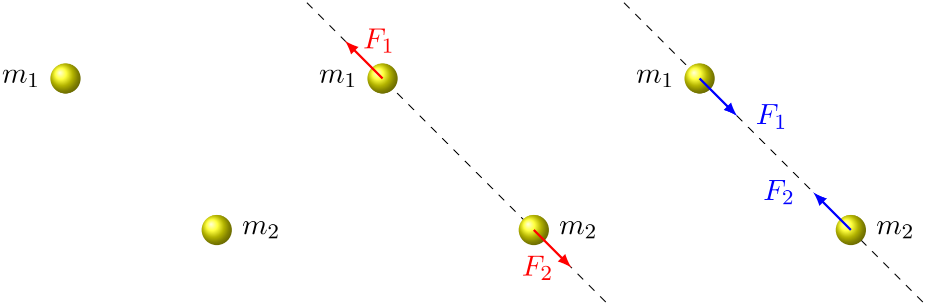
مکانیک تحلیلی
نیروهای مرکزی

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

سیستم دو ذره‌ای

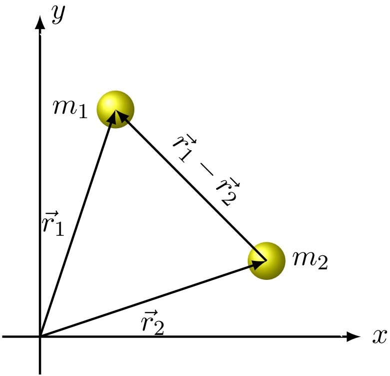


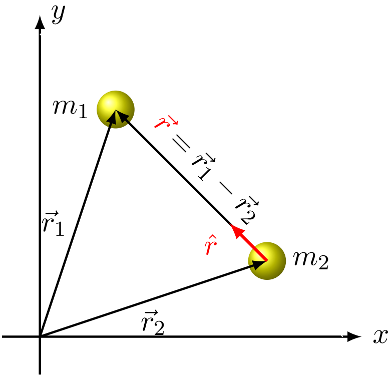
- در یک دستگاه منزوی، ذرات در امتداد خط واصل بین مراکز به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند.
- نیروهای بین دو ذره مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$: نیرو دافع

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$: نیرو جاذب

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات آزمایشگاه





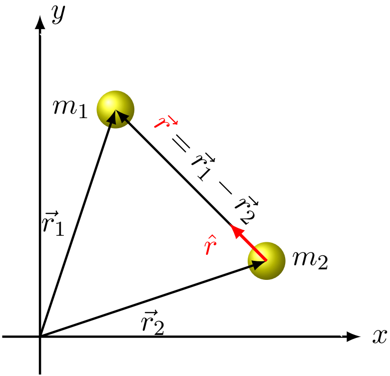
$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_1$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_2$$

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_1 = F(r)\hat{r}$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_2 = -F(r)\hat{r}$$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات آزمایشگاه



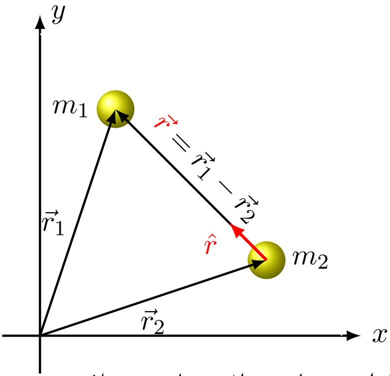
$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = F(r)\hat{r}$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = -F(r)\hat{r}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- تابع $F(r)$ که توصیف کننده بزرگی واکنش بین دو ذره می‌باشد را **نیروی مرکزی** می‌نامند.
- بزرگی نیروی مرکزی $F(r)$ تابع ای از فاصله‌ی بین دو ذره است. یعنی $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات آزمایشگاه



$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = F(r)\hat{r}$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = -F(r)\hat{r}$$

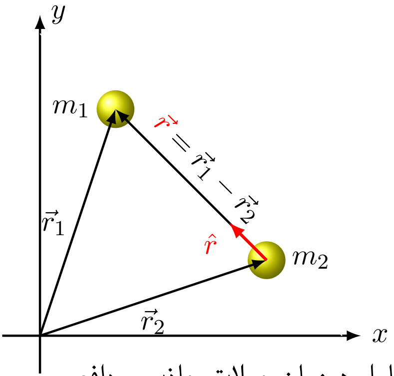
$$\hat{r} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- نیروی مرکزی $F(r)$ می‌تواند جاذب، دافع یا شامل همزمان جملات جاذب و دافع باشد.

