مکانیک تحلیلی

آنالیز برداری و حرکت در دو و سه بُعد

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

بردارها

بطور کلی کمیتهای فیزیکی به سه دسته تقسیم می‌شوند،

- کمیتهای اسکالر (Scalar)

فقط بزرگی دارند.

مانند: جرم، دما، زمان، انرژی و ...

- کمیتهای برداری (Vector)

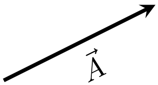
علاوه بر بزرگی شامل جهتگیری فضایی نیز می‌باشند.

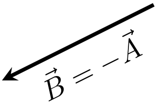
مانند: تغییر مکان، سرعت، شتاب، نیرو، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و ...

- کمیتهای تانسوری (Tensor)

موکول به آینده ...

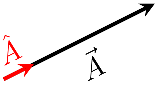
اندازه و جهت

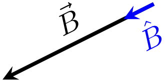




$$A = |\vec{A}|$$

$$B = |\vec{B}| = |-\vec{A}| = A$$

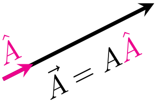




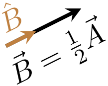
$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad |\hat{A}| = 1$$

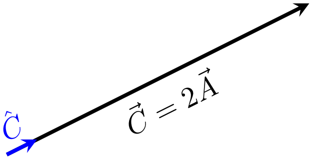
$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{-\vec{A}}{A} = -\hat{A}, \quad |\hat{B}| = 1$$

اندازه و جهت



$$A = |\vec{A}|, \quad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad \vec{A} = A\hat{A}$$





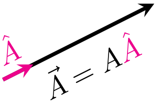
$$B = |\vec{B}| = |\frac{1}{2}\vec{A}| = \frac{1}{2}|\vec{A}| = \frac{1}{2}A$$

$$C = |\vec{C}| = |2\vec{A}| = 2|\vec{A}| = 2A$$

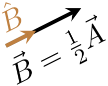
$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{\frac{1}{2}\vec{A}}{\frac{1}{2}A} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A}$$

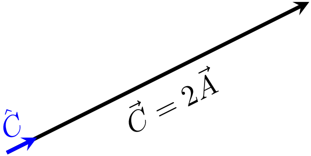
$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{2\vec{A}}{2A} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A}$$

اندازه و جهت



$$A = |\vec{A}|, \quad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad \vec{A} = A\hat{A}$$





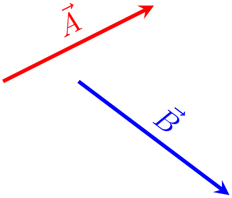
$$B = |\vec{B}| = \frac{1}{2}A, \quad \hat{B} = \hat{A}$$

$$\vec{B} = |\vec{B}|\hat{B} = \frac{1}{2}A\hat{A} = \frac{1}{2}\vec{A}$$

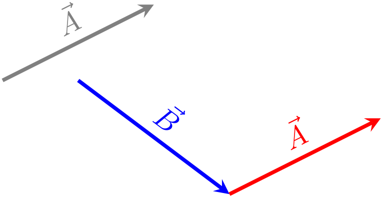
$$C = |\vec{C}| = 2A, \quad \hat{C} = \hat{A}$$

$$\vec{C} = |\vec{C}|\hat{C} = 2A\hat{A} = 2\vec{A}$$

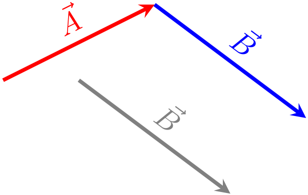
جمع هندسی بردارها



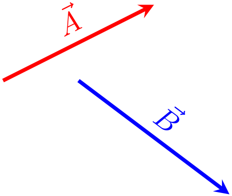
جمع برداری $\vec{B}+\vec{A}$ با روش مثلثی



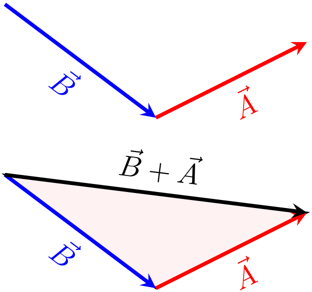
جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش مثلثی



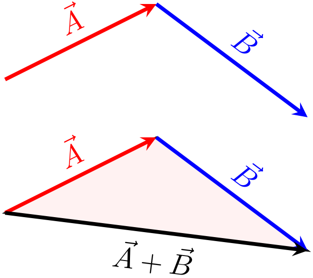
جمع هندسی بردارها



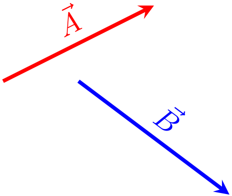
جمع برداری $\vec{B}+\vec{A}$ با روش مثلثی



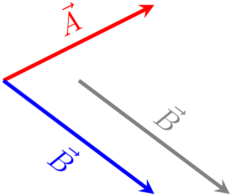
جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش مثلثی

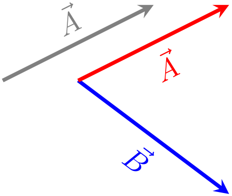


جمع هندسی بردارها

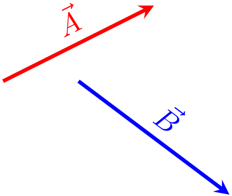


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع

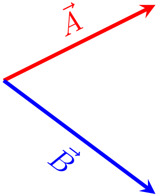


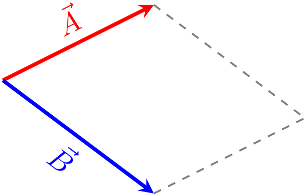


جمع هندسی بردارها

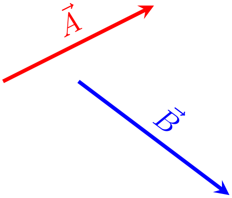


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع

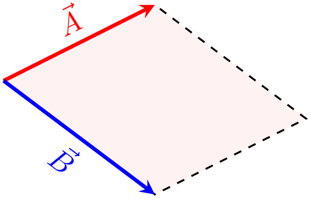


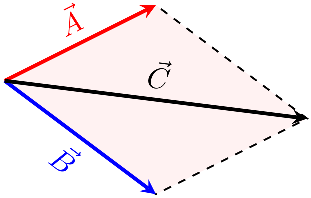


جمع هندسی بردارها

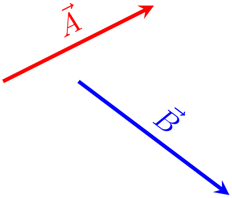


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع

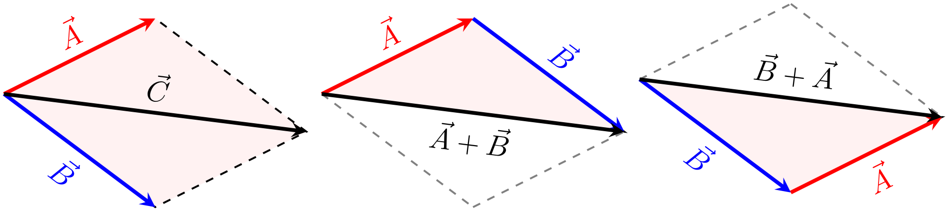




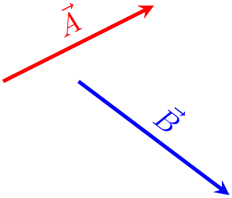
جمع هندسی بردارها



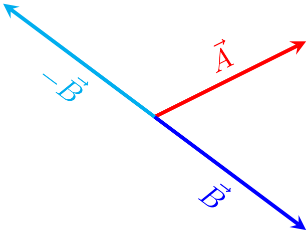
از مقایسه روش مثلثی و روش متوازی الاضلاع نتیجه می‌گیریم که $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

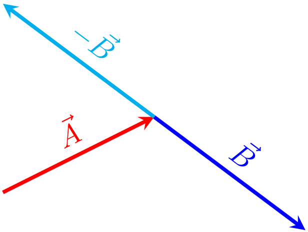


جمع هندسی بردارها

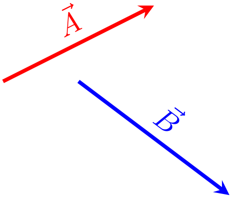


جمع برداری $\vec{A} - \vec{B}$

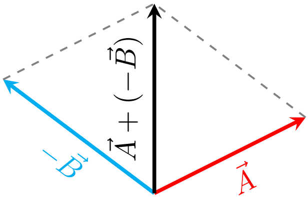


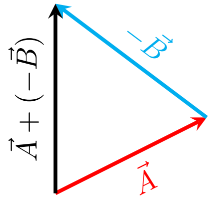


جمع هندسی بردارها

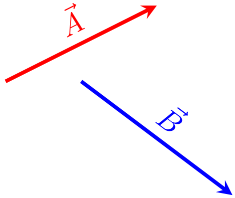


جمع برداری $\vec{A}-\vec{B}$

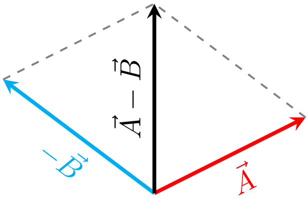


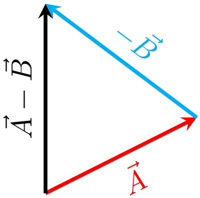


جمع هندسی بردارها

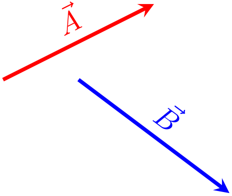


جمع برداری $\vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{A} - \vec{B}$

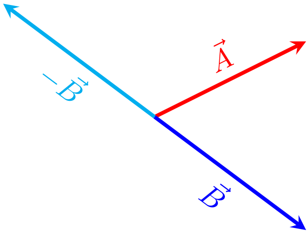


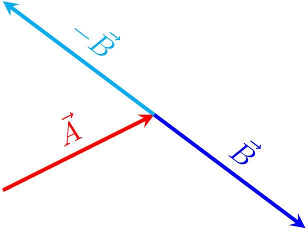


جمع هندسی بردارها

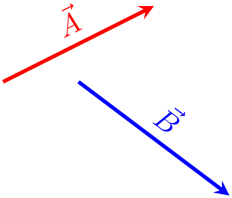


جمع برداری $-\vec{B}+\vec{A}$

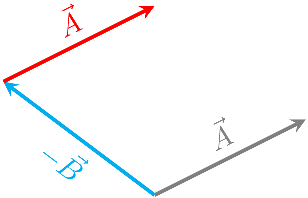


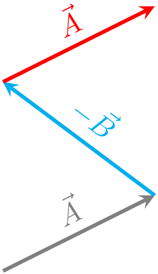


جمع هندسی بردارها

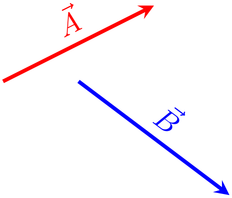


جمع برداری $-\vec{B}+\vec{A}$

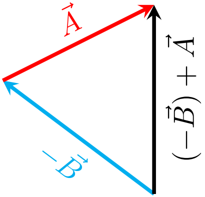


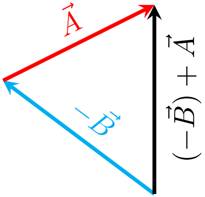


جمع هندسی بردارها

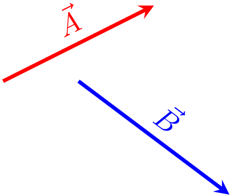


جمع برداری $-\vec{B} + \vec{A}$

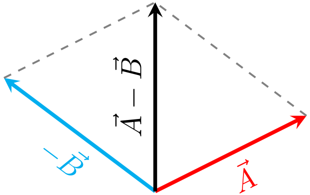


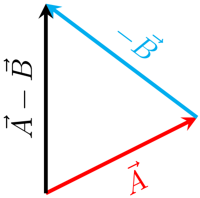


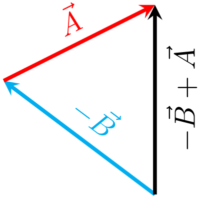
جمع هندسی بردارها



جمع برداری $\vec{A} + (-\vec{B}) = (-\vec{B}) + \vec{A} = \vec{A} - \vec{B}$

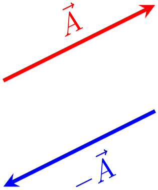






جمع هندسی بردارها

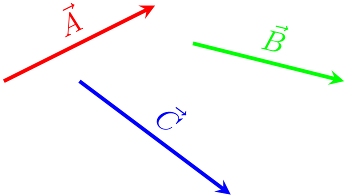
جمع یک بردار با معکوس جهت خود



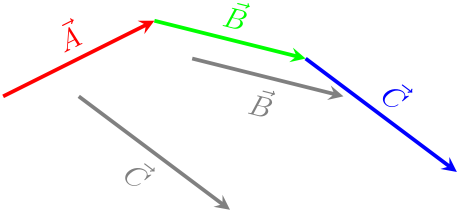
$$\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = 0$$

$$\vec{A} = 0 + \vec{A} = \vec{A} + 0$$

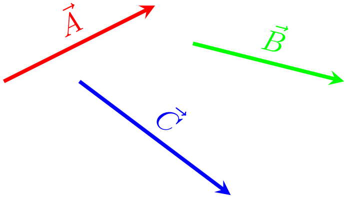
خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری



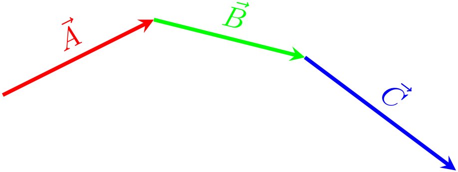
جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

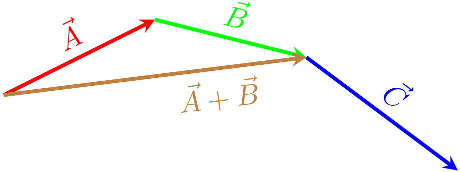


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

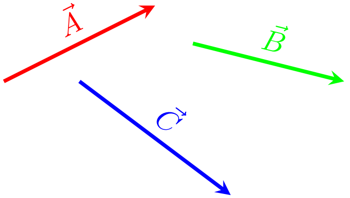


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

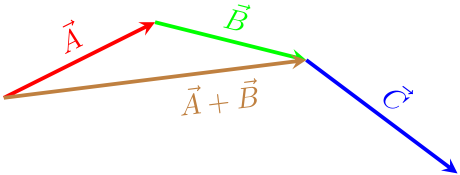


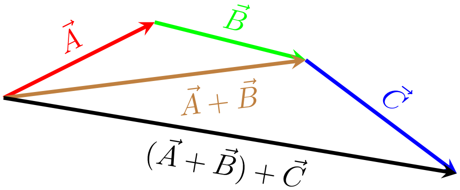


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

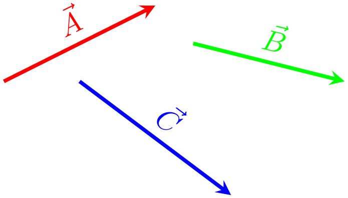


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

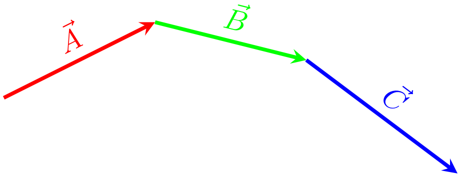


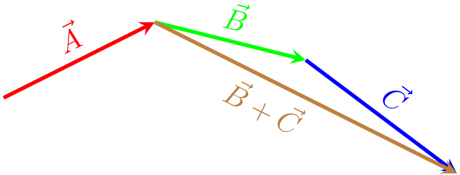


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

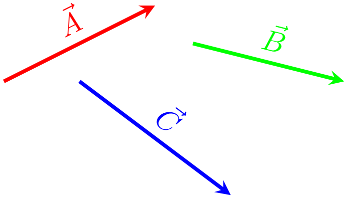


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

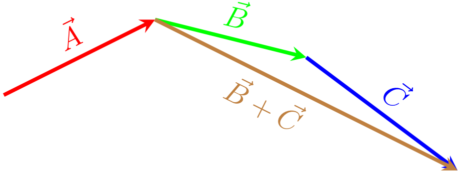


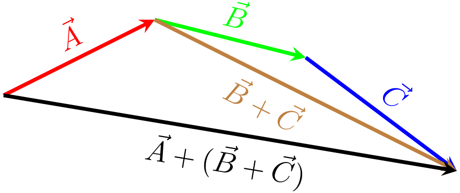


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

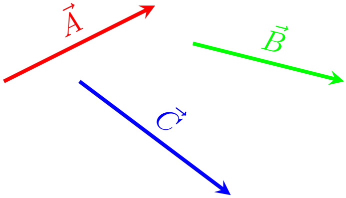


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

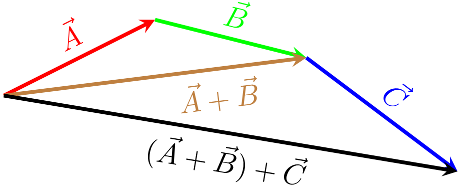


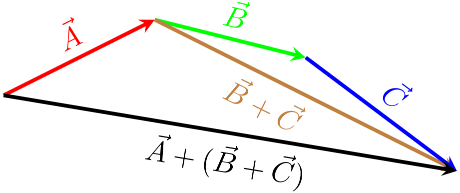


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری



جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$





ضرب برداری

بطورکلی ضرب برداری به دو دسته تقسیم می‌شوند،

- ضرب داخلی (inner product)

نتیجه حاصلضرب داخلی دو بردار یک اسکالر است.

کاربردها: محاسبه کار، محاسبه انرژی یک دوقطبی در حضور میدان خارجی و ...

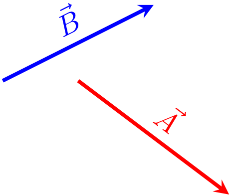
- ضرب خارجی (cross product or vector product or outer product)

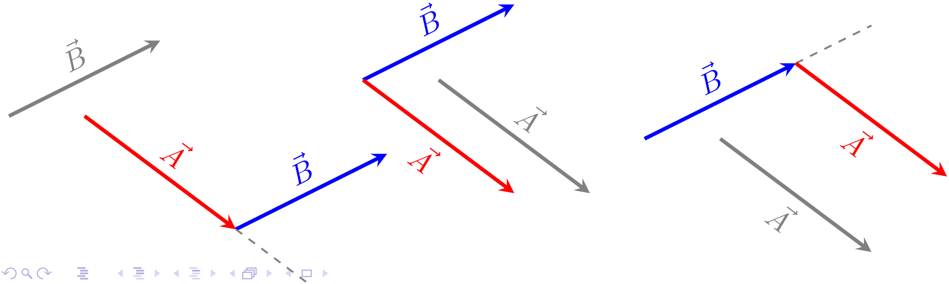
نتیجه حاصلضرب خارجی دو بردار یک بردار است.

کاربردها: محاسبه گشتاور نیرو، محاسبه اندازه حرکت زاویه‌ای و ...

ضرب داخلی

بررسی زاویه‌ی دو بردار





تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

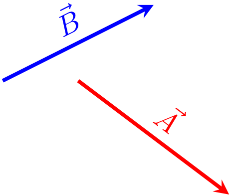
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

ضرب داخلی

بررسی زاویه‌ی دو بردار



تعریف ضرب داخلی

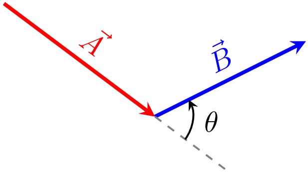
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

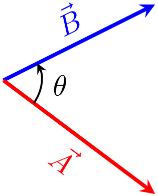
که

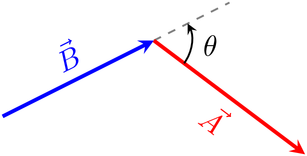
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$







ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

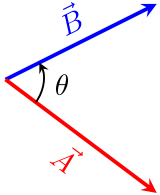
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



محدوده‌ی ضرب داخلی دو بردار

$$0 \le \theta \le \pi \Rightarrow -1 \le \cos\theta \le 1$$

$$-AB \le AB\cos\theta \le AB$$

$$-AB \le \vec{A}\cdot\vec{B} \le AB$$

$$|\vec{A}\cdot\vec{B}| \le AB$$

حالتهای خاص ضرب داخلی دو بردار

$$\theta = 0 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = AB$$

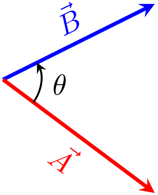
$$\theta = \pi \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = -AB$$

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

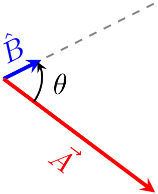
$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

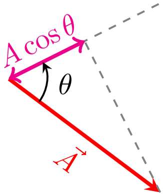
<u>تصویر بردار $\vec{A}$ بر راستا بردار $\vec{B}$</u>

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{B} = A\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\hat{B} = A\cos\theta$$





تعریف ضرب داخلی

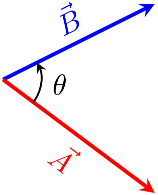
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

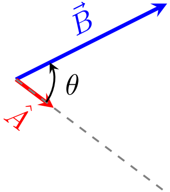


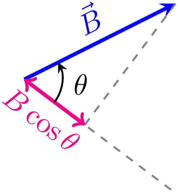
تصویر بردار $\vec{B}$ بر راستا بردار $\vec{A}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\frac{\vec{A}}{A}\cdot\vec{B} = B\cos\theta$$

$$\hat{A}\cdot\vec{B} = B\cos\theta$$





ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

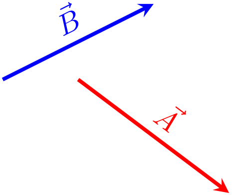
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

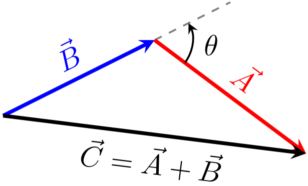
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$





قانون کوسینوسها

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = C^2, \quad \vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$$

$$\vec{B}\cdot\vec{B} = B^2, \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

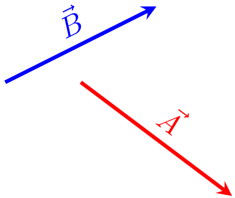
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

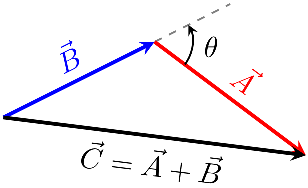
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$





قانون کوسینوسها

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

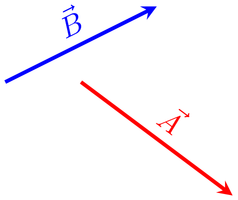
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

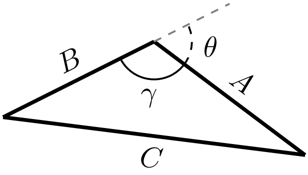
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$





قانون کوسینوسها

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

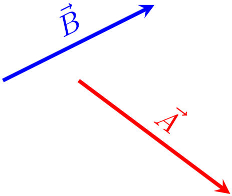
$$\gamma = \pi - \theta \Rightarrow \cos\gamma = \cos(\pi - \theta)$$

$$\cos\gamma = -\cos\theta$$

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}$$

ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی دو بردار



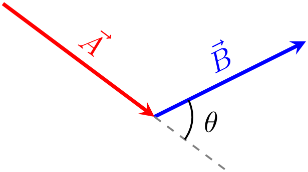
$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

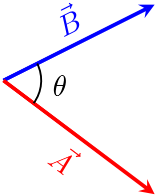
که

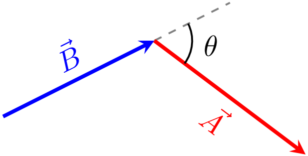
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$







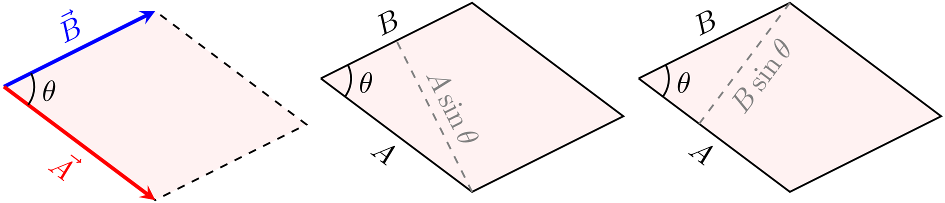
ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی دو بردار

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

<u>مساحت سطح متوازی الاضلاع تشکیل شده بوسیله بردارها</u>

$$S = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta \quad S = BH = B(A\sin\theta) \quad S = AH = A(B\sin\theta)$$



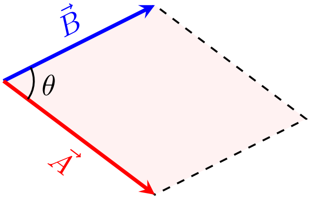
ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی دو بردار

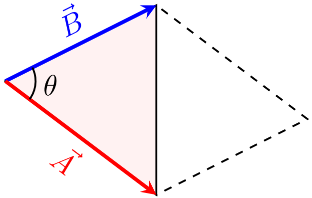
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

<u>مساحت مثلث تشکیل شده بوسیله بردارها</u>

$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

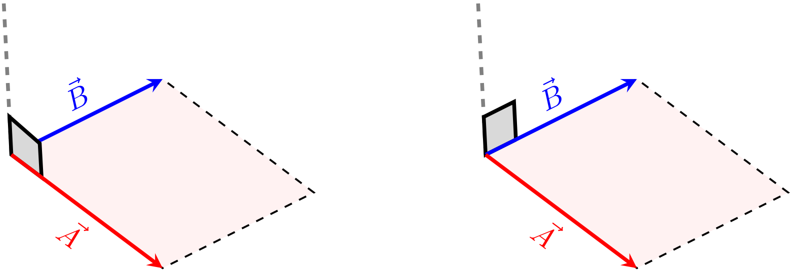


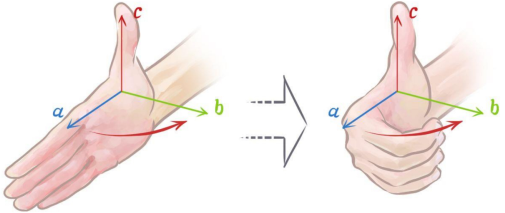
$$S = \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$$



ضرب خارجی

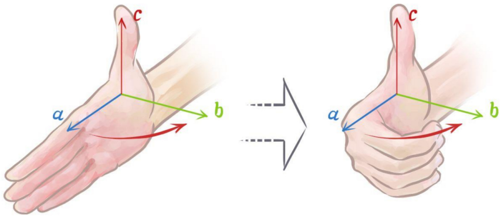
تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست

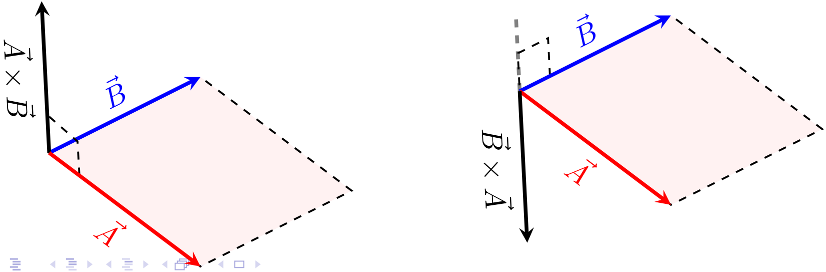




ضرب خارجی

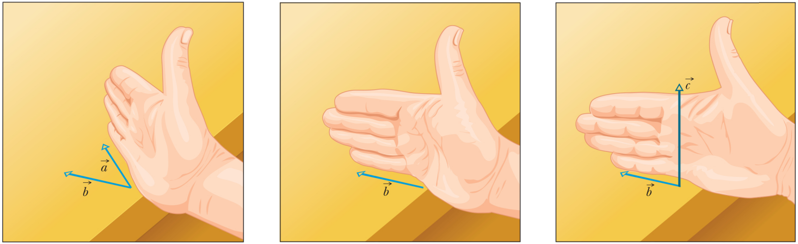
تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست



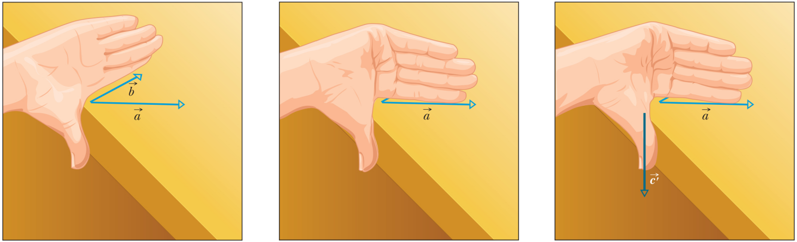


ضرب خارجی

تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست

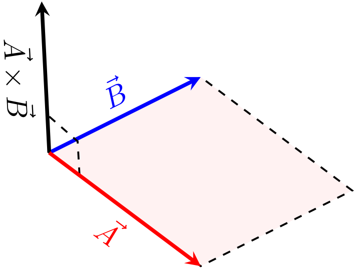


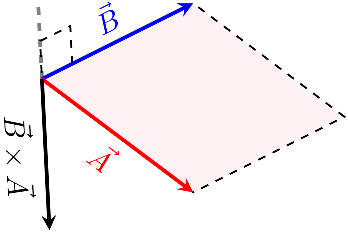
(a)



ضرب خارجی

تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست





$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A} \Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{B}\times\vec{A}|$$

حالتهای خاص ضرب خارجی دو بردار

$$\theta = 0, \pi \Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = 0 \text{ or } |\vec{A}\times\vec{B}| = 0$$

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = AB$$

محدوده‌ی ضرب خارجی دو بردار

$$0 \leq \sin\theta \leq 1$$

$$0 \leq |\vec{A}\times\vec{B}| \leq AB$$

ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی

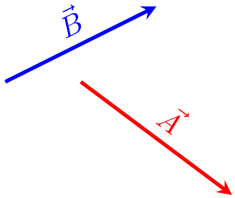
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

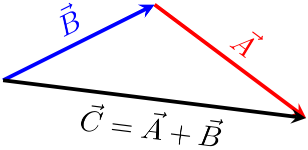
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



قانون سینوسها



$$\vec{C}\times\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}$$

$$0 = \vec{A}\times\vec{C} + \vec{B}\times\vec{C}$$

$$\vec{A}\times\vec{C} = -\vec{B}\times\vec{C}$$

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{B}\times\vec{C}|$$

ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی

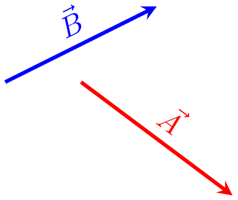
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

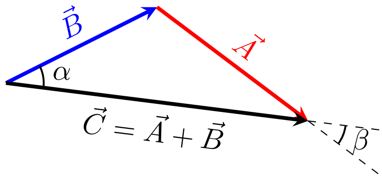
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$





قانون سینوسها

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{B}\times\vec{C}|$$

$$AC|\sin\beta| = BC|\sin\alpha|$$

$$\boxed{\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\alpha|}{A}} \qquad (۱)$$

ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی

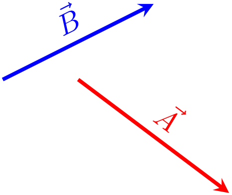
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

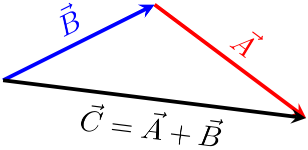
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



قانون سینوسها



$$\vec{A}\times\vec{C} = \vec{A}\times(\vec{A}+\vec{B})$$

$$\vec{A}\times\vec{C} = \vec{A}\times\vec{A} + \vec{A}\times\vec{B}$$

$$\vec{A}\times\vec{C} = 0 + \vec{A}\times\vec{B}$$

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{A}\times\vec{B}|$$

ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی

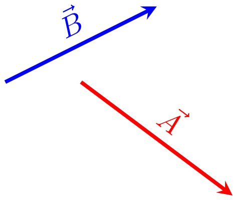
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

$$A = |\vec{A}|,\quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



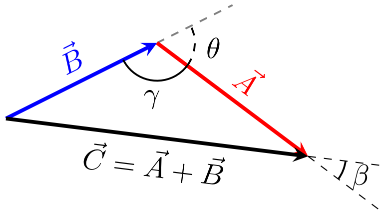
<u>قانون سینوسها</u>

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{A}\times\vec{B}|$$

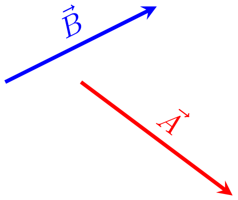
$$AC|\sin\beta| = AB|\sin\theta|$$

$$\sin\theta = \sin(\pi-\gamma) = \sin\gamma$$

$$AC|\sin\beta| = AB|\sin\gamma|$$



ضرب خارجی



<u>قانون سینوسها</u>

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{A}\times\vec{B}|$$

$$AC|\sin\beta| = AB|\sin\gamma|$$

$$\boxed{\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\gamma|}{C}} \quad (۲)$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

