مکانیک تحلیلی

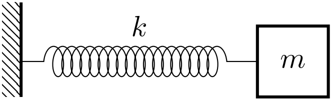
درسنامه چهارم-سیستمهای نوسانی

محمدرضا مظفری

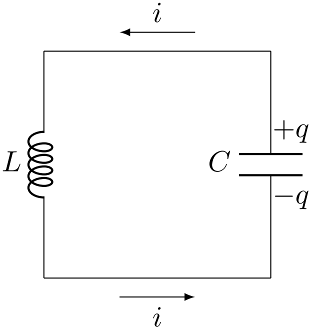
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی



$$m\ddot{x} + kx = 0, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

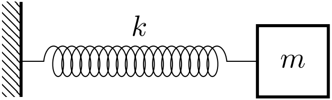


$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = 0$$

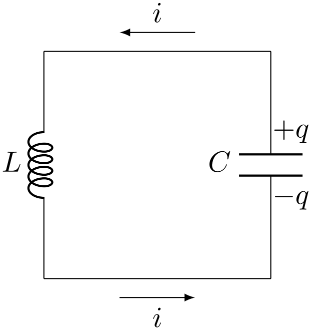
$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}, \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}$$

$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی



$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0 \Rightarrow E = \text{ثابت}$$

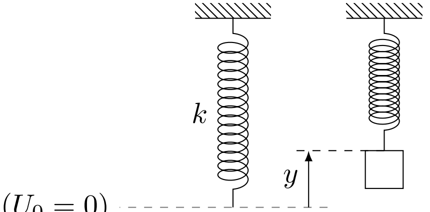


$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

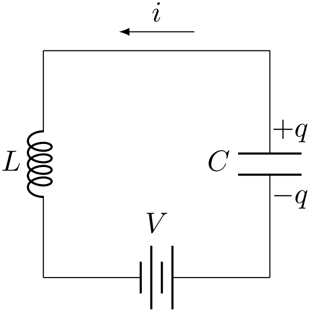
$$E = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{q}(L\ddot{q} + \frac{1}{C}q) = 0 \Rightarrow E = \text{ثابت}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

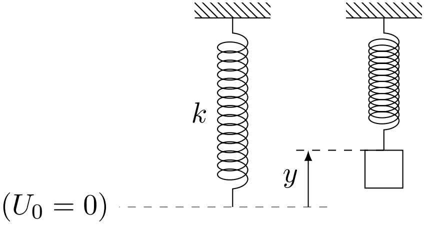


$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -ky - mg$$
$$m\ddot{y} + ky = -mg$$



$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = V$$
$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}, \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}$$
$$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = V, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

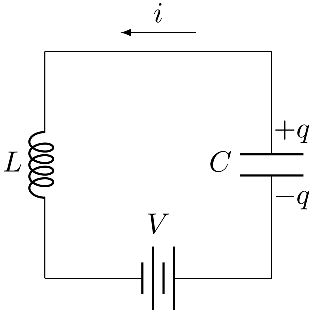


$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}ky^2 + mgy$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + ky\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + ky\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + mg\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = v\left(m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + ky + mg\right) = 0 \Rightarrow E = \text{ثابت}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

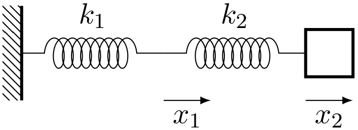


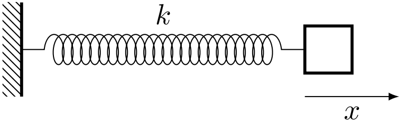
$$E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} - Vq = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} - Vq$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}E = L\dot{q}\ddot{q} + \frac{1}{C}q\dot{q} - V\dot{q} = L\dot{q}\ddot{q} + \frac{q}{C}\dot{q} - V\dot{q}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}E = \dot{q}\left(L\ddot{q} + \frac{q}{C} - V\right) = 0 \Rightarrow E = \text{ثابت}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی



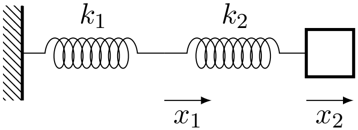


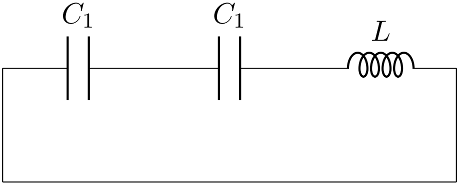
$$F = -k_1 x_1, \quad F = -k_2 x_2$$

$$F = -kx$$

$$x_1 + x_2 = x \Rightarrow -\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2} = -\frac{F}{k} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

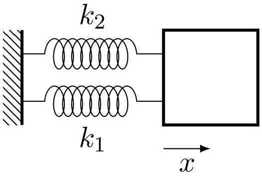


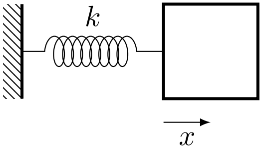


$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی



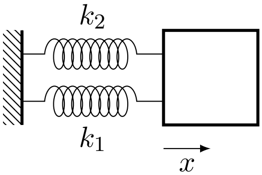


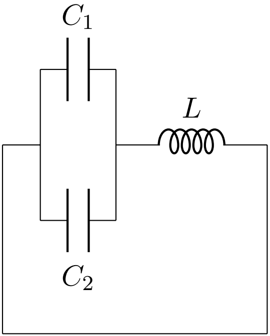
$$F_1 = -k_1 x, \quad F_2 = -k_2 x$$

$$F = -kx$$

$$F_1 + F_2 = F \Rightarrow -k_1 x - k_2 x = -kx \Rightarrow \boxed{k_1 + k_2 = k}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی



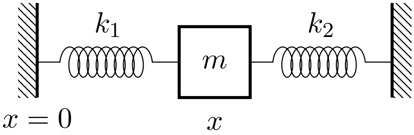


$$k_1 + k_2 = k$$

$$C_1 + C_2 = C$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

مسئله–۱: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.



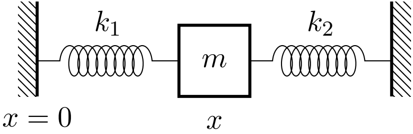
$$m\ddot{x} = -k_1 x - k_2 x$$

$$m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

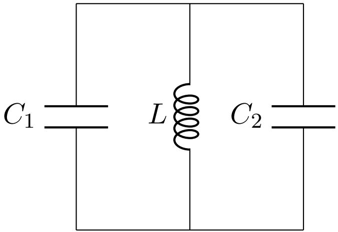
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

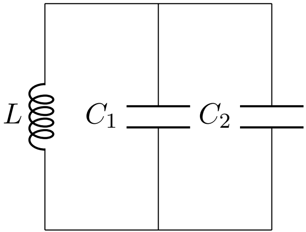
سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

مسئله–۱: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.



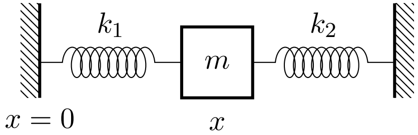
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$



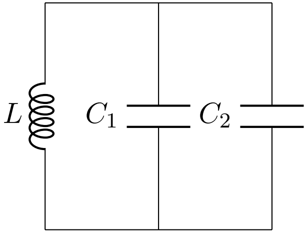


سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

مسئله–۱: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.



$$\omega_0=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$



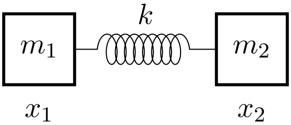
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C_1+C_2}q=0$$

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\dot{q},\quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\ddot{q}$$

$$L\ddot{q}+\frac{1}{C_1+C_2}q=0,\quad \omega_0=\frac{1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

مسئله–۲: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.



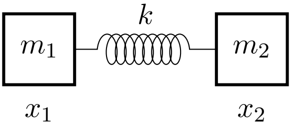
$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_1^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_2^2 x_1 = 0 \end{cases}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

مسئله–۲: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.



$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \omega_1^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_2^2 x_1 = 0 \end{cases} \quad , \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$$

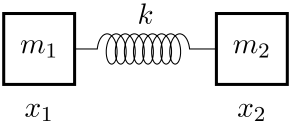
جواب پیشنهادی

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} (-\omega^2 A_1 + \omega_1^2 A_1 - \omega_1^2 A_2) e^{i\omega t} = 0 \\ (-\omega^2 A_2 + \omega_2^2 A_2 - \omega_2^2 A_1) e^{i\omega t} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\omega^2 A_1 + \omega_1^2 A_1 - \omega_1^2 A_2 = 0 \\ -\omega^2 A_2 + \omega_2^2 A_2 - \omega_2^2 A_1 = 0 \end{cases}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

مسئله–۲: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.