$$F(r) = \frac{k}{r^2},\ k > 0$$: نیروی دافع کولنی

$$F(r) = \frac{k}{r^2},\ k < 0$$: نیروی جاذب کولنی یا نیروی گرانشی

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات آزمایشگاه



$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = F(r)\hat{r}$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = -F(r)\hat{r}$$

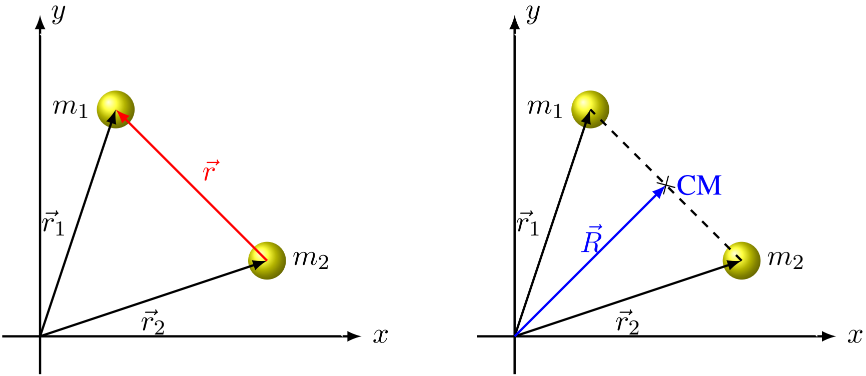
$$\hat{r} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- نیروی مرکزی $F(r)$ می‌تواند جاذب، دافع یا شامل همزمان جملات جاذب و دافع باشد.

نیروی واندروالسی : $F(r) = \dfrac{k_1}{r^{13}} - \dfrac{k_2}{r^7}, \quad k_1, k_2, k_3 > 0$

نیروی یوکاوا : $F(r) = \left(\dfrac{k_1}{r} - \dfrac{k_2}{r^2}\right) e^{-k_3 r}, \quad k_1, k_2, k_3 > 0$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات مرکز جرم



$$\begin{cases} \vec{r} & = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ M\vec{R} & = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \end{cases}, \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 & = (m_2/M)\vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_2 & = -(m_1/M)\vec{r} + \vec{R} \end{cases}$$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات مرکز جرم

$$\begin{cases} \vec{r}_1 &= (m_2/M)\vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_2 &= -(m_1/M)\vec{r} + \vec{R} \end{cases}, \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 &= (m_2/M)\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}} \\ \dot{\vec{r}}_2 &= -(m_1/M)\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 &= (m_2/M)\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -(m_1/M)\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= F(r)\hat{r} \quad (۱) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -F(r)\hat{r} \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۱)\quad m_1\ddot{\vec{r}}_1 = F(r)\hat{r} \Rightarrow \frac{m_1 m_2}{M}\ddot{\vec{r}} + m_1\ddot{\vec{R}} = F(r)\hat{r}$$

$$\boxed{\frac{m_1 m_2}{M}\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}, \qquad \ddot{\vec{R}} = 0}$$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات مرکز جرم

$$\begin{cases}\vec{r}_1 &= (m_2/M)\vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_2 &= -(m_1/M)\vec{r} + \vec{R}\end{cases}, \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\begin{cases}\dot{\vec{r}}_1 &= (m_2/M)\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}} \\ \dot{\vec{r}}_2 &= -(m_1/M)\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}}\end{cases}, \qquad \begin{cases}\ddot{\vec{r}}_1 &= (m_2/M)\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -(m_1/M)\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= F(r)\hat{r} \quad ۱ \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -F(r)\hat{r} \quad ۲\end{cases}$$

$$۲ \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -F(r)\hat{r} \Rightarrow -\frac{m_1 m_2}{M}\ddot{\vec{r}} + m_2\ddot{\vec{R}} = -F(r)\hat{r}$$

$$\boxed{\frac{m_1 m_2}{M}\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}, \qquad \ddot{\vec{R}} = 0}$$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات مرکز جرم

$$\begin{cases}\vec{r}_1 &= (m_2/M)\vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_2 &= -(m_1/M)\vec{r} + \vec{R}\end{cases}, \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\begin{cases}\dot{\vec{r}}_1 &= (m_2/M)\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}} \\ \dot{\vec{r}}_2 &= -(m_1/M)\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}}\end{cases}, \qquad \begin{cases}\ddot{\vec{r}}_1 &= (m_2/M)\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}} \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= -(m_1/M)\ddot{\vec{r}} + \ddot{\vec{R}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= F(r)\hat{r} \quad (١) \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= -F(r)\hat{r} \quad (٢)\end{cases}$$