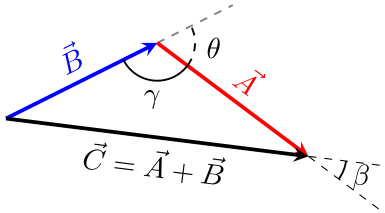
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی

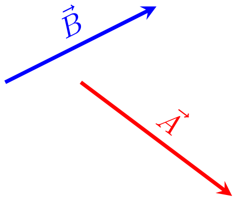
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

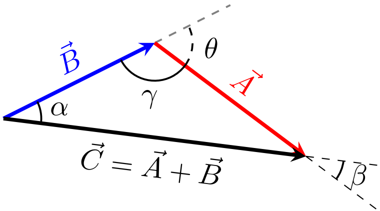
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$





قانون سینوسها

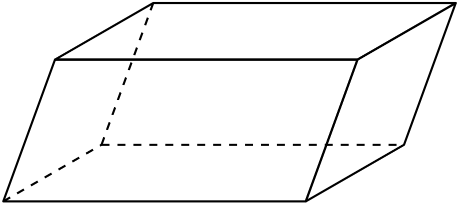
$$\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\alpha|}{A} \qquad (1)$$

$$\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\gamma|}{C} \qquad (2)$$

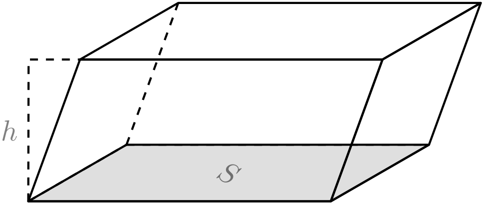
$$\boxed{\frac{|\sin\alpha|}{A} = \frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\gamma|}{C}}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

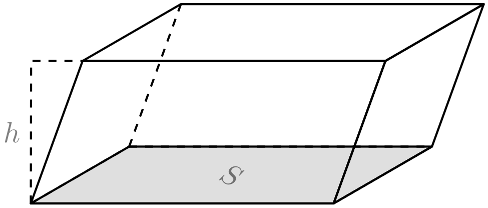


$$V = hS$$

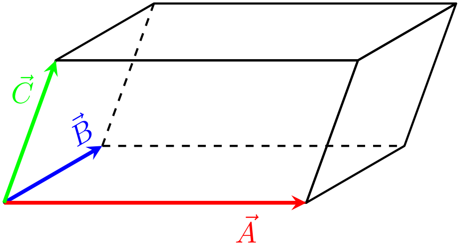


ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

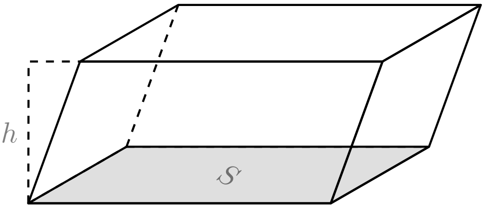


سه بردار $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ را مطابق شکل زیر اعمال می کنیم،



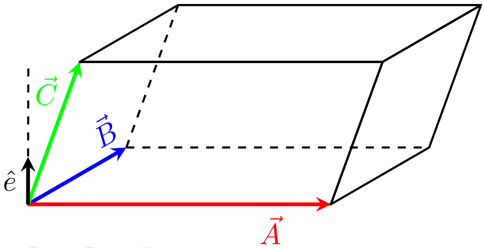
ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح



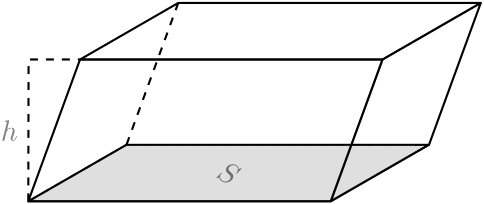
محاسبه مساحت سطح تشکیل شده بوسیله‌ی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$

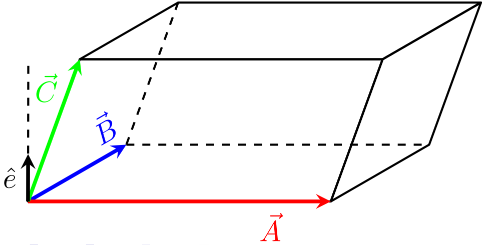
$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$



ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح



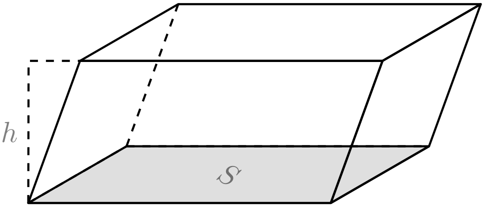


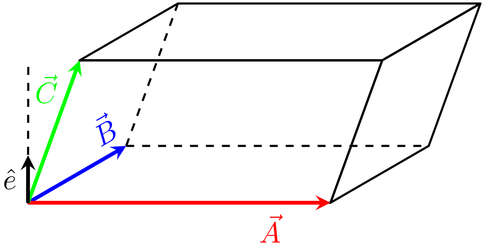
محاسبه بردار یکه عمود بر سطح
تشکیل شده از بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$$\hat{e} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح





$$\hat{e} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

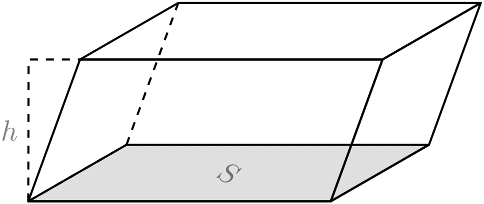
محاسبه ارتفاع h

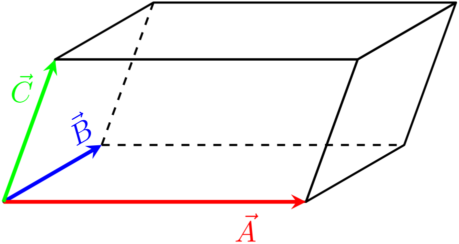
$$h = \hat{e} \cdot \vec{C}$$

$$h = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح





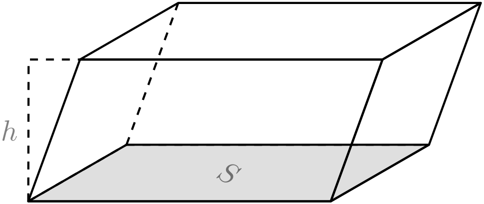
$$h = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

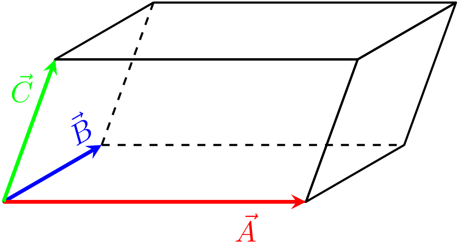
$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$V = hS = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}|\vec{A} \times \vec{B}|$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

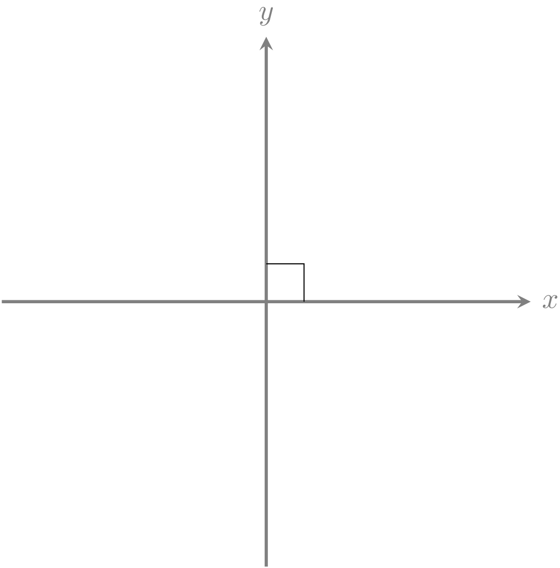




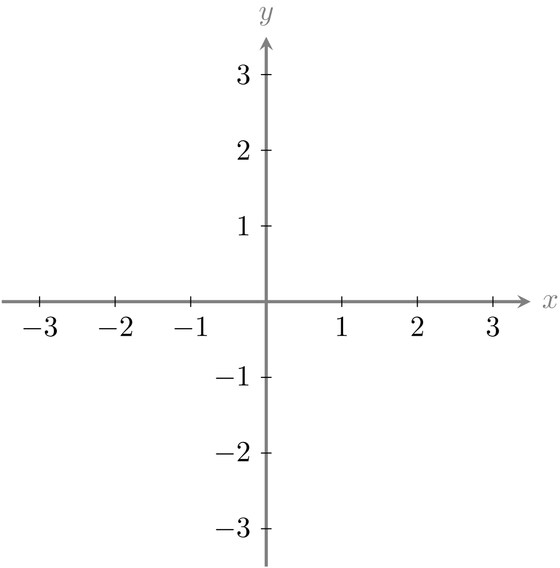
$$V = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$\boxed{V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}$$

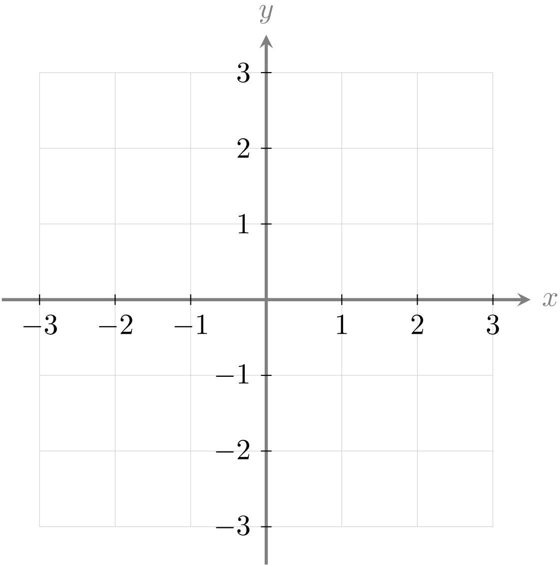
دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی



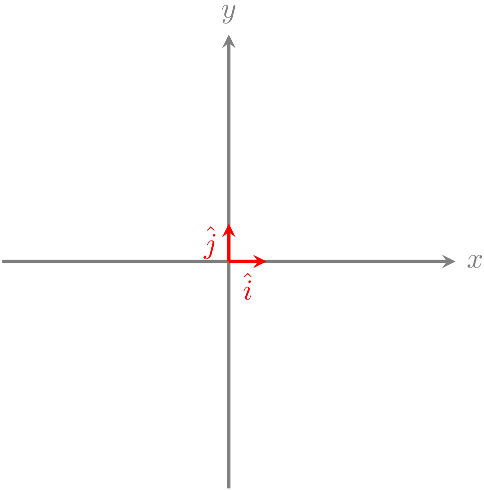
دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی



دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی



دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی

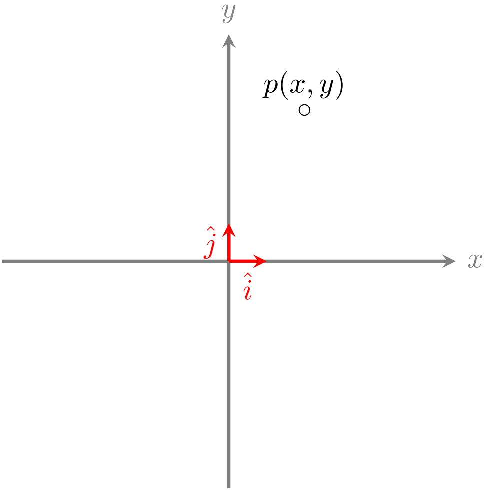


بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی

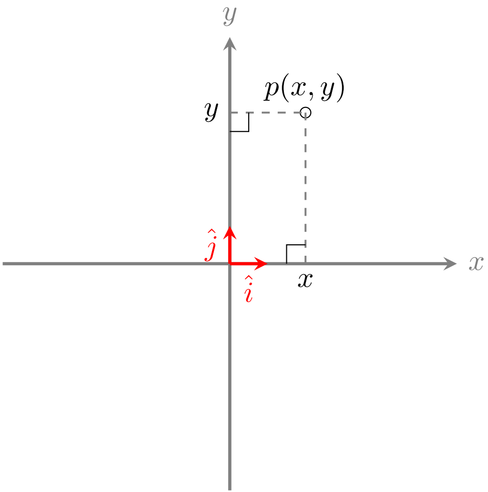


بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی

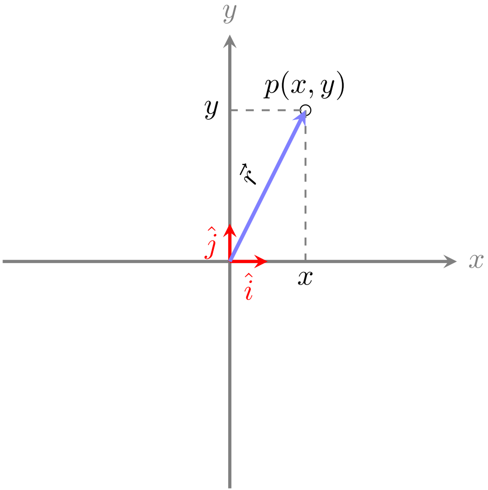


بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی



<u>بردار یکه</u>

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

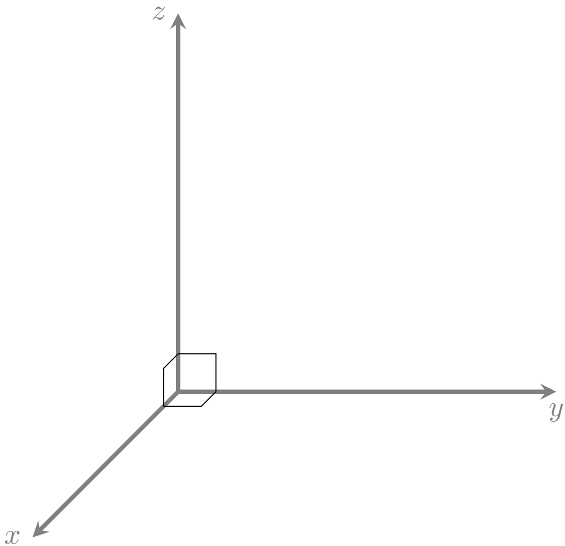
<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

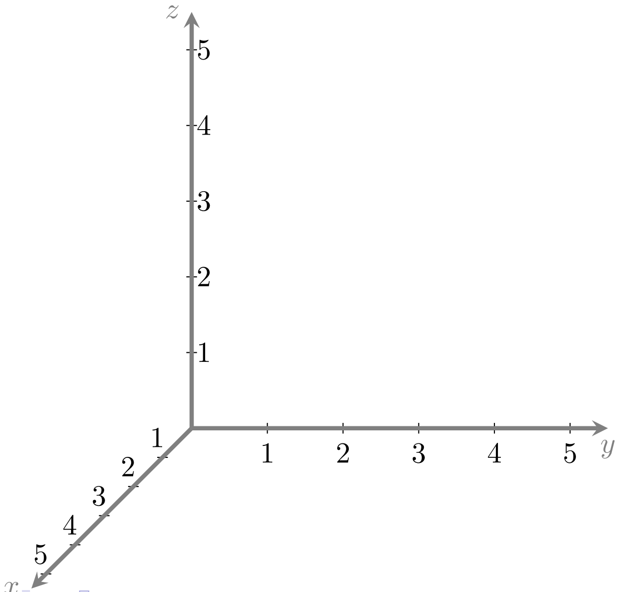
$$\hat{i} \cdot \vec{r} = x, \quad \hat{j} \cdot \vec{r} = y$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

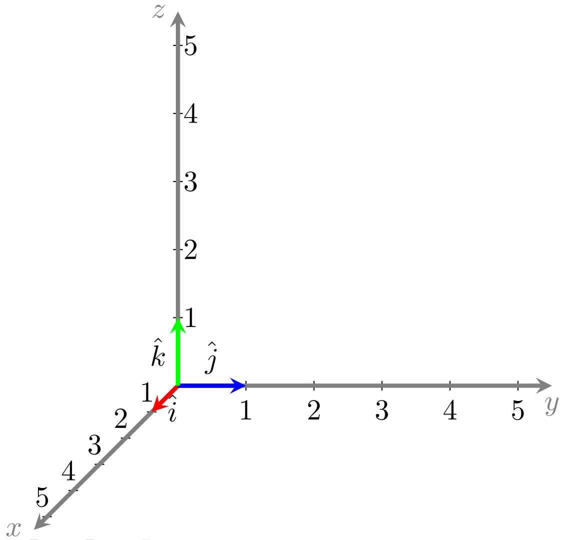
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



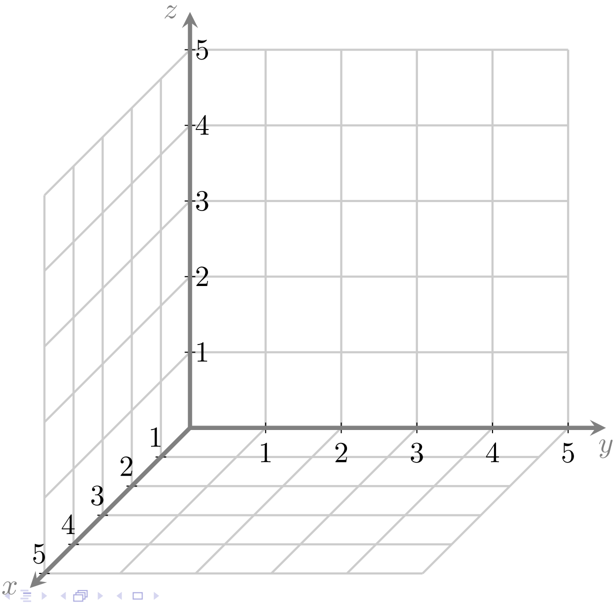
بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

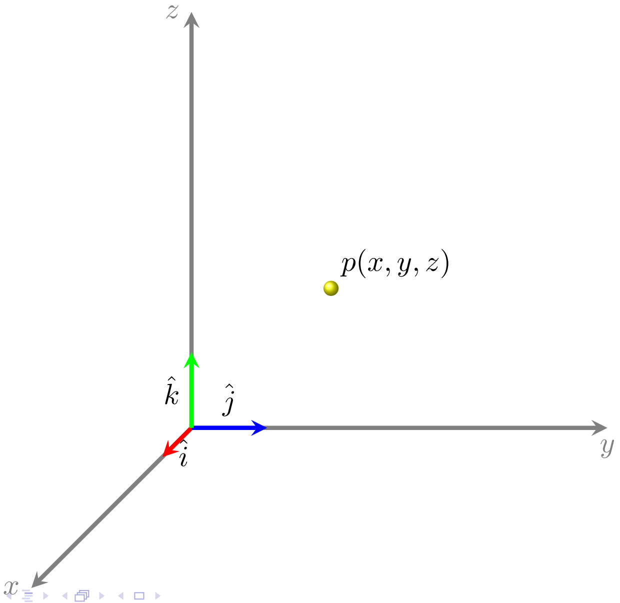
$$\begin{cases} \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{i} = 0 \\ \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{j} = 0 \\ \hat{k}\cdot\hat{i} = \hat{i}\cdot\hat{k} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{i}\times\hat{j} = -\hat{j}\times\hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k}\times\hat{i} = -\hat{i}\times\hat{k} = \hat{j} \end{cases}$$

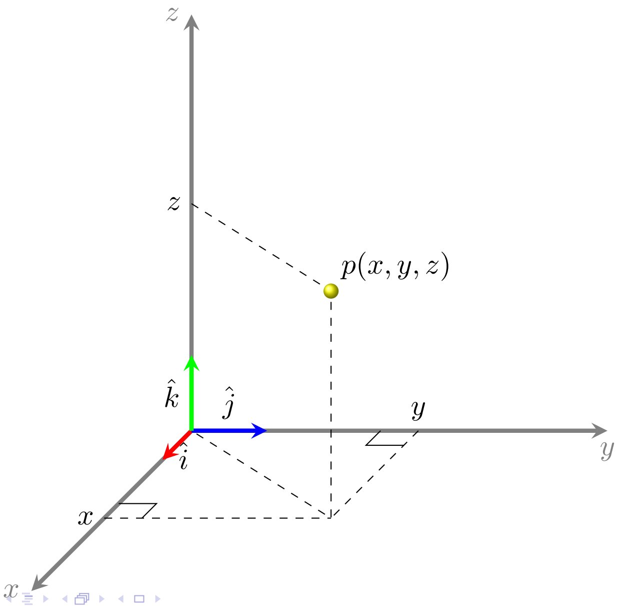
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



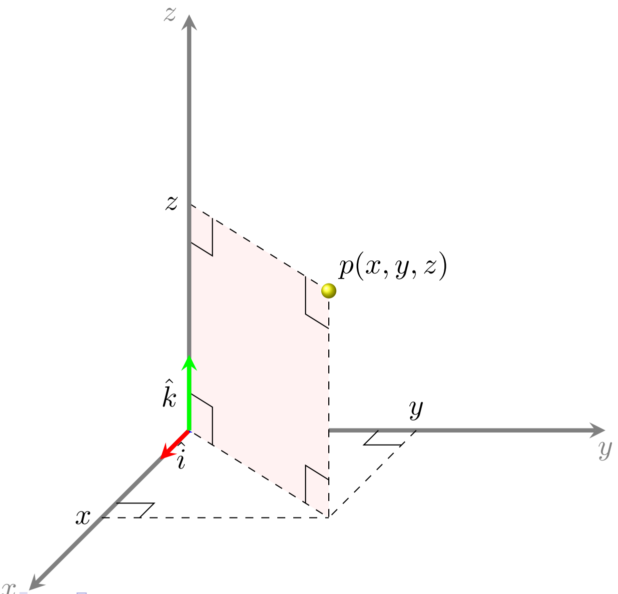
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



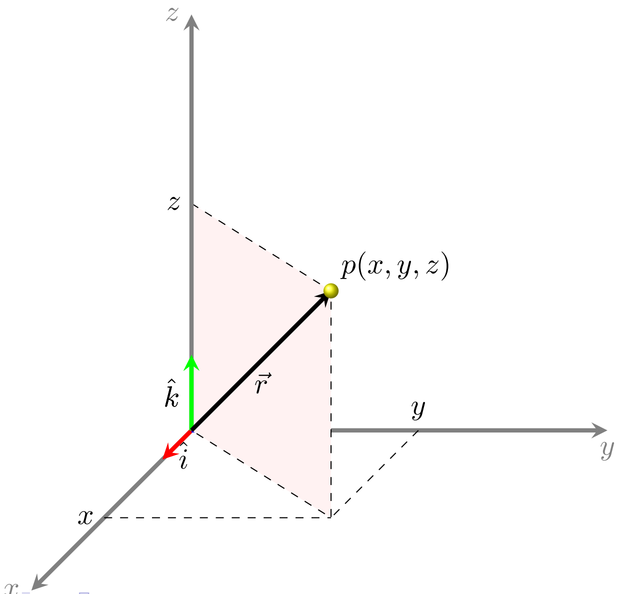
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



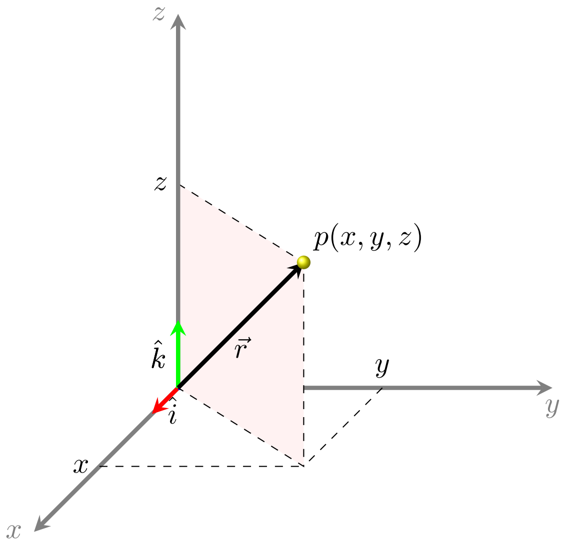
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$x = \hat{i}\cdot\vec{r}$$

$$y = \hat{j}\cdot\vec{r}$$

$$z = \hat{k}\cdot\vec{r}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

جمع برداری (تحلیلی)

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

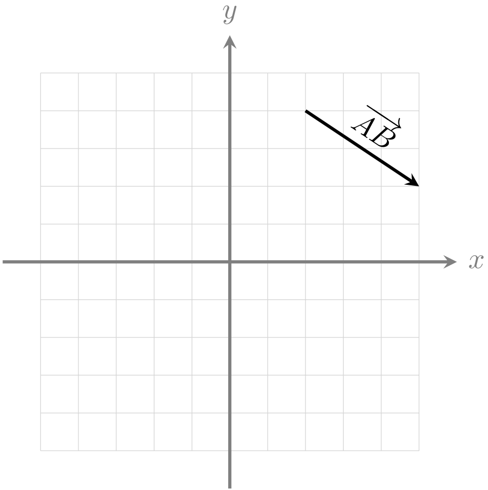
$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \pm (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\hat{i} + (A_y \pm B_y)\hat{j} + (A_z \pm B_z)\hat{k}$$

حالت خاص: جمع دو بردار در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) \pm (B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$
$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\hat{i} + (A_y \pm B_y)\hat{j}$$

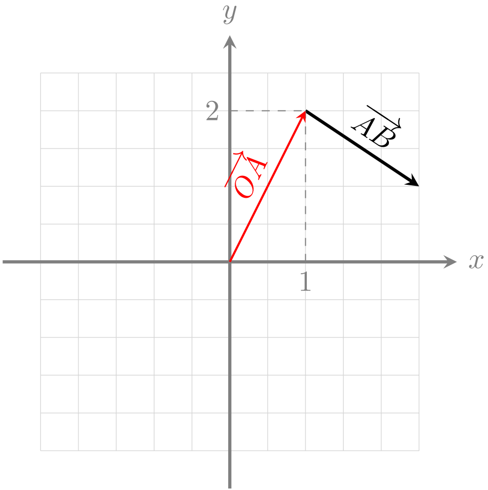
جمع برداری (تحلیلی)



<u>بردار دلخواه</u>

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

جمع برداری (تحلیلی)



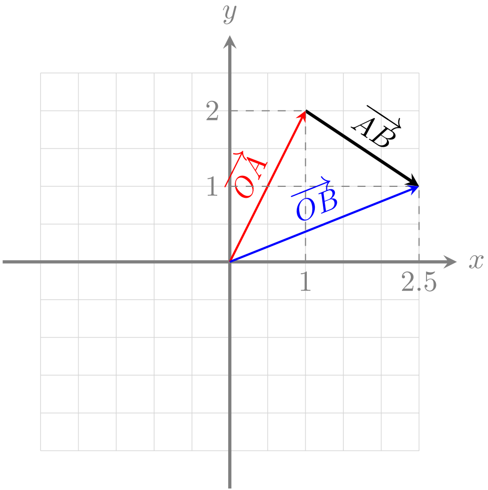
بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

جمع برداری (تحلیلی)



<u>بردار دلخواه</u>

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

<u>بردار مکان</u>

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

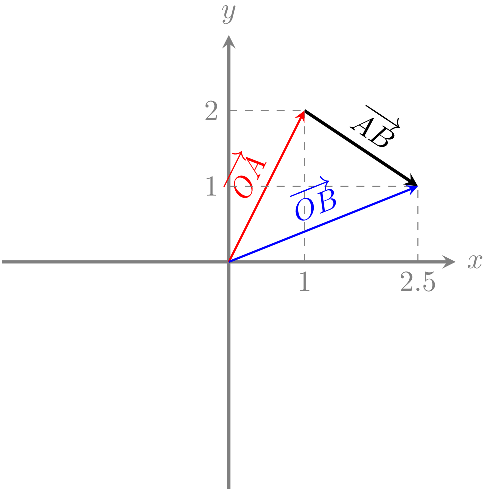
$$\overrightarrow{OB} = 2.5\hat{i} + \hat{j}$$

<u>جمع برداری بطور تحلیلی</u>

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

جمع برداری (تحلیلی)



بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = 2.5\hat{i} + \hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

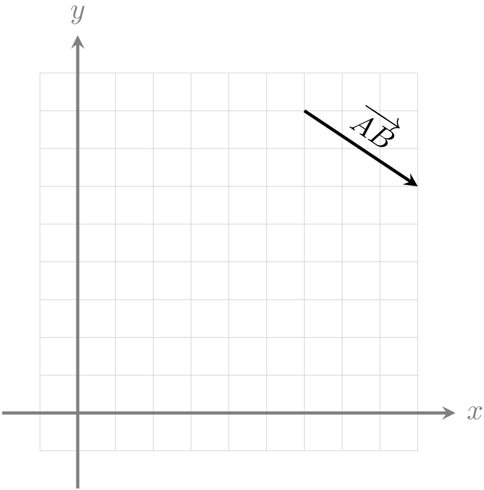
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (2.5\hat{i} + \hat{j}) - (\hat{i} + 2\hat{j})$$

$$\overrightarrow{AB} = (2.5 - 1)\hat{i} + (1 - 2)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 1.5\hat{i} - \hat{j}$$

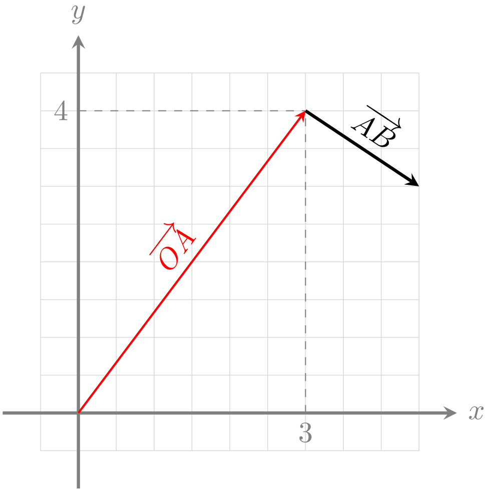
جمع برداری (تحلیلی)



بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

جمع برداری (تحلیلی)



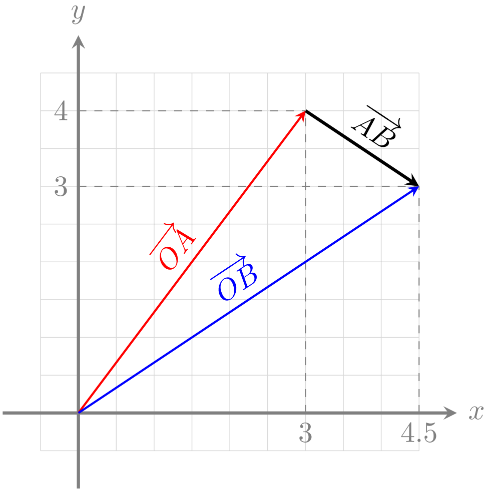
بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

جمع برداری (تحلیلی)



بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

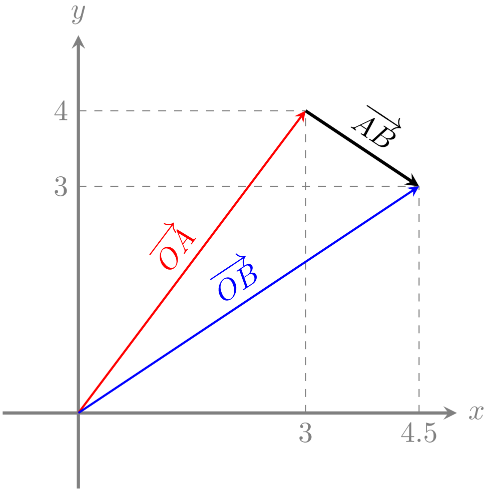
$$\overrightarrow{OB} = 4.5\hat{i} + 3\hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

جمع برداری (تحلیلی)



بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = 4.5\hat{i} + 3\hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (4.5\hat{i}+3\hat{j})-(3\hat{i}+4\hat{j})$$

$$\overrightarrow{AB} = (4.5-3)\hat{i}+(3-4)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 1.5\hat{i} - \hat{j}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

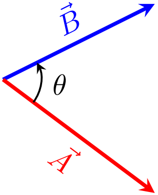
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

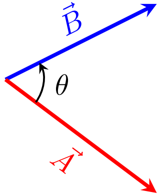


$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} = {} & A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\cdot\hat{k} \\ & + A_yB_x\hat{j}\cdot\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\cdot\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\cdot\hat{k} \\ & + A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}\end{aligned}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} = {} & A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\cdot\hat{k} \\ & + A_yB_x\hat{j}\cdot\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\cdot\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\cdot\hat{k} \\ & + A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}\end{aligned}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1, \quad \hat{i}\cdot\hat{j} = 0, \quad \hat{i}\cdot\hat{k} = 0$$

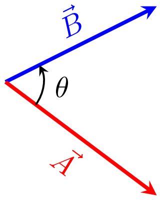
$$\hat{j}\cdot\hat{i} = 0, \quad \hat{j}\cdot\hat{j} = 1, \quad \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$

$$\hat{k}\cdot\hat{i} = 0, \quad \hat{k}\cdot\hat{j} = 0, \quad \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

حالت خاص: ضرب داخلی در دوبعد

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

- اندازه بردار

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

- تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$$

- تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

در اینصورت

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

حالت خاص: اندازه بردار در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

- بردار یکه‌ی بردار

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

  - بردار یکه (هندسی)

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

در اینصورت

$$\hat{A} = \frac{1}{A}(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$$

حالت خاص: بردار یکه در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{A}(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) \text{ که } A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

◄ زاویه‌ی بین دو بردار

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

► تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \text{و} \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

► تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

در اینصورت

$$AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

حالت خاص: زاویه بین دو بردار در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

- تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{و} \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

- تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$$

در اینصورت

$$AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y}{AB}}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

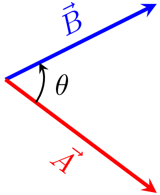
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



> نمایش اندیسی
اگر $\hat{i} = \hat{e}_1$ ، $\hat{j} = \hat{e}_2$ و $\hat{k} = \hat{e}_3$ در اینصورت بردار $\vec{A}$ را می‌توان بصورت

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3$$

نوشت که $A_x = A_1$ ، $A_y = A_2$ و $A_z = A_3$. به همین ترتیب برای بردار $\vec{B}$ داریم

$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3$$

که $B_x = B_1$ ، $B_y = B_2$ و $B_z = B_3$.