$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 + \omega_1^2 A_1 - \omega_1^2 A_2 = 0 \\ -\omega^2 A_2 + \omega_2^2 A_2 - \omega_2^2 A_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\omega_1^2 - \omega^2) A_1 - \omega_1^2 A_2 = 0 \\ -\omega_2^2 A_1 + (\omega_2^2 - \omega^2) A_2 = 0 \end{cases}$$

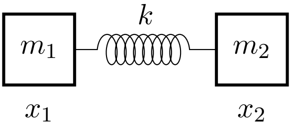
$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & -\omega_1^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_1^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

معادله بالا وقتی جواب مخالف صفر دارد که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد،

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & -\omega_1^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_1^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2) - \omega_1^2 \omega_2^2 = 0$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

مسئله–۲: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.



$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \omega^2)A_1 - \omega_1^2 A_2 = 0 \\ -\omega_2^2 A_1 + (\omega_2^2 - \omega^2)A_2 = 0 \end{cases}$$

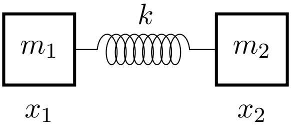
$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2) - \omega_1^2\omega_2^2 = 0 \Rightarrow \omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 = 0$$

$$\omega = 0, \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

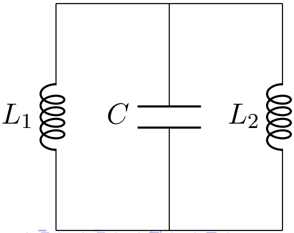
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}} = \sqrt{k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)} = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

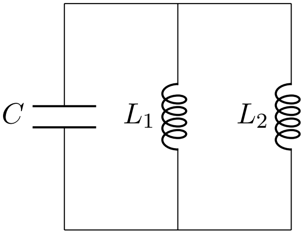
سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

مسئله–۲: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.

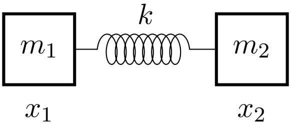


$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

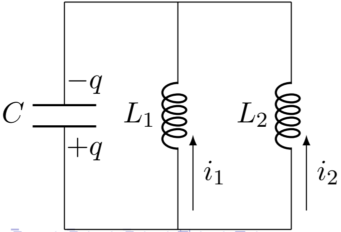




مسئله–۲: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$



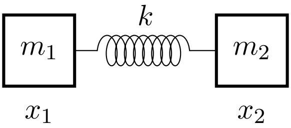
$$L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}(q_1 + q_2) = 0$$

$$L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}(q_1 + q_2) = 0$$

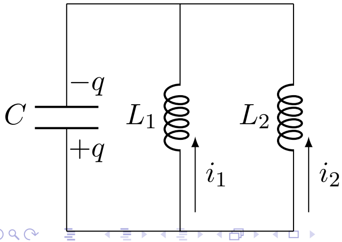
$$i_1 = \dot{q}_1, \quad i_2 = \dot{q}_2$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

مسئله–۲: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$



$$\ddot{q}_1 + \frac{1}{L_1 C}(q_1 + q_2) = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C}$$

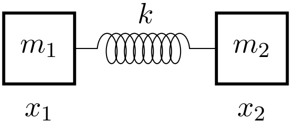
$$\ddot{q}_2 + \frac{1}{L_2 C}(q_1 + q_2) = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C}$$

جواب پیشنهادی

$$q_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad q_2 = A_2 e^{i\omega t}$$

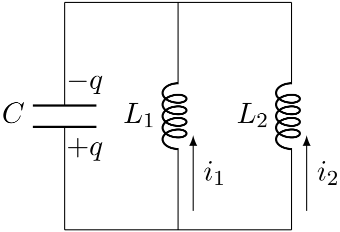
سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی

مسئله–۲: مدار معادل سیستم مکانیکی زیر را بدست آورید.



$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 - \omega^2 & -\omega_1^2 \\ -\omega_2^2 & \omega_1^2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

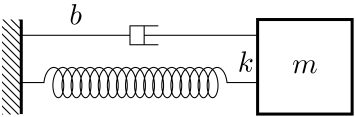


از برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب

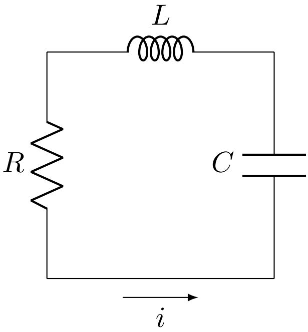
$$(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2) - \omega_1^2\omega_2^2 = 0$$

$$\omega^2 = 0, \quad \omega^2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{\frac{1}{C}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

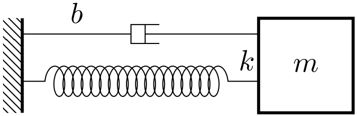


$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{1}{C}q = 0$$

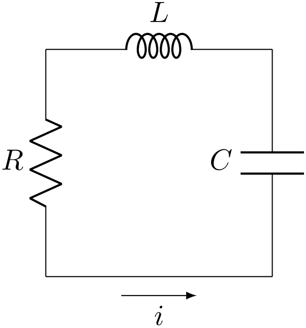
$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}, \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی



$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = \dot{x}(-b\dot{x}) = -b\dot{x}^2$$



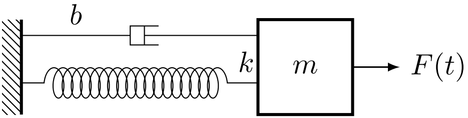
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

$$E = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

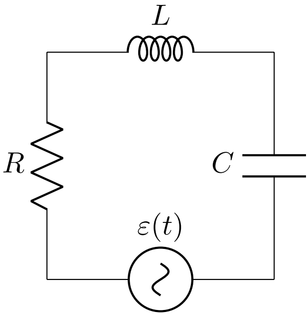
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{q}(L\ddot{q} + \frac{1}{C}q)$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{q}(-R\dot{q}) = -R\dot{q}^2$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F(t) = F_0 \cos \omega t$$

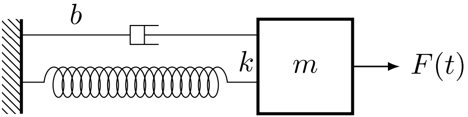


$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{1}{C}q = \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

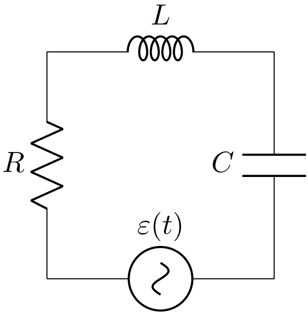
$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}, \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \ddot{q}$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

سیستمهای نوسانی: مدارهای الکتریکی



$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2, \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = -b\dot{x}^2 + F_0\dot{x}\cos\omega t$$



$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = \varepsilon_0 \cos\omega t$$

$$E = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dot{q}(L\ddot{q} + \frac{1}{C}q)$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -R\dot{q}^2 + \varepsilon_0\dot{q}\cos\omega t$$

سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی

اصل برهم‌نهی: وقتی دو موج یا بیشتر، بطور همزمان از قسمتی از یک محیط عبور می‌کنند، هر یک بطور مستقل عمل می‌کنند و جابجایی نهایی در هر نقطه حاصل جمع برداری جابجایی موج انفرادی است.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)\sum_n F_n(t)$$

$$x = x^{\text{همگن}} + x^{\text{ناهمگن}}$$

$$\boxed{\ddot{x}^{\text{همگن}} + 2\gamma\dot{x}^{\text{همگن}} + \omega_0^2 x^{\text{همگن}} = 0 \Rightarrow x^{\text{همگن}} = x^{\text{همگن}}(t)}$$

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_1^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_1^{\text{ناهمگن}} = (1/m)F_1(t) \Rightarrow x_1^{\text{ناهمگن}} = x_1^{\text{ناهمگن}}(t)\\
&\ddot{x}_2^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_2^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_2^{\text{ناهمگن}} = (1/m)F_2(t) \Rightarrow x_2^{\text{ناهمگن}} = x_2^{\text{ناهمگن}}(t)\\
&\vdots\\
&\ddot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_n^{\text{ناهمگن}} = (1/m)F_n(t) \Rightarrow x_n^{\text{ناهمگن}} = x_n^{\text{ناهمگن}}(t)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی

اصل برهم‌نهی: وقتی دو موج یا بیشتر، بطور همزمان از قسمتی از یک محیط عبور می‌کنند، هر یک بطور مستقل عمل می‌کنند و جابجایی نهایی در هر نقطه حاصل جمع برداری جابجایی موج انفرادی است.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)\sum_n F_n(t)$$

$$\boxed{\ddot{x}^{\text{همگن}} + 2\gamma\dot{x}^{\text{همگن}} + \omega_0^2 x^{\text{همگن}} = 0 \Rightarrow x^{\text{همگن}} = x^{\text{همگن}}(t)}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}
\ddot{x}_1^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_1^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_1^{\text{ناهمگن}} = (1/m)F_1(t) \Rightarrow x_1^{\text{ناهمگن}} = x_1^{\text{ناهمگن}}(t) \\
\ddot{x}_2^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_2^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_2^{\text{ناهمگن}} = (1/m)F_2(t) \Rightarrow x_2^{\text{ناهمگن}} = x_2^{\text{ناهمگن}}(t) \\
\vdots \\
\ddot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_n^{\text{ناهمگن}} = (1/m)F_n(t) \Rightarrow x_n^{\text{ناهمگن}} = x_n^{\text{ناهمگن}}(t) \\
\vdots
\end{array}}$$

$$x = x^{\text{همگن}} + \sum_n x_n^{\text{ناهمگن}}$$

سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)F(t) = (1/m)\sum_n f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

$$\ddot{x}^{\text{همگن}} + 2\gamma\dot{x}^{\text{همگن}} + \omega_0^2 x^{\text{همگن}} = 0$$

- تند میرا $\gamma > \omega_0$

$$x^{\text{همگن}} = e^{-\gamma t}(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}), \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

- میرای بحرانی $\gamma = \omega_0$

$$x^{\text{همگن}} = e^{-\gamma t}(C_1 + C_2 t)$$

- کند میرا $\gamma < \omega_0$

$$x^{\text{همگن}} = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \beta), \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)\sum_n f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

$$\ddot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_n^{\text{ناهمگن}} = (1/m) f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

جواب پیشنهادی و مشتقات

$$x_n^{\text{ناهمگن}} = A_n \cos(\omega_n t - \theta_n) + B_n \sin(\omega_n t - \theta_n)$$

$$\dot{x}_n^{\text{ناهمگن}} = \omega_n[-A_n \sin(\omega_n t - \theta_n) + B_n \cos(\omega_n t - \theta_n)]$$

$$\ddot{x}_n^{\text{ناهمگن}} = -\omega_n^2[A_n \cos(\omega_n t - \theta_n) + B_n \sin(\omega_n t - \theta_n)]$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_n^2)A_n + 2\gamma\omega_n B_n = f_n/m \\ -2\gamma\omega_n A_n + (\omega_0^2 - \omega_n^2)B_n = 0 \end{cases}$$

سیستم‌های نوسانی: اصل برهم‌نهی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)\sum_n f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

$$\ddot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_n^{\text{ناهمگن}} = (1/m) f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x_n^{\text{ناهمگن}} = A_n \cos(\omega_n t - \theta_n) + B_n \sin(\omega_n t - \theta_n)$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega_n^2) A_n + 2\gamma\omega_n B_n = f_n/m \\ -2\gamma\omega_n A_n + (\omega_0^2 - \omega_n^2) B_n = 0 \end{cases}$$

$$A_n = \frac{(f_n/m)(\omega_0^2 - \omega_n^2)}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2} = \frac{f_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} \frac{(\omega_0^2 - \omega_n^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}}$$

$$B_n = \frac{(f_n/m)(2\gamma\omega_n)}{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2} = \frac{f_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} \frac{2\gamma\omega_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}}$$

سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)\sum_n f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

$$\ddot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_n^{\text{ناهمگن}} = (1/m) f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x_n^{\text{ناهمگن}} = A_n \cos(\omega_n t - \theta_n) + B_n \sin(\omega_n t - \theta_n)$$

$$\frac{(\omega_0^2 - \omega_n^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} = \cos\phi_n$$

$$\frac{2\gamma\omega_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} = \sin\phi_n$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2}\right)$$

سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)\sum_n f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

$$\ddot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_n^{\text{ناهمگن}} = (1/m) f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x_n^{\text{ناهمگن}} = A_n \cos(\omega_n t - \theta_n) + B_n \sin(\omega_n t - \theta_n)$$

$$A_n = \frac{f_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} \cos\phi_n$$

$$B_n = \frac{f_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} \sin\phi_n$$

$$x_n^{\text{ناهمگن}} = \frac{f_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} \cos(\omega_n t - \theta_n - \phi_n)$$

سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)\sum_n f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

$$\ddot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_n^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_n^{\text{ناهمگن}} = (1/m) f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x_n^{\text{ناهمگن}} = A_n \cos(\omega_n t - \theta_n) + B_n \sin(\omega_n t - \theta_n)$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2}\right)$$

$$x_n^{\text{ناهمگن}} = \frac{f_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} \cos(\omega_n t - \theta_n - \phi_n)$$

سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)\sum_n f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

◄ تند میرا $\gamma > \omega_0$

$$x = x^{\text{همگن}} + x_n^{\text{ناهمگن}}$$

$$x = e^{-\gamma t}(C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}) + \sum_n \frac{f_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} \cos(\omega_n t - \theta_n - \phi$$

$$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2}\right)$$

در جواب نهایی C_1 و C_2 با اعمال شرایط اولیه مشخص می‌شود.

سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)\sum_n f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

- میرای بحرانی $\gamma = \omega_0$

$$x = {\color{red}x^{\text{همگن}}} + {\color{blue}x_n^{\text{ناهمگن}}}$$

$$x = e^{-\gamma t}(C_1 + C_2 t) + + \sum_n \frac{f_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} \cos(\omega_n t - \theta_n - \phi_n)$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2}\right)$$

در جواب نهایی C_1 و C_2 با اعمال شرایط اولیه مشخص می‌شود.

سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = (1/m)\sum_n f_n \cos(\omega_n t - \theta_n)$$

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

- کند میرا $\gamma < \omega_0$

$$x = x^{\text{همگن}} + x^{\text{ناهمگن}}$$

$$x = Ce^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \beta) + \sum_n \frac{f_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_n^2)^2 + (2\gamma\omega_n)^2}} \cos(\omega_n t - \theta_n - \phi_n)$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2}\right)$$

در جواب نهایی C و β با اعمال شرایط اولیه مشخص می‌شود.

سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی

مسئله–۱: یک نوسانگر میرائی را که در آن $\gamma = \frac{\omega_0}{4}$ است را تحت تاثیر نیروی واداشته

$$F = A_1 \cos\omega t + A_3 \cos 3\omega t$$

قرار داده‌ایم مقدار $x(t)$ را محاسبه کنید.
بازای $\gamma < \omega_0$، نوسانگر تحت بررسی یک نوسانگر کند میرا با فرکانس میرایی $\omega_d = \sqrt{15}\omega_0/4$ است.
جواب قسمت همگن:

$$x^{\text{همگن}} = Ce^{-\omega_0 t/4}\cos(\sqrt{15}\omega_0 t/4 + \beta)$$

جوابهای قسمت ناهمگن:

$$\ddot{x}_1^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_1^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_1^{\text{ناهمگن}} = (1/m)A_1\cos\omega t$$

$$\ddot{x}_2^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_2^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_2^{\text{ناهمگن}} = (1/m)A_3\cos 3\omega t$$

مسئله–۱:
بازای $\omega_0 > \gamma$، نوسانگر تحت بررسی یک نوسانگر کند میرا با فرکانس میرایی $\omega_d = \sqrt{15}\omega_0/4$ است.
جواب قسمت همگن:

$$x^{\text{همگن}} = Ce^{-\omega_0 t/4}\cos(\sqrt{15}\omega_0 t/4 + \beta)$$

جوابهای قسمت ناهمگن:

$$\ddot{x}_1^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_1^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_1^{\text{ناهمگن}} = (1/m)A_1\cos\omega t$$

$$x_1^{\text{ناهمگن}} = \frac{A_1/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\cos\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

$$x_1^{\text{ناهمگن}} = \frac{A_1/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega_0^2\omega^2/4}}\cos\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0\omega/2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

مسئله-۱:

بازای $\omega_0 > \gamma$، نوسانگر تحت بررسی یک نوسانگر کند میرا با فرکانس میرایی $\omega_d = \sqrt{15}\omega_0/4$ است.