بطورکلی عبارتهای (١) و (٢) نتایج یکسانی در دستگاه مختصات مرکز جرم دارند،

$$\boxed{\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}, \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \qquad \mu = \text{جرم کاهیده}}$$

$$\boxed{\ddot{\vec{R}} = 0}$$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات مرکز جرم

دستگاه مختصات مرکز جرم | دستگاه مختصات آزمایشگاه

$$\begin{cases} \mu\ddot{\vec{r}} &= F(r)\hat{r} \\ \ddot{\vec{R}} &= 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\text{تبدیل}} \begin{cases} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_1 \\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 &= (m_2/M)\vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_2 &= -(m_1/M)\vec{r} + \vec{R} \end{cases} \xleftrightarrow{\text{تبدیل}} \begin{cases} \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ M\vec{R} &= m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 \end{cases}$$

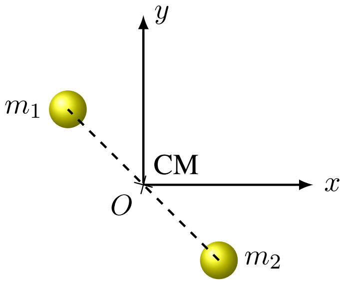
$$\begin{cases} M = m_1 + m_2 \\ \mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2) \end{cases}$$

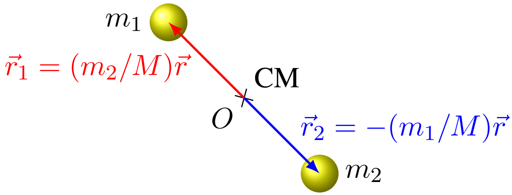
$$\boxed{\ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز جرم ثابت است} \\ \text{مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_0 \\ \vec{R} = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0 \end{cases}}$$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات مرکز جرم

$$\ddot{\vec{R}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_0 \\ \vec{R} = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0 \end{cases}$$

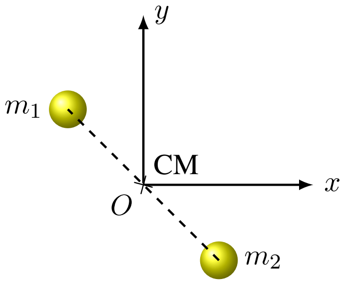
در ادامه بررسی فرض می‌کنیم مرکز جرم ساکن $\vec{v}_0 = 0$ و در مبدا $\vec{R}_0 = 0$ قرار دارد.

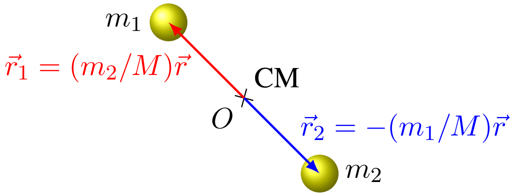




$$\vec{R} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 & = (m_2/M)\vec{r} \\ \vec{r}_2 & = -(m_1/M)\vec{r} \end{cases}, \qquad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات مرکز جرم





$$\begin{cases} \vec{r}_1 &= (m_2/M)\vec{r} \\ \vec{r}_2 &= -(m_1/M)\vec{r} \end{cases}$$

$$m_1 \gg m_2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 &= 0 \\ \vec{r}_2 &= -\vec{r} \end{cases} \qquad m_1 \ll m_2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 &= \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= 0 \end{cases}$$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات مرکز جرم

دستگاه مختصات آزمایشگاه : $E = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

$$\begin{cases} \vec{r}_1 & = (m_2/M)\vec{r} + \vec{R} \\ \vec{r}_2 & = -(m_1/M)\vec{r} + \vec{R} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{r}}_1 & = (\mu/m_1)\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}} \\ \dot{\vec{r}}_2 & = -(\mu/m_2)\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{R}} \end{cases}$$