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

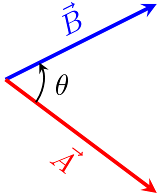
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



< نمایش اندیسی

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_i A_i\hat{e}_i$$

$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3 = \sum_i B_i\hat{e}_i$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right)\cdot\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right) = \sum_i\sum_j A_iB_j(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j)$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

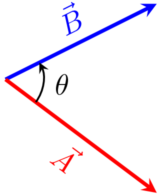
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



> نمایش اندیسی

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_i\sum_j A_iB_j(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j)$$

تعریف دلتای-کرونکر

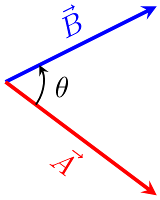
$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_i\sum_j A_iB_j\delta_{ij}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

< نمایش اندیسی

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_i \sum_j A_i B_j \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j$$

خواص دلتای–کرونکر

$$\sum_i f_i \delta_{ij} = f_j, \qquad \sum_i \sum_j g_{ij}\delta_{ij} = \sum_i g_{ii}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \sum_i \sum_j A_i B_j \delta_{ij} = \sum_i A_i B_i$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب خارجی

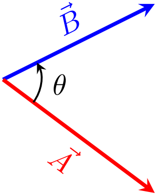
$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

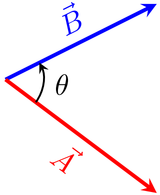
$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} = {} & A_xB_x\hat{i}\times\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\times\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\times\hat{k} \\ & + A_yB_x\hat{j}\times\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\times\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\times\hat{k} \\ & + A_zB_x\hat{k}\times\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\times\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\times\hat{k}\end{aligned}$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} = {} & A_xB_x\hat{i}\times\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\times\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\times\hat{k}\\ & + A_yB_x\hat{j}\times\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\times\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\times\hat{k}\\ & + A_zB_x\hat{k}\times\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\times\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\times\hat{k}\end{aligned}$$

$$\hat{i}\times\hat{i} = 0, \quad \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{j}\times\hat{j} = 0, \quad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{k}\times\hat{k} = 0$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

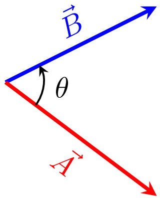
$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} = A_x B_y \hat{k} - A_x B_z \hat{j} \\ - A_y B_x \hat{k} + A_y B_z \hat{i} \\ + A_z B_x \hat{j} - A_z B_y \hat{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} \\ + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} \\ + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}\end{aligned}$$

تعریف ضرب خارجی

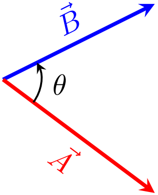
$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i}\\ &+ (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j}\\ &+ (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}}$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب خارجی

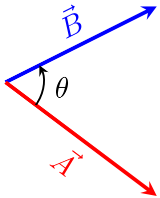
$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



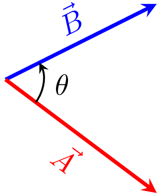
$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i}\\ &+ (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j}\\ &+ (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

< نمایش اندیسی

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_i A_i\hat{e}_i$$

$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3 = \sum_i B_i\hat{e}_i$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right)\times\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right) = \sum_i\sum_j A_iB_j(\hat{e}_i\times\hat{e}_j)$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب خارجی

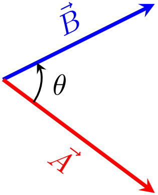
$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



- نمایش اندیسی

$$\vec{A}\times\vec{B} = \sum_i\sum_j A_iB_j(\hat{e}_i\times\hat{e}_j)$$

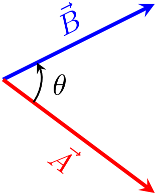
تعریف نماد لوی-چی‌ویتا

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk}\hat{e}_k$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \sum_i\sum_j\sum_k A_iB_j\epsilon_{ijk}\hat{e}_k$$

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

< نمایش اندیسی

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_i \sum_j \sum_k A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

خواص نماد لوی–چی‌ویتا

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

$$\epsilon_{ijk}\text{ها دیگر} = 0$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب خارجی

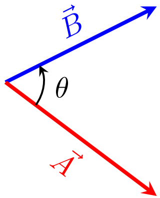
$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



< نمایش اندیسی

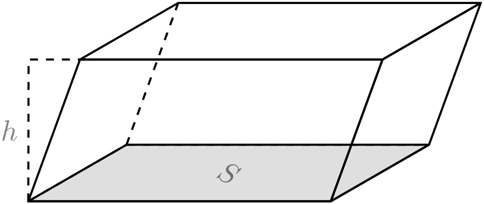
$$\vec{A} \times \vec{B} = \sum_i \sum_j \sum_k A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

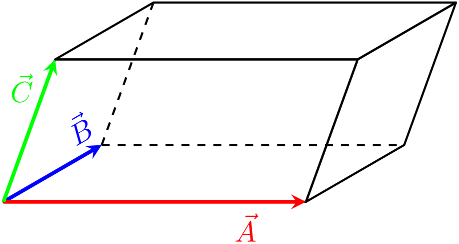
$$(\vec{A}\times\vec{B})_l = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\hat{e}_l = \sum_i \sum_j \sum_k A_i B_j \epsilon_{ijk} \hat{e}_k\cdot\hat{e}_l = \sum_i \sum_j \sum_k A_i B_j \epsilon_{ijk} \delta_{kl}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B})_l = \sum_i \sum_j A_i B_j \epsilon_{ijl} = \sum_i \sum_j A_i B_j \epsilon_{lij}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح





$$V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$$

$$V = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح

$$V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح

> نمایش اندیسی

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_i A_i\hat{e}_i$$

$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3 = \sum_i B_i\hat{e}_i$$

$$\vec{C} = C_1\hat{e}_1 + C_2\hat{e}_2 + C_3\hat{e}_3 = \sum_i C_i\hat{e}_i$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C} = \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right)\times\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right)\cdot\left(\sum_k C_k\hat{e}_k\right)$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C} = \sum_i\sum_j\sum_k A_iB_jC_k(\hat{e}_i\times\hat{e}_j)\cdot\hat{e}_k$$

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j = \sum_l \epsilon_{ijl}\hat{e}_l$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح

< نمایش اندیسی

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}=\sum_i\sum_j\sum_k A_iB_jC_k(\hat{e}_i\times\hat{e}_j)\cdot\hat{e}_k$$

$$\hat{e}_i\times\hat{e}_j=\sum_l \epsilon_{ijl}\hat{e}_l$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}=\sum_i\sum_j\sum_k A_iB_jC_k\left(\sum_l \epsilon_{ijl}\hat{e}_l\right)\cdot\hat{e}_k$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}=\sum_i\sum_j\sum_l A_iB_jC_k\epsilon_{ijl}(\hat{e}_l\cdot\hat{e}_k)$$

$$\hat{e}_l\cdot\hat{e}_k=\delta_{lk}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l A_iB_jC_k\epsilon_{ijl}\delta_{lk}=\sum_i\sum_j\sum_k A_iB_jC_k\epsilon_{ijk}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک–کب

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_yC_z-B_zC_y & B_zC_x-B_xC_z & B_xC_y-B_yC_x\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) &= \hat{i}[A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)]\\ &+\hat{j}[A_z(B_yC_z-B_zC_y)-A_x(B_xC_y-B_yC_x)]\\ &+\hat{k}[A_x(B_zC_x-B_xC_z)-A_y(B_yC_z-B_zC_y)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) &= \hat{i}B_x(A_yC_y+A_zC_z)-\hat{i}C_x(B_yA_y+B_zA_z)\\ &+\hat{j}B_y(A_zC_z+A_xC_x)-\hat{j}C_y(A_zB_z+A_xB_x)\\ &+\hat{k}B_z(A_xC_x+A_yC_y)-\hat{k}C_z(A_xB_x+A_yB_y)\end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=&\ \hat{i}B_x(A_yC_y+A_zC_z)-\hat{i}C_x(B_yA_y+B_zA_z)\\&+\hat{j}B_y(A_zC_z+A_xC_x)-\hat{j}C_y(A_zB_z+A_xB_x)\\&+\hat{k}B_z(A_xC_x+A_yC_y)-\hat{k}C_z(A_xB_x+A_yB_y)\end{aligned}$$

اضافه و کم کردن $\hat{i}A_xB_xC_x$ به سطر اول، اضافه و کم کردن $\hat{j}A_yB_yC_y$ به سطر دوم و اضافه و کم کردن $\hat{k}A_zB_zC_z$ به سطر سوم،

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=&\ \hat{i}B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-\hat{i}C_x(A_xB_x+B_yA_y+B_zA_z)\\&+\hat{j}B_y(A_yC_y+A_zC_z+A_xC_x)-\hat{j}C_y(A_yC_y+A_zB_z+A_xB_x)\\&+\hat{k}B_z(A_zC_z+A_xC_x+A_yC_y)-\hat{k}C_z(A_zB_zA_xB_x+A_yB_y)\end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=&\,\hat{i}B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-\hat{i}C_x(A_xB_x+B_yA_y+B_zA_z)\\&+\hat{j}B_y(A_yC_y+A_zC_z+A_xC_x)-\hat{j}C_y(A_yC_y+A_zB_z+A_xB_x)\\&+\hat{k}B_z(A_zC_z+A_xC_x+A_yC_y)-\hat{k}C_z(A_zB_zA_xB_x+A_yB_y)\end{aligned}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C}=A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=&\,\hat{i}B_x(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{i}C_x(\vec{A}\cdot\vec{B})\\&+\hat{j}B_y(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{j}C_y(\vec{A}\cdot\vec{B})\\&+\hat{k}B_z(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{k}C_z(\vec{A}\cdot\vec{B})\end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \hat{i}B_x(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \hat{i}C_x(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ + \hat{j}B_y(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \hat{j}C_y(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ + \hat{k}B_z(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \hat{k}C_z(\vec{A} \cdot \vec{B})\end{aligned}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z)(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\hat{i}C_x + \hat{j}C_y + \hat{k}C_z)(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$$
$$\vec{C} = \hat{i}C_x + \hat{j}C_y + \hat{k}C_z$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک–کب

< نمایش اندیسی

$$\vec{A} = A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3 = \sum_i A_i\hat{e}_i$$

$$\vec{B} = B_1\hat{e}_1 + B_2\hat{e}_2 + B_3\hat{e}_3 = \sum_i B_i\hat{e}_i$$

$$\vec{C} = C_1\hat{e}_1 + C_2\hat{e}_2 + C_3\hat{e}_3 = \sum_i C_i\hat{e}_i$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right) \times \left[\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right) \times \left(\sum_k C_k\hat{e}_k\right)\right]$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right) \times \left[\sum_j \sum_k B_j C_k (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)\right]$$

$$\hat{e}_j \times \hat{e}_k = \sum_l \epsilon_{jkl}\hat{e}_l$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک–کب

> نمایش اندیسی

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right)\times\left[\sum_j\sum_k B_jC_k(\hat{e}_j\times\hat{e}_k)\right]$$

$$\hat{e}_j\times\hat{e}_k=\sum_l \epsilon_{jkl}\hat{e}_l$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\left(\sum_i A_i\hat{e}_i\right)\times\left[\sum_j\sum_k\sum_l B_jC_k\epsilon_{jkl}\hat{e}_l\right]$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l A_iB_jC_k\epsilon_{jkl}\hat{e}_i\times\hat{e}_l$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l\sum_m A_iB_jC_k\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}\hat{e}_m$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک-کب

> نمایش اندیسی

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l\sum_m A_iB_jC_k\epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}\hat{e}_m$$

اتحادهای لوی-چی‌ویتا

$$\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{jik}$$

$$\sum_m \epsilon_{ijm}\epsilon_{klm}=\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_m A_iB_jC_k\left(\color{red}{\sum_l \epsilon_{jkl}\epsilon_{ilm}}\right)\hat{e}_m$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\color{blue}{-}\sum_i\sum_j\sum_k\sum_m A_iB_jC_k\left(\color{red}{\sum_l \epsilon_{jkl}}\color{blue}{\epsilon_{iml}}\right)\hat{e}_m$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک-کب

> نمایش اندیسی

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = -\sum_i \sum_j \sum_k \sum_m A_i B_j C_k \left(\sum_l \epsilon_{jkl} \epsilon_{iml} \right) \hat{e}_m$$

اتحادهای لوی-چی‌ویتا

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$$

$$\sum_m \epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = -\sum_i \sum_j \sum_k \sum_m A_i B_j C_k \left(\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{ik}\delta_{jm} \right) \hat{e}_m$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = -\sum_i \sum_k A_i B_i C_k \hat{e}_k + \sum_i \sum_j A_i B_j C_i \hat{e}_j$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک–کب

< نمایش اندیسی

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -\sum_i\sum_k A_iB_iC_k\hat{e}_k + \sum_i\sum_j A_iB_jC_i\hat{e}_j$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -\left(\sum_i A_iB_i\right)\left(\sum_k C_k\hat{e}_k\right) + \left(\sum_i A_iC_i\right)\left(\sum_j B_j\hat{e}_j\right)$$

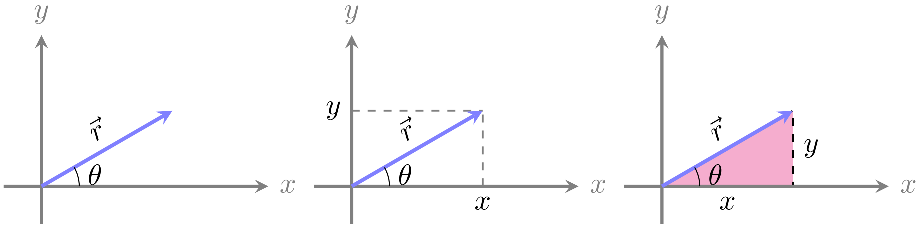
$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} + (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = -\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B}) + \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

بردارها

مسئله-۱: مطابق شکل بردار جابجایی $\vec{r}$ در صفحه‌ی xy دارای اندازه‌ی $15\ \mathrm{m}$ و جهت $\theta = 30^\circ$ است. الف) مولفه‌ی x و ب) مولفه‌ی y آنرا بدست آورید.



$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

مسئله-۲: الف) اگر $\vec{A}=(4\text{ m})\hat{i}+(3\text{ m})\hat{j}$ و $\vec{B}=(13\text{ m})\hat{i}+(7\text{ m})\hat{j}$ باشد. $\vec{A}+\vec{B}$ را بر حسب بردارهای یکه بدست آورید. ب) اندازه و ج) جهت $\vec{A}+\vec{B}$ را بدست آورید.

$$\vec{A}=(4\text{ m})\hat{i}+(3\text{ m})\hat{j}$$
$$\vec{B}=(13\text{ m})\hat{i}+(7\text{ m})\hat{j}$$

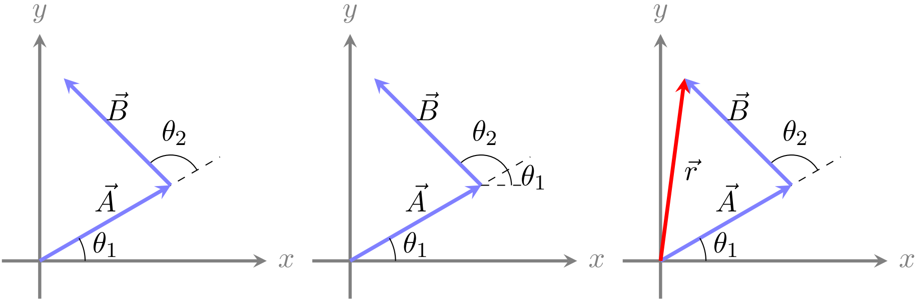
$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}=(17\text{ m})\hat{i}+(10\text{ m})\hat{j}$$

$$\boxed{\text{اندازه}:\ |\vec{C}|=\sqrt{C_x^2+C_y^2}}\Rightarrow|\vec{C}|=\sqrt{17^2+10^2}\text{ m}$$

$$\boxed{\text{جهت}:\ \theta=\tan^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right)}\Rightarrow\theta=\tan^{-1}\left(\frac{10}{17}\right)\ \text{رادیان}$$

$$\boxed{\text{بردار یکه}:\ \hat{C}=\frac{\vec{C}}{|\vec{C}|}=\frac{C_x\hat{i}+C_y\hat{j}}{\sqrt{C_x^2+C_y^2}}}\Rightarrow\hat{C}=\frac{17}{\sqrt{17^2+10^2}}\hat{i}+\frac{10}{\sqrt{17^2+10^2}}\hat{j}$$

مسئله–۳: درشکل زیر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دارای اندازه مساوی $10\ \mathrm{m}$ و زاویه‌ی $\theta_1 = 30^\circ$ و $\theta_2 = 105^\circ$ هستند. مولفه‌ی الف) x ب) y بردار برآیند آنها $\vec{r}$ را بدست آورید. ج) اندازه و د) جهت $\vec{r}$ را نسبت به جهت مثبت محور x بدست آورید.

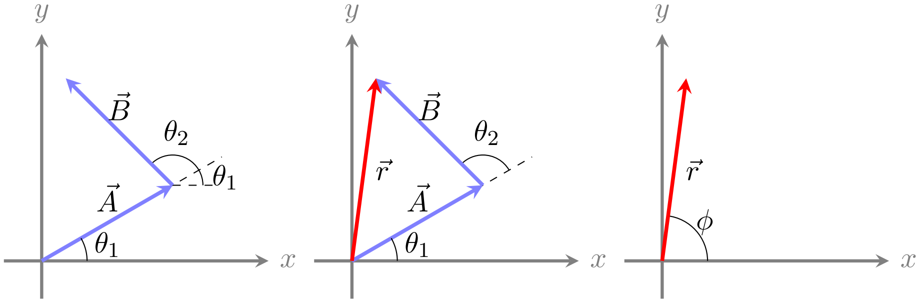


$$\vec{A} = A\cos\theta_1 \hat{i} + A\sin\theta_1 \hat{j}$$

$$\vec{B} = B\cos(\theta_1+\theta_2)\hat{i} + B\sin(\theta_1+\theta_2)\hat{j}$$

$$A = B$$

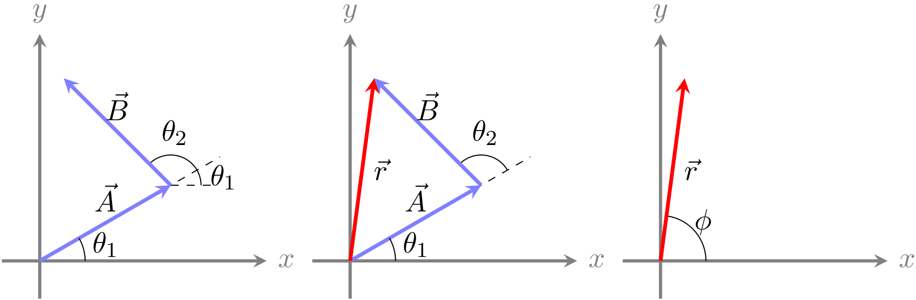
مسئله–۳: درشکل زیر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دارای اندازه مساوی $10\ \mathrm{m}$ و زاویه‌ی $\theta_1 = 30°$ و $\theta_2 = 105°$ هستند. مولفه‌ی الف) x ب) y بردار برآیند آنها $\vec{r}$ را بدست آورید. ج) اندازه و د) جهت $\vec{r}$ را نسبت به جهت مثبت محور x بدست آورید.



$$\vec{r} = \vec{A} + \vec{B} = A[\cos\theta_1 + \cos(\theta_1+\theta_2)]\hat{i} + A[\sin\theta_1 + \sin(\theta_1+\theta_2)]\hat{j}$$

جهت : $\phi = \tan^{-1}[(\cos\theta_1 + \cos(\theta_1+\theta_2))/(\cos\theta_1 + \cos(\theta_1+\theta_2))]$

مسئله–۳: درشکل زیر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دارای اندازه مساوی $10\ \mathrm{m}$ و زاویه‌ی $\theta_1 = 30^\circ$ و $\theta_2 = 105^\circ$ هستند. مولفه‌ی الف) x ب) y بردار برآیند آنها $\vec{r}$ را بدست آورید. ج) اندازه و د) جهت $\vec{r}$ را نسبت به جهت مثبت محور x بدست آورید.



$$\vec{r} = \vec{A} + \vec{B} = A[\cos\theta_1 + \cos(\theta_1+\theta_2)]\hat{i} + A[\sin\theta_1 + \sin(\theta_1+\theta_2)]\hat{j}$$

اندازه : $r = |\vec{r}| = A\sqrt{[\cos\theta_1 + \cos(\theta_1+\theta_2)]^2 + [\sin\theta_1 + \sin(\theta_1+\theta_2)]^2}$

بردارها

مسئله–۴: اگر بردار $\vec{B}$ با بردار $\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ جمع شود. بردار حاصل در جهت مثبت محور y و اندازه‌ی $\vec{C}$ است. اندازه‌ی بردار $\vec{B}$ را بدست آورید.

$$\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$C = |\vec{C}| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\vec{B} + \vec{C} = C\hat{j}$$

$$\vec{B} + (3\hat{i} + 4\hat{j}) = 5\hat{j}$$

$$\vec{B} = -3\hat{i} + \hat{j}$$

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

مسئله–۵: بردار $\vec{A}$ در راستای محور x قرار دارد و با بردار $\vec{B}$ به اندازه‌ی $7\ \mathrm{m}$ جمع می‌شود. بردار حاصل جمع در جهت مثبت محور y قرار دارد و اندازه‌ی آن سه برابر بردار $\vec{A}$ است. اندازه‌ی بردار $\vec{A}$ را بدست آورید.

$$B = |\vec{B}| = 7$$

$$\begin{cases} \vec{A} = A\hat{i} \\ \vec{A} + \vec{B} = 3A\hat{j} \end{cases} \Rightarrow A\hat{i} + \vec{B} = 3A\hat{j}$$

$$\vec{B} = A\hat{i} + 3A\hat{j} \Rightarrow \vec{B} = A(\hat{i} + 3\hat{j})$$

$$B = |\vec{B}| = A\sqrt{1+9}$$

$$7 = A\sqrt{10} \Rightarrow A = \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

مسئله–۶: زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\vec{B} = 2\hat{i} + 1\hat{j} + 3\hat{k}$ را بدست آورید.

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\vec{B} = 2\hat{i} + 1\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 6 + 3 + 9$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{27}$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{18}{\sqrt{27}\sqrt{14}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{18}{\sqrt{27}\sqrt{14}}\right) \text{ رادیان}$$

مسئله–۷: برای سه بردار $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ ، $\vec{B} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ و $\vec{C} = 7\hat{i} - 8\hat{j}$
حاصل را $3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B})$ بدست آورید.

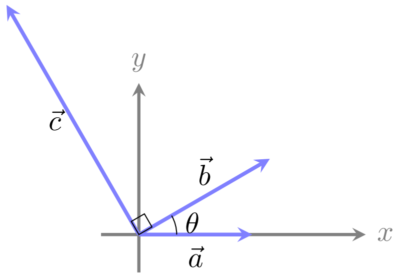
$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$$
$$\vec{B} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{C} = 7\hat{i} - 8\hat{j}$$

$$3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} 3C_x & 3C_y & 3C_z \\ 2A_x & 2A_y & 2A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & -24 & 0 \\ 4 & 6 & -8 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B}) = 6\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 6 \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 7 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

بردارها

مسئله‌–۸: بزرگی سه بردار نشان داده شده در شکل، $a = 3\text{ m}$ ، $b = 4\text{ m}$ و $c = 10\text{ m}$ و زاویه $\theta = 30°$ است. مولفه‌های x و y هر سه بردار را بدست آورید. p و q را بگونه‌ای بدست آورید که رابطه‌ی $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ برقرار باشد.

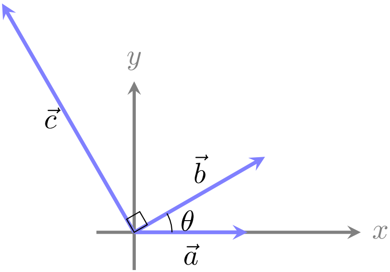


$$\vec{a} = a\hat{i}$$

$$\vec{b} = b\cos(\theta)\hat{i} + b\sin(\theta)\hat{j}$$

$$\vec{c} = c\cos(\theta + \pi/2)\hat{i} + c\sin(\theta + \pi/2)\hat{j} = -c\sin(\theta)\hat{i} + c\cos(\theta)\hat{j}$$

مسئله–۸: بزرگی سه بردار نشان داده شده در شکل، $a = 3\ \mathrm{m}$ ، $b = 4\ \mathrm{m}$ و $c = 10\ \mathrm{m}$ و زاویه $\theta = 30°$ است. مولفه‌های x و y هر سه بردار را بدست آورید. p و q را بگونه‌ای بدست آورید که رابطه‌ی $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ برقرار باشد.

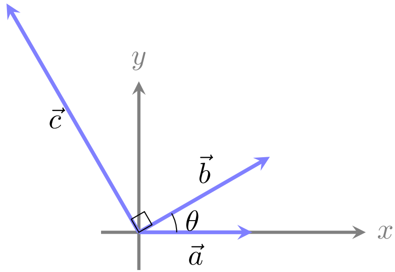


$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

$$-c\sin\theta\hat{i} + c\cos\theta\hat{j} = pa\hat{i} + qb\cos\theta\hat{i} + qb\sin\theta\hat{j}$$

بردارها

مسئله–۸: بزرگی سه بردار نشان داده شده در شکل، $a = 3\ \mathrm{m}$ ، $b = 4\ \mathrm{m}$ و $c = 10\ \mathrm{m}$ و زاویه $\theta = 30°$ است. مولفه‌های x و y هر سه بردار را بدست آورید. p و q را بگونه‌ای بدست آورید که رابطه‌ی $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ برقرار باشد.