جواب قسمت همگن:

$$x^{\text{همگن}} = Ce^{-\omega_0 t/4}\cos(\sqrt{15}\omega_0 t/4 + \beta)$$

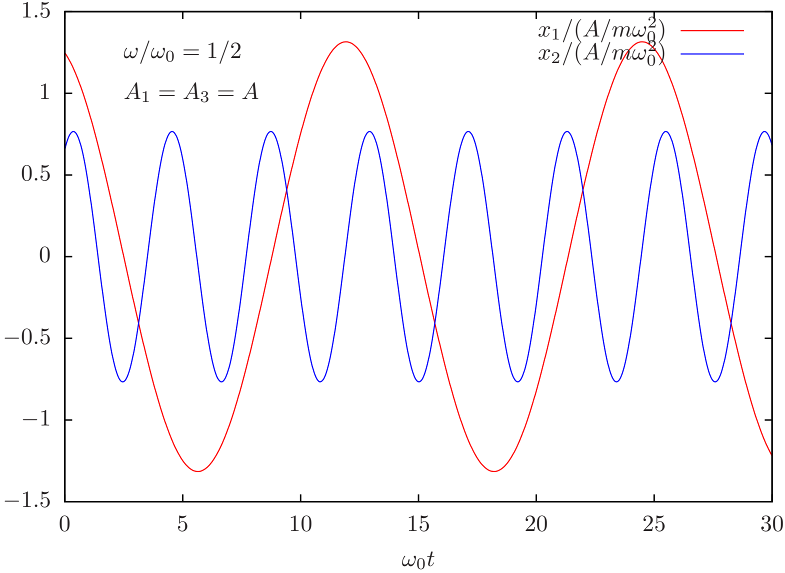
جوابهای قسمت ناهمگن:

$$\ddot{x}_2^{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_2^{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_2^{\text{ناهمگن}} = (1/m)A_3\cos 3\omega t$$

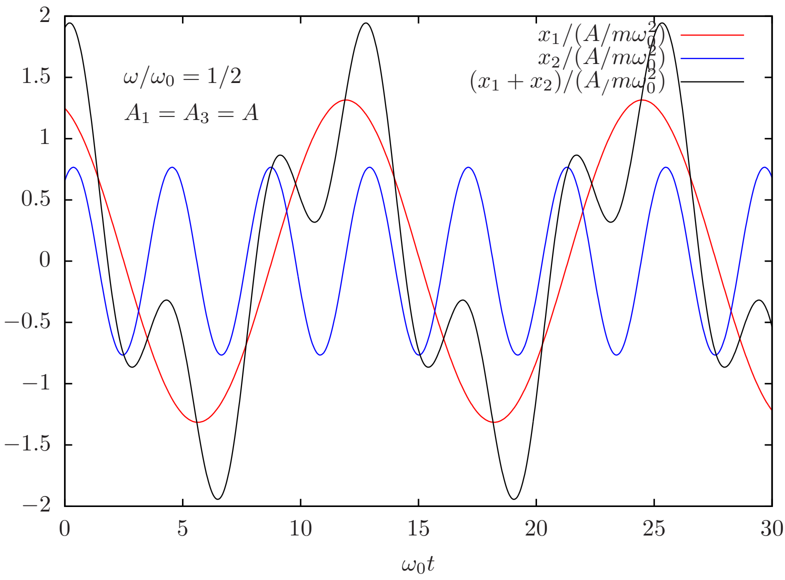
$$x_2^{\text{ناهمگن}} = \frac{A_3/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 36\gamma^2\omega^2}}\cos\left(3\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{6\omega\gamma}{\omega_0^2 - 9\omega^2}\right)\right)$$

$$x_2^{\text{ناهمگن}} = \frac{A_3/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - 9\omega^2)^2 + 9\omega_0^2\omega^2/4}}\cos\left(3\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{3\omega_0\omega/2}{\omega_0^2 - 9\omega^2}\right)\right)$$

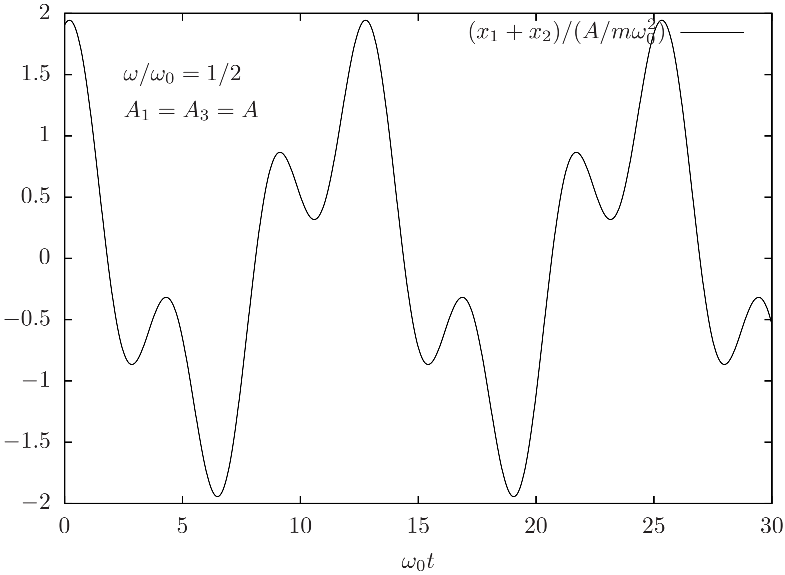
سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی



سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی



سیستمهای نوسانی: اصل برهم‌نهی



مسئله-۱:
بازای $\gamma < \omega_0$، نوسانگر تحت بررسی یک نوسانگر کند میرا با فرکانس میرایی $\omega_d = \sqrt{15}\omega_0/4$ است.
جواب نهایی:

$$x = x^{\text{همگن}} + x_1^{\text{ناهمگن}} + x_2^{\text{ناهمگن}}$$

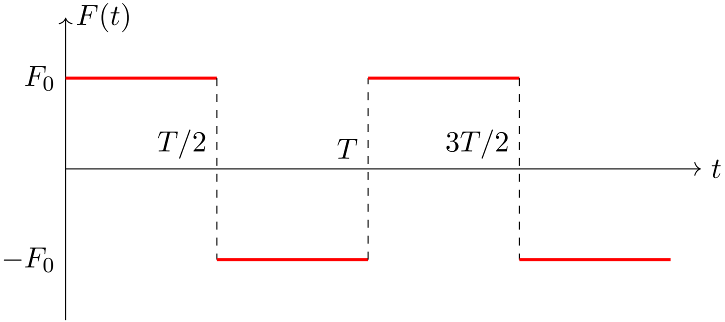
$$\begin{aligned} x &= Ce^{-\omega_0 t/4}\cos(\sqrt{15}\omega_0 t/4 + \beta) \\ &+ \frac{A_1/m}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega_0^2\omega^2/4}}\cos\left(\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0\omega/2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right) \\ &+ \frac{A_3/m}{\sqrt{(\omega_0^2-9\omega^2)^2+9\omega_0^2\omega^2/4}}\cos\left(3\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{3\omega_0\omega/2}{\omega_0^2-9\omega^2}\right)\right) \end{aligned}$$

در جواب نهایی C و β با اعمال شرایط اولیه مشخص می‌شود.

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

نیروهایی که مثلثاتی نیستند ولی متناوب هستند،

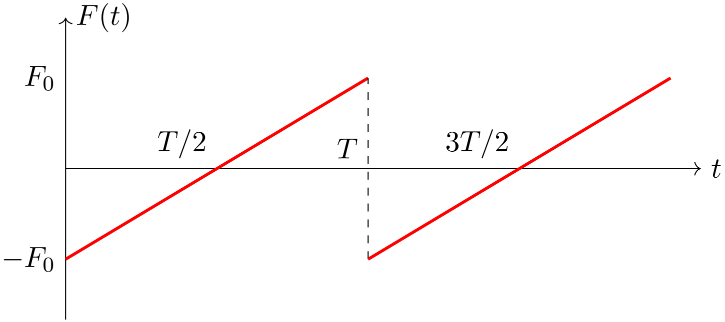
$$F(t) = F(t+T), \quad T = 2\pi/\omega$$