انرژی جنبشی ذره‌ی اول : $\frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 = \frac{1}{2}(\mu^2/m_1)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{R}^2 + \mu\dot{r}\dot{R}$

انرژی جنبشی ذره‌ی دوم : $\frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 = \frac{1}{2}(\mu^2/m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{R}^2 - \mu\dot{r}\dot{R}$

جمع انرژی جنبشی‌ها : $\frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}M\dot{R}^2$

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = V(r)$$

دستگاه مختصات مرکز جرم : $E = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r)$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات مرکز جرم

$$\text{دستگاه مختصات آزمایشگاه} : \; E = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\text{دستگاه مختصات مرکز جرم} : \; E = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r)$$

اگر مرکز جرم ساکن باشد، یعنی

$$\dot{R} = 0$$

بنابراین

$$\boxed{\text{دستگاه مختصات مرکز جرم} : \; E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r)}$$

نیروهای مرکزی، نیروهای پایستار هستند

$$\vec{F} = F(r)\hat{r} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

بنابراین

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \;\text{ یا }\; V(r) = -\int_{\text{مرجع}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{\text{مرجع}} F(r)\mathrm{d}r$$

سیستم دو ذره‌ای-دستگاه مختصات مرکز جرم

$$\text{دستگاه مختصات آزمایشگاه}: \quad E = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\text{دستگاه مختصات مرکز جرم}: \quad E = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r)$$

اگر مرکز جرم ساکن باشد، یعنی

$$\dot{R} = 0$$

بنابراین

$$\boxed{\text{دستگاه مختصات مرکز جرم}: \quad E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r)}$$

و

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}, \quad V(r) = -\int_{\text{مرجع}} F(r)\mathrm{d}r}$$

حرکت در میدان نیروی مرکزی

معادله‌ی

$$\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}$$

حرکت ذره‌ی به جرم μ را توصیف می‌کند. بررسی حرکت ذره بر پایه‌ی قوانین پایستگی قرار دارد.

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

وقتی

$$\vec{L} = \text{ثابت}$$

یعنی بزرگی و جهت $\vec{L}$ در فضا ثابت است.

از طرفی چون $\vec{r}$ و $\vec{p}$ در یک صفحه عمود بر $\vec{L}$ است، **حرکت ذره به جرم کاهیده‌ی μ محدود به صفحه‌ای عمود بر $\vec{L}$ می‌باشد.**

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \mu\vec{v}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \mu\vec{v})$$

$$\vec{\tau} = \vec{v} \times \mu\vec{v} + \vec{v} \times \mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{\tau} = 0 + \vec{r} \times \mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

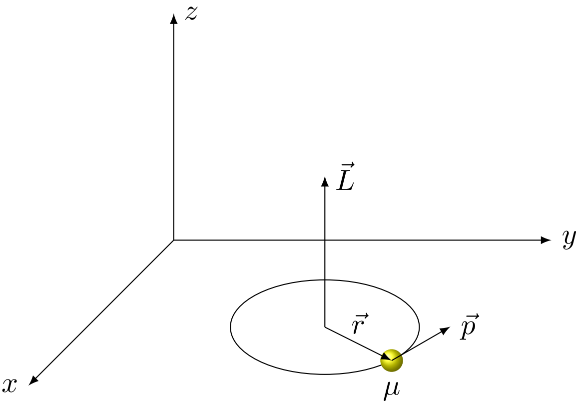
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times F(r)\hat{r} = 0$$

حرکت در میدان نیروی مرکزی

معادله‌ی

$$\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}$$

حرکت ذره‌ی به جرم μ را توصیف می‌کند. بررسی حرکت ذره بر پایه‌ی قوانین پایستگی قرار دارد.



اگر بردار $\vec{L}$ در امتداد محور z باشد، حرکت ذره به جرم μ در صفحه‌ی xy اتفاق می‌افتد.