$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} : \begin{cases} -c\sin\theta = pa + qb\cos\theta \\ c\cos\theta = qb\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -c/a\sin\theta \\ q = c\cos\theta/b\sin\theta \end{cases}$$

بردارها

مسئله-۹: در رابطه‌ی $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ، مقادیر $q = 2$، $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ و $\vec{F} = 4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k}$ داده شده‌اند. اگر $B_x = B_y$ باشد، بردار $\vec{B}$ را بدست آورید.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = 2(2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}) \times \vec{B}$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = 2(2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$B_x = B_y = B$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = (4\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k}) \times (B\hat{i} + B\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 8 & 12 \\ B & B & B_z \end{vmatrix}$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = (8B_z - 12B)\hat{i} + (12B - 4B_z)\hat{j} + (-4B)\hat{k}$$

مسئله-۹: در رابطه‌ی $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ، مقادیر $q = 2$، $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ و $\vec{F} = 4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k}$ داده شده‌اند. اگر $B_x = B_y$ باشد، بردار $\vec{B}$ را بدست آورید.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = (8B_z - 12B)\hat{i} + (12B - 4B_z)\hat{j} + (-4B)\hat{k}$$

$$\begin{cases} 8B_z - 12B = 4 \\ 12B - 4B_z = -20 \\ -4B = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8B_z + 36 = 4 \\ -36 - 4B_z = -20 \\ B = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_z = -4 \\ B = -3 \end{cases}$$

بردارها

مسئله–۱۰: زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$ و $\vec{B} = 0.5\hat{i} + 4.5\hat{j}$ را بدست آورید.
دو بردار $\vec{C}$ و $\vec{D}$ به اندازه 5 در صفحه‌ی xy و عمود بر بردار $\vec{A}$ هستند. بردار $\vec{C}$ دارای مولفه‌ی x مثبت و بردار $\vec{D}$ دارای مولفه‌ی x منفی است. مولفه‌های بردار $\vec{C}$ و مولفه‌های بردار $\vec{D}$ را بدست آورید.

$$\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$$
$$\vec{B} = 0.5\hat{i} + 4.5\hat{j}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = 0.8 + 14.4 = 15.2$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 3.58, \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 4.53$$

$$\cos\theta = \frac{4.53}{20.5} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4.53}{20.5}\right) \text{ رادیان}$$

بردارها

مسئله-۱۰: زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$ و $\vec{B} = 0.5\hat{i} + 4.5\hat{j}$ را بدست آورید.
دو بردار $\vec{C}$ و $\vec{D}$ به اندازه 5 در صفحه‌ی xy و عمود بر بردار $\vec{A}$ هستند. بردار $\vec{C}$ دارای مولفه‌ی x مثبت و بردار $\vec{D}$ دارای مولفه‌ی x منفی است. مولفه‌های بردار $\vec{C}$ و مولفه‌های بردار $\vec{D}$ را بدست آورید.

$$\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j}, \quad C = |\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 5$$

$$\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j}, \quad D = |\vec{D}| = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = 5$$

$$\begin{cases} \vec{C} \cdot \vec{A} = 0 \\ \vec{D} \cdot \vec{A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{C} = \vec{D} \ \text{یا}\ \boxed{\vec{C} = -\vec{D}}$$

$$\begin{cases} 1.6D_x + 3.2D_y = 0 \\ D_x^2 + D_y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_x = -2D_y \\ D_x^2 + D_y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_x = -2\sqrt{5} \\ D_y = \sqrt{5} \end{cases}$$

بردارها

مسئله‌-۱۰: زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$ و $\vec{B} = 0.5\hat{i} + 4.5\hat{j}$ را بدست آورید.
دو بردار $\vec{C}$ و $\vec{D}$ به اندازه 5 در صفحه‌ی xy و عمود بر بردار $\vec{A}$ هستند. بردار $\vec{C}$ دارای مولفه‌ی x مثبت و بردار $\vec{D}$ دارای مولفه‌ی x منفی است. مولفه‌های بردار $\vec{C}$ و مولفه‌های بردار $\vec{D}$ را بدست آورید.

$$\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j}, \quad C = |\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 5$$

$$\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j}, \quad D = |\vec{D}| = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = 5$$

$$\begin{cases} \vec{C}\cdot\vec{A} = 0 \\ \vec{D}\cdot\vec{A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{C} = -\vec{D}$$

$$\vec{D} = -2\sqrt{5}\hat{i} + \sqrt{5}\hat{j} \Rightarrow \vec{C} = 2\sqrt{5}\hat{i} - \sqrt{5}\hat{j}$$

مسئله–۱۱: اگر $A = 3.9$ و $B = 2.7$ و زاویه‌ی بین دو بردار 63° باشد، اندازه‌ی $\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ را بدست آورید.

$$\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A} - A^2\vec{B}$$

$$[\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})]\cdot[\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})] = [(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A} - A^2\vec{B}]\cdot[(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A} - A^2\vec{B}]$$

$$|\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})|^2 = -A^2(\vec{A}\cdot\vec{B})^2 + A^4B^2$$

$$|\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})| = A\sqrt{A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}$$

$$|\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})| = A\sqrt{A^2B^2 - A^2B^2\cos^2 63^\circ} = A^2B|\sin 63^\circ|$$

مسئله–۱۲: اگر $\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ ، $\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ باشند. مولفه‌های بردار $\vec{r} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ را بدست آورید. زاویه‌ی $\vec{r}$ را با جهت مثبت محور z را بدست آورید. مولفه‌ی $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$ چقدر است؟ مولفه‌ی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟

$$\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$$
$$\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{r} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}, \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{195}$$

زاویه‌ی $\vec{r}$ را با جهت مثبت محور z:

$$\vec{r} \cdot \hat{k} = r\cos\gamma, \quad \gamma = \angle(\vec{r}, \hat{k}) \Rightarrow \cos\gamma = \frac{-7}{\sqrt{195}}$$

مولفه‌ی $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$:

$$\vec{A} \cdot \hat{B} = (5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}) \cdot \frac{-2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{17}} = -\frac{20}{\sqrt{17}}$$

مسئله–۱۲: اگر $\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ ، $\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ باشند. مولفه‌های بردار $\vec{r} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ را بدست آورید. زاویه‌ی $\vec{r}$ را با جهت مثبت محور z را بدست آورید. مولفه‌ی $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$ چقدر است؟ مولفه‌ی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟

$$\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

مولفه‌ی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{B}$: بردار عمود بر صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B})$: بردار عمود بر صفحه‌ی دو بردار $\vec{A} \times \vec{B}$ و $\vec{B}$

$$\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = B^2\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{B}$$

مسئله–۱۲: اگر $\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ ، $\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ باشند. مولههای بردار $\vec{r} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ را بدست آورید. زاویهی $\vec{r}$ را با جهت مثبت محور z را بدست آورید. مولفهی $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$ چقدر است؟ مولفهی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحهی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟

$$\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

مولفهی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحهی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{B}$: بردار عمود بر صفحهی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$e = \dfrac{\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B})}{|\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B})|}$: بردار یکه عمود بر صفحهی دو بردار $\vec{A} \times \vec{B}$ و $\vec{B}$

$$\hat{e} = \frac{B^2\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|B^2\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}|} = \frac{B^2\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{B\sqrt{A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}}$$

مسئله–۱۲: اگر $\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ ، $\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ باشند. مولەهای بردار $\vec{r} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ را بدست آورید. زاویه‌ی $\vec{r}$ را با جهت مثبت محور z را بدست آورید. مولفه‌ی $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$ چقدر است؟ مولفه‌ی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟

$$\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

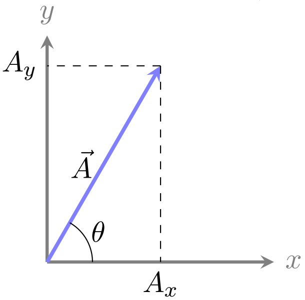
مولفه‌ی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

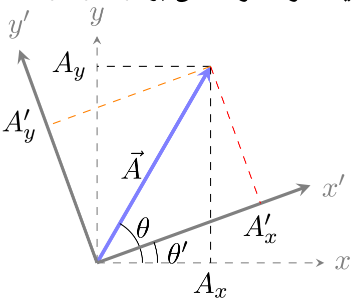
$$\hat{e} \cdot \vec{A} = \frac{B^2A^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}{B\sqrt{A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}} = \frac{\sqrt{B^2A^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}}{B}$$

$$\hat{e} \cdot \vec{A} = \sqrt{A^2 - (\vec{A}\cdot\hat{B})^2}$$

بردارها

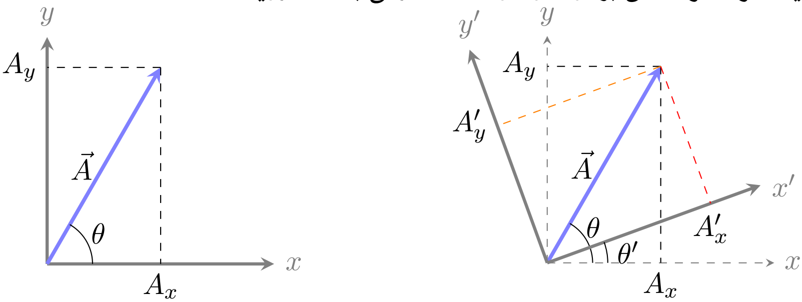
مسئله–۱۳: در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ به اندازه‌ی 2 متر و زاویه‌ی $\theta = 60°$ قرار دارد. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را بدست آورید. اگر دستگاه دومی پاد ساعتگرد نسبت به دستگاه اولی به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta' = 30°$ چرخیده شود. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را در دستگاه دومی بدست آورید.





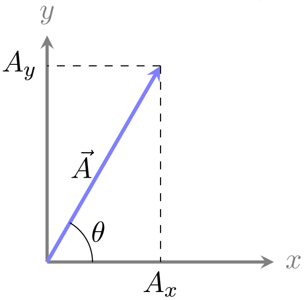
$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} A'_x = A\cos(\theta-\theta') \\ A'_y = A\sin(\theta-\theta') \end{cases}$$

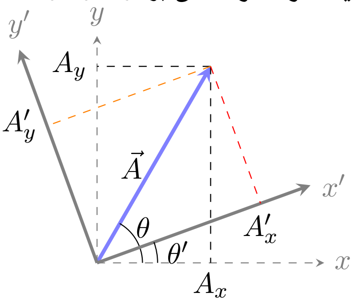
مسئله–۱۳: در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ به اندازه‌ی 2 متر و زاویه‌ی $\theta = 60^\circ$ قرار دارد. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را بدست آورید. اگر دستگاه دومی پاد ساعتگرد نسبت به دستگاه اولی به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta' = 30^\circ$ چرخیده شود. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را در دستگاه دومی بدست آورید.



$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} A'_x = A\cos(\theta-\theta') = A\cos\theta\cos\theta' + A\sin\theta\sin\theta' \\ A'_y = A\sin(\theta-\theta') = A\sin\theta\cos\theta' - A\cos\theta\sin\theta' \end{cases}$$

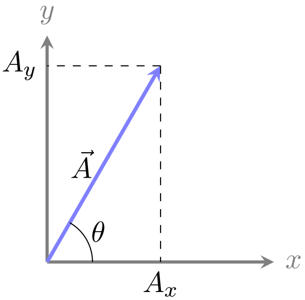
مسئله–۱۳: در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ به اندازه‌ی 2 متر و زاویه‌ی $\theta = 60^\circ$ قرار دارد. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را بدست آورید. اگر دستگاه دومی پاد ساعتگرد نسبت به دستگاه اولی به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta' = 30^\circ$ چرخیده شود. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را در دستگاه دومی بدست آورید.

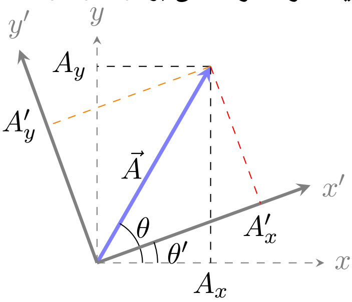




$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} A'_x = A_x\cos\theta' + A_y\sin\theta' \\ A'_y = A_y\cos\theta' - A_x\sin\theta' \end{cases}$$

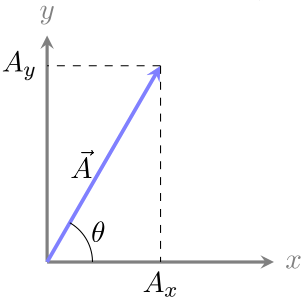
مسئله–۱۳: در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ به اندازه‌ی 2 متر و زاویه‌ی $\theta = 60°$ قرار دارد. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را بدست آورید. اگر دستگاه دومی پاد ساعتگرد نسبت به دستگاه اولی به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta' = 30°$ چرخیده شود. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را در دستگاه دومی بدست آورید.

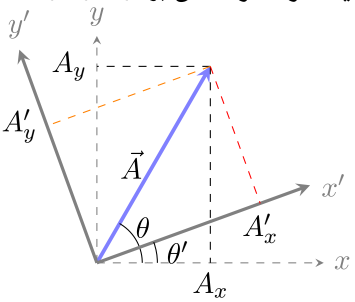




$$\begin{cases} A'_x = A_x \cos\theta' + A_y \sin\theta' \\ A'_y = -A_x \sin\theta' + A_y \cos\theta' \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

مسئله–۱۳: در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ به اندازه‌ی 2 متر و زاویه‌ی $\theta = 60°$ قرار دارد. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را بدست آورید. اگر دستگاه دومی پاد ساعتگرد نسبت به دستگاه اولی به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta' = 30°$ چرخیده شود. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را در دستگاه دومی بدست آورید.





$$R'_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{bmatrix} = R_{\theta'} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

مشتق بردار

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k}$$

در لحظه‌ی $t + \Delta t$

$$\vec{A}(t+\Delta t) = A_x(t+\Delta t)\hat{i} + A_y(t+\Delta t)\hat{j} + A_z(t+\Delta t)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x\hat{i} + \Delta A_y\hat{j} + \Delta A_z\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\Delta A_x &= A_x(t+\Delta t) - A_x(t)\\ \Delta A_y &= A_y(t+\Delta t) - A_y(t)\\ \Delta A_z &= A_z(t+\Delta t) - A_z(t)\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_y}{\Delta t}\hat{j} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A_z}{\Delta t}\hat{k}$$

مشتق بردار

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k} = \sum_i A_i \hat{e}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t}\hat{j} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t}\hat{k}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta A_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta A_y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta A_z}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{k} = \sum_i \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i$$

به همین ترتیب

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{A}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2A_x}{\mathrm{d}t^2}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}^2A_y}{\mathrm{d}t^2}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}^2A_z}{\mathrm{d}t^2}\hat{k} = \sum_i \frac{\mathrm{d}^2A_i}{\mathrm{d}t^2}\hat{e}_i$$

مشتق بردار

مسئله–۱۴: بردار متغیر با زمان

$$\vec{A}(t) = \hat{i}\alpha t + \hat{j}\beta t^2 + \hat{k}\gamma t^3$$

معلوم است، α، β و γ ثابت‌اند. مشتقهای زمانی اول و دوم $\frac{d\vec{A}}{dt}$ و $\frac{d^2\vec{A}}{dt^2}$ را بدست آورید.

$$\frac{d}{dt}\vec{A}(t) = \hat{i}\alpha + 2\hat{j}\beta t + 3\hat{k}\gamma t^2$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{A}(t) = 2\hat{j}\beta + 6\hat{k}\gamma t$$

مشتق بردار

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k} = \sum_i A_i\hat{e}_i$$

مشتق اول

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\hat{k} = \sum_i \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i$$

اتحادهای مفید:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)\vec{A}) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\vec{A} + f(t)\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

مشتق بردار

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \pm \vec{B}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i (A_i \pm B_i)\hat{e}_i \\
&= \sum_i (\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t})\hat{e}_i \\
&= \sum_i \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i \pm \sum_i \frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i \\
&= \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \pm \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

مشتق بردار

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\cdot\vec{B}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i A_i B_i \\
&= \sum_i \left(\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}B_i + A_i\frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \sum_i \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}B_i + \sum_i A_i\frac{\mathrm{d}B_i}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

مشتق بردار

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)\vec{A}) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\vec{A} + f(t)\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$$

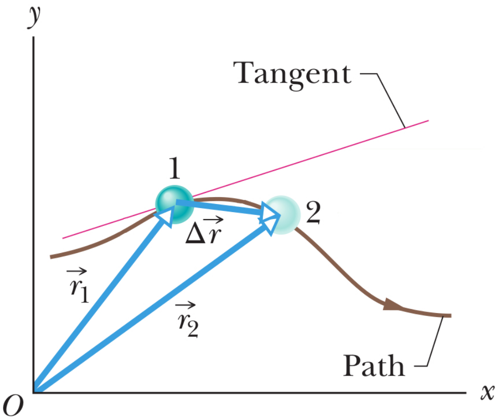
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t)\vec{A}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i (fA_i)\hat{e}_i \\
&= \sum_i (\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}A_i + f\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t})\hat{e}_i \\
&= \sum_i \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}A_i + \sum_i f\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i \\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\sum_i A_i + f\sum_i \frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}\hat{e}_i \\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\vec{A} + f\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

مشتق بردار

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\times\vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B} + \vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\times\vec{B}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{ijk}\epsilon_{ijk}A_iB_j\hat{e}_k \\
&= \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}(\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}B_j + A_i\frac{\mathrm{d}B_j}{\mathrm{d}t})\hat{e}_k \\
&= \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}\frac{\mathrm{d}A_i}{\mathrm{d}t}B_j\hat{e}_k + \sum_{ijk}\epsilon_{ijk}A_i\frac{\mathrm{d}B_j}{\mathrm{d}t}\hat{e}_k \\
&= \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

بردار مکان، سرعت و شتاب



بردار جابجایی:

$$1: \ t_1, \quad \vec{r}_1$$

$$2: \ t_2, \quad \vec{r}_2$$

ذره در بازه‌ی زمانی

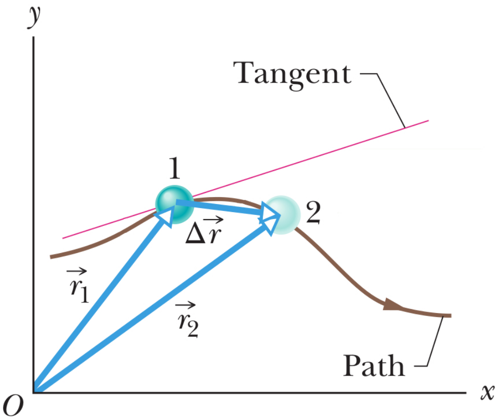
$$\Delta t = t_2 - t_1$$

جابجایی بصورت

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

دارد.

بردار مکان، سرعت و شتاب



بردار جابجایی:

$$1:\ t_1,\quad \vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$$

$$2:\ t_2,\quad \vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$$

ذره در بازه‌ی زمانی

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

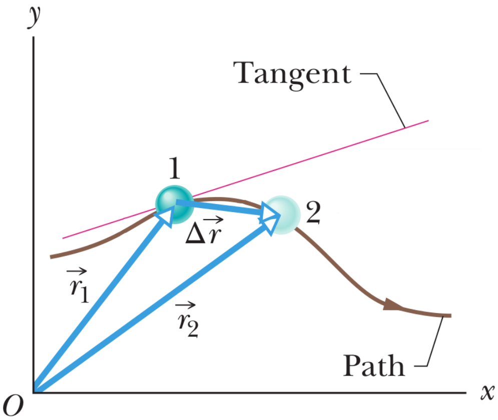
جابجایی بصورت

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

بردار مکان، سرعت و شتاب



سرعت متوسط:

$$\vec{v}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

سرعت لحظه‌ای:

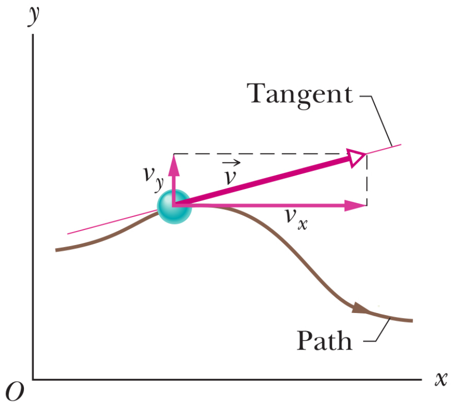
$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \vec{v}_{\text{متوسط}}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

بردار مکان، سرعت و شتاب

سرعت لحظه‌ای:



$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$v_x = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

بردار $\vec{v}$ مماس بر مسیر حرکت است.

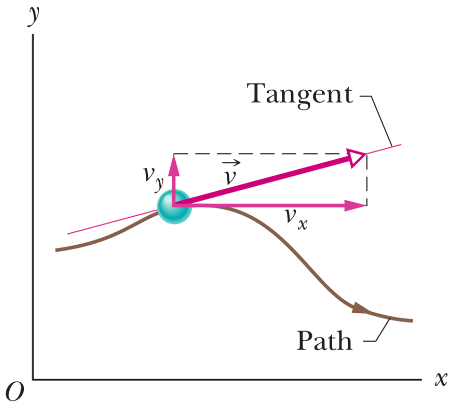
اندازه و جهت سرعت

$$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \hat{i}\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} + \hat{j}\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$: زاویه‌ی سرعت با $+x$

بردار مکان، سرعت و شتاب

سرعت لحظه‌ای:



$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$v_x = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

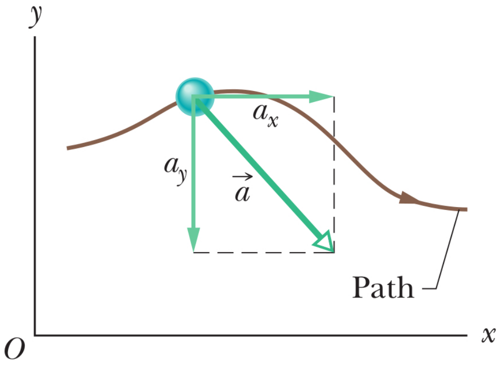
$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

بردار $\vec{v}$ مماس بر مسیر حرکت است.

سرعت لحظه‌ای در سه‌بعد

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$$

بردار مکان، سرعت و شتاب



ذره در بازه‌ی زمانی

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

تغییر سرعتی بصورت

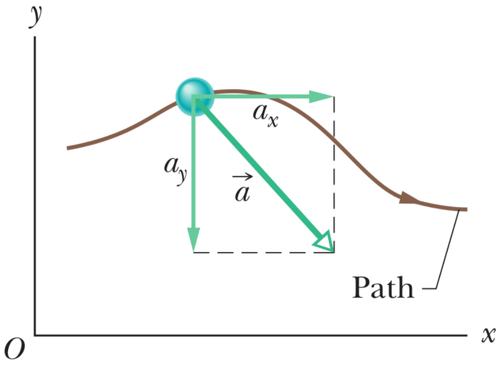
$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \hat{i} + \Delta v_y \hat{j}$$

$$\Delta \vec{v} = (v_{x_2} - v_{x_1})\hat{i} + (v_{y_2} - v_{y_1})\hat{j}$$

دارد.

بردار مکان، سرعت و شتاب



شتاب متوسط:

$$\vec{a}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

شتاب لحظه‌ای:

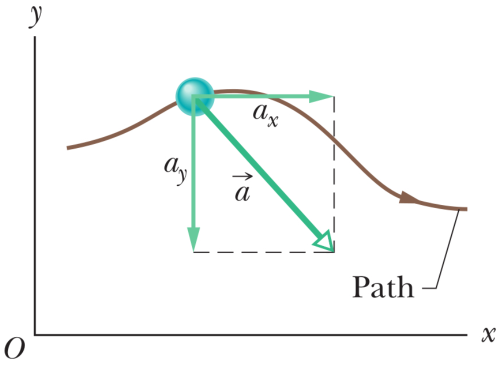
$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \vec{a}_{\text{متوسط}}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

بردار مکان، سرعت و شتاب

شتاب لحظه‌ای:



$$\vec{a} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$a_x = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$a_y = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

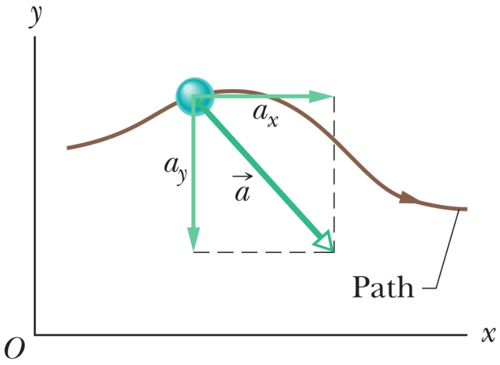
اندازه و جهت شتاب

$$a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$+x$ زاویه‌ی شتاب با : $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$, $\quad \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \hat{i}\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} + \hat{j}\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}$

بردار مکان، سرعت و شتاب

شتاب لحظه‌ای:



$$\vec{a} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$a_x = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$a_y = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

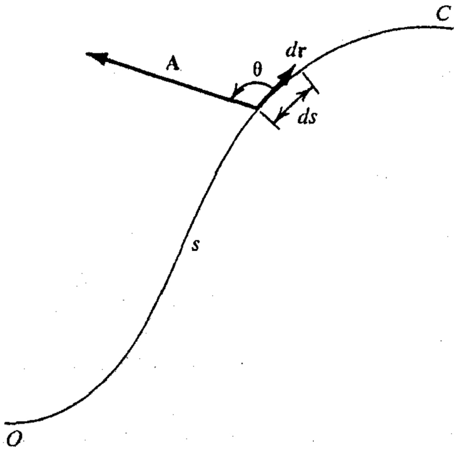
$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

شتاب لحظه‌ای در سه‌بعد

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}$$

انتگرال گیری برداری

$$\int_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$: انتگرال میدان برداری $\vec{A}$ بر روی مسیر C



انتگرال گیری برداری

$$\int_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$: انتگرال میدان برداری $\vec{A}$ بر روی مسیر C

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{i}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\vec{r} = \hat{i}\mathrm{d}x + \hat{j}\mathrm{d}y + \hat{k}\mathrm{d}z$$

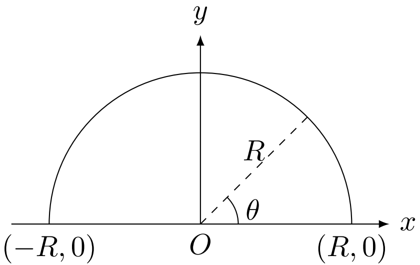
$$\int_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C (A_x\mathrm{d}x + A_y\mathrm{d}y + A_z\mathrm{d}z)$$

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

$$\int_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C \left(A_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + A_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + A_z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

انتگرال گیری برداری

مسئله–۱: انتگرال خطی $\vec{F} = ax\hat{i} + bxy\hat{j}$ را از $(-R,0)$ تا $(R,0)$ در امتداد طول نیمدایره زیر محاسبه کنید.



$$\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int \left(F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$$

$$\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\pi}^{0} (-F_x R\sin\theta + F_y R\cos\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

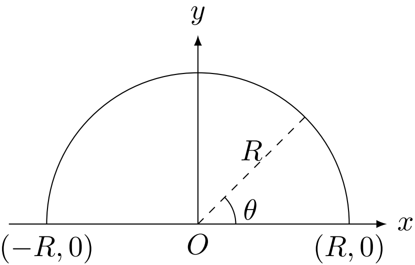
مسئله–۱۵: انتگرال خطی $\vec{F} = ax\hat{i} + bxy\hat{j}$ را از $(-R,0)$ تا $(R,0)$ در امتداد طول نیمدایره زیر محاسبه کنید.

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$$

$$\begin{aligned}
\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_{\pi}^{0} \left(-F_x R\sin\theta + F_y R\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\pi}^{0} \left(-aR^2\cos\theta\sin\theta + bR^3\sin\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= -aR^2\int_{\pi}^{0}\cos\theta\sin\theta \mathrm{d}\theta + bR^3\int_{\pi}^{0}\sin\theta\cos^2\theta \mathrm{d}\theta \\
&= -aR^2\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_{\pi}^{0} + bR^3\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\pi}^{0} = 0 - \frac{2bR^3}{3} \\
&= -\frac{2bR^3}{3}
\end{aligned}$$

انتگرال گیری برداری

مسئله–۱۶: انتگرال خطی $\vec{F} = x^2y\hat{i} + xy\hat{j}$ را از $(-R,0)$ تا $(R,0)$ در امتداد طول نیمدایره زیر محاسبه کنید.



$$\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y) = \int \left(F_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + F_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \right) \mathrm{d}\theta$$

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$$

$$\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{\pi}^{0} (-F_x R\sin\theta + F_y R\cos\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

مسئله–۱۶: انتگرال خطی $\vec{F} = x^2y\hat{i} + xy\hat{j}$ را از $(-R, 0)$ تا $(R, 0)$ در امتداد طول نیمدایره زیر محاسبه کنید.

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta$$

$$\begin{aligned}
\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} &= \int_{\pi}^{0} \left(-F_x R\sin\theta + F_y R\cos\theta\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\pi}^{0} \left(-R^4\cos^2\theta\sin^2\theta + R^3\sin\theta\cos^2\theta\right) \mathrm{d}\theta \\
&= -R^4 \int_{\pi}^{0} \cos^2\theta\sin^2\theta \mathrm{d}\theta + R^3 \int_{\pi}^{0} \sin\theta\cos^2\theta \mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{1}{8}R^4\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{\pi}^{0} + R^3\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_{\pi}^{0} \\
&= \frac{\pi R^4}{8} - \frac{2R^3}{3}
\end{aligned}$$

عملگر گرادیان

میدان اسکار پایا

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

مشتق گیری فضایی

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot \left(\mathrm{d}x\hat{i} + \mathrm{d}y\hat{j} + \mathrm{d}z\hat{k}\right) \end{aligned}$$

اگر $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ آنگاه $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\hat{i} + \mathrm{d}y\hat{j} + \mathrm{d}z\hat{k}$

$$\mathrm{d}\phi = \left(\left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\phi\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

عملگر گرادیان

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

عملگر گرادیان

میدان اسکار پایا

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

مشتق گیری فضایی

$$\mathrm{d}\phi = \left(\left[\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \right] \phi \right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

عملگر گرادیان

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathrm{d}\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

گرادیان ϕ در جهتی است که در آن تغییرات ϕ سریعترین است. در یک جهت دلخواه $\hat{n}$ مقدار تغییرات ϕ بصورت زیر داده می‌شود،

$$\vec{\nabla}\phi \cdot \hat{n}$$

عملگر گرادیان

میدان اسکار غیرپایا

$$\phi = \phi(x, y, z, t)$$

مشتق گیری فضایی

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{d}t \\
&= \vec{\nabla}\phi \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{v} + \frac{\partial \phi}{\partial t}, \qquad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

نکته: اگر زمان بطور صریح در میدان اسکالر نباشد، یعنی

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

در این صورت

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{v}$$

عملگر گرادیان

اتحاد مفید

$$f = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

آنگاه

$$\boxed{\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d} f(r)}{\mathrm{d} r} \frac{\vec{r}}{r}}$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

در اینجا f تابع صریحی از مختصات x ، y و z نیست. برای این منظور از قاعده زنجیری استفاده می کنیم،

$$\vec{\nabla} f(r) = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \left[\hat{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right] = \frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} r} \left[\hat{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right]$$

عملگر گرادیان

اتحاد مفید

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\left[\hat{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial r}{\partial z}\right]$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}}$$

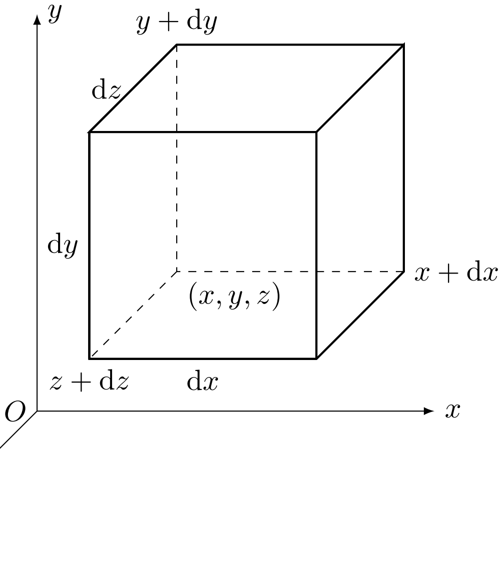
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}}$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\left[\hat{i}\frac{x}{r} + \hat{j}\frac{y}{r} + \hat{k}\frac{z}{r}\right]$$

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r}$$

عملگر دیورژانس



عملگر دیورژانس

شار عبوری میدان برداری $\vec{A}$ از **سطوح در بر گیرنده‌ی** حجم $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ بصورت

$$\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S \quad (۱)$$

داده می‌شود که $\hat{n}$ بردار یکه‌های رو به بیرون و عمود بر **سطوح در بر گیرنده‌ی** حجم $\mathrm{d}V$ است.

شار ورودی به صفحه‌ی x : $\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot(-\hat{i}\mathrm{d}y\mathrm{d}z) = -A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

شار عبوری از صفحه‌ی $x+\mathrm{d}x$: $\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot\hat{i}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = A_{x+\mathrm{d}x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

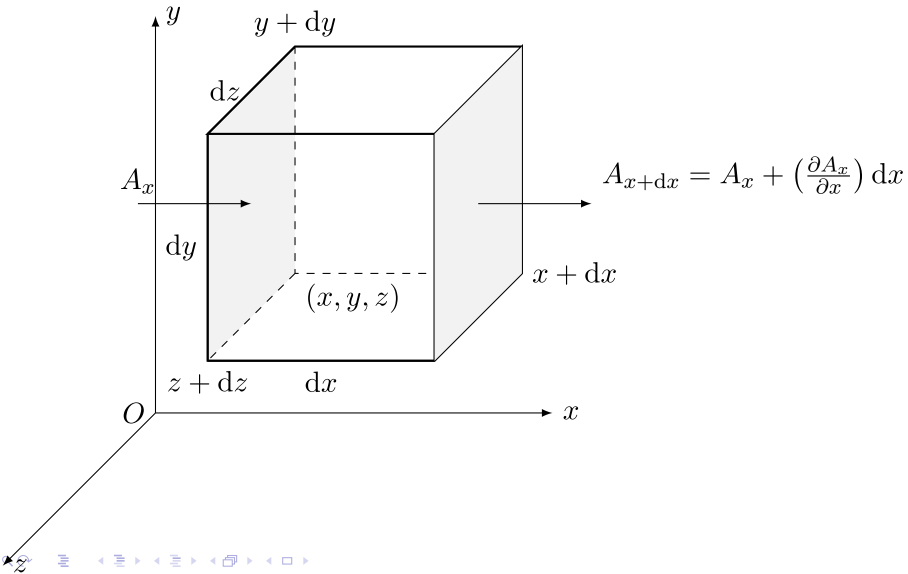
شار ورودی به صفحه‌ی y : $\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot(-\hat{j}\mathrm{d}z\mathrm{d}x) = -A_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

شار عبوری از صفحه‌ی $y+\mathrm{d}y$: $\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot\hat{j}\mathrm{d}z\mathrm{d}x = A_{y+\mathrm{d}y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

شار ورودی به صفحه‌ی z : $\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot(-\hat{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y) = -A_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

شار عبوری از صفحه‌ی $z+\mathrm{d}z$: $\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \vec{A}\cdot\hat{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = A_{z+\mathrm{d}z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

عملگر دیورژانس



عملگر دیورژانس

$$x \text{ شار ورودی به } : \quad A_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$x + \mathrm{d}x \text{ شار عبوری از } : \quad A_{x+\mathrm{d}x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z = A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\text{شار خالص عبوری} = (x + \mathrm{d}x \text{ شار عبوری از صفحه‌ی}) - (x \text{ شار ورودی به صفحه‌ی})$$

$$x \text{ شار خالص عبوری از حجم } \mathrm{d}V \text{ در جهت } = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\mathrm{d}V$$

بطورکلی

$$y \text{ شار خالص عبوری از حجم } \mathrm{d}V \text{ در جهت } = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}V$$

و

$$z \text{ شار خالص عبوری از حجم } \mathrm{d}V \text{ در جهت } = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

عملگر دیورژانس

$$\text{شار خالص عبوری از حجم } \mathrm{d}V = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

$$\text{عملگرد دیورژانس}: \quad \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{A}$$

که

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

و

$$\text{شار خالص عبوری از حجم } \mathrm{d}V = \nabla\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}V \qquad (۲)$$

از رابطه‌ی ۱ و ۲ و همچنین جمع‌بندی روی تمام حجم و سطوح در بر گیرنده بصورت زیر داده می‌شود

$$\oint_{\partial\Omega}\vec{A}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = \int_{\Omega}\nabla\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}V$$

که آن را **قضیه گاوس** یا **قضیه دیورژانس** می‌نامند.