سیستمهای نوسانی: سری فوریه

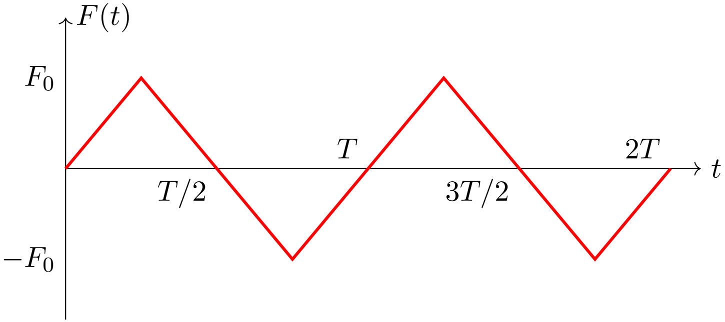
نیروهایی که مثلثاتی نیستند ولی متناوب هستند،

$$F(t) = F(t+T), \quad T = 2\pi/\omega$$



نیروهایی که مثلثاتی نیستند ولی متناوب هستند،

$$F(t) = F(t+T), \quad T = 2\pi/\omega$$



سیستمهای نوسانی: سری فوریه

هر بردار بطور تحلیلی بر حسب بردارهای یکه بصورت زیر مشخص می‌شود،

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_j A_j\hat{e}_j$$

که

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$$

- با توجه به شرط تعامد بردارهای یکه، $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$، هر بردار دلخواهی را می‌توان برحسب بردارهای یکه نمایش داد.
- تعیین مولفه‌های بردار

$$\vec{A} = \sum_j A_j\hat{e}_j$$

$$\vec{A} \cdot \hat{e}_i = \sum_j A_j\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i = \sum_j A_j\delta_{ij} = A_i$$

$$A_i = \vec{A} \cdot \hat{e}_i$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

- برای هر تابع تناوبی
$$f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$$
می‌توان متناظر با بردارهای یکه در دستگاه مختصات، از پایه‌هایی توابع مثلثاتی (سینوس و کوسینوس) برای بسط توابع تناوبی استفاده کرد،
$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$
که $\sin n\theta$ها و $\cos n\theta$ها پایه‌های بسط هستند و همچنین A_nها و B_nها ضریب‌های بسط می‌باشند.
- شرط لازم برای چنین بسطی، متعامد بودن توابع سینوس و کسینوس می‌باشد، یعنی
$$\int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \cos m\theta \cos n\theta \mathrm{d}\theta = \pi\delta_{mn}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin m\theta \cos n\theta \mathrm{d}\theta = 0$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

- تعیین A_0

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{A_0}{2}\mathrm{d}\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{2\pi} \cos n\theta \mathrm{d}\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^{2\pi} \sin n\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta = A_0\pi \Rightarrow \boxed{A_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

- تعیین A_nها وقتی $n \neq 0$

$$f(\theta)\cos m\theta = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos m\theta\cos n\theta + B_n\cos m\theta\sin n\theta)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos m\theta \mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi}\frac{A_0}{2}\cos m\theta \mathrm{d}\theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n\int_0^{2\pi}\cos m\theta\cos n\theta \mathrm{d}\theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n\int_0^{2\pi}\cos m\theta\sin n\theta \mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos m\theta \mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\pi\delta_{mn} = \pi A_m \Rightarrow \boxed{A_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos m\theta \mathrm{d}\theta}$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

- تعیین B_nها

$$f(\theta)\sin m\theta = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin m\theta \cos n\theta + B_n \sin m\theta \sin n\theta)$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin m\theta \mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{A_0}{2}\sin m\theta \mathrm{d}\theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{2\pi} \sin m\theta \cos n\theta \mathrm{d}\theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^{2\pi} \sin m\theta \sin n\theta \mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin m\theta \mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \pi \delta_{mn} = \pi B_m \Rightarrow \boxed{B_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin m\theta \mathrm{d}\theta}$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

$$f(\theta) = f(\theta + 2\pi)$$

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \mathrm{d}\theta, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \mathrm{d}\theta, \quad n = 1, 2, \cdots$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

$$F(t) = F(t+T), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega t\mathrm{dt}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

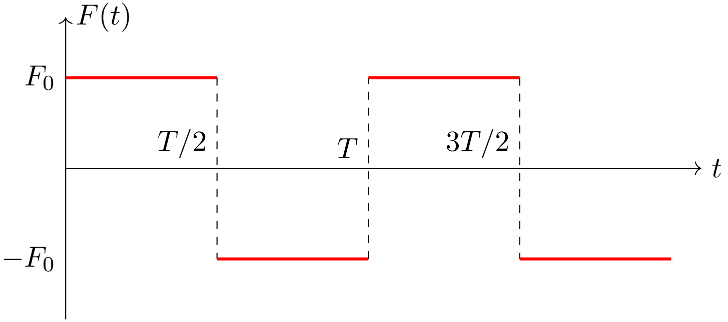
$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega t\mathrm{dt}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

نیروهایی که مثلثاتی نیستند ولی متناوب هستند،

$$F(t) = F(t+T), \quad T = 2\pi/\omega$$

مسئله-۲ ضرایب سری فوریه را برای نیروی متناوب زیر بدست آورید،



$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \le t \le T/2 \\ -F_0, & T/2 \le t \le T \end{cases}$$

مسئله–۲ ضرایب سری فوریه را برای نیروی زیر بدست آورید،

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \leq t \leq T/2 \\ -F_0, & T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$A_n = \frac{2}{T} \left(F_0 \int_0^{T/2} \cos n\omega t \mathrm{d}t - F_0 \int_{T/2}^{T} \cos n\omega t \mathrm{d}t \right)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \left(\frac{F_0}{n\omega} [\sin n\omega t]_0^{T/2} - \frac{F_0}{n\omega} [\sin n\omega t]_{T/2}^{T} \right)$$

$$A_n = \frac{F_0}{n\pi} \left(\left[\sin \frac{2\pi n}{T} t \right]_0^{T/2} - \left[\sin \frac{2\pi n}{T} t \right]_{T/2}^{T} \right) = 0$$

مسئله-۲

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \le t \le T/2 \\ -F_0, & T/2 \le t \le T \end{cases}$$

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$B_n = \frac{2}{T}\left(F_0 \int_0^{T/2} \sin n\omega t dt - F_0 \int_{T/2}^{T} \sin n\omega t dt\right)$$

$$B_n = \frac{2}{T}\left(\frac{F_0}{n\omega}[-\cos n\omega t]_0^{T/2} - \frac{F_0}{n\omega}[-\cos n\omega t]_{T/2}^{T}\right)$$

$$B_n = \frac{F_0}{n\pi}\left(\left[-\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^{T/2} - \left[-\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_{T/2}^{T}\right)$$

مسئله-۲

$$F(t)=\begin{cases}F_0, & 0\le t\le T/2\\ -F_0, & T/2\le t\le T\end{cases}$$

$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t),\qquad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$B_n=-\frac{F_0}{n\pi}\left(\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^{T/2}-\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_{T/2}^{T}\right)$$

$$\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^{T/2}=\cos n\pi-1$$

$$\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_{T/2}^{T}=1-\cos n\pi$$

$$\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^{T/2}-\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_{T/2}^{T}=2(\cos n\pi-1)$$

مسئله-۲

$$F(t)=\begin{cases}F_0, & 0\le t\le T/2\\ -F_0, & T/2\le t\le T\end{cases}$$

$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t),\quad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$B_n=-\frac{F_0}{n\pi}\left(\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^{T/2}-\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_{T/2}^{T}\right)$$

$$\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_0^{T/2}-\left[\cos\frac{2\pi n}{T}t\right]_{T/2}^{T}=2(\cos n\pi-1)$$

$$B_n=\frac{2F_0}{n\pi}(1-\cos n\pi),\quad \cos n\pi=(-1)^n$$

$$B_n=\frac{2F_0}{n\pi}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0, & n=\text{زوج}\\ 4F_0/n\pi, & n=\text{فرد}\end{cases}$$

مسئله–۲

$$F(t)=\begin{cases}F_0, & 0\leq t\leq T/2\\ -F_0, & T/2\leq t\leq T\end{cases}$$

$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t),\quad \omega=\frac{2\pi}{T}$$