حرکت در میدان نیروی مرکزی

سمت راست معادله‌ی

$$\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}$$

توسط بردار یکه شعاعی در مختصات قطبی توصیف می‌شود. برای این منظور از مختصات قطبی (r,θ) و بجای (x,y) استفاده می‌کنیم،

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} = F(r)\hat{r}$$

بنابراین

$$\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r} \xrightarrow{\text{تبدیل}} \begin{cases} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \\ \mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases}$$

حرکت در میدان نیروی مرکزی

معادله‌ی

$$\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}$$

حرکت ذره‌ی به جرم μ را توصیف می‌کند. بررسی حرکت ذره بر پایه‌ی قوانین پایستگی قرار دارد.

$$\begin{cases} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \longrightarrow \text{پایستگی انرژی} \\ \mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \longrightarrow \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} \end{cases}$$

$$\mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \xrightarrow{\times r} \mu(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0$$

$$\mu(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow \boxed{\mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت}}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu\vec{v} = \mu r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) = \mu r\dot{r}(\hat{r} \times \hat{r}) + \mu r^2\dot{\theta}(\hat{r} \times \hat{\theta})$$

$$\begin{cases} \hat{r} \times \hat{r} & = 0 \\ \hat{r} \times \hat{\theta} & = \hat{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{L} = \mu r^2\dot{\theta}\hat{k} \Rightarrow \boxed{l = L_z = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت}}$$

حرکت در میدان نیروی مرکزی

معادله‌ی

$$\mu\vec{\ddot{r}} = F(r)\hat{r}$$

حرکت ذره‌ی به جرم μ را توصیف می‌کند. بررسی حرکت ذره بر پایه‌ی قوانین پایستگی قرار دارد.

$$\begin{cases} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \longrightarrow \text{پایستگی انرژی} \\ \mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \longrightarrow \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} \longrightarrow l = L_z = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

$$\text{پایستگی تکانه} \quad \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2} \; : \; \mu\left(\ddot{r} - r\left[\frac{l}{\mu r^2}\right]^2\right) = F(r)$$

$$\boxed{\text{معادله دیفرانسیل حرکت} \; : \; \mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = F(r)}$$

حرکت در میدان نیروی مرکزی

معادله‌ی

$$\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}$$

حرکت ذره‌ی به جرم μ را توصیف می‌کند. بررسی حرکت ذره بر پایه‌ی قوانین پایستگی قرار دارد.

$$\text{معادله دیفرانسیل حرکت} : \ \mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = F(r) \xrightarrow{\times\dot{r}} \mu\ddot{r}\dot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3}\dot{r} = F(r)\dot{r}$$

$$\text{سمت چپ} : \ \mu\ddot{r}\dot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3}\dot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right)$$

$$\text{سمت راست} : \ F(r)\dot{r} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{سمت راست} = \text{سمت چپ} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V = \text{ثابت}}$$

معادله‌ی

$$\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}$$

حرکت ذره‌ی به جرم μ را توصیف می‌کند. بررسی حرکت ذره بر پایه‌ی قوانین پایستگی قرار دارد.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V = \text{ثابت}}$$

$$\boxed{V(r) = -\int_{\text{مرجع}} F(r)\mathrm{d}r}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2 + V(r) \xrightarrow{\dot{\theta}=l/\mu r^2} E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

حرکت در میدان نیروی مرکزی

معادله‌ی

$$\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}$$

حرکت ذره‌ی به جرم μ را توصیف می‌کند. بررسی حرکت ذره بر پایه‌ی قوانین پایستگی قرار دارد.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V = \text{ثابت}$$

$$V(r) = -\int_{\text{مرجع}} F(r)\mathrm{d}r$$

بنابراین

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت}}$$

حرکت در میدان نیروی مرکزی

معادله‌ی

$$\mu\ddot{\vec{r}} = F(r)\hat{r}$$

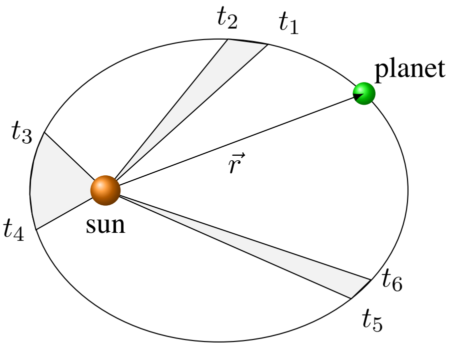
حرکت ذره‌ی به جرم μ را توصیف می‌کند. بررسی حرکت ذره بر پایه‌ی قوانین پایستگی قرار دارد.