عملگر دیورژانس

اگر

$$\vec{A} = \rho\vec{v}$$

که $\vec{v}$ سرعت در یک سیال تراکم پذیر و ρ چگالی آن در نقطه‌ی (x, y, z) است.

$$\nabla \cdot (\rho\vec{v})\mathrm{d}V \; : \; \text{شارش خروجی خالص در واحد زمان}$$

معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$$

یکی از کابردهای اصلی دیورژانس است. این معادله بیان می‌کند که شارش به خارج باعث کاهش چگالی درون حجم می‌شود. در حالت کلی $\rho = \rho(x, y, z, t)$ است. اگر $\rho = \rho(t)$ در اینصورت

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

و اگر ثابت $\rho = \rho_0$ در اینصورت سیال تراکم ناپذیر و

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \; : \; \text{بردار } \vec{v} \text{ سیملوله‌ای است}$$

عملگر دیورژانس

اتحاد مفید

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$$

عملگر دیورژانس

اتحاد مفید

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\phi\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\phi\vec{A}=\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\phi A_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_z)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\phi\vec{A}=(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_x+\phi\frac{\partial A_x}{\partial x})+(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_y+\phi\frac{\partial A_y}{\partial y})+(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_z+\phi\frac{\partial A_z}{\partial z})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\phi\vec{A}=(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}A_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}A_z)+\phi(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}A_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}A_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}A_z=\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{A},\quad \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\phi\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

عملگر دیورژانس

اتحاد مفید

$$f = f(r), \quad \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

آنگاه

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot f(r)\vec{r} = 3f(r) + r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}}$$

با استفاده از اتحاد

$$\vec{\nabla} \cdot \phi\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{A} + \phi\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

داریم

$$\vec{\nabla} \cdot f(r)\vec{r} = \vec{\nabla}f(r) \cdot \vec{r} + f(r)\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$$

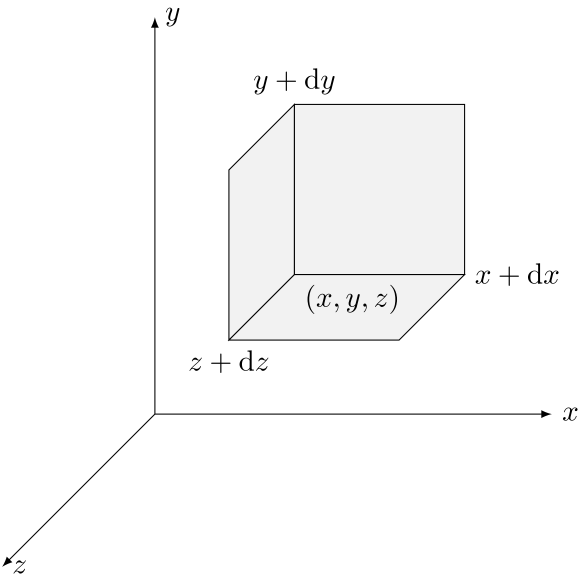
می‌دانیم

$$\vec{\nabla}f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 3$$

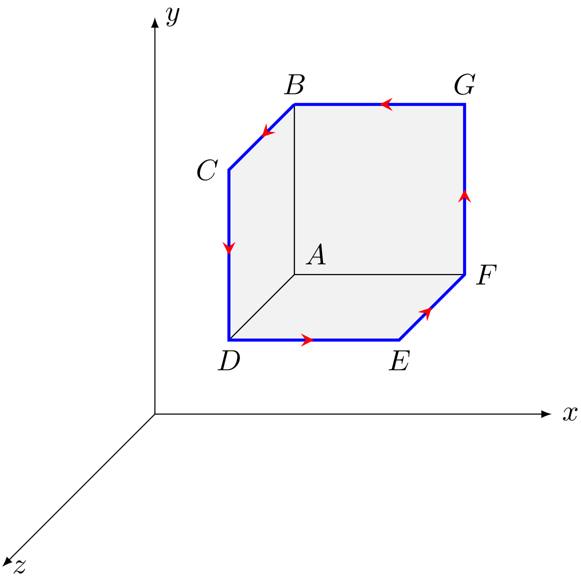
بنابراین

$$\vec{\nabla} \cdot f(r)\vec{r} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r} + 3f(r) = 3f(r) + r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}$$

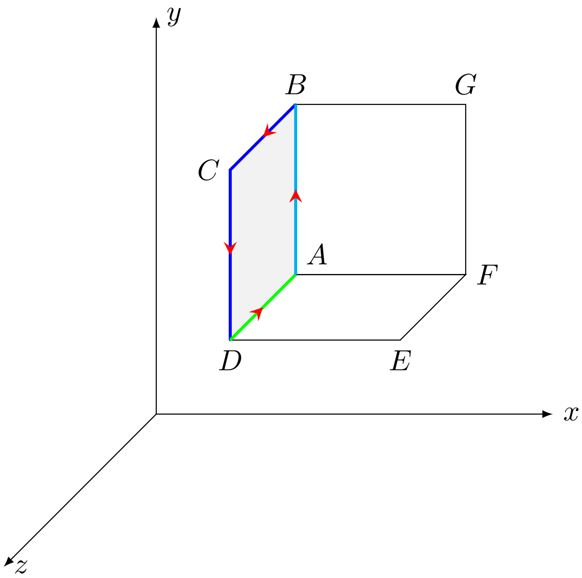
عملگر کرل



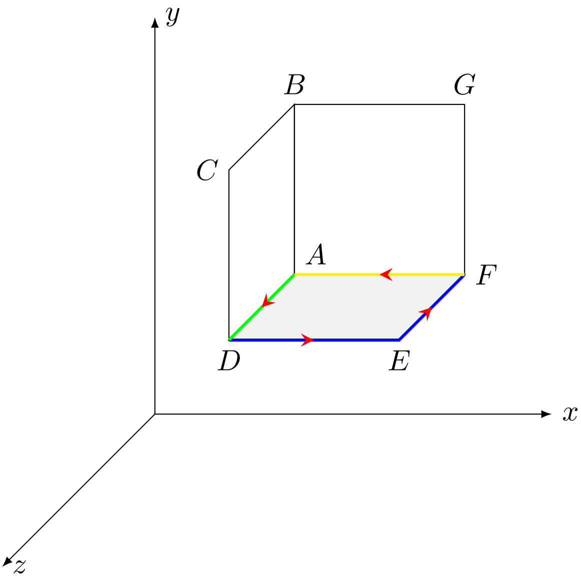
عملگر کرل



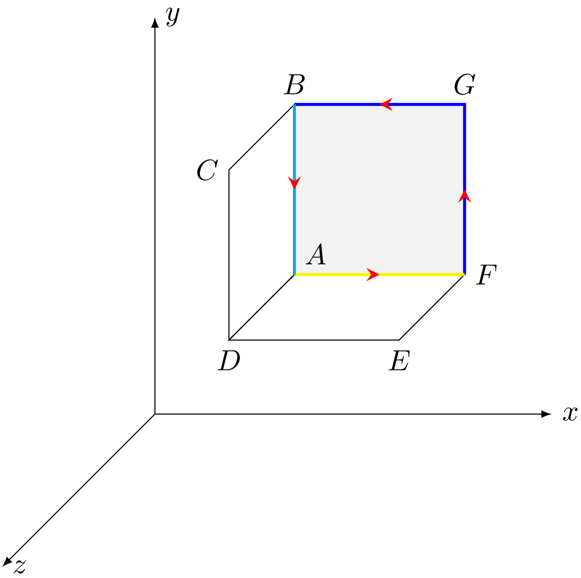
عملگر کرل



عملگر کرل



عملگر کرل



عملگر کرل

$$\oint_{BCDEFGB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{BC} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{CD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{DA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_{ADEFA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{DE} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{EF} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{FA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_{AFGBA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AF} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{FG} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{GB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{BA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

عملگر کرل

$$\oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{BC} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{CD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{DA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

مسیر AB

$$\mathrm{d}\vec{l} = \hat{j}\mathrm{d}y, \quad \int A_y \mathrm{d}y$$

مسیر BC

$$\mathrm{d}\vec{l} = \hat{k}\mathrm{d}z, \quad \int A_z(x, y+\mathrm{d}y, z)\mathrm{d}z = \int \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

مسیر CD

$$\mathrm{d}\vec{l} = -\hat{j}\mathrm{d}y, \quad -\int A_y \mathrm{d}y = -\int \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y$$

مسیر DA

$$\mathrm{d}\vec{l} = -\hat{k}\mathrm{d}z, \quad -\int A_z \mathrm{d}z$$

عملگر کرل

$$\oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{AB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{BC} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{CD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{DA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

مسیر AB

$$\int_{AB} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int A_y \mathrm{d}y$$

مسیر BC

$$\int_{BC} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z = \int A_z \mathrm{d}z + \int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

مسیر CD

$$\int_{CD} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y = -\int A_y \mathrm{d}y - \int \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

مسیر DA

$$\int_{DA} \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int A_z \mathrm{d}z$$

عملگر کرل

مسیر AB

$$\int_{AB} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int A_y \mathrm{d}y$$

مسیر BC

$$\int_{BC} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int A_z \mathrm{d}z + \int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

مسیر CD

$$\int_{CD} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int A_y \mathrm{d}y - \int \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

مسیر DA

$$\int_{DA} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int A_z \mathrm{d}z$$

$$\oint_{ABCDA} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

عملگر کرل

$$\oint_{ABCDA} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

اگر بطور مشابه، روش حل انتگرال روی مسیر $ABCDA$ را به دو مسیر بسته $ADEFA$ و $AFGBA$ دیگر اعمال کنیم، داریم

$$\oint_{ABCDA} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$\oint_{ABCDA} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\oint \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_{BCDEFGB} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \oint_{ABCDA} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \int \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \int \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \partial \right.$$

عملگر کرل

$$\oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \int \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

عملگر کرل : $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$

$$\oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{i}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{j}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\hat{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

قضیه استوکس : $\oint \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \vec{\nabla}\times\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

عملگر کرل

بیان مفهوم کرل:
وقتی که چرخ پره دار کوچک در درون سیال قرار دهیم، چرخ علاوه بر حرکت انتقالی در سیال در ناحیه‌ای که $\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$ است تمایل به چرخیدن دارد. به سیالی که در آن $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ است، گفته می‌شود که میدان $\vec{v}$ چرخشی دارد. به سیالی که $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ در همه جا صفر است، گفته می‌شود که $\vec{v}$ میدان چرخشی ندارد.

قضیه‌ی استوکس:
انتگرال خطی یک میدان برداری روی یک منحنی بسته برابر است با انتگرال سطحی که بوسیله این منحنی محصور شده باشد.

$$\oint \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

عملگر کرل

اتحاد مفید

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$$

عملگر کرل

اتحاد مفید

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}}$$

$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \phi A_x & \phi A_y & \phi A_z\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=&\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_z+\phi\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial\phi}{\partial z}A_y-\phi\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i}\\ &+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_x+\phi\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial\phi}{\partial x}A_z-\phi\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{j}\\ &+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_y+\phi\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial y}A_x-\phi\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}\end{aligned}$$

عملگر کرل

اتحاد مفید

$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_z + \phi\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_y - \phi\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_x + \phi\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_z - \phi\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_y + \phi\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y}A_x - \phi\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_z - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_y\right)\hat{i} + \phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_x - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_z\right)\hat{j} + \phi\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_y - \frac{\partial\phi}{\partial y}A_x\right)\hat{k} + \phi\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

عملگر کرل

اتحاد مفید

$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_z-\frac{\partial\phi}{\partial z}A_y\right)\hat{i}+\phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{i}$$
$$+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_x-\frac{\partial\phi}{\partial x}A_z\right)\hat{j}+\phi\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\hat{j}$$
$$+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_y-\frac{\partial\phi}{\partial y}A_x\right)\hat{k}+\phi\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x}&\frac{\partial\phi}{\partial y}&\frac{\partial\phi}{\partial z}\\ A_x&A_y&A_z\end{vmatrix}+\phi\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ A_x&A_y&A_z\end{vmatrix}$$

$$\vec{\nabla}\times\phi\vec{A}=\vec{\nabla}\phi\times\vec{A}+\phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

عملگر کرل

اتحاد مفید

$$f = f(r), \quad \vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

آنگاه

$$\boxed{\vec{\nabla} \times f(r)\vec{r} = 3f(r) + r\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}}$$

با استفاده از اتحاد

$$\vec{\nabla} \times \phi\vec{A} = \vec{\nabla}\phi \times \vec{A} + \phi\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

داریم

$$\vec{\nabla} \times f(r)\vec{r} = \vec{\nabla}f(r) \times \vec{r} + f(r)\vec{\nabla} \times \vec{r}$$

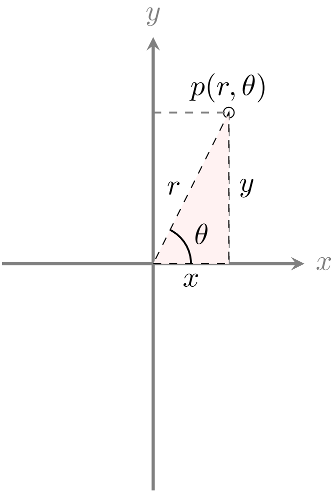
می‌دانیم

$$\vec{\nabla}f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{r} = 0$$

بنابراین

$$\vec{\nabla} \times f(r)\vec{r} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} + 0 = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

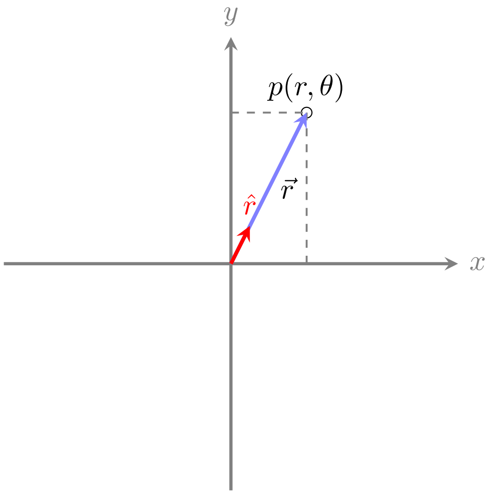
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$$

$$\vec{r} = \hat{i}r\cos\theta + \hat{j}r\sin\theta$$

$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

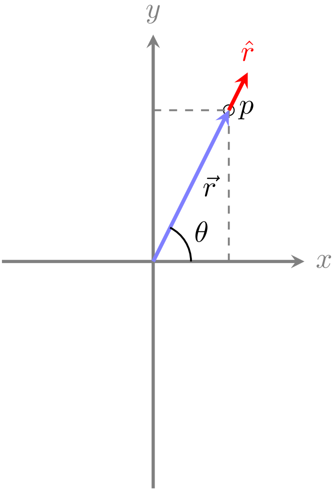
$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta}$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

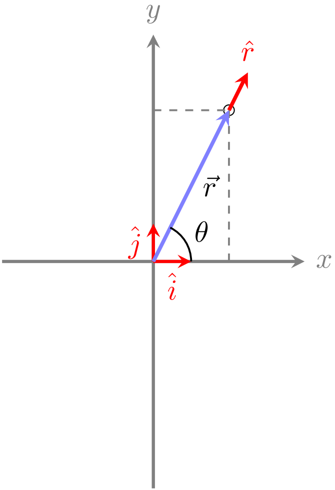
$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta}$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



بردار مکان

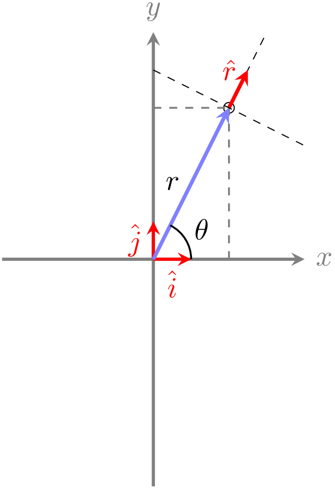
$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بطور کلی برای هر دستگاه مختصات دوبعدی دو بردار یکه وجود دارد. برای مثال، $\hat{i}$ و $\hat{j}$ ، در دستگاه مختصات دکارتی در دو بعد بردارهای یکه می‌باشند.
- به همین ترتیب برای دستگاه مختصات قطبی، علاوه بر بردار یکه $\hat{r}$، نیاز به یک بردار یکه دیگر نیز می‌باشد.

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



بردار مکان

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

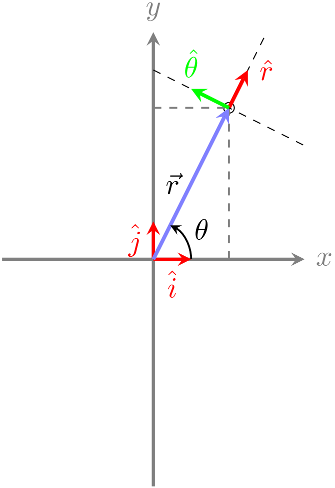
$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بردارهای یکه بر یکدیگر عمود هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بر یکدیگر عمودند.

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

- به همین ترتیب برای دستگاه مختصات قطبی، بردار یکه‌ای وجود دارد که بر بردار یکه $\hat{r}$ عمود است.

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

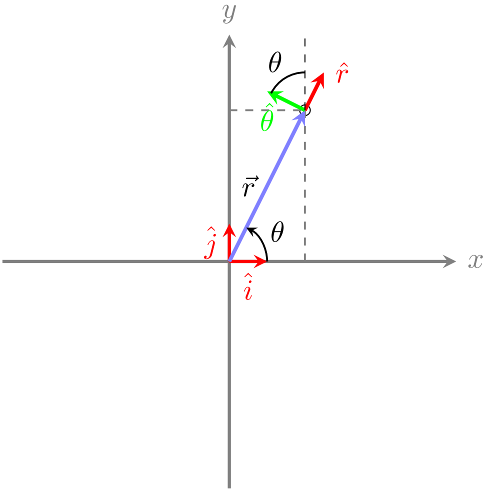
<u>بردار یکه</u>

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بردارهای یکه در امتداد مثبت تغییرات مختصات هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی، بردار یکه $\hat{i}$ در امتداد مثبت تغییرات محور x است و بردار یکه $\hat{j}$ در امتداد مثبت تغییرات محور y است.

- در دستگاه مختصات قطبی، $\hat{r}$ در امتداد مثبت تغییرات بردار $\vec{r}$ است.

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

<u>بردار یکه</u>

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

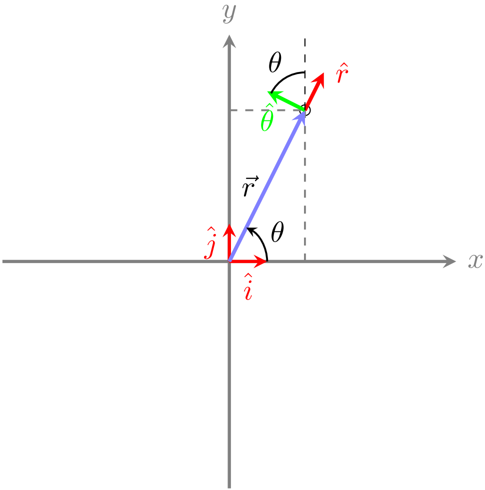
$$|\hat{\theta}| = 1$$

$$\sqrt{(-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta} = 1$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

$$\cos\theta(-\sin\theta) + \cos\theta\sin\theta = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

<u>بردار یکه</u>

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta,\ |\hat{r}| = 1$$

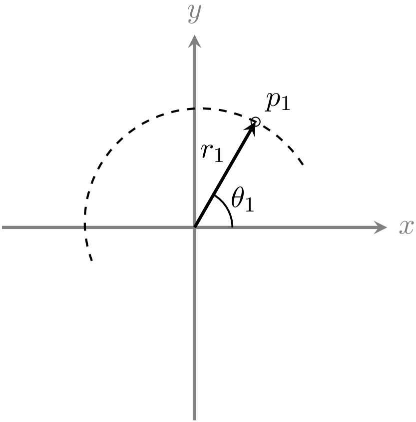
$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta,\ |\hat{\theta}| = 1$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

اتحادهای مفید

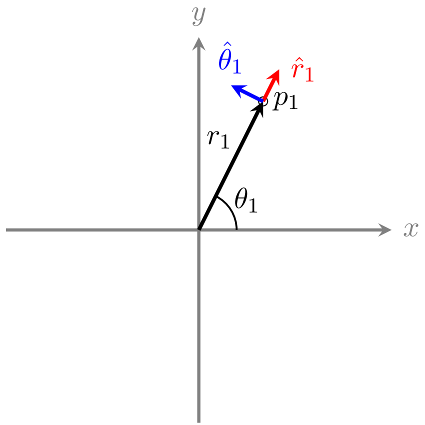
$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\hat{r}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



$$r = r(t),\ \theta = \theta(t):\quad \begin{cases} p_1: r_1 = r(t_1),\ \ \theta_1 = \theta(t_1) \\ p_2: r_2 = r(t_2),\ \ \theta_2 = \theta(t_2) \end{cases}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی



$$r = r(t),\ \theta = \theta(t) : \quad \begin{cases} p_1 : r_1 = r(t_1),\ \theta_1 = \theta(t_1),\ \hat{r}_1 = \hat{r}(\theta_1),\ \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}(\theta_1) \\ p_2 : r_2 = r(t_2),\ \theta_2 = \theta(t_2),\ \hat{r}_2 = \hat{r}(\theta_2),\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}(\theta_2) \end{cases}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\hat{r})$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

قاعده‌ی زنجیری

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\hat{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\hat{r}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

قاعده زنجیری

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j} = -\hat{r}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\color{red}{\mathrm{d}\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\color{red}{\mathrm{d}\theta}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} = &(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} \\ &+ (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}}$$

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

حالتهای خاص ۱-حرکت بر مسیر دایره‌ای با شعاع ثابت R

$$r = R, \quad \theta = \theta(t)$$

$$\vec{r} = R\hat{r}$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

<u>بطور خلاصه</u>

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

حالتهای خاص ۲-حرکت بر مسیر دایره‌ای با شعاع ثابت R و سرعت زاویه‌ای ثابت ω

$$r = R, \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

$$\vec{r} = R\hat{r}$$

$$\vec{v} = R\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r}$$

سرعت مماسی و شتاب شعاعی

<u>بطور خلاصه</u>

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

مسئله–۱۷: معادله‌ی مسیر ذره‌ای در مختصات قطبی عبارت است از

$$r(t) = be^{kt}, \qquad \theta(t) = ct$$

که b، k و c ثابتهای مثبت‌اند. نشان دهید در حالی که سوی حرکت به خارج است، زاویه‌ی میان بردار سرعت و بردار شتاب ثابت باقی می‌ماند(راهنمائی: $\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{va}$ را بیابید).

$$\vec{r} = r\hat{r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

که در آن

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$
$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

و

$$\dot{r} = bke^{kt} = kr, \qquad \ddot{r} = bk^2e^{kt} = k^2r$$
$$\dot{\theta} = c, \qquad \ddot{\theta} = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

$$\vec{v} = r(k\hat{r} + c\hat{\theta}), \qquad |\vec{v}| = r\sqrt{k^2 + c^2}$$

$$\vec{a} = r((k^2 - c^2)\hat{r} + 2kc\hat{\theta}), \qquad |\vec{a}| = r(k^2 + c^2)$$

حاصلضرب داخلی سرعت وشتاب برابر

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = r^2(k^3 + kc^2)$$

بدین ترتیب زاویه بین سرعت وشتاب برابر

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}||\vec{a}|} = \frac{k}{\sqrt{k^2 + c^2}}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

مسئله–۱۸: نشان دهید که $\vec{v} \cdot \vec{a} = v\dot{v}$، و از آنجا بررسی کنید که اگر بزرگی سرعت v ثابت باشد، بردار سرعت و شتاب ذره برهم عمودند.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$$

اگر از طرفین رابطه‌ی بالا $\frac{d}{dt}$ بگیریم

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = 2v\dot{v}$$

با توجه به تعریف شتاب $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t$ داریم

$$2\vec{a} \cdot \vec{v} = 2v\dot{v} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = v\dot{v}$$

اگر بزرگی سرعت ثابت باشد، در این صورت $\dot{v} = 0$ و در نتیجه $\vec{a} \cdot \vec{v}$ برابر صفر است.

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

مسئله-۱۹: نشان دهید

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})] = \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\dot{\vec{a}})\cdot$$

از سمت چپ عبارت بالا شروع می‌کنیم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})] = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot(\vec{v}\times\vec{a}) + \vec{r}\cdot(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\times\vec{a}) + \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})] = \vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{a}) + \vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{a}) + \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t})$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})] = \vec{a}\cdot(\vec{v}\times\vec{v}) + \vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{a}) + \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t})$$

جمله اول و دوم عبارت بالا برابر صفر است، بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})] = \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t})$$

مسئله-۲۰: نشان دهید مولفه مماسی شتاب را عبارت زیر بیان می‌کند

$$a_\tau = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}.$$

از آنجایی که بردار مماس بر مسیر حرکت منطبق بر بردار سرعت است بنابراین بردار یکه مماسی بر مسیر حرکت را می‌توان بصورت $\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v}$ نوشت. در حالت کلی اگر بردار شتاب را بتوان به دو راستای $\hat{t}$ و عمود بر آن $\hat{n}$ تجزیه کرد($\hat{t}\cdot\hat{n}=0$)، داریم

$$\vec{a} = a_n\hat{n} + a_t\hat{t} \Rightarrow \vec{a} = a_n\hat{n} + a_t\frac{\vec{v}}{v}$$

حالا طرفین عبارت بالا را ضربدر بردار سرعت کنید

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = a_n\vec{v}\cdot\hat{n} + a_t\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{v}$$

اگر طرفین را بر بزرگی سرعت تقسیم کنیم

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} = a_n\frac{\vec{v}}{v}\cdot\hat{n} + a_t\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{v^2} \Rightarrow \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v} = a_n\hat{t}\cdot\hat{n} + a_t \Rightarrow a_t = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

مسئله-۲۱: نشان دهید

$$|\vec{v}\times\vec{a}| = \frac{v^3}{\rho}$$

که ρ شعاع انحنای مسیر یک ذره متحرک است.
با توجه به مسئله قبل، اگر شتاب را بتوان به دو راستای مماسی وعمودی تجزیه کرد، داریم

$$\vec{a} = a_n\hat{n} + a_t\frac{\vec{v}}{v}$$

حالا طرفین عبارت بالا را ضرب خارجی در بردار سرعت کنید

$$\vec{v}\times\vec{a} = a_n\vec{v}\times\hat{n} + a_t\frac{\vec{v}\times\vec{v}}{v} \Rightarrow \vec{v}\times\vec{a} = a_n\vec{v}\times\hat{n}$$

برای سادگی در عبارت سمت راست بالا یک بزرگی سرعت ضرب و تقسیم کنید

$$\vec{v}\times\vec{a} = a_n v(\frac{\vec{v}}{v}\times\hat{n}) \Rightarrow \vec{v}\times\vec{a} = a_n v(\hat{t}\times\hat{n})$$

دستگاه مختصات دوبعدی-قطبی

$$\vec{v} \times \vec{a} = a_n v(\frac{\vec{v}}{v} \times \hat{n}) \Rightarrow \vec{v} \times \vec{a} = a_n v(\hat{t} \times \hat{n})$$

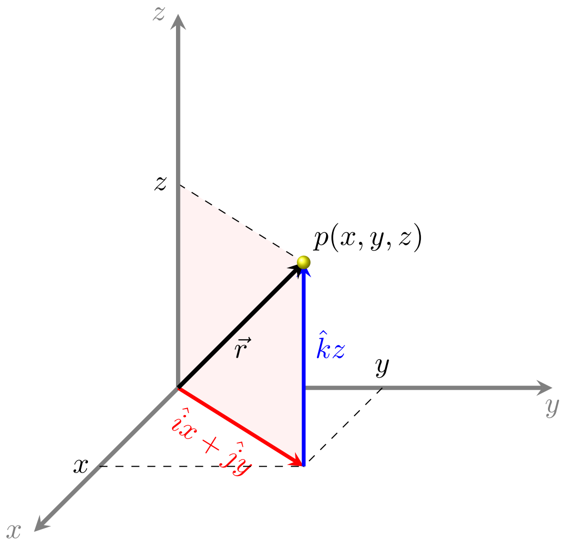
اندازه تساوی برداری بالا برابر

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = a_n v$$

اگر شعاع انحنای مسیر ذره ρ ثابت باشد، شتاب شعاعی ذره برابر $a_n = \frac{v^2}{\rho}$، بنابراین

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = \frac{v^3}{\rho}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

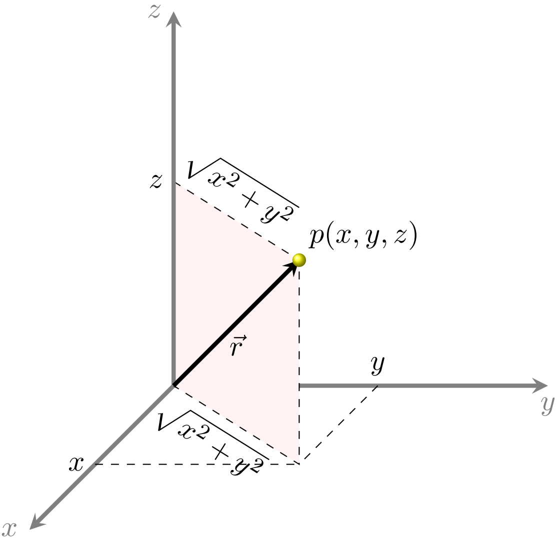
$$x = \hat{i} \cdot \vec{r}$$

$$y = \hat{j} \cdot \vec{r}$$

$$z = \hat{k} \cdot \vec{r}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



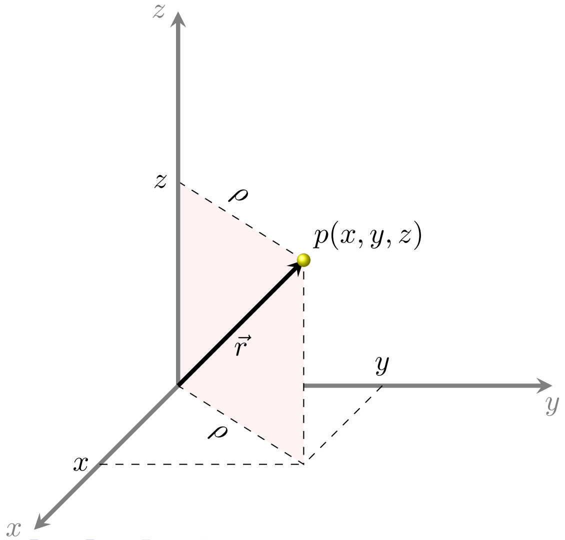
بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