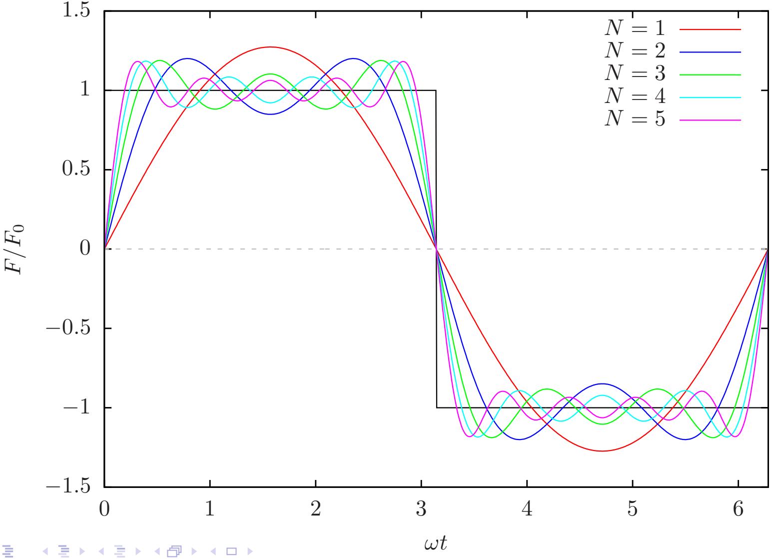
$$A_n=0,\quad B_n=\begin{cases}0, & n=\text{زوج}\\ 4F_0/n\pi, & n=\text{فرد}\end{cases}$$

$$F(t)=\frac{4F_0}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\omega t}{2m+1}$$

$$F(t)=\frac{4F_0}{\pi}\left[\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right]$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

مسئله-۲

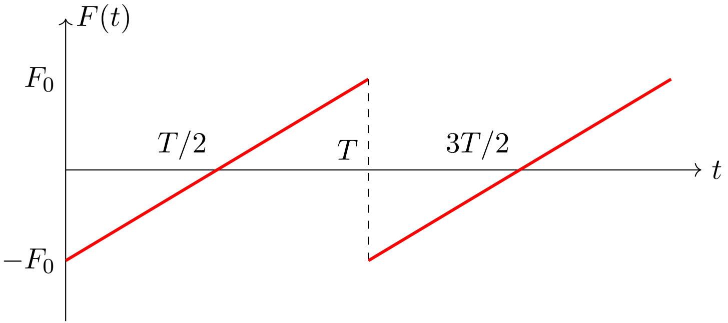


سیستمهای نوسانی: سری فوریه

نیروهایی که مثلثاتی نیستند ولی متناوب هستند،

$$F(t) = F(t+T), \quad T = 2\pi/\omega$$

مسئله–۳ ضرایب سری فوریه را برای نیروی متناوب زیر بدست آورید،



$$F(t) = -F_0 + \frac{2F_0}{T}t$$

مسئله-۳

$$F(t) = -F_0 + \frac{2F_0}{T}t$$

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T \left(-F_0 + \frac{2F_0}{T}t\right)\cos n\omega t \mathrm{dt}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\left[\left(-F_0 + \frac{2F_0}{T}t\right)\frac{1}{(n\omega)}\sin n\omega t - \frac{2F_0}{T}\frac{1}{(n\omega)^2}\cos n\omega t\right]_0^T$$

$$[\sin n\omega t]_0^T = 0$$

$$[\cos n\omega t]_0^T = 0$$

$$A_n = 0$$

مسئله–۳

$$F(t) = -F_0 + \frac{2F_0}{T}t$$

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T \left(-F_0 + \frac{2F_0}{T}t\right) \sin n\omega t dt$$

$$B_n = \frac{2}{T}\left[-\left(-F_0 + \frac{2F_0}{T}t\right)\frac{1}{(n\omega)}\cos n\omega t - \frac{2F_0}{T}\frac{1}{(n\omega)^2}\sin n\omega t\right]_0^T$$

$$[\sin n\omega t]_0^T = 0$$

$$B_n = -\frac{2F_0}{n\pi}$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

مسئله–۳

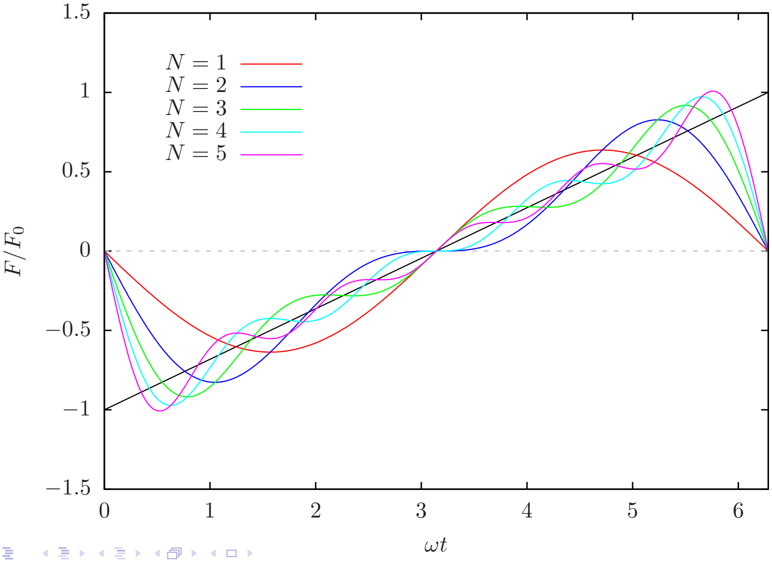
$$F(t) = -F_0 + \frac{2F_0}{T}t$$

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$A_n = 0, \quad B_n = -\frac{2F_0}{n\pi}$$

$$F(t) = -F_0 + \frac{2F_0}{T}t = -\frac{2F_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega t}{n}$$

مسئله-۳



سیستمهای نوسانی: سری فوریه

یادآوری: جواب قسمت ناهمگن **نیروی واداشته مثلثاتی** در نوسانگر میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\begin{Bmatrix}\cos\omega t\\ \sin\omega t\end{Bmatrix}$$

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = A\cos(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_{\text{ناهمگن}} = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = A\sin(\omega t - \phi)$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

جواب قسمت ناهمگن **نیروی واداشته متناوب** در نوسانگر میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{A_0}{2m} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{m}\cos n\omega t + \frac{B_n}{m}\sin n\omega t\right)$$

با استفاده از اصل برنهی

$$x_{\text{ناهمگن}} = \frac{A_0}{2m} + \sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\frac{A_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + (2\gamma n\omega)^2}}\cos(n\omega t - \phi_n) + \frac{B_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + (2\gamma n\omega)^2}}\sin(n\omega t - \phi_n)\Bigg]$$

$$\phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma n\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}\right)$$

مسئله-۴ معادله قسمت همگن و ناهمگن نیروی واداشته و تناوبی نوسانگر کندمیرای زیر را بدست آورید،

$$F(t)=\begin{cases}F_0, & 0\le t\le T/2\\ -F_0, & T/2\le t\le T\end{cases}$$

سری فوریه نیروی

$$F(t)=\frac{4F_0}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\omega t}{2m+1}$$

معادله دیفرانسیل حرکت

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4F_0}{(2m+1)\pi}\sin(2m+1)\omega t$$

$$\ddot{x}_{\text{همگن}}+2\gamma\dot{x}_{\text{همگن}}+\omega_0^2x_{\text{همگن}}=0$$

$$x_{\text{همگن}}=e^{-\gamma t}(C_1\cos(\omega_d t)+C_2\sin(\omega_d t))$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

مسئله–۴

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_{\text{ناهمگن}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4F_0}{(2m+1)\pi} \sin(2m+1)\omega t$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4F_0/((2m+1)\pi)}{\sqrt{(\omega_0^2-(2m+1)^2\omega^2)^2+(2\gamma(2m+1)\omega)^2}} \times \sin\left[(2m+1)\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma(2m+1)\omega}{\omega_0^2-(2m+1)^2\omega^2}\right)\right]$$

سیستمهای نوسانی: سری فوریه

مسئله‌–۵ معادله قسمت همگن و ناهمگن نیروی واداشته و تناوبی نوسانگر کندمیرای زیر را بدست آورید،

$$F(t) = -F_0 + \frac{2F_0}{T}t, \quad 0 \leq t \leq T$$

سری فوریه نیروی

$$F(t) = -\frac{2F_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega t}{n}$$

معادله دیفرانسیل حرکت

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{2F_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega t}{n}$$

$$\ddot{x}_{\text{همگن}} + 2\gamma\dot{x}_{\text{همگن}} + \omega_0^2 x_{\text{همگن}} = 0$$

$$x_{\text{همگن}} = e^{-\gamma t}(C_1\cos(\omega_d t) + C_2\sin(\omega_d t))$$

مسئله-۵

$$\ddot{x}_{\text{ناهمگن}} + 2\gamma \dot{x}_{\text{ناهمگن}} + \omega_0^2 x_{\text{ناهمگن}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_0}{n\pi} \sin n\omega t$$

$$x_{\text{ناهمگن}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2F_0/(n\pi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + (2\gamma n\omega)^2}} \sin\left[n\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma n\omega}{\omega_0^2 - n^2\omega^2}\right)\right]$$

سیستمهای نوسانی متقارن غیر خطی

پتانسیل هماهنگ

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad k > 0$$

یک پتانسیل متقارن است چون تحت $x \to -x$ ناوردا است،

$$V(x) = V(-x)$$

نیروی بازگرداننده یک تابع خطی است

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -kx$$

نوسانگر هماهنگ

پتانسیل

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

یک پتانسیل متقارن با نیروی بازگرداننده‌ی خطی است.