بطورکلی

$$\begin{cases} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \longrightarrow \text{پایستگی انرژی} \longrightarrow E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \\ \mu(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \longrightarrow \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} \longrightarrow l = L_z = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

حرکت در میدان نیروی مرکزی

قانون مساحتهای برابر:
بردار مکان در بازه‌های زمانی مساوی مساحت‌های یکسانی را جاروب می‌کند.



$$\text{بازه‌های زمانی یکسان} : \ \Delta t = t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = t_6 - t_5$$

$$\text{مساحت‌های یکسان} : \ \Delta A = A_{12} = A_{34} = A_{56}$$

حرکت در میدان نیروی مرکزی

قانون مساحتهای برابر:
بردار مکان در بازه‌های زمانی مساوی مساحت‌های یکسانی را جاروب می‌کند.

$$\text{بازه‌های زمانی یکسان} : \ \Delta t = t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = t_6 - t_5$$

$$\text{مساحت‌های یکسان} : \ \Delta A = A_{12} = A_{34} = A_{56}$$

$$\text{المان مساحت در مختصات قطبی} : \ \mathrm{d}A = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\color{red}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\mathrm{d}\theta}{\color{red}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

$$\text{پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای} : \ l = \mu r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{l}{\mu r^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2\mu} = \text{ثابت}}$$

حرکت در میدان نیروی مرکزی

قانون مساحتهای برابر:
بردار مکان در بازه‌های زمانی مساوی مساحت‌های یکسانی را جاروب می‌کند.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_4 - t_3 = t_6 - t_5 \quad : \text{بازه‌های زمانی یکسان}$$

$$\Delta A = A_{12} = A_{34} = A_{56} \quad : \text{مساحت‌های یکسان}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2\mu} = \text{ثابت}$$

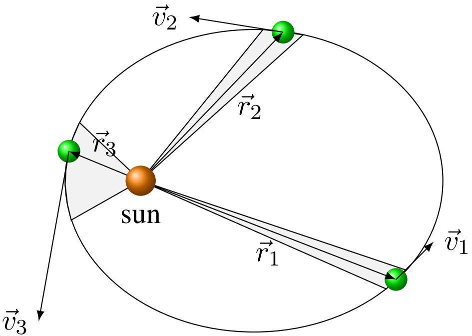
$$\mathrm{d}A = \frac{l}{2\mu}\mathrm{d}t$$

$$\Delta A = \frac{l}{2\mu}\Delta t$$

برای هر Δt یکسان ΔA یکسانی بدست می‌آید که این نتیجه **قانون دوم کپلر** نیز نامیده می‌شود.

حرکت در میدان نیروی مرکزی

قانون مساحتهای برابر:
بردار مکان در بازه‌های زمانی مساوی مساحت‌های یکسانی را جاروب می‌کند.



چون اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت حرکت است. اگر r افزایش یابد، v کاهش می‌یابد.

معادلات حرکت

$$\begin{cases} \text{پایستگی انرژی} : \; E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} : \; l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)\right)}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)\right)}}$$

$$t = \int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)\right)}}$$

$$r = r(t)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{\mu r^2}$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{l}{\mu r^2}\mathrm{d}t$$

$$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{l}{\mu r^2}\mathrm{d}t$$

$$\theta = \theta(t)$$

معادلات حرکت-معادله مسیر حرکت (روش انتگرالگیری)

$$\begin{cases} \text{پایستگی انرژی} : \; E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} : \; l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)\right)} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)\right)}}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{\mu r^2} \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{l}{\mu r^2}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{l}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)\right)}}$$

$$\text{معادله مسیر حرکت} : \; \theta(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{l}{\mu r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)\right)}}$$

معادلات حرکت-پتانسیل موثر

$$\begin{cases} \text{پایستگی انرژی} : \; E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \\ \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} : \; l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r)$$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

پتانسیل مرکزی + پتانسیل گریز از مرکز = پتانسیل موثر

$\frac{l^2}{2\mu r^2} =$ پتانسیل گریز از مرکز (دافع)

$V(r) =$ پتانسیل مرکزی

معادلات حرکت-نیروی موثر

$$\begin{cases} \text{پایستگی انرژی} : \; E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \\ \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} : \; l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \dot{r}\left(\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

نیروی مرکزی+نیروی گریز از مرکز = نیروی موثر

$$\dot{r} \neq 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} - F(r) = 0$$

$$\text{نیروی گریز از مرکز} = \frac{l^2}{\mu r^3}$$

$$\text{معادله دیفرانسیل حرکت} : \; \mu\ddot{r} = F_{\mathrm{eff}}(r)$$

$$\text{نیروی مرکزی} = F(r)$$

$$F_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{l^2}{\mu r^3} + F(r)$$

معادلات حرکت-رابطه پتانسیل موثر و نیروی موثر

$$\begin{cases} \text{پایستگی انرژی} : \; E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \\ \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} : \; l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