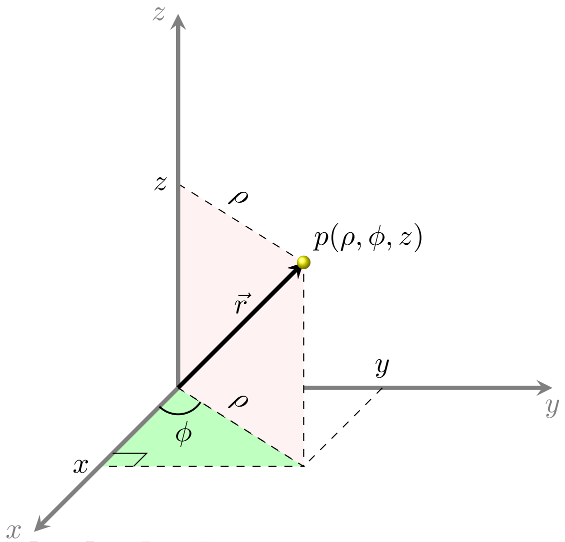
<u>بزرگی بردار مکان</u>

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

بزرگی بردار مکان

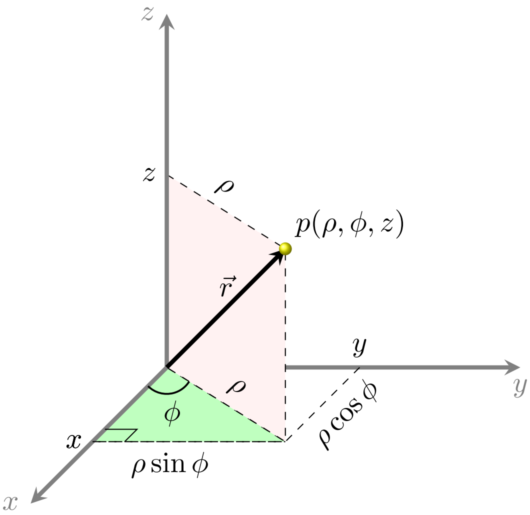
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

جهتهای بردار مکان

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

بزرگی بردار مکان

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

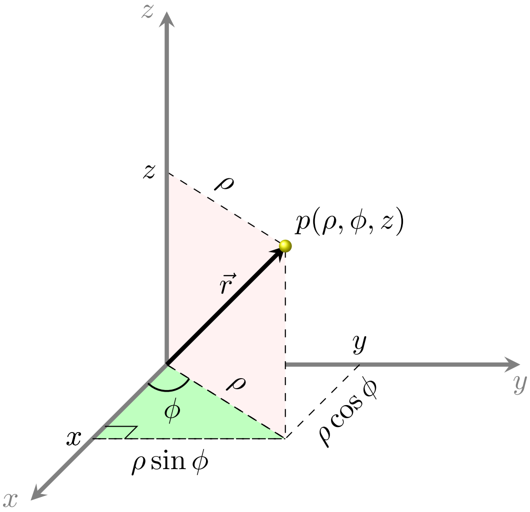
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

جهتهای بردار مکان

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



<u>بزرگی بردار مکان</u>

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

<u>جهتهای بردار مکان</u>

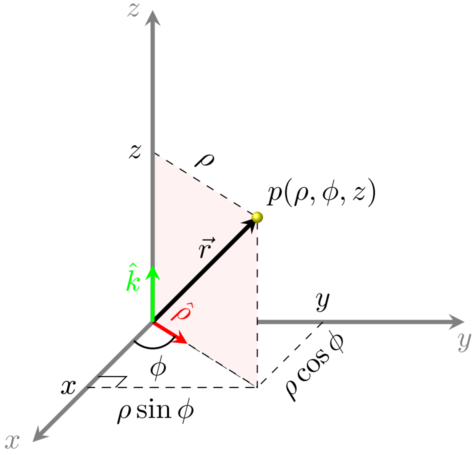
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

<u>بردار مکان</u>

$$\vec{r} = \hat{i}\rho\cos\phi + \hat{j}\rho\sin\phi + \hat{k}z$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



بزرگی بردار مکان

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\rho^2+z^2}$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

جهتهای بردار مکان

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

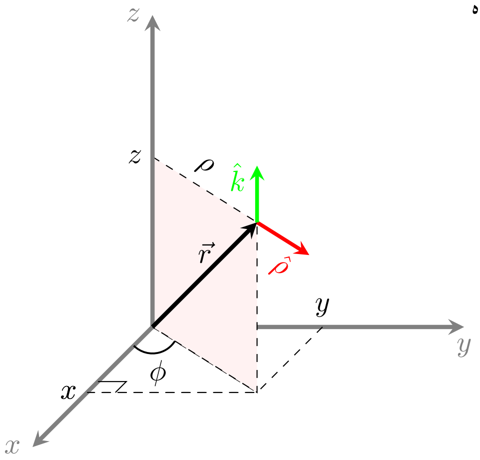
بردار مکان

$$\vec{r}=\rho(\hat{i}\cos\phi+\hat{j}\sin\phi)+\hat{k}z$$

$$\hat{\rho}=\hat{i}\cos\phi+\hat{j}\sin\phi,\quad |\hat{\rho}|=1$$

$$\vec{r}=\rho\hat{\rho}+\hat{k}z$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای



بردارهای یکه

یادآوری: بردارهای یکه در تمامی دستگاههای مختصات راستگرد هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی راستگردی بردارهای یکه بصورت زیر داده می‌شود،

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

بردار مکان در دستگاه مختصات استوانه‌ای با استفاده از بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ داده می شود،

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

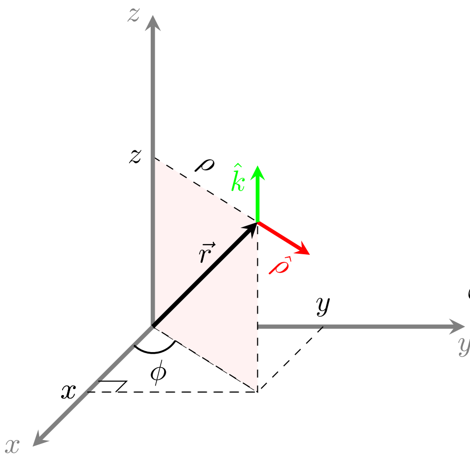
که

$$\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ در داخل صفحه‌ی صورتی رنگ قرار دارند و بر یکدیگر عمود می‌باشند.

دستگاه مختصات استوانه‌ای

بردارهای یکه



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

بردارهای یکه $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ **در داخل صفحه‌ی صورتی رنگ** قرار دارند و بر یکدیگر عمود می‌باشند.

$$\hat{\rho} \cdot \hat{k} = 0$$

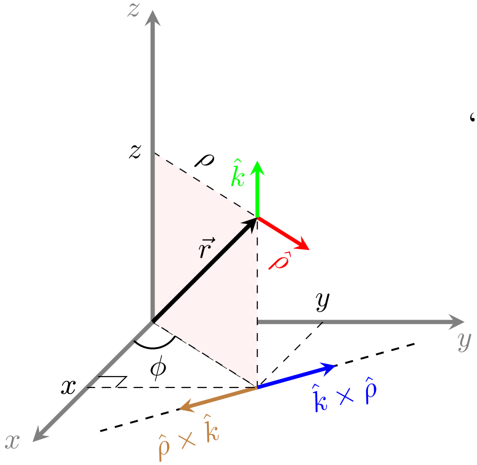
در دستگاه مختصات استوانه‌ای علاوه بر بردارهای یکه‌ی $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$، بردار یکه دیگری در جهت تغییرات زاویه‌ی ϕ وجود دارد که با $\hat{\phi}$ نمایش داده می‌شود.

بردار یکه $\hat{\phi}$ **عمود بر صفحه‌ی صورتی رنگ** است،

$$\hat{k} \cdot \hat{\phi} = \hat{\rho} \cdot \hat{\phi} = 0$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

<u>بردارهای یکه</u>



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi$$

بردار یکه $\hat{\phi}$ عمود بر صفحه‌ی صورتی رنگ است،

$$\hat{k}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = 0$$

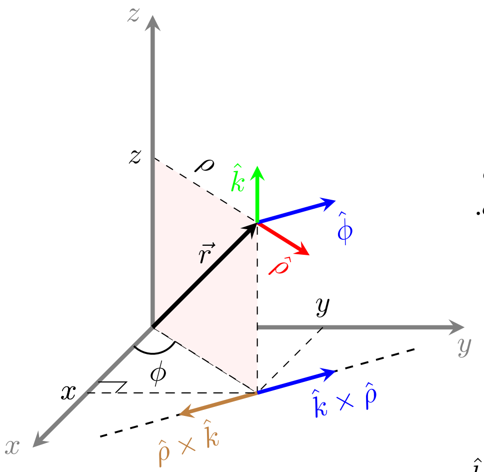
بردارهای یکه $\hat{\phi}$ از ضرب خارجی $\hat{\rho}$ و $\hat{k}$ بدست می‌آید. بنابراین

$$\hat{\rho}\times\hat{k} = \hat{\imath}\sin\phi - \hat{\jmath}\cos\phi$$

$$\hat{k}\times\hat{\rho} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

<u>بردارهای یکه</u>



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi$$

$$\hat{k}\cdot\hat{\rho} = \hat{k}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = 0$$

مطابق شکل $\hat{k}\times\hat{\rho}$ در جهت مثبت تغییرات ϕ است و $\hat{\rho}\times\hat{k}$ در جهت منفی تغییرات ϕ است. بنابراین

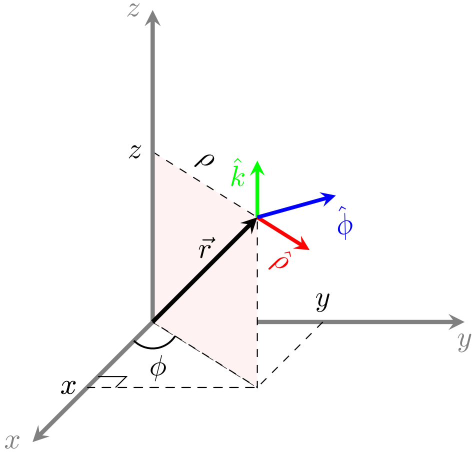
$$\hat{k}\times\hat{\rho} = \hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

برای دستگاه مختصات استوانه‌ای راستگردی بردارهای یکه بصورت زیر داده می‌شود،

$$\hat{k}\times\hat{\rho} = \hat{\phi},\quad \hat{\rho}\times\hat{\phi} = \hat{k},\quad \hat{\phi}\times\hat{k} = \hat{\rho}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

<u>بردارهای یکه</u>



$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + \hat{k}z$$

$$\hat{\rho} = \hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi$$
$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$
$$\hat{k}\cdot\hat{\rho} = \hat{k}\cdot\hat{\phi} = \hat{\rho}\cdot\hat{\phi} = 0$$

بردارهای یکه راستگردند،

$$\hat{k}\times\hat{\rho} = \hat{\phi}$$

$$\hat{\rho}\times\hat{\phi} = \hat{k}$$
$$\hat{\phi}\times\hat{k} = \hat{\rho}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}$$

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\hat{\rho}) + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

قاعده‌ی زنجیری

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \rho\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j} = \hat{\phi}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \rho\hat{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

اگر

$$\dot{\rho} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\phi} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}, \quad \mathrm{d}\hat{\rho}/\mathrm{d}\phi = \hat{\phi}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}}$$

$$v_\rho = \dot{\rho}$$
$$v_\phi = \rho\dot{\phi}$$
$$v_z = \dot{z}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{i} + \sin\phi\,\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}, \quad \mathrm{d}\hat{\rho}/\mathrm{d}\phi = \hat{\phi}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\rho}\hat{\rho}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\dot{\phi}\hat{\phi}\right) + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} + \rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho} + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi} = -\hat{i}\cos\phi - \hat{j}\sin\phi = -\hat{\rho}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

سرعت و شتاب

$$\rho=\rho(t),\quad \phi=\phi(t),\quad z=z(t)$$

$$\hat{\rho}=\cos\phi\hat{i}+\sin\phi\hat{j},\quad \hat{\phi}=-\sin\phi\hat{i}+\cos\phi\hat{j},\quad \mathrm{d}\hat{\rho}/\mathrm{d}\phi=\hat{\phi},\quad \mathrm{d}\hat{\phi}/\mathrm{d}\phi=-\hat{\rho}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}=&\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}+\dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\\&+\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi}+\rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}-\rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\\&+\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}=&\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}+\dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}\\&+\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\dot{\phi}\hat{\phi}+\rho\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}-\rho\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\hat{\rho}\\&+\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}\hat{k}\end{aligned}$$

$$\dot{\rho}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t},\quad \dot{\phi}=\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\ddot{\rho}=\frac{\mathrm{d}\dot{\rho}}{\mathrm{d}t},\quad \ddot{\phi}=\frac{\mathrm{d}\dot{\phi}}{\mathrm{d}t},\quad \ddot{z}=\frac{\mathrm{d}\dot{z}}{\mathrm{d}t}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

سرعت و شتاب

$$\rho = \rho(t), \quad \phi = \phi(t), \quad z = z(t)$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\hat{i} + \sin\phi\hat{j}, \quad \hat{\phi} = -\sin\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j}, \quad \mathrm{d}\hat{\rho}/\mathrm{d}\phi = \hat{\phi}, \quad \mathrm{d}\hat{\phi}/\mathrm{d}\phi = -\hat{\rho}$$

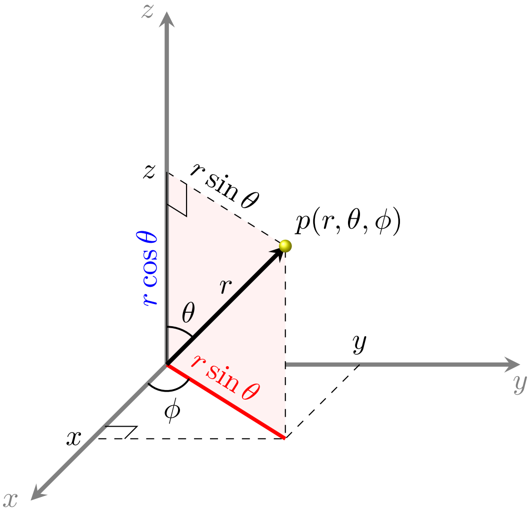
$$\frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} = \dot{\phi}\hat{\phi}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\phi}\hat{\rho}$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{\phi} + \rho\ddot{\phi}\hat{\phi} - \rho\dot{\phi}\dot{\phi}\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}}$$

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2$$
$$a_\phi = 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}$$
$$a_z = \ddot{z}$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



<u>بزرگی بردار مکان</u>

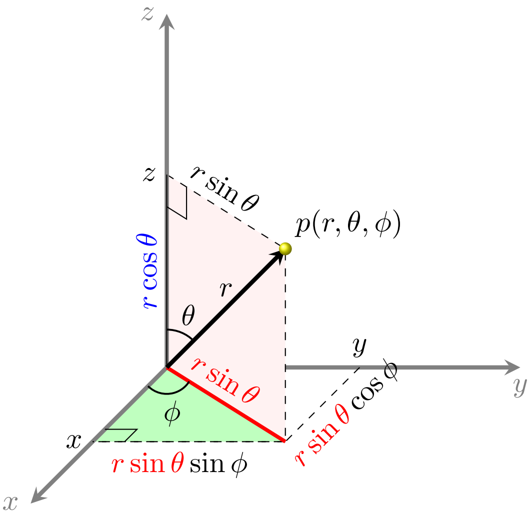
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

<u>جهتهای بردار مکان</u>

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r}$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



بزرگی و جهتهای بردار مکان

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

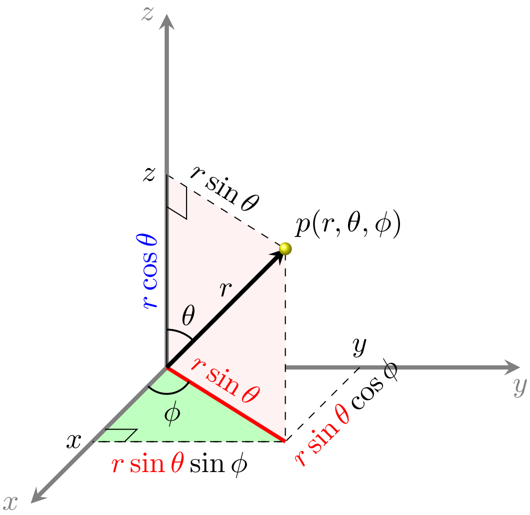
$$\tan\phi = \frac{y}{x}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

بردار مکان

$$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\phi)\hat{i} + (r\sin\theta\sin\phi)\hat{j} + (r\cos\theta)\hat{k}$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



بزرگی و جهتهای بردار مکان

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x}, \qquad \cos\theta = \frac{z}{r}$$

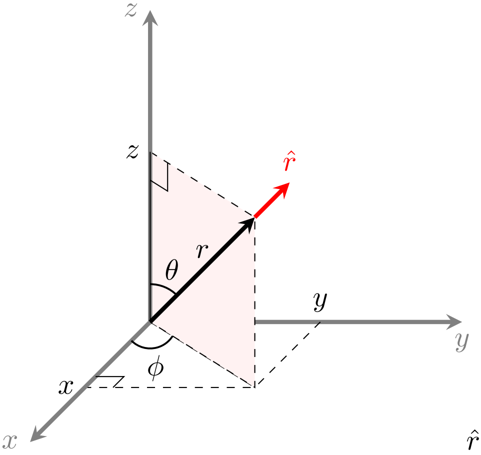
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

بردار مکان

$$\vec{r} = r[(\sin\theta\cos\phi)\hat{i} \\ +(\sin\theta\sin\phi)\hat{j} \\ +(\cos\theta)\hat{k}]$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی

بردارهای یکه



$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$(x, y, z) \to (r, \theta, \phi)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

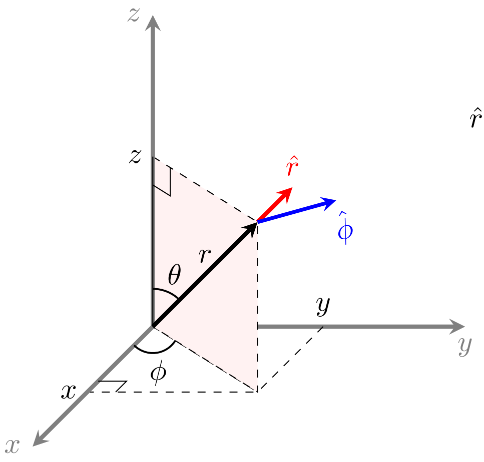
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$|\hat{r}| = 1$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



بردارهای یکه

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

بردار یکه $\hat{r}$ **در داخل صفحه‌ی صورتی رنگ** است

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

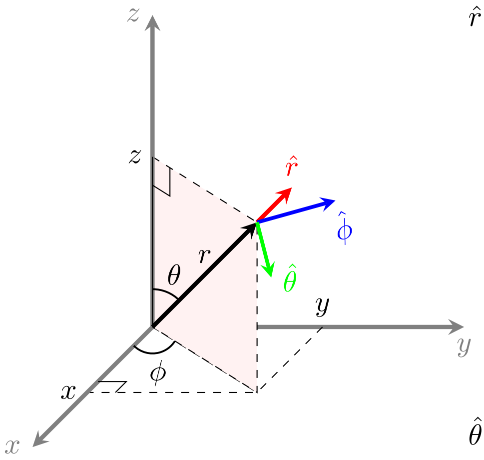
در دستگاه مختصات کروی، بردار یکه در جهت تغییرات زاویه‌ی ϕ با $\hat{\phi}$ نمایش داده می‌شود.

بردار یکه $\hat{\phi}$ **عمود بر صفحه‌ی صورتی رنگ** و **موازی با صفحه‌ی** xy است،

$$\hat{r} \cdot \hat{\phi} = 0$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



<u>بردارهای یکه</u>

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\phi}\cdot\hat{r} = 0$$

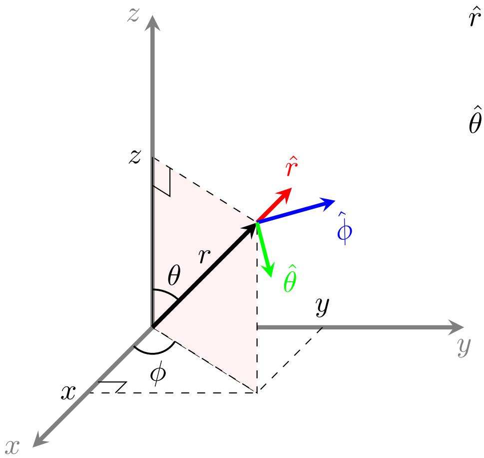
در دستگاه مختصات کروی، بردار یکه در جهت تغییرات زاویه‌ی θ با $\hat{\theta}$ نمایش داده می‌شود.

بردار یکه $\hat{\theta}$ در داخل صفحه‌ی صورتی رنگ قرار دارد و **عمود بر بردار یکه** $\hat{r}$ است،

$$\hat{\theta}\cdot\hat{r} = \hat{\theta}\cdot\hat{\phi} = 0$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

دستگاه مختصات سه‌بعدی-کروی



بردارهای یکه

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\hat{\phi}\cdot\hat{r} = \hat{\theta}\cdot\hat{r} = \hat{\theta}\cdot\hat{\phi} = 0$$

بردارهای یکه راستگردند،

$$\hat{r}\times\hat{\theta} = \hat{\phi}$$

$$\hat{\theta}\times\hat{\phi} = \hat{r}$$

$$\hat{\phi}\times\hat{r} = \hat{\theta}$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t)$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\hat{r} = \hat{r}(\theta, \phi): \ \mathrm{d}\hat{r} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\mathrm{d}\phi$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}\right)$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t)$$

$$\hat{r} = \hat{\imath}\sin\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{\imath}\cos\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}\right)$$

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\imath}\cos\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta = \hat{\theta} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta}}$$

$$\frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin\theta(-\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi) = \sin\theta\hat{\phi} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin\theta\hat{\phi}}$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t)$$

$$\hat{r} = \hat{\imath}\sin\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{\imath}\cos\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\left(\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{r}}{\partial\phi}\dot{\phi}\right)$$

اتحادهای مفید : $\dfrac{\partial\hat{r}}{\partial\theta} = \hat{\theta}, \quad \dfrac{\partial\hat{r}}{\partial\phi} = \sin\theta\hat{\phi}$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2$$

سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t)$$

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} \\ &+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + +r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} \\ &+ \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \phi = \phi(t)$$

$$\hat{r} = \hat{i} \sin\theta \cos\phi + \hat{j} \sin\theta \sin\phi + \hat{k} \cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i} \sin\phi + \hat{j} \cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i} \cos\theta \cos\phi + \hat{j} \cos\theta \sin\phi - \hat{k} \sin\theta$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi})$$

$$+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

$$+ \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t}$$

سرعت و شتاب

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi}\dot{\phi}$$

اتحادهای مفید : $\dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = -\hat{r}, \qquad \dfrac{\partial\hat{\theta}}{\partial\phi} = \cos\theta\hat{\phi}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\hat{r} + \cos\theta\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + +r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r} + \cos\theta\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &+ \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\dot{\phi}\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi}$$

اتحادهای مفید : $\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi} = -(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi) = -\sin\theta\hat{r} - \cos\theta\hat{\theta}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\phi}\sin\theta\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\theta}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}(\dot{\theta}\hat{\theta} + \sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &+ \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + +r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{r} + \cos\theta\dot{\phi}\hat{\phi}) \\ &+ \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi} + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\ddot{\phi}\hat{\phi} + r\sin\theta\dot{\phi}(-\dot{\phi}\sin\theta\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\theta})\end{aligned}$$

دستگاه مختصات کروی

سرعت و شتاب

$$\hat{r} = \hat{\imath}\sin\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{\imath}\cos\theta\cos\phi + \hat{\jmath}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi}\dot{\phi}$$

اتحادهای مفید : $\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}}{\mathrm{d}\phi} = -(\hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi) = -\sin\theta\hat{r} - \cos\theta\hat{\theta}$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\phi}\sin\theta\hat{r} - \dot{\phi}\cos\theta\hat{\theta}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^{\theta}\ddot{\phi})\hat{r}\\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\theta}\\ &+ (r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi})\hat{\phi}\end{aligned}$$

سرعت و شتاب

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta$$

$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta\cos\phi + \hat{j}\cos\theta\sin\phi - \hat{k}\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{r} = r\hat{r}}$$

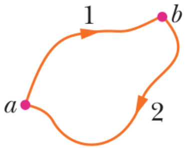
$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\phi}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{a} = {} & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^\theta \ddot{\phi})\hat{r} \\ & + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2)\hat{\theta} \\ & + (r\sin\theta\ddot{\phi} + 2\dot{r}\sin\theta\dot{\phi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi})\hat{\phi} \end{aligned}}$$

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در یک بعد (یادآوری):

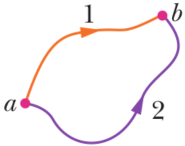
- کار انجام شده بوسیله‌ی نیروی $F(x)$ در یک مسیر بسته (یا یک مسیر رفت و برگشت) برابر صفر باشد.



$$W_{\text{کل}} = W^{(1)}_{a\to b} + W^{(2)}_{b\to a} = 0$$

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} F(x)\mathrm{d}x = 0$$

- کار انجام شده بوسیله‌ی نیروی $F(x)$ به مسیر حرکت ذره بستگی **نداشته** باشد و فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر حرکت بستگی **داشته** باشد.



$$W^{(1)}_{a\to b} = W^{(2)}_{a\to b}$$

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در یک بعد (یادآوری):

در نیروهای تابع مکان وقتی

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} F(x)\mathrm{d}x = 0$$

باشد، می‌توان تابع انرژی پتانسیل را از تابع نیرو بصورت

$$V(x) - V(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

بدست آورد که x_0 و $V(x_0)$ بترتیب نقطه مرجع و پتانسیل در آن نقطه می‌باشد و تابع نیرو را از مشتق تابع انرژی پتانسیل بصورت

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

بدست آورد.

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در یک بعد (یادآوری):

پایستگی انرژي وقتی

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} F(x)\mathrm{d}x = 0$$

می‌توان با استفاده از تغییری انرژی پتانسیل و قضیه کار و انرژی،

$$\Delta V = -\int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

$$\Delta K = \int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

بصورت

$$\Delta K = -\Delta V \Rightarrow \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}_0^2 + V(x_0) = E$$

بدست آورد.

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در دو و سه بعد:

وقتی کار نیروهای تابع مکان در یک مسیر بسته برابر صفر باشد،

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

با استفاده از قضیه استوکس داریم

$$\oint_{\text{مسیر بسته}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \mathrm{d}S = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

می‌توان تابع نیرو را از میدان اسکالر انرژی پتانسیل بصورت

$$F = -\vec{\nabla} V$$

بدست آورد که شرط

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$$

را برآورده می‌کند.

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در دو و سه بعد:

وقتی کار نیرو در یک مسیر بسته برابر صفر باشد،

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

می‌توان تابع انرژی پتانسیل را از نیرو بصورت

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

تعریف کرد که $\vec{r}_0$ و $V(\vec{r}_0)$ بترتیب نقطه مرجع و پتانسیل در آن نقطه می‌باشد.

تابع انرژی پتانسیل

نیروی پایستار در دو و سه بعد:

وقتی کار نیرو در یک مسیر بسته برابر صفر باشد،

$$W_{\text{کل}} = \oint_{\text{مسیر بسته}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

می‌توان پایستگی انرژی را با استفاده از تغییری انرژی پتانسیل و قضیه کار و انرژی،

$$\Delta V = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\Delta K = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

بصورت

$$\Delta K = -\Delta V \Rightarrow \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)+V(x) = \frac{1}{2}m(\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2)+V(x_0) = E$$

بدست آورد.

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۲: نشان دهید نیرو زیر پایستار است و پتانسیل متناظر را پیدا کنید.

$$\vec{F} = ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}$$

در قدم اول شرط پایستار بودن نیرو مربوطه را بررسی می‌کنیم،

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax & by & cz \end{vmatrix} = 0$$

از برابر صفر شدن $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ می‌توان تابع انرژي پتانسیل را با استفاده از تعریف

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

بدست آورد.

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۲: نشان دهید نیرو زیر پایستار است و پتانسیل متناظر را پیدا کنید.

$$\vec{F} = ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}$$

می‌توان تابع انرژي پتانسیل را با استفاده از تعریف

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

بدست آورد.

$$V_1 = -\int F_x \mathrm{d}x + C_1(y,z) = -\frac{1}{2}ax^2 + C_1(y,z)$$

$$V_2 = -\int F_y \mathrm{d}y + C_2(z,x) = -\frac{1}{2}by^2 + C_2(z,x)$$

$$V_3 = -\int F_z \mathrm{d}z + C_3(x,y) = -\frac{1}{2}cz^2 + C_3(x,y)$$

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۲: نشان دهید نیرو زیر پایستار است و پتانسیل متناظر را پیدا کنید.

$$\vec{F} = ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}$$

$$V_1 = -\int F_x \mathrm{d}x + C_1(y,z) = -\frac{1}{2}ax^2 + C_1(y,z) \quad ①$$

$$V_2 = -\int F_y \mathrm{d}y + C_2(z,x) = -\frac{1}{2}by^2 + C_2(z,x) \quad ②$$

$$V_3 = -\int F_z \mathrm{d}z + C_3(x,y) = -\frac{1}{2}cz^2 + C_3(x,y) \quad ③$$

یک عبارت کلی و سازگار برای تابع پتانسیل را می‌توان از روابط ① ، ② و ③ را بصورت

$$V = -\frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2) + C$$

که C یک کمیت ثابت می‌باشد.

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۳: نشان دهید نیرو زیر پایستار است و پتانسیل متناظر را پیدا کنید.

$$\vec{F} = -yz\hat{i} - xz\hat{j} - xy\hat{k}$$

در قدم اول شرط پایستار بودن نیرو مربوطه را بررسی می‌کنیم،

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yz & -zx & -xy \end{vmatrix} = 0$$

از برابر صفر شدن $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ می‌توان تابع انرژي پتانسیل را با استفاده از تعریف

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

بدست آورد.

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۳: نشان دهید نیرو زیر پایستار است و پتانسیل متناظر را پیدا کنید.

$$\vec{F} = -yz\hat{i} - xz\hat{j} - xy\hat{k}$$

$$V_1 = -\int F_x \mathrm{d}x + C_1(y,z) = xyz + C_1(y,z) \quad (۱)$$

$$V_2 = -\int F_y \mathrm{d}y + C_2(z,x) = xyz + C_2(z,x) \quad (۲)$$

$$V_3 = -\int F_z \mathrm{d}z + C_3(x,y) = xyz + C_3(x,y) \quad (۳)$$

یک عبارت کلی و سازگار برای تابع پتانسیل را می‌توان از روابط (۱)، (۲) و (۳) را بصورت

$$V = xyz + C$$

که C یک کمیت ثابت می‌باشد.

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۴: نشان دهید نیرو زیر پایستار است و پتانسیل متناظر را پیدا کنید.

$$\vec{F} = (3ayz^3 - 20bx^3y^2)\hat{i} + (3axz^3 - 10bx^4y)\hat{j} + 9axz^2y\hat{k}$$

در قدم اول شرط پایستار بودن نیرو مربوطه را بررسی می‌کنیم،

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3ayz^3 - 20bx^3y^2 & 3axz^3 - 10bx^4y & 9axz^2y \end{vmatrix}$$

$$= (9axz^2 - 9axz^2)\hat{i} + (9ayz^2 - 9ayz^2)\hat{j}$$

$$+ (3az^3 - 40bx^3y - 3az^3 + 40bx^3y)\hat{k} = 0$$

از برابر صفر شدن $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ می‌توان تابع انرژي پتانسیل را با استفاده از تعریف

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_0) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

بدست آورد.

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۴: نشان دهید نیرو زیر پایستار است و پتانسیل متناظر را پیدا کنید.

$$\vec{F} = (3ayz^3 - 20bx^3y^2)\hat{i} + (3axz^3 - 10bx^4y)\hat{j} + 9axz^2y\hat{k}$$

$$V_1 = -\int F_x \mathrm{d}x + C_1(y,z) = -3axyz^3 + 5bx^4y^2 + C_1(y,z) \quad ①$$

$$V_2 = -\int F_y \mathrm{d}y + C_2(z,x) = -3axyz^3 + 5bx^4y^2 + C_2(z,x) \quad ②$$

$$V_3 = -\int F_z \mathrm{d}z + C_3(x,y) = -3axyz^3 + C_3(x,y) \quad ③$$

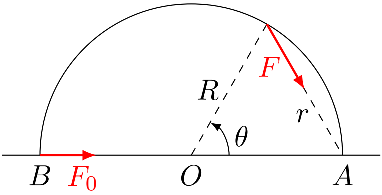
یک عبارت کلی و سازگار برای تابع پتانسیل را می‌توان از روابط ①، ② و ③ را بصورت

$$V = -3axyz^3 + 5bx^4y^2 + C$$

که C یک کمیت ثابت می‌باشد.

