t=0)=v_0$$

جواب نهایی

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 + A_2 t) + B\sin(\omega t - \phi)$$

$$B = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \quad \tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

اعمال شرایط اولیه

$$x(t=0)=0, \quad v(t=0)=v_0$$

و

$$x = e^{-\gamma t}[B\sin\phi + v_0 t + B(\gamma\sin\phi - \omega\cos\phi)t] + B\sin(\omega t - \phi)$$