پتانسیل مرکزی + پتانسیل گریز از مرکز = پتانسیل موثر

$$\text{پتانسیل گریز از مرکز} = \frac{l^2}{2\mu r^2}$$

$$\text{پتانسیل مرکزی} = V(r)$$

نیروی مرکزی + نیروی گریز از مرکز = نیروی موثر

$$\text{نیروی گریز از مرکز} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,(\text{پتانسیل گریز از مرکز}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{l^2}{2\mu r^2}\right) = \frac{l^2}{\mu r^3}$$

$$\text{نیروی مرکزی} = F(r) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\,(\text{پتانسیل مرکزی}) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

معادلات حرکت-رابطه پتانسیل موثر و نیروی موثر

$$\begin{cases} \text{پایستگی انرژی}: \quad E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \\ \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای}: \quad l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$$\text{نیروی مرکزی} + \text{نیروی گریز از مرکز} = \text{نیروی موثر}$$

$$\text{نیروی گریز از مرکز} = \frac{l^2}{\mu r^3}$$

$$\text{نیروی مرکزی} = F(r)$$

$$\text{پتانسیل مرکزی} + \text{پتانسیل گریز از مرکز} = \text{پتانسیل موثر}$$

$$\text{پتانسیل گریز از مرکز} = -\int_{\infty}^{r} \frac{l^2}{2\mu r^2}\mathrm{d}r = \frac{l^2}{\mu r^3}$$

$$\text{پتانسیل مرکزی} = V(r) = -\int^{r} F(r)\mathrm{d}r$$

معادلات حرکت-معادله مسیر حرکت (روش معادلات دیفرانسیل)

$$\begin{cases} \text{پایستگی انرژی} : \quad E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \\ \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} : \quad l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \dot{r}\left(\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

$$\dot{r} \neq 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} - F(r) = 0$$

$$\text{معادله دیفرانسیل حرکت} : \mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = F(r)$$

$$r = r(t)$$

معادلات حرکت-معادله مسیر حرکت (روش معادلات دیفرانسیل)

$$\begin{cases} \text{پایستگی انرژی} : \; E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \\ \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} : \; l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \dot{r}\left(\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

$$\dot{r} \neq 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} - F(r) = 0$$

$$\text{تغییر متغیر} : \; r = \frac{1}{u}$$

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{l}{\mu r^2} = -\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

معادلات حرکت-معادله مسیر حرکت (روش معادلات دیفرانسیل)

$$\begin{cases} \text{پایستگی انرژی} : \quad E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \\ \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} : \quad l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \dot{r}\left(\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$$

$$\dot{r} \neq 0 \Rightarrow \mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} - F(r) = 0$$

$$\text{تغییر متغیر} : \quad r = \frac{1}{u}, \quad \dot{r} = -\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\ddot{r} = -\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\dot{\theta} = -\frac{l}{\mu}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{l}{\mu r^2} = -\frac{l^2}{\mu^2}u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$$

معادلات حرکت-معادله مسیر حرکت (روش معادلات دیفرانسیل)

$$\begin{cases} \text{پایستگی انرژی} : \ E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \text{ثابت} \\ \\ \text{پایستگی تکانه زاویه‌ای} : \ l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت} \end{cases}$$

$$\mu\ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} = F(r)$$

تغییر متغیر : $r = \dfrac{1}{u}, \quad \dot{r} = -\dfrac{l}{\mu}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}, \quad \ddot{r} = -\dfrac{l^2}{\mu^2}u^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$

$$-\frac{l^2}{\mu}u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{l^2}{\mu}u^3 = F\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$-\frac{\mu}{l^2}\frac{1}{u^2} \times \left(-\frac{l^2}{\mu}u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} - \frac{l^2}{\mu}u^3\right) = -\frac{\mu}{l^2}\frac{1}{u^2} \times F\left(\frac{1}{u}\right)$$

معادله دیفرانسیل مسیر حرکت : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\dfrac{\mu}{l^2u^2}F\left(\dfrac{1}{u}\right)$

معادلات حرکت

مسئله–۱: ذره‌ای به جرم m در یک مدار مارپیچ به معادله‌ی $r = k\theta$ که k ثابت است. شکل تابع نیرو را بدست آورید.