تابع انرژی پتانسیل

مسئله-۲۵: ذره‌ای به جرم m روی یک مسیر نیمدایره‌ای به شعاع R از A به B حرکت می‌کند و به وسیله‌ی نیروی متناسب با فاصله‌ی نیروی متناسب با فاصله‌اش از نقطه شروع حرکت A بطرف آن جذب می‌شود. وقتی ذره به نقطه‌ی B می‌رسد. مقدار این نیرو F_0 است. کار انجام شده در مقابل این نیرو را وقتی که ذره در روی این مسیر نیمدایره‌ای از A به B حرکت می‌کند، محاسبه کنید.



بزرگی نیروی متناسب با فاصله

$$F(r) = kr$$

با توجه به فرض مسئله

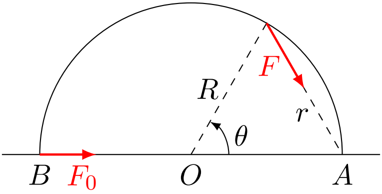
$$F(r = 2R) = F_0 \Rightarrow k = F_0/2R$$

بنابراین

$$F(r) = F_0 r/2R$$

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۵:



$$F(r) = F_0 r/2R$$

$$\text{جمع برداری} :\ OC + CA = OA$$

$$R(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) + \vec{r} = R\hat{i}$$

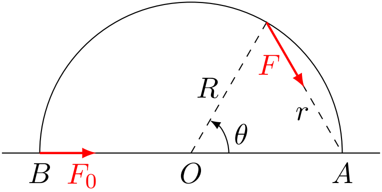
$$\vec{r} = R(1-\cos\theta)\hat{i} - R\sin\theta\hat{j}$$

$$r = R\sqrt{2-2\cos\theta}$$

$$F(r) = F_0\sqrt{2-2\cos\theta}/2$$

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۵:



$$\vec{r} = R(1-\cos\theta)\hat{i} - R\sin\theta\hat{j}$$

$$r = R\sqrt{2-2\cos\theta}$$

$$F(r) = F_0\sqrt{2-2\cos\theta}/2$$

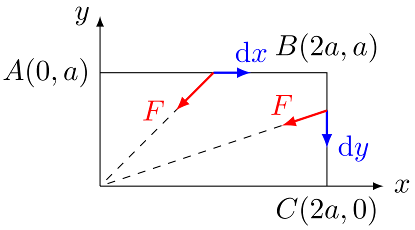
$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{r} = (F_0/2)[(1-\cos\theta)\hat{i} - \sin\theta\hat{j}]$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \hat{\theta}R\mathrm{d}\theta = (-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})R\mathrm{d}\theta$$

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = (F_0R/2)\int_0^\pi[-\sin\theta]\mathrm{d}\theta = (F_0R/2)[\cos\theta]_0^\pi = -F_0R$$

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۶: ذره‌ای مطابق شکل با نیروی $F = k/y$ بطرف مبدا جذب می شود. کار انجام شده از A به B و سپس به C را محاسبه کنید.



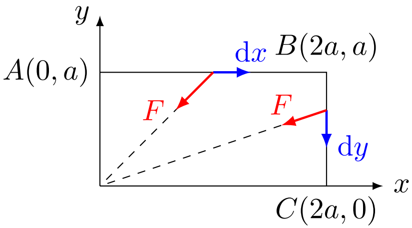
$$\text{مسیر } A \text{ به } B: \quad y = a,\ \mathrm{d}\vec{r} = \hat{i}\mathrm{d}x$$

$$\vec{F} = \frac{k}{a}\frac{(-x\hat{i} - a\hat{j})}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$W_{A\to B} = -\frac{k}{a}\int_0^{2a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{k}{a}[\sqrt{x^2+a^2}]_0^{2a} = -k(\sqrt{5}-1)$$

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۶: ذره‌ای مطابق شکل با نیروی $F = k/y$ بطرف مبدا جذب می شود. کار انجام شده از A به B و سپس به C را محاسبه کنید.



$$\text{مسیر } B \text{ به } C : \; x = 2a, \; \mathrm{d}\vec{r} = \hat{j}\mathrm{d}y$$

$$\vec{F} = \frac{k}{y}\frac{(-2a\hat{i} - y\hat{j})}{\sqrt{4a^2 + y^2}}$$

$$W_{B\to C} = -k\int_a^0 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4a^2 + y^2}}$$

تابع انرژی پتانسیل

مسئله-۲۶:

$$W_{B\to C} = -k\int_a^0 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4a^2+y^2}}$$

$$y = 2a\tan\theta \Rightarrow \mathrm{d}y = 2a(1+\tan^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4a^2+y^2}} = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} = \ln(\sec\theta+\tan\theta) = \ln(\frac{\sqrt{y^2+4a^2}+y}{2a})$$

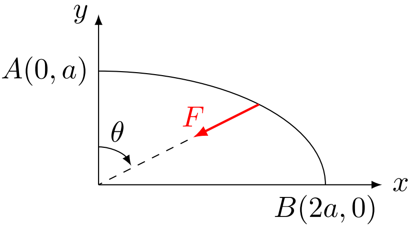
$$W_{B\to C} = -k\int_a^0 \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4a^2+y^2}}$$

$$= -k\left[\ln\left(\frac{\sqrt{y^2+4a^2}+y}{2a}\right)\right]_a^0 = k\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

$$W = W_{B\to C} + W_{B\to C} = -k(\sqrt{5}-1) + k\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۷: ذره‌ای مطابق شکل با نیروی $F = k/y$ بطرف مبدا جذب می شود. کار انجام شده در طول مسیر بیضی شکل از A به B را محاسبه کنید.



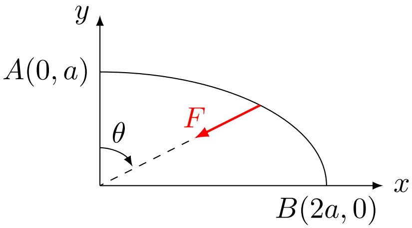
$$\vec{r} = (2a\sin\theta)\hat{i} + (a\cos\theta)\hat{j}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = [2\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}]a\mathrm{d}\theta$$

$$\vec{F} = -\frac{k}{2a\cos\theta}\frac{(2a\sin\theta)\hat{i} + (a\cos\theta)\hat{j}}{\sqrt{a^2 + 3a^2\sin^2\theta}}$$

تابع انرژی پتانسیل

مسئله–۲۷:



$$\vec{r} = (2a\sin\theta)\hat{i} + (a\cos\theta)\hat{j}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = [2\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}]a\mathrm{d}\theta$$

$$\vec{F} = -\frac{k}{a\cos\theta}\frac{(2a\sin\theta)\hat{i} + (a\cos\theta)\hat{j}}{\sqrt{a^2 + 3a^2\sin^2\theta}}$$

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -3k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta$$

مسئله–۲۷:

$$W=-3k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$u=\cos\theta\Rightarrow \mathrm{d}u=-\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\int\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta=-\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{4-3u^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-(\sqrt{3}u/2)^2}}$$

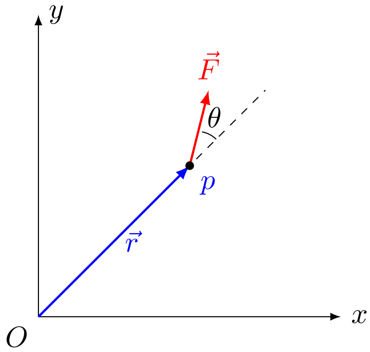
$$\sin\phi=\frac{\sqrt{3}}{2}u\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\phi\mathrm{d}\phi=\mathrm{d}u$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-(\sqrt{3}u/2)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\mathrm{d}\phi=-\frac{1}{\sqrt{3}}\phi=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$

$$W=-3k\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\mathrm{d}\theta=\sqrt{3}k\left[\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)\right]_0^{\pi/2}=-\frac{k\pi}{\sqrt{3}}$$

گشتاور نیرو

در دو بُعد

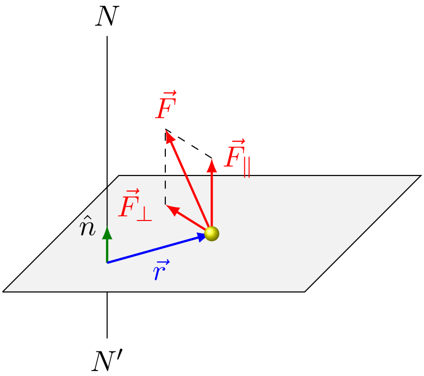


$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau_O = rF \sin\theta$$

گشتاور نیرو

در سه بُعد



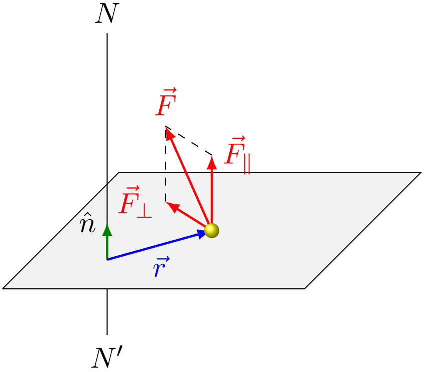
$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \vec{F}_{\parallel}$$

$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F} - \hat{n}(\vec{F} \cdot \hat{n})$$

$$\vec{r} \times \vec{F}_{\perp} = \vec{r} \times \vec{F} - \vec{r} \times \hat{n}(\vec{F} \cdot \hat{n})$$

گشتاور نیرو

در سه بُعد



$$\vec{r}\times\vec{F}_{\perp} = \vec{r}\times\vec{F} - \vec{r}\times\hat{n}(\vec{F}\cdot\hat{n})$$

$$\vec{r}\times\hat{n} = 0 \Rightarrow \vec{r}\times\vec{F}_{\perp} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{\tau}_{N'N} = \vec{r}\times\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F}_{\perp}$$

دینامیک در دو و سه بُعد

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

در هر بُعد

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

معادلات جفت شده‌ی بالا را برای مکان اولیه (x_0, y_0, z_0) و سرعت اولیه (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}) را حل می‌کنند. حل این معادلات مشکل است و معمولا آنها را در اکثر موارد به کمک کامپیوتر و روشهای عددی حل می‌کنند.

دینامیک در دو و سه بُعد

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$$

اگر مولفه‌های نیرو فقط تابع مختصه متناظر و مشتق آن باشد، یعنی

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F_x(x,\dot{x},t)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F_y(y\dot{y},t)$$

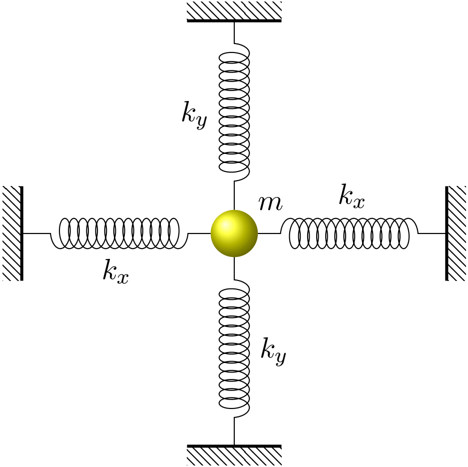
$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = F_z(z,\dot{z},t)$$

معادلات جفت شده‌ی تبدیل به سه معادله یک بعدی مستقل می‌شود که در فصول ابتدایی با روشهای حل آن آشنا شده‌ایم. در این مورد می‌توان نوسانگر هماهنگ سه بعدی را نام برد که مولفه‌های نیروها بصورت

$$F_x = -k_x x, \quad F_y = -k_y y, \quad F_z = -k_z z$$

است.

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی



دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

پتانسیل نوسانگر دوبعدی بصورت

$$V(x,y) = \frac{1}{2}k_x x^2 + \frac{1}{2}k_y y^2$$

داده می‌شود. فرض می‌کنیم ثوابت کشسانی با یکدیگر برابرند، $k_x = k_y = k$،

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -kx, \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -ky$$

معادلات حرکت در هر راستا بصورت زیر داده می‌شود،

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

اگر $\omega^2 = k/m$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = B\cos(\omega t + \beta)$$

که دامنه‌های A و B و فازهای اولیه‌ی α و β با شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = B\cos(\omega t + \beta)$$

برای بدست آوردن معادله مسیر حرکت باید t را در معادلات بالا حذف کنیم. اگر اختلاف فاز $\Delta = \beta - \alpha$ باشد، بنابراین

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = B\cos(\omega t + \Delta + \alpha)$$

که

$$x/A = \cos(\omega t + \alpha) \quad ١$$

$$y/B = \cos(\omega t + \alpha)\cos\Delta - \sin(\omega t + \alpha)\sin\Delta \quad ٢$$

برای حذف t، از عبارت ١ در عبارت ٢ قرار می‌دهیم،

$$y/B = x/A\cos\Delta - \sqrt{1 - (x/A)^2}\sin\Delta$$

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\Delta - \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\Delta$$

$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\Delta = -\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\sin\Delta$$

طرفین را به توان دو برسانیم

$$\frac{y^2}{B^2} - xy\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{x^2}{A^2}\cos^2\Delta = \left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)\sin^2\Delta$$

$$\frac{y^2}{B^2} - xy\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2\Delta$$

که معادله‌ی مسیر حرکت ذره می‌باشد.

معادله مقاطع مخروطی

در حالت کلی معادله مقاطع مخروطی بصورت معادله درجه دوم

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

داده می‌شود، که نوع آن با تعیین علامت معادله مشخصه‌ی $b^2 - 4ac$ مشخص می‌شود،

- اگر $b^2 - 4ac < 0$ معادله درجه دوم نماینگر بیضی است.
- اگر $b^2 - 4ac = 0$ معادله درجه دوم نماینگر سهمی است.
- اگر $b^2 - 4ac > 0$ معادله درجه دوم نماینگر هزلولی است.

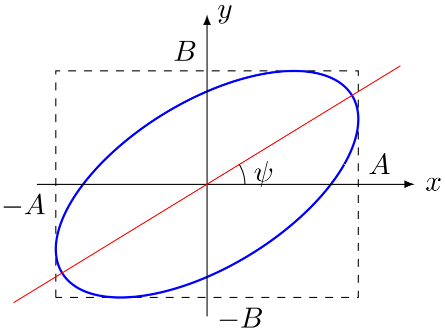
دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

معادله‌ی مسیر حرکت

$$\frac{y^2}{B^2} - xy\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2\Delta$$

معادله مشخصه : $b^2 - 4ac = \frac{4\cos^2\Delta}{A^2B^2} - \frac{4}{A^2B^2} = -\frac{4\sin^2\Delta}{A^2B^2} < 0$

بنابراین معادله مسیر حرکت ذره یک بیضی است.



دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

معادله‌ی مسیر حرکت

$$\frac{y^2}{B^2} - xy\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2\Delta$$

اگر دستگاه به اندازه ψ چرخیده شود انتظار داریم معادله بالا در دستگاه پریمدار به معادله

$$\left(\frac{x'}{A'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{B'}\right)^2 = 1$$

منجر شود که معادله یک بیضی است. یعنی

$$x' = x\cos\psi + y\sin\psi$$
$$y' = -x\sin\psi + y\cos\psi$$

و

$$x = x'\cos\psi - y'\sin\psi$$
$$y = x'\sin\psi + y'\cos\psi$$

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

معادله‌ی مسیر حرکت

$$\frac{y^2}{B^2} - xy\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2\Delta \quad ۱$$

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\psi - y'\sin\psi \\ y &= x'\sin\psi + y'\cos\psi \end{aligned}$$

با قرار دادن معادله بالا در داخل معادله ۱ داریم

$$\begin{aligned} \frac{(x'\sin\psi + y'\cos\psi)^2}{B^2} &+ \frac{(x'\cos\psi - y'\sin\psi)^2}{A^2} \\ &- \frac{2(x'\cos\psi - y'\sin\psi)(x'\sin\psi + y'\cos\psi)}{AB}\cos\Delta \\ &= \sin^2\Delta \end{aligned}$$

و

$$\left(\frac{\sin^2\psi}{B^2}+\frac{\cos^2\psi}{A^2}-\frac{\sin 2\psi}{AB}\right)x'^2+\left(\frac{\cos^2\psi}{B^2}+\frac{\sin^2\psi}{A^2}+\frac{\sin 2\psi}{AB}\right)y'^2$$
$$+\left(\frac{\sin 2\psi}{B^2}-\frac{\sin 2\psi}{A^2}-2\cos\Delta\frac{\cos 2\psi}{AB}\right)x'y'=\sin^2\Delta$$

در دستگاه پریمدار ضریب $x'y'$ باید برابر صفر قرار گیرد

$$\frac{\sin 2\psi}{B^2}-\frac{\sin 2\psi}{A^2}-2\cos\Delta\frac{\cos 2\psi}{AB}=0$$

یا

$$\tan 2\psi=\frac{2AB\cos\Delta}{A^2-B^2}$$

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

معادله‌ی مسیر حرکت $A \neq B$

$$\frac{y^2}{B^2} - xy\frac{2\cos\Delta}{AB} + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2\Delta$$

اگر $\Delta = 90^\circ$

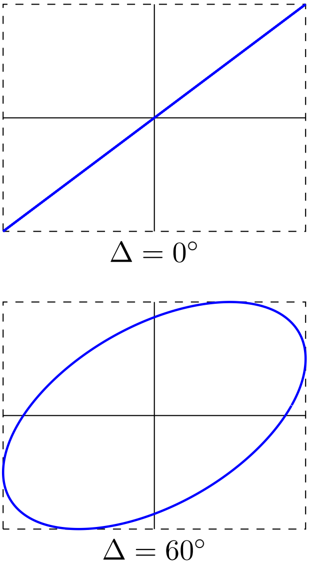
$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1$$

اگر $\Delta = 0^\circ$

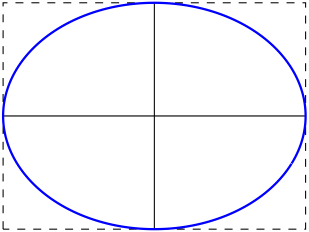
$$y = \frac{B}{A}x$$

اگر $\Delta = 180^\circ$

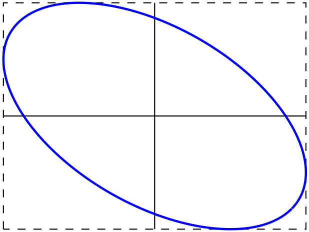
$$y = -\frac{B}{A}x$$


$\Delta = 0^\circ$
$\Delta = 30^\circ$
$\Delta = 60^\circ$
$\Delta = 90^\circ$

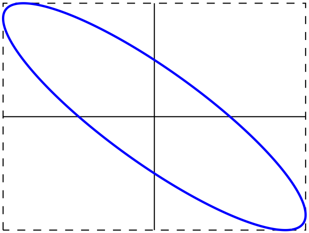
دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی



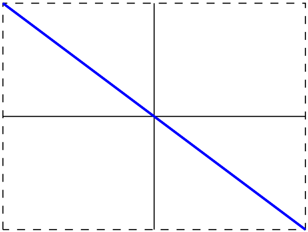
$\Delta = 90^\circ$



$\Delta = 120^\circ$



$\Delta = 150^\circ$



$\Delta = 180^\circ$

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

معادله‌ی مسیر حرکت وقتی $A = B$

$$\frac{y^2}{A^2} - xy\frac{2\cos\Delta}{A^2} + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2\Delta$$

اگر $\Delta = 90^\circ$

$$y^2 + x^2 = A^2$$

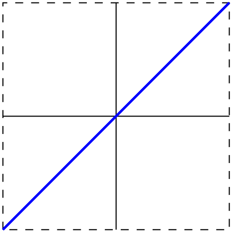
اگر $\Delta = 0^\circ$

$$y = x$$

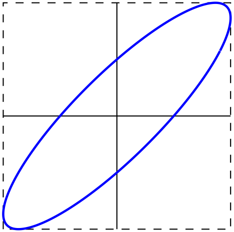
اگر $\Delta = 180^\circ$

$$y = -x$$

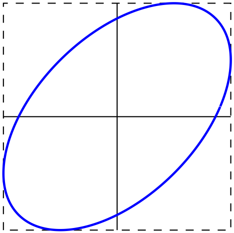
دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی



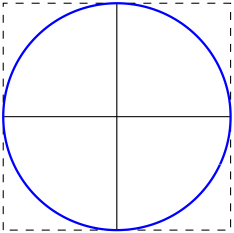
$\Delta = 0°$



$\Delta = 30°$

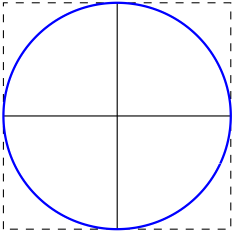


$\Delta = 60°$

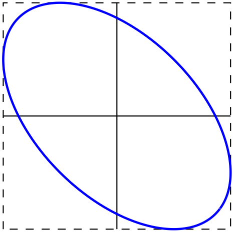


$\Delta = 90°$

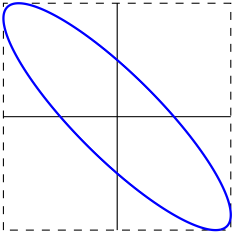
دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی



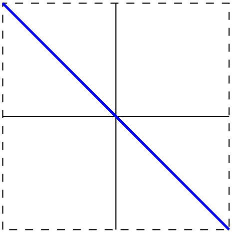
$\Delta = 90^\circ$



$\Delta = 120^\circ$



$\Delta = 150^\circ$



$\Delta = 180^\circ$

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

پتانسیل نوسانگر دوبعدی بصورت

$$V(x,y)=\frac{1}{2}k_x x^2+\frac{1}{2}k_y y^2$$

داده می‌شود. اگر ثوابت کشسانی با یکدیگر برابر نباشند، $k_x \neq k_y$،

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}=-kx, \quad F_y=-\frac{\partial V}{\partial y}=-ky$$

معادلات حرکت در هر راستا بصورت زیر داده می‌شود،

$$m\ddot{x}=-k_x x$$

$$m\ddot{y}=-k_y y$$

اگر $\omega_x^2=k_y/m$ و $\omega_y^2=k_x/m$

$$x=A\cos(\omega_x t+\alpha)$$

$$y=B\cos(\omega_y t+\beta)$$

که دامنه‌های A و B و فازهای اولیه‌ی α و β با شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

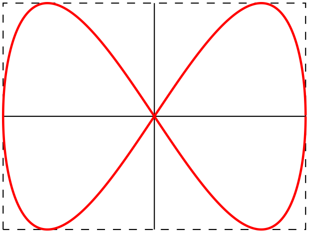
$$x = A\cos(\omega_x t + \alpha)$$

$$y = B\cos(\omega_y t + \beta)$$

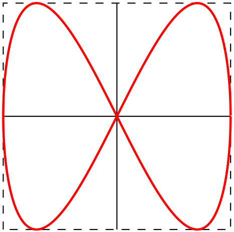
مسیرهای بسته

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y}$$

حرکت دوره‌ای : $\dfrac{\omega_x}{1} = \dfrac{\omega_y}{2}$



$\alpha = 0^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \Delta = 90^\circ$



$\alpha = 0^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \Delta = 90^\circ$

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

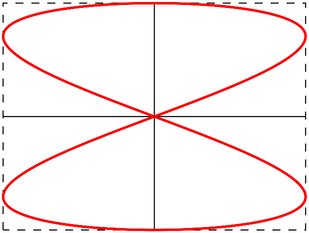
$$x = A\cos(\omega_x t + \alpha)$$

$$y = B\cos(\omega_y t + \beta)$$

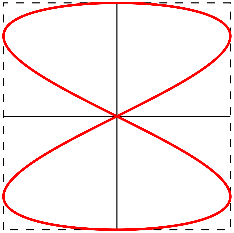
مسیرهای بسته

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y}$$

حرکت دوره‌ای : $\dfrac{\omega_x}{2} = \dfrac{\omega_y}{1}$



$\alpha = 90°,\ \beta = 0°,\ \Delta = -90°$



$\alpha = 90°,\ \beta = 0°,\ \Delta = -90°$

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

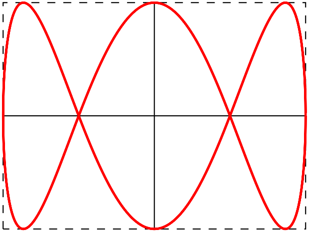
$$x = A\cos(\omega_x t + \alpha)$$

$$y = B\cos(\omega_y t + \beta)$$

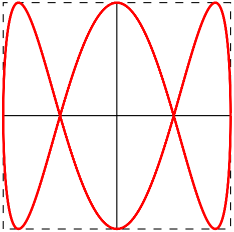
مسیرهای بسته

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y}$$

حرکت دوره‌ای : $\dfrac{\omega_x}{1} = \dfrac{\omega_y}{3}$



$\alpha = 0°,\ \beta = 90°,\ \Delta = 90°$



$\alpha = 0°,\ \beta = 90°,\ \Delta = 90°$

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

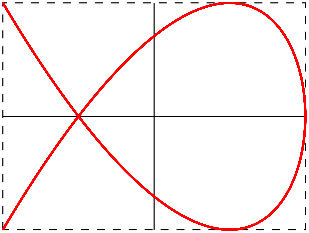
$$x = A\cos(\omega_x t + \alpha)$$

$$y = B\cos(\omega_y t + \beta)$$

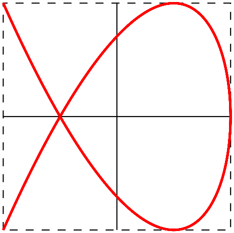
مسیرهای بسته

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y}$$

حرکت دوره‌ای : $\dfrac{\omega_x}{2} = \dfrac{\omega_y}{3}$



$\alpha = 0°,\ \beta = 90°,\ \Delta = 90°$



$\alpha = 0°,\ \beta = 90°,\ \Delta = 90°$

دینامیک در دو و سه بُعد: نوسانگر هماهنگ دوبعدی

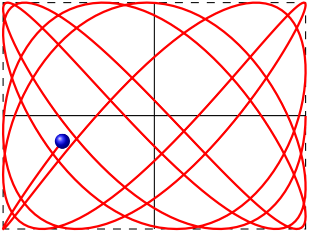
$$x = A\cos(\omega_x t + \alpha)$$

$$y = B\cos(\omega_y t + \beta)$$

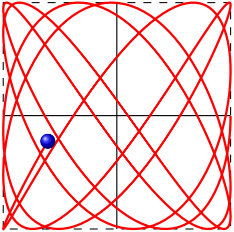
مسیرهای بسته

$$\frac{\omega_x}{n_x} = \frac{\omega_y}{n_y}$$

حرکت غیر دوره‌ای : $\dfrac{\omega_x}{2.3} = \dfrac{\omega_y}{3.2}$



$\alpha = 0^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \Delta = 90^\circ$



$\alpha = 0^\circ,\ \beta = 90^\circ,\ \Delta = 90^\circ$

مسئله–۲۸: در لحظه $t = 0$ نیروی $\vec{F}(t) = at\hat{i} + bt^2\hat{j} + ct^3\hat{k}$ به ذره ساکن به جرم m در $\vec{r}_0 = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ وارد می‌شود. مکان و سرعت ذره را بصورت تابعی t پیدا کنید.

$$\ddot{x} = \frac{a}{m}t \Rightarrow \dot{x} = \frac{a}{2m}t^2 \Rightarrow x = 2 + \frac{a}{6m}t^3$$
$$\ddot{y} = \frac{b}{m}t^2 \Rightarrow \dot{y} = \frac{b}{3m}t^3 \Rightarrow y = 3 + \frac{a}{12m}t^4$$
$$\ddot{z} = \frac{c}{m}t^3 \Rightarrow \dot{z} = \frac{c}{4m}t^4 \Rightarrow z = \frac{c}{20m}t^5$$

مسئله–۲۹: در لحظه $t=0$ نیروی $\vec{F}(t)=at\hat{i}+be^{kt}\hat{j}$ به ذره به جرم m در $\vec{r}_0=2\hat{i}+3\hat{j}$ که با سرعت $\vec{v}_0=v_{0x}\hat{i}+v_{0y}\hat{j}$ حرکت می‌کند، وارد می‌شود. مکان و سرعت ذره را بصورت تابعی t پیدا کنید.

$$\ddot{x}=\frac{a}{m}t$$
$$\dot{x}=v_{0x}+\frac{a}{2m}t^2$$
$$x=2+v_{0x}t+\frac{a}{6m}t^3$$

$$\ddot{y}=\frac{b}{m}e^{kt}$$
$$\dot{y}=v_{0y}+\frac{b}{2mk}\left(e^{kt}-1\right)$$
$$y=3+\left(v_{0y}-\frac{b}{2mk}\right)t+\frac{b}{2mk^2}\left(e^{kt}-1\right)$$

دینامیک در دو و سه بُعد: حرکت پرتابه

در غیاب نیروی مقاومت هوا

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\hat{k}$$

با شرایط اولیه‌ی

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0), \quad (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = v_{0x}t$$

$$\ddot{y} = 0 \Rightarrow y(t) = v_{0y}t$$

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t$$

معادله مسیر حرکت

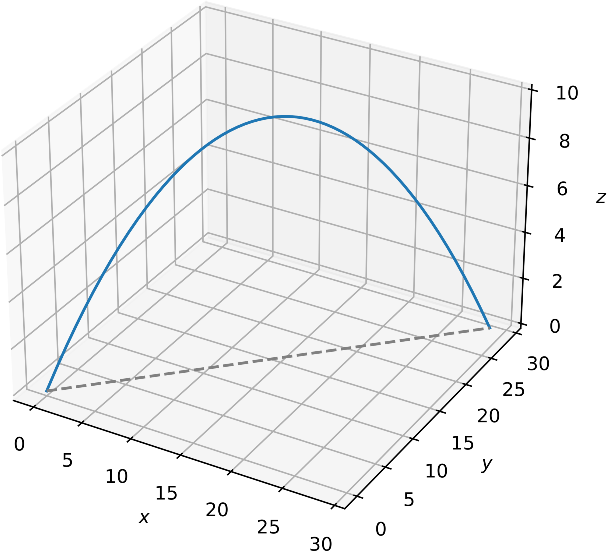
$$x = v_{0x}t \Rightarrow t = \frac{x}{v_{0x}}$$

$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x$: معادله خط

$z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x$: معادله سهمی

دینامیک در دو و سه بُعد: حرکت پرتابه

در غیاب نیروی مقاومت هوا



دینامیک در دو و سه بُعد: حرکت پرتابه

در غیاب نیروی مقاومت هوا
زمان اوج و زمان کل پرواز

$$v_z = 0 \Rightarrow t_{\text{اوج}} = \frac{v_{0z}}{g}, \quad t_{\text{کل}} = 2t_{\text{اوج}} = \frac{2v_{0z}}{g}$$

ارتفاع اوج

$$H_{\text{اوج}} = z(t_{\text{اوج}}) = \frac{v_{0z}^2}{2g}$$

برد

$$x(t_{\text{کل}}) = \frac{2v_{0x}v_{0z}}{g}$$

$$y(t_{\text{کل}}) = \frac{2v_{0y}v_{0z}}{g}$$

$$R_{\text{برد}} = \sqrt{x^2(t_{\text{کل}}) + y^2(t_{\text{کل}})} = \frac{2v_{0z}}{g}\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$$

دینامیک در دو و سه بُعد: حرکت پرتابه

در حضور نیروی مقاومت هوا

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\hat{k} - b\vec{v}$$

با شرایط اولیه‌ی

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0), \quad (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$\ddot{x} = -\frac{1}{\tau}\dot{x} \Rightarrow x(t) = v_{0x}\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

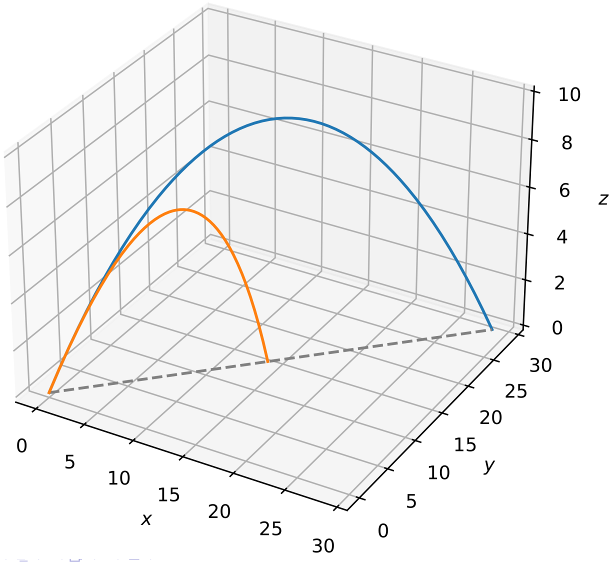
$$\ddot{y} = -\frac{1}{\tau}\dot{y} \Rightarrow y(t) = v_{0y}\tau(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\tau}\dot{z} \Rightarrow z(t) = (v_{0z}\tau + g\tau^2)(1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t$$

که $\tau = m/b$ است.