سیستمهای نوسانی متقارن غیر خطی

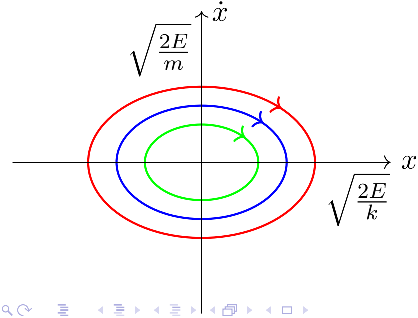
پتانسیل

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

یک پتانسیل متقارن با نیروی بازگرداننده‌ی خطی است.

انرژی

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2E/m} + \frac{x^2}{2E/k} = 1$$: معادله بیضی



- منحنی بسته، مکان هندسی نقاطی در صفحه‌ی $x - \dot{x}$ است که در آن انرژی ذره ثابت و برابر E است.
- صفحه‌ی $x - \dot{x}$ فضای فاز نامیده می‌شود.
- اختلاف انرژی در نمودارها

$$E < E < E$$

مسئله–۶ بررسی نمودار فاز نوسانگر میرا

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = 0$$

برای $\gamma = \omega_0/2$ فرکانس نوسانات کند میرا برابر با $\omega_d = \sqrt{3}\omega_0/2$ و معادله حرکت بصورت زیر داده می‌شود،

$$x = 2x_0 e^{-\omega_0 t/2} \cos(\sqrt{3}\omega_0 t/2 - \pi/3)$$

اگر $\theta = \sqrt{3}\omega_0 t/2$ بنابراین $\omega_0 t/2 = \sqrt{3}\theta/3$ که

$$x = (2x_0/\sqrt{3}) e^{-\sqrt{3}\theta/3} \cos(\theta - \pi/3)$$

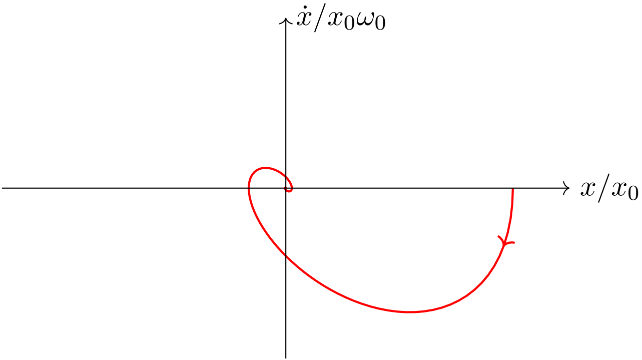
$$\dot{x} = -(x_0\omega_0/\sqrt{3}) e^{-\sqrt{3}\theta/3} (\cos(\theta - \pi/3) + \sqrt{3}\sin(\theta - \pi/3))$$

سیستمهای نوسانی متقارن غیر خطی

بررسی نمودار فاز نوسانگر میرا

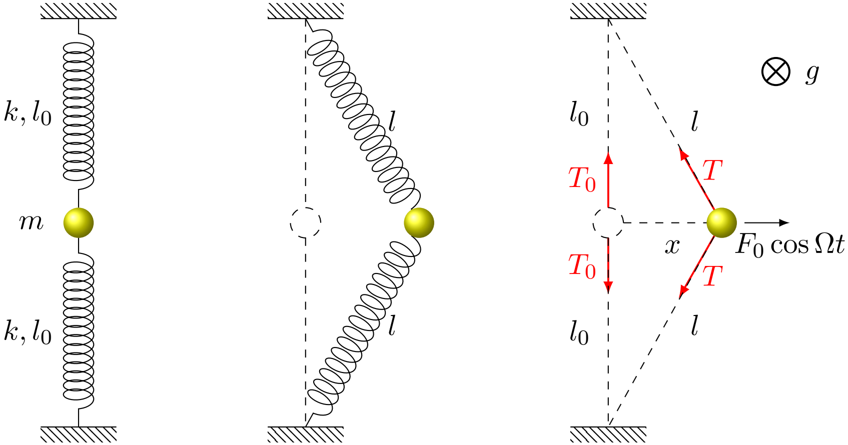
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = 0$$

برای $\gamma = \omega_0/2$



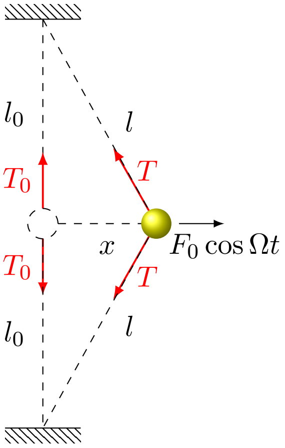
سیستمهای نوسانی متقارن غیر خطی

مسئله–۷



وضعیت تعادل　　وضعیت جابجا شده　　نیروها

مسئله–۷



نیروها

در غیاب نیروی واداشته

$$T = T_0 + k(l - l_0)$$

$$T = T_0 + k(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0)$$

$$m\ddot{x} = -2T\frac{x}{\sqrt{l_0^2 + x^2}}$$

$$m\ddot{x} = -2[T_0 + k(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0)]\frac{x}{\sqrt{l_0^2 + x^2}}$$

سیستمهای نوسانی متقارن غیر خطی

مسئله-۷

در غیاب نیروی واداشته

$$m\ddot{x} = -2[T_0 + k(\sqrt{l_0^2 + x^2} - l_0)]\frac{x}{\sqrt{l_0^2 + x^2}}$$

$$m\ddot{x} = -2\left[T_0 + kl_0\left(\left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^{1/2} - 1\right)\right]\frac{x}{l_0}\left(1 + \frac{x^2}{l_0^2}\right)^{-1/2}$$

برای x های کوچک $(x \ll l_0)$

$$m\ddot{x} = -2\left[T_0 + kl_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{l_0^2} - 1\right)\right]\frac{x}{l_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l_0^2}\right)$$

توانهای x^5 را حذف می کنیم

$$m\ddot{x} = -\frac{2T_0}{l_0}x - \left(\frac{k}{l_0^2} - \frac{T_0}{l_0^3}\right)x^3$$

سیستمهای نوسانی متقارن غیر خطی

مسئله–۷

در غیاب نیروی واداشته

$$m\ddot{x} = -\frac{2T_0}{l_0}x - \left(\frac{k}{l_0^2} - \frac{T_0}{l_0^3}\right)x^3 = -\kappa x - \epsilon x^3$$

- در اینجا ϵ یک کمیت کوچک است که برای فنر سخت مثبت و فنر نرم منفی است.
- پتانسیل مربوط به نیروی

$$F(x) = -\kappa x - \epsilon x^3$$

برابر است با

$$V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 + \frac{1}{4}\epsilon x^4$$

که تحت x به $-x$ ناوردا است،

$$V(x) = V(-x)$$

مسئله-۷

در غیاب نیروی واداشته

$$m\ddot{x} = -\frac{2T_0}{l_0}x - \left(\frac{k}{l_0^2} - \frac{T_0}{l_0^3}\right)x^3 = -\kappa x - \epsilon x^3$$

> با توجه به اینکه ϵ کوچک است، حل معادله‌ی بالا را با فرض

$$x = A\cos\omega t$$

پیش می‌بریم.

$$m\ddot{x} = -\kappa A\cos\omega t - \epsilon A^3\cos^3\omega t$$

$$m\ddot{x} = -\kappa A\cos\omega t - \epsilon A^3\left(\frac{3}{4}\cos\omega t + \frac{1}{4}\cos 3\omega t\right)$$

$$m\ddot{x} = -(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t - \frac{1}{4}\epsilon A^3\cos 3\omega t$$

مسئله-۷

در غیاب نیروی واداشته

$$m\ddot{x} = -\frac{2T_0}{l_0}x - \left(\frac{k}{l_0^2} - \frac{T_0}{l_0^3}\right)x^3 = -\kappa x - \epsilon x^3$$

> با توجه به اینکه ϵ کوچک است، حل معادله‌ی بالا را با فرض

$$x = A\cos\omega t$$

پیش می‌بریم.

$$m\ddot{x} = -(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t - \frac{1}{4}\epsilon A^3\cos 3\omega t$$

$$\mathrm{d}\dot{x} = -\frac{1}{m}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t\mathrm{d}t - \frac{1}{4m}\epsilon A^3\cos 3\omega t\mathrm{d}t$$

$$\dot{x} = -\frac{1}{m\omega}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\sin\omega t - \frac{1}{12m\omega}\epsilon A^3\sin 3\omega t + C_1$$

سیستمهای نوسانی متقارن غیر خطی

مسئله–۷

در غیاب نیروی واداشته

$$m\ddot{x} = -\frac{2T_0}{l_0}x - \left(\frac{k}{l_0^2} - \frac{T_0}{l_0^3}\right)x^3 = -\kappa x - \epsilon x^3$$

> با توجه به اینکه ϵ کوچک است، حل معادله‌ی بالا را با فرض

$$x = A\cos\omega t$$

پیش می‌بریم.

$$\dot{x} = -\frac{1}{m\omega}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\sin\omega t - \frac{1}{12m\omega}\epsilon A^3 \sin 3\omega t + C_1$$

$$\mathrm{d}x = -\frac{1}{m\omega}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\sin\omega t\mathrm{d}t - \frac{1}{12m\omega}\epsilon A^3 \sin 3\omega t\mathrm{d}t + C_1\mathrm{d}t$$

$$x = \frac{1}{m\omega^2}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t + \frac{1}{36m\omega^2}\epsilon A^3 \cos 3\omega t + C_1 t + C_0$$

سیستمهای نوسانی متقارن غیر خطی

مسئله-۷

در غیاب نیروی واداشته

$$m\ddot{x} = -\frac{2T_0}{l_0}x - \left(\frac{k}{l_0^2} - \frac{T_0}{l_0^3}\right)x^3 = -\kappa x - \epsilon x^3$$

> با توجه به اینکه ϵ کوچک است، حل معادله‌ی بالا را با فرض

$$x = A\cos\omega t$$

پیش می‌بریم.

$$x = \frac{1}{m\omega^2}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t + \frac{1}{36m\omega^2}\epsilon A^3\cos 3\omega t + C_1 t + C_0$$

اگر $C_0 = C_1 = 0$

$$x = \frac{1}{m\omega^2}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t + \frac{1}{36m\omega^2}\epsilon A^3\cos 3\omega t$$

مسئله–۷

در غیاب نیروی واداشته

$$m\ddot{x} = -\frac{2T_0}{l_0}x - \left(\frac{k}{l_0^2} - \frac{T_0}{l_0^3}\right)x^3 = -\kappa x - \epsilon x^3$$

< مقایسه جواب پیشنهادی با جواب بدست آمده از انتگرالگیری معادله‌ی حرکت

$$\text{جواب پیشنهادی} : \ x = A\cos\omega t$$

$$\text{جواب انتگرالگیری} : \ x = \frac{1}{m\omega^2}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t + \frac{1}{36m\omega^2}\epsilon A^3\cos 3\omega t$$

که

$$A\cos\omega t = \frac{1}{m\omega^2}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t + \frac{1}{36m\omega^2}\epsilon A^3\cos 3\omega t$$

اگر از جمله‌ی $\cos 3\omega t$ در مقایسه با جمله $\cos\omega t$ در سمت راست صرفه‌نظر کنیم

$$A\cos\omega t = \frac{1}{m\omega^2}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t \Rightarrow A = \frac{1}{m\omega^2}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)$$

سیستمهای نوسانی متقارن غیر خطی

مسئله–۷

در غیاب نیروی واداشته

$$m\ddot{x} = -\frac{2T_0}{l_0}x - \left(\frac{k}{l_0^2} - \frac{T_0}{l_0^3}\right)x^3 = -\kappa x - \epsilon x^3$$

< مقایسه جواب پیشنهادی با جواب بدست آمده از انتگرالگیری معادله‌ی حرکت

جواب پیشنهادی : $x = A\cos\omega t$

جواب انتگرالگیری : $x = \frac{1}{m\omega^2}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t + \frac{1}{36m\omega^2}\epsilon A^3\cos 3\omega t$

$$A = \frac{1}{m\omega^2}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)$$

فرکانس تابع دامنه است : $\omega^2 = \frac{\kappa}{m} + \frac{3\epsilon}{4m}A^2$

سیستمهای نوسانی متقارن غیر خطی

مسئله–۷

در حضور نیروی واداشته

$$m\ddot{x} = -\frac{2T_0}{l_0}x - \left(\frac{k}{l_0^2} - \frac{T_0}{l_0^3}\right)x^3 + F_0\cos\Omega t = -\kappa x - \epsilon x^3 + F_0\cos\Omega t$$

جواب پیشنهادی

$$x = A\cos\omega t$$

جواب انتگرالگیری

$$x = \frac{1}{m\omega^2}(\kappa A + \frac{3}{4}\epsilon A^3)\cos\omega t - \frac{1}{m\Omega^2}\cos\Omega t + \frac{1}{36m\omega^2}\epsilon A^3\cos 3\omega t$$

سیستمهای نوسانی نامتقارن غیر خطی

برای نیروی

$$F(x) = -\kappa x - \lambda x^2$$

که یک نیروی غیر خطی است، پتانسیل بصورت

$$V(x) = \frac{1}{2}\kappa x^2 + \frac{1}{3}\lambda x^3$$

داده می‌شود که یک پتانسیل نامتقارن است،

$$V(x) \neq V(-x)$$

در اینجا قصد داریم حل معادله‌ی

$$m\ddot{x} = -\kappa x - \lambda x^2$$

را وقتی λ کوچک است بطور اختلالی پیش می‌بریم.

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \tilde{\lambda} x^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa/m}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda/m$$

سیستمهای نوسانی نامتقارن غیر خطی

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \tilde{\lambda} x^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa/m}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda/m$$

بخاطر کوچک بودن جمله $\tilde{\lambda}x^2$ می‌توان جواب را بصورت تصحیحاتی روی x_0 بصورت نوشت،

$$x = x_0 + \tilde{\lambda} x_1 + \tilde{\lambda}^2 x_2 + \cdots$$

که در آن x_0 در معادله‌ی

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

صدق می‌کند. در ادامه جواب اختلالی را فقط به جمله $\tilde{\lambda}$ محدود می کنیم، یعنی

$$x = x_0 + \tilde{\lambda} x_1$$

بدینترتیب

$$\ddot{x}_0 + \tilde{\lambda}\ddot{x}_1 = -\omega_0^2(x_0 + \tilde{\lambda}x_1) - \tilde{\lambda}(x_0^2 + 2\tilde{\lambda}x_0x_1 + \tilde{\lambda}^2x_1^2) = -\omega_0^2 x_0 - \tilde{\lambda}(\omega_0^2 x_1 + x_0^2)$$

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^2$$

سیستمهای نوسانی نامتقارن غیر خطی

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \tilde{\lambda} x^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa/m}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda/m$$

معادله اول : $\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$

معادله دوم : $\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^2$

فرض کنیم شرایط اولیه در معادله‌ی اول طوری هستند که جواب زیر بدست می‌آید،

$$x_0 = A \sin \omega_0 t$$

بدینترتیب در معادله دوم

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -A^2 \sin^2 \omega_0 t = -\frac{A^2}{2}(1 - \cos 2\omega_0 t)$$

جواب پیشنهادی برای قسمت ناهمگن

$$x_1^{\text{ناهمگن}} = B \cos 2\omega_0 t + C, \quad B = \frac{A^2}{6\omega_0^2}, \quad C = \frac{A^2}{2\omega_0^2}$$

سیستمهای نوسانی نامتقارن غیر خطی

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \tilde{\lambda} x^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa/m}, \quad \tilde{\lambda} = \lambda/m$$

$$\text{معادله اول}: \ \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$$\text{معادله دوم}: \ \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -x_0^2$$

جواب معادله‌ی اول،

$$x_0 = A \sin \omega_0 t$$

جواب معادله دوم

$$x_1^{\text{ناهمگن}} = \frac{A^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t + \frac{A^2}{2\omega_0^2}$$

جواب نهایی

$$x = x_0 + \tilde{\lambda} x_1 = A \sin \omega_0 t + \frac{\tilde{\lambda} A^2}{6\omega_0^2} (\cos 2\omega_0 t + 3)$$

$$x = x_0 + \tilde{\lambda} x_1 = A \sin \omega_0 t + \frac{\lambda A^2}{6m\omega_0^2} (\cos 2\omega_0 t + 3)$$