دینامیک در دو و سه بُعد: حرکت پرتابه

در حضور نیروی مقاومت هوا



دینامیک در دو و سه بُعد: حرکت پرتابه

در حضور نیروی مقاومت هوا

برای $t/\tau \ll 1$ داریم

$$x(t) \sim v_{0x}\tau\left[1-\left(1-\frac{t}{\tau}+\frac{1}{2}\frac{t^2}{\tau^2}+\cdots\right)\right] = v_{0x}t-\frac{1}{2}\left(\frac{v_{0x}}{\tau}\right)t^2+\cdots$$

$$y(t) \sim v_{0y}\tau\left[1-\left(1-\frac{t}{\tau}+\frac{1}{2}\frac{t^2}{\tau^2}+\cdots\right)\right] = v_{0y}t-\frac{1}{2}\left(\frac{v_{0y}}{\tau}\right)t^2+\cdots$$

$$z(t) \sim (v_{0z}\tau+g\tau^2)\left[1-\left(1-\frac{t}{\tau}+\frac{1}{2}\frac{t^2}{\tau^2}+\cdots\right)\right]-g\tau t$$

$$\sim v_{0z}t-\frac{1}{2}\left(\frac{v_{0z}}{\tau}+g\right)t^2+\cdots$$

برای $t/\tau \gg 1$ داریم

$$x(t) \sim v_{0x}\tau$$

$$y(t) \sim v_{0y}\tau$$

$$z(t) \sim (v_{0z}\tau+g\tau^2)-g\tau t$$

دینامیک در دو و سه بُعد: حرکت پرتابه

در حضور نیروی مقاومت هوا
معادله مسیر حرکت

$$x = v_{0x}\tau(1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow 1 - e^{-t/\tau} = \frac{x}{v_{0x}\tau}$$

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x \quad : \text{معادله خط}$$

$$x = v_{0x}\tau(1 - e^{-t/\tau}) \Rightarrow 1 - e^{-t/\tau} = \frac{x}{v_{0x}\tau} \Rightarrow t = -\tau \ln\left(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}\right)$$

$$z = \left(\frac{v_{0z}}{v_{0x}} + \frac{g\tau}{v_{0x}}\right)x + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}\right)$$

برای $(x/v_{0x}\tau) \ll 1$

$$z = \left(\frac{v_{0z}}{v_{0x}} + \frac{g\tau}{v_{0x}}\right)x + g\tau^2\left(-\frac{x}{v_{0x}\tau} - \frac{x^2}{2v_{0x}^2\tau^2} - \frac{x^3}{3v_{0x}^3\tau^3} + \cdots\right)$$

دینامیک در دو و سه بُعد: حرکت پرتابه

در حضور نیروی مقاومت هوا
معادله مسیر حرکت

$$z = \left(\frac{v_{0z}}{v_{0x}} + \frac{g\tau}{v_{0x}}\right) x + g\tau^2 \ln\left(1 - \frac{x}{v_{0x}\tau}\right)$$

برای $(x/v_{0x}\tau) \ll 1$

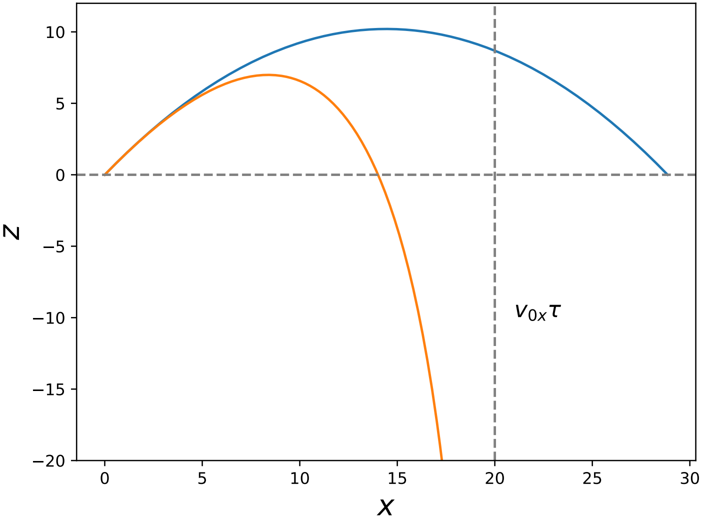
$$z = \left(\frac{v_{0z}}{v_{0x}} + \frac{g\tau}{v_{0x}}\right) x + g\tau^2 \left(-\frac{x}{v_{0x}\tau} - \frac{x^2}{2v_{0x}^2\tau^2} - \frac{x^3}{3v_{0x}^3\tau^3} + \cdots\right)$$

$$z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2 - \frac{g}{3v_{0x}^3\tau} x^3 + \cdots$$

دو جمله‌ی اول معادله بالا، معادله مسیر حرکت یک پرتابه در غیاب نیروی اصطکاک است.

دینامیک در دو و سه بُعد: حرکت پرتابه

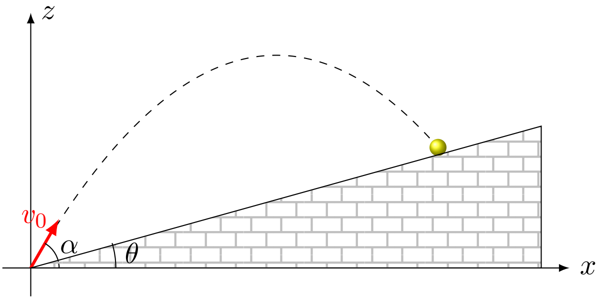
در حضور نیروی مقاومت هوا



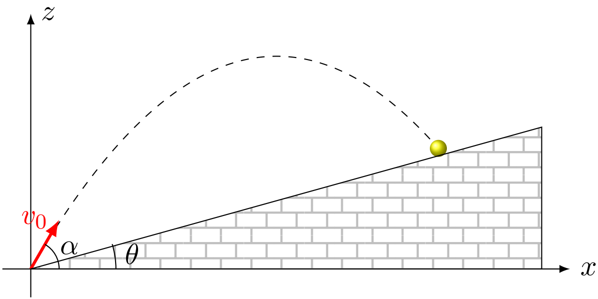
مسئله–۳۰: تفنگی گلوله‌ای را با سرعت v_0 تحت زاویه α مطابق شکل به بالای تپه‌ای به شیب θ پرتاب می‌کند. نشان دهید برد گلوله برابر

$$r = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta}\sin\alpha\cos(\alpha+\theta)$$

است. زاویه پرتاب چه مقداری داشته باشد که برد گلوله بیشینه مقدار خود را داشته باشد.



مسئله– ۳۰:



معادله مسیر حرکت یک پرتابه در دوبعد برابر

$$z = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$$

اگر $x = r\cos\theta$ و $z = r\sin\theta$ مختصات فرود ذره روی تپه باشد، داریم

$$r\sin\theta = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}r^2\cos^2\theta + r\frac{\cos\theta\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

مسئله– ۳۰:

$$\sin\theta = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} r\cos^2\theta + \frac{\cos\theta\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

و

$$\begin{aligned} -\sin\theta + \frac{\cos\theta\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} r\cos^2\theta \\ \frac{\sin(\alpha-\theta)}{\cos\alpha} &= \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} r\cos^2\theta \end{aligned}$$

در نتیجه فاصله محل برخورد گلوله با تپه از محل شلیک برابر

$$r = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta}\sin(\alpha-\theta)\cos\alpha$$

مسئله– ۳۰:

$$r = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta}\sin(\alpha-\theta)\cos\alpha$$

زاویه‌ای که تحت آن بیشینه برد بدست می‌آید، بصورت زیر داده می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = 0$$

$$\frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta}\left(\cos\alpha\cos(\alpha-\theta) - \sin\alpha\sin(\alpha-\theta)\right) = 0$$

$$\cos(2\alpha-\theta) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$$

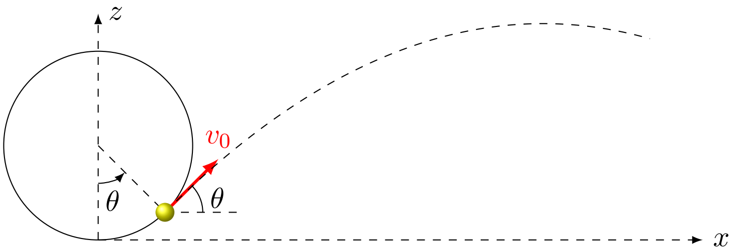
ماکزیمم برد

$$R_{\max} = r(\alpha = \theta/2 + \pi/4) = \frac{v_0^2}{2g(1+\sin\theta)}$$

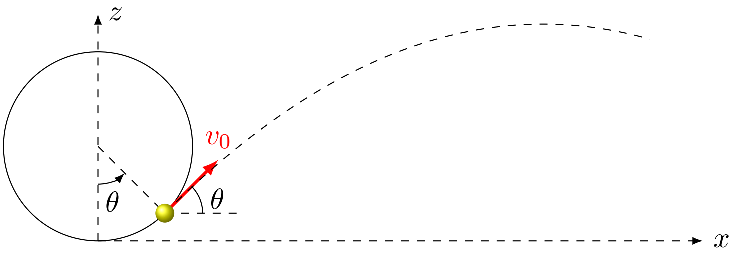
مسئله–۳۱: ذرات گل و لای از لبه چرخ در حال حرکتی پرتاب می شود.اگر سرعت رو به جلو چرخ v_0 و شعاع چرخ b باشد، نشان می دهد که بیشترین ارتفاع بالاتر از سطح زمین است که گل می تواند تا آنجا پرتاب شود برابر

$$b + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2v_0^2}$$

در اینجا لازم است فرض کنید که $bg \geq v_0^2$.



مسئله–۳۱:



مختصات و سرعت گل و لای هنگام رها شدن از روی لبه چرخ بصورت زیر داده می‌شود

$$\begin{cases} x = b\sin\theta \\ z = b(1-\cos\theta) \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} v_x = b\dot{\theta}\cos\theta \\ v_z = b\dot{\theta}\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0\cos\theta \\ v_x = v_0\sin\theta \end{cases} \quad , \quad v_0 = b\dot{\theta}$$

مسئله-۳۱:
معادله حرکت پرتابه‌ی در امتداد محور z، گل و لایی که از نقطه‌ی p جدا می‌شود بصورت

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta + b(1-\cos\theta)$$

داده می‌شود. زمان اوج و ارتفاع اوج

$$t_s = \frac{v_0 \sin\theta}{g}, \quad h_s(\theta) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} + b(1-\cos\theta)$$

ماکزیمم ارتفاع اوج نسبت به θ با محاسبه $\mathrm{d}h_s/\mathrm{d}\theta = 0$ بدست می‌آید، بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}h_s}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Rightarrow \sin\theta\left(\frac{v_0^2\cos\theta}{g} + b\right) = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{bg}{v_0^2}$$

و ماکزیمم ارتفاع اوج

$$(h_s)_{\max} = b + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2v_0^2}$$

مسئله–۳۲: الکترونی در یک میدان نیروی متشکل از میدان الکتریکی $\vec{E} = \hat{j}E$ و میدان مغناطیسی $\vec{B} = \hat{k}B$ حرکت می‌کند. مکان اولیه الکترون را مبدا و سرعت اولیه را بصورت $\vec{v}_0 = \hat{i}v_0$ انتخاب کنید. معادله حرکت الکترون را در سه بُعد بدست آورید.

معادله دینامیکی حرکت الکترون در یک میدان نیروی متشکل از میدان الکتریکی $\vec{E} = \hat{j}E$ و میدان مغناطیسی $\vec{B} = \hat{k}B$ برابر

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -e\left[\vec{E} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}\right]$$

$$m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z}) = -e\left[\hat{j}E + (\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}) \times \hat{k}B\right]$$

معادله دینامیکی برای هر یک از سه مولفه دستگاه مختصات

$$m\ddot{x} = -eB\dot{y}$$
$$m\ddot{y} = -e(E - \dot{x}B)$$
$$m\ddot{z} = 0$$

دو تا معادله دیفرانسیل اول در یکدیگر جفت شده‌اند.

مسئله-۳۲:

اگر از طرفین معادله دینامیکی $m\ddot{x} = -eB\dot{y}$ نسبت به زمان انتگرالگیری کنیم داریم

$$m\ddot{x} = -eB\dot{y} \Rightarrow \int_{v_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = -\frac{eB}{m}\int_0^y dy \Rightarrow \dot{x} = v_0 - \frac{eB}{m}y \quad (1)$$

با قرار دادن $\dot{x} = v_0 - \frac{eB}{m}y$ در داخل دیگر معادله دینامیکی (یعنی $m\ddot{y} = -e(E - \dot{x}B)$) داریم

$$\ddot{y} = -\frac{e}{m}(E - v_0 B) - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 y \Rightarrow \ddot{y} + \omega_B^2 y = -\frac{e}{m}(E - v_0 B)$$

که در آن $\omega_B = \frac{eB}{m}$ فرکانس سیکلترون است. معادله بالا یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب ثابت است که در آن جواب قسمت همگن و ناهمگن برابر است با

$$y = A_1 \sin\omega_B t + A_2 \cos\omega_B t + \frac{v_0 - E/B}{\omega_B}$$

که A_1 و A_2 به شرایط اولیه مسئله مربوط می‌شود.

مسئله-۳۲:

در معادله

$$y = A_1 \sin \omega_B t + A_2 \cos \omega_B t + \frac{v_0 - E/B}{\omega_B}$$

با اعمال شرایط اولیه به مسئله داریم

$$y = \frac{v_0 - E/B}{\omega_B}(1 - \cos \omega_B t)$$

با قرار دادن $y(t)$ در داخل معادله ۱ و انتگرالگیری از آن داریم

$$x = \frac{E}{B}t - \frac{v_0 - E/B}{\omega_B} \sin \omega_B t$$

همچنین جواب قسمت z برابر $z = 0$.

مسئله–۳۳: پرتابه‌ای در نظر بگیرید که با سرعت اولیه $\vec{v}_0 = \hat{i}\dot{x}_0 + \hat{j}\dot{y}_0 + \hat{k}\dot{z}_0$ در حضور بادی با سرعت $\vec{v}_w = \hat{j}v_w$ و مقاومت هوایی متناسب با سرعت از مبدا پرتاب می‌شود. معادلات حرکت را برای مختصات x، y و z بر حسب زمان t حل کنید. فرض کنید پرتابه در نقطه (x_1, y_1) به زمین برمی‌گردد. این مکان را تا جمله فقط اول برحسب b پیدا کنید. نشان دهید که اگر از مقاومت هوا صرفه‌نظر کنیم، فاصله هدف به نسبت $4b\dot{z}_0^2/3mg$ تغییر می‌کند و باد باعث تغییر دیگری در جهت y به اندازه $2bv_m\dot{z}_0^2/mg^2$ می‌شود.

معادله دینامیکی حرکت پرتابه برابر

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -b\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \hat{j}v_w\right) - mg\hat{k}$$

مسئله–۳۳:

معادله دینامیکی حرکت پرتابه برابر

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = -b\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \hat{j}v_w\right) - mg\hat{k}$$

که می‌توان آنرا برای هریک از سه جهت دستگاه مختصات بصورت زیر نوشت

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = -b\dot{y} + bv_w \Rightarrow \ddot{y} + \frac{1}{\tau}\dot{y} = -\frac{1}{\tau}v_w$$
$$m\ddot{z} = -b\ddot{z} - mg \Rightarrow \ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} = -g$$

که در آن $\tau = m/b$ است.

مسئله-۳۳:

با استفاده از روش حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت داریم

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 + A_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \\ y(t) &= B_1 + B_2 e^{-\frac{t}{\tau}} - v_w t \\ z(t) &= C_1 + C_2 e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau t \end{aligned}$$

با اعمال شرایط اولیه به معادلات بالا، معادلات حرکت در سه بعد بصورت زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} x(t) &= \dot{x}_0 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \\ y(t) &= (\dot{y}_0 + v_w)\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - v_w t \\ z(t) &= (\dot{z}_0 \tau + g\tau^2)(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) - g\tau t \end{aligned}$$

دینامیک در دو و سه بُعد

مسئله-۳۳:

اگر $\tau(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=\frac{x}{\dot{x}_0}$ معادله مسیر حرکت بصورت زیر داده می‌شود

$$y=\frac{\dot{y}_0+v_w}{\dot{x}_0}x+v_w\tau\ln\left(1-\frac{x}{\dot{x}_0\tau}\right)$$
$$z=\frac{\dot{z}_0+g\tau}{\dot{x}_0}x+g\tau^2\ln\left(1-\frac{x}{\dot{x}_0\tau}\right)$$

برای $x/x_0\tau \ll 1$ داریم

$$z=\frac{\dot{z}_0}{\dot{x}_0}x+\frac{g}{2\dot{x}_0^2}x^2+\cdots$$

وقتی گلوله به زمین برمی‌گردد، مولفه z گلوله برابر صفر می‌شود(یعنی $z=0$). تا تقریب دوم معادله مسیر حرکت بالا داریم

$$z=0\Rightarrow x=0,\qquad x=\frac{2\dot{z}_0\dot{x}_0}{g}$$

مسئله–۳۳:

برای $x/\dot{x}_0\tau \ll 1$ همچنین داریم

$$y = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}x + \frac{v_w}{2g\tau^2}x^2 + \cdots$$

تا تقریب دوم معادله مسیر حرکت بالا و بازای $x = \frac{2\dot{z}_0\dot{x}_0}{g}$ داریم

$$y = \frac{2\dot{y}_0\dot{z}_0}{g} - \frac{2v_w\dot{z}_0^2}{g^2\tau} + \cdots$$

مقدار انحراف در امتداد محور y برابر است با

$$\text{مقدار انحراف} = \frac{2v_w\dot{z}_0^2}{g^2\tau} = \frac{2bv_w\dot{z}_0^2}{mg^2}$$

مسئله–۳۴: رودخانه‌ای به عرض w در نظر بگیرید. سرعت آب در نزدیکی ساحل صفر است اما بطور خطی افزایش می‌یابد و به v_c در مرکز رودخانه می‌رسد. اگر قایقی از یک ساحل در جهت عمود بر رودخانه با سرعت v_b پارو بزند، نشان دهید وقتی به ساحل دیگر می‌رسد به اندازه $v_c w/2v_b$ در جهت حرکت آب منحرف شده است.
اگر عرض رودخانه در امتداد محور y و جهت رودخانه در امتداد محور x باشد، پروفایل سرعت رودخانه با توجه به فرض مسئله بصورت

$$v_d = \begin{cases} (2v_c/w)y, & y \leq w/2 \\ (2v_c/w)(w-y), & w/2 \leq y \leq w \end{cases}$$

داده می‌شود. سرعت رودخانه در امتداد محور x است بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} (2v_c/w)y, & y \leq w/2 \\ (2v_c/w)(w-y), & w/2 \leq y \leq w \end{cases}$$

و سرعت قایق در امتداد y است بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_b$$

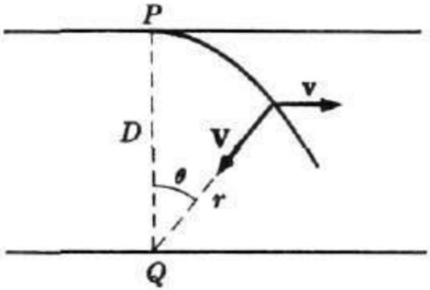
مسئله-۳۴:
در ادامه نیاز به نسبت $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$ داریم، یعنی

$$\frac{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2v_c}{wv_b}\begin{cases} y, & y \leq w/2 \\ w-y, & w/2 \leq y \leq w \end{cases}$$

اگر از y در بازه 0 تا w انتگرالگیری کنیم داریم

$$\int_0^X \mathrm{d}x = \frac{2v_c}{wv_b}\left(\int_0^{w/2} y\mathrm{d}y + \int_{w/2}^{w}(w-y)\mathrm{d}y\right) \Rightarrow X = \frac{v_c w}{2v_b}$$

مسئله–۳۵: رودخانه‌ای به عرض D را در نظر بگیرید که سرعت آب در داخل آن ثابت و برابر v است. قایقی قصد دارد از نقطه P در یک طرف رودخانه به نقطه مقابل خود Q در طرف دیگر رودخانه برود. قایقران باسرعت ثابت V همواره بطرف نقطه Q پارو می‌زند. اگر r فاصله لحظه‌ای قایق از نقطه‌ی Q و θ زاویه‌ی بین $\vec{r}$ و $\vec{PQ}$ باشد، مسیر حرکت قایق یعنی $r(\theta)$ را بدست آورید.



مسئله-۳۵:
اگر جهت جریان رودخانه را در امتداد محور x و عرض رودخانه را در جهت y در نظر بگیریم با توجه به انتخاب r و θ در شکل داده شده، مختصاتهای x و y برحسب r و θ بصورت

$$x = r\sin\theta$$

$$y = r\cos\theta$$

داده می شود و بردارهای یکه متناظر با $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ بر حسب $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بصورت

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta - \hat{j}\sin\theta$$

داده می‌شود. همچنین مولفه‌های بردار سرعت برابر

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \hat{r}\dot{r} + \hat{\theta}r\dot{\theta}$$

است. اگر $\vec{w}$ برابر $-V\hat{r} + v\hat{i}$ باشد می‌توان بردار یکه $\hat{i}$ را برحسب $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ بصورت

$$\hat{i} = \sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta}$$

مسئله–۳۵:

بدین‌ترتیب $\vec{w}$ برابر است با

$$\vec{w} = -V\hat{r} + v\hat{i} = \hat{r}(-V + v\sin\theta) + \hat{\theta}v\cos\theta$$

با مقایسه مولفه‌های بردار سرعت قایق در دستگاه قطبی داریم

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -V + v\sin\theta$$
$$r\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{r\mathrm{d}t} = v\cos\theta$$

اگر در عبارت بالا نسبت $\frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}$ را بدست آوریم، یعنی

$$\frac{\mathrm{d}r}{r\mathrm{d}\theta} = \frac{-V + v\sin\theta}{v\cos\theta}$$

و

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{-V + v\sin\theta}{v\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

مسئله–۳۵:

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{-V + v\sin\theta}{v\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

با انتگرالگیری از عبارت بالا

$$\int_D^r \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{V}{v}\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta} + \int_0^\theta \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

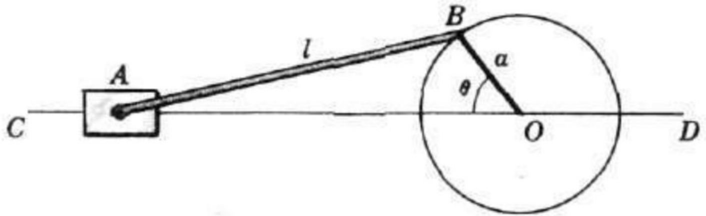
و

$$\ln\left(\frac{r}{D}\right) = -\frac{V}{v}\ln\left(\sec\theta + \tan\theta\right) - \ln\cos\theta$$
$$= -\ln\left(\sec\theta + \tan\theta\right)^{V/v} + \ln\sec\theta = \ln\left(\frac{\sec\theta}{\left(\sec\theta + \tan\theta\right)^{V/v}}\right)$$

و سرانجام

$$r = \frac{D\sec\theta}{\left(\sec\theta + \tan\theta\right)^{V/v}}$$

مسئله‌-۳۶: مطابق شکل، AB میله‌ی پیستونی به طول l است. اگر A در امتداد خط CD حرکت کند در حالیکه B با سرعت زاویه ثابت ω حول دایره‌ای به شعاع a و مرکز O حرکت می‌کند. الف) سرعت و ب) شتاب حرکت پیستون A را پیدا کنید.



مسئله–۳۶: اگر مبدا مختصات را روی نقطه O قرار دهیم و محور x را در جهت DC طوری انتخاب کنیم که جهت مثبت از D به C باشد و همچنین زاویه بین AO و AB را α در نظر بگیریم می توان معادله پیستون A را بصورت

$$x = l\cos\alpha + a\cos\theta$$

نوشت. با استفاده از قانون سینوسها در مثلث OAB می‌توان α را بصورت

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{l}{\sin\theta} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{a\sin\theta}{l}$$

بدست آورد و همچنین $\cos\alpha = \frac{\sqrt{l^2 - a^2\sin^2\theta}}{l}$ که باعث می شود در آن معادله حرکت پیستون فقط تابعی از θ بشود، یعنی

$$x = \sqrt{l^2 - a^2\sin^2\theta} + a\cos\theta$$

مسئله-۳۶:
برای بدست آوردن معادله سرعت پیستون، باید از معادله بالا نسبت به زمان مشتق گرفته شود

$$v = -\dot{\theta}\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{l^2 - a^2\sin^2\theta}} - a\dot{\theta}\sin\theta = -\omega\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{l^2 - a^2\sin^2\theta}} - a\omega\sin\theta$$

برای بدست آوردن معادله شتاب پیستون، باید از معادله بالا نسبت به زمان مشتق گرفته شود

$$a = -\omega^2\frac{a^2\cos 2\theta}{(l^2 - a^2\sin^2\theta)^{\frac{1}{2}}} - \omega^2\frac{(a^2\sin\theta\cos\theta)^2}{(l^2 - a^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} - a\omega^2\cos\theta$$

مسئله–۳۷: چرخی به شعاع b با شتاب ثابت a_0 بر روی زمین به جلو می‌غلتد. نشان دهید که در هر لحظه، بزرگی شتاب هر نقطه روی چرخ نسبت به مرکز چرخ بصورت $(a_0^2+\frac{v^4}{b^2})^{1/2}$ است، و نسبت به زمین نیز عبارت $a_0\left[2+2\cos\theta+\frac{v^4}{a_0^2b^2}-\left(\frac{2v^2}{a_0b}\right)\sin\theta\right]^{1/2}$ خواهد بود، که v سرعت لحظه‌ای و θ وضعیت نقطه‌ای را روی چرخ تعیین می‌کند که از بالاترین نقطه به جلو اندازه‌گیری شده است. شتاب کدام نقطه نسبت به زمین بیشترین مقدار است.

مسئله–۳۷:
سرعت و شتاب حرکت یک ذره بر مسیر دایره با شعاع ثابت برابر

$$\vec{v} = b\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -b\dot{\theta}^2\hat{r} + b\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

است. بوسیله رابطه‌ی اول بزرگی سرعت برابر $v = b\dot{\theta}$ و با توجه به فرض مسئله شتاب مماسی هر نقطه از چرخ $a_0 = b\ddot{\theta}$ است. بنابراین

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{b}\hat{r} + a_0\hat{\theta}$$

بدین ترتیب بزرگی شتاب هر نقطه از چرخ برابر

$$|\vec{a}| = \sqrt{\frac{v^4}{b^2} + a_0^2}$$

برای ناظر روی زمین، معادله حرکت هر نقطه از چرخ بر حسب زاویه θ برابر

$$\vec{r} = \hat{i}b(\theta + \sin\theta) + \hat{j}b\cos\theta$$

مسئله–۳۷:

$$\vec{r} = \hat{i}b(\theta + \sin\theta) + \hat{j}b\cos\theta$$

با دو بار مشتق گیری زمانی از معادله‌ی بالا داریم

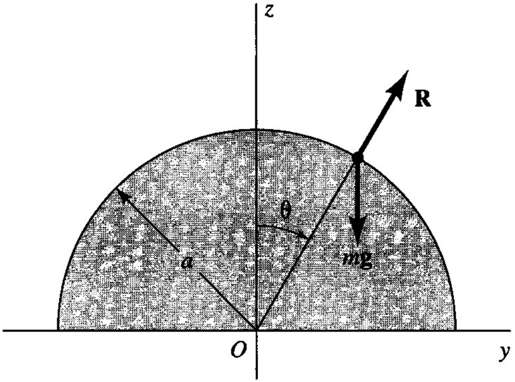
$$\vec{a} = \hat{i}(b\ddot{\theta} + b\ddot{\theta}\cos\theta - b\dot{\theta}^2\sin\theta) - \hat{j}(b\ddot{\theta}\sin\theta + b\dot{\theta}^2\cos\theta)$$

$$\vec{a} = a_0\left\{\hat{i}(1 + \cos\theta - \frac{v^2}{ba_0}\sin\theta) - \hat{j}(\sin\theta + \frac{v^2}{ba_0}\cos\theta)\right\}$$

بزرگی شتاب برابر است با

$$a = a_0\sqrt{2 + 2\cos\theta + \frac{v^4}{a_0^2b^2} - \left(\frac{2v^2}{a_0b}\right)\sin\theta}$$

مسئله‌–۳۸: ذره در بالای کره‌ی صافی به شعاع a قرار داده شده است.اگر ذره کمی مختل شود مطابق شکل در روی سطح کره شروع به لغزیدن می‌کند، در چه زاویه‌ای ذره سطح کره را ترک می‌کند(از مسائل فیزیک ۱)؟



مسئله–۳۸: با مقایسه انرژیهای دو وضعیت $E_{\theta=0}$ و E_θ با یکدیگر داریم

$$E_{\theta=0} = E_\theta \Rightarrow mga = mga\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow mv^2 = mga(1-\cos\theta)$$

که در آن مرجع پتانسیل زمین قرار داده شده است. قانون دوم نیوتن در امتداد شعاعی بصورت

$$-R + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}$$

که R نیروی عکس‌العمل از سطح است. با قرار دادن $mv^2 = mga(1-\cos\theta)$ در عبارت بالا داریم

$$-R + mg\cos\theta = mg(1-\cos\theta)$$

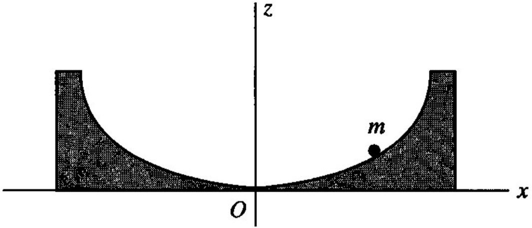
وقتی $R=0$ جسم از سطح جدا می‌شود و زاویه جدا شدن از سطح برابر است با

$$mg\cos\theta = mg(1-\cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

مسئله–۳۹: ذره به جرم m در داخل سیکلوئیدی مطابق شکل می‌لغزد.سیکلوئید با معادله پارامتری

$$
\begin{aligned}
x =& A(2\phi + \sin 2\phi) \\
z =& A(1 - \cos 2\phi)
\end{aligned}
$$

مشخص می‌شود. فرکانس نوسانات ذره را در داخل سیکلوئید بدست آورید.



مسئله-۳۹:
در اینجا قصد داریم از مقایسه انرژی ذره با یک نوسانگر ساده، فرکانس نوسانات ذره را بدست آوریم. برای این منظور ابتدا از معادله پارامتری بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و سرعت ذره را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} v_x &= 2A\dot{\phi}(1+\cos 2\phi) \\ v_z &= 2A\dot{\phi}\sin 2\phi \end{aligned}$$

و انرژی جنبشی بصورت زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2mA^2\dot{\phi}^2[(1+\cos 2\phi)^2 + \sin^2 2\phi] = 4mA^2\dot{\phi}^2[1+\cos 2\phi]$$

انرژی ذره برابر خواهد شد با

$$\begin{aligned} E = \frac{1}{2}mv^2 + V(z) &= 4mA^2\dot{\phi}^2[1+\cos 2\phi] + mgA(1-\cos 2\phi) \\ &= 8mA^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi + 2mgA\sin^2\phi \end{aligned}$$

مسئله-۳۹:

اگر $u = 4A\sin\phi$ بنابراین $\dot{u} = 4A\dot{\phi}\cos\phi$ داریم

$$E = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{4A}\right)u^2$$

در مقایسه با انرژی یک نوسانگر ساده، $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$، ثابت فنر برابر

$$k = \frac{mg}{4A}$$

و در نتیجه فرکانس برابر

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{4A}}$$