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{m}{l^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{k\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{k\theta^2} = -\frac{k}{r^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2} u = \frac{2}{k\theta^3} = \frac{2k^2}{r^3}$$

$$\frac{2k^2}{r^3} + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{l^2} F(r)$$

$$F(r) = -\frac{l^2}{m}\left(\frac{2k^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}\right)$$

معادلات حرکت

مسئله-۱: ذره‌ای به جرم m در یک مدار مارپیچ به معادله‌ی $r = k\theta$ که k ثابت است. شکل تابع نیرو را بدست آورید.

$$l = mr^2\dot{\theta}$$

$$l = mk^2\theta^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \frac{l}{mk^2}\mathrm{d}t = \theta^2\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{l}{mk^2}\int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^\theta \theta^2\mathrm{d}\theta \Rightarrow \frac{l}{mk^2}t = \frac{1}{3}\theta^3$$

$$\theta(t) = \sqrt[3]{\frac{3l}{mk^2}}t^{1/3}$$

$$r = k\theta \Rightarrow r(t) = k\sqrt[3]{\frac{3l}{mk^2}}t^{1/3}$$

معادلات حرکت

مسئله–۱: ذره‌ای به جرم m در یک مدار مارپیچ به معادله‌ی $r = k\theta$ که k ثابت است. شکل تابع نیرو را بدست آورید.

$$\theta(t) = \sqrt[3]{\frac{3l}{mk^2}}t^{1/3}, \quad r(t) = k\sqrt[3]{\frac{3l}{mk^2}}t^{1/3}$$

$$\ddot{r} = \frac{-2k}{9}\sqrt[3]{\frac{3l}{mk^2}}t^{-5/3} = \frac{-2k}{9}\left[\frac{3l}{mk^2}\right]^{1/3} k^5 \left[\frac{3l}{mk^2}\right]^{5/3} = \frac{-2k^6}{9}\left[\frac{3l}{mk^2}\right]^2$$

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = F(r)$$

$$m\left(\frac{-2k^6}{9}\right)\left[\frac{3l}{mk^2}\right]^2 - \frac{l^2}{mr^3} = F(r)$$

$$-\frac{l^2}{m}\left(\frac{2k^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}\right) = F(r)$$

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

انرژی E و اندازه حرکت زاویه‌ای l ثوابت حرکت تحت نیروهای مرکزی هستند،

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r) = \text{ثابت}$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$$l = \mu r^2\dot{\theta} = \text{ثابت}$$

در اینجا قصد داریم دو پتانسیل مرکزی فنر و جاذب کولنی را بررسی خواهیم کرد.

> پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی فنر

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

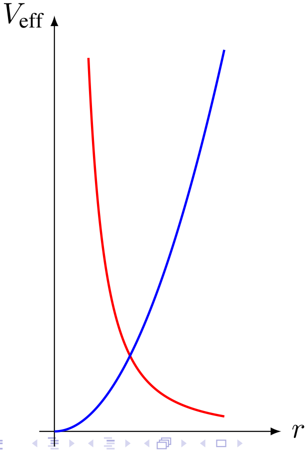
> پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی کولنی جاذب

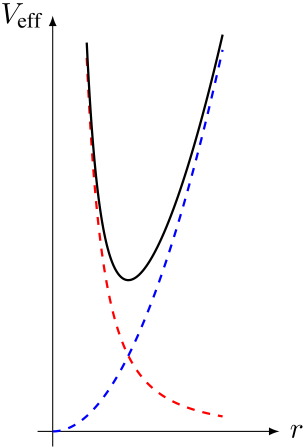
$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}, \quad k > 0$$

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی فنر:

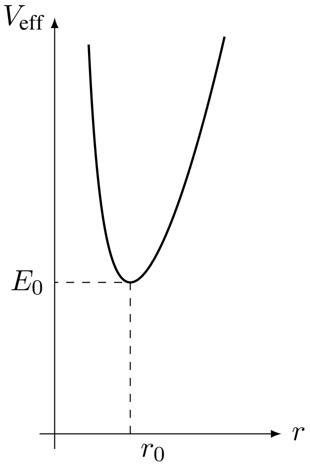
$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}kr^2$$





توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی فنر:



$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

مینیمم پتانسیل موثر

$$F_{\text{eff}} = -\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = 0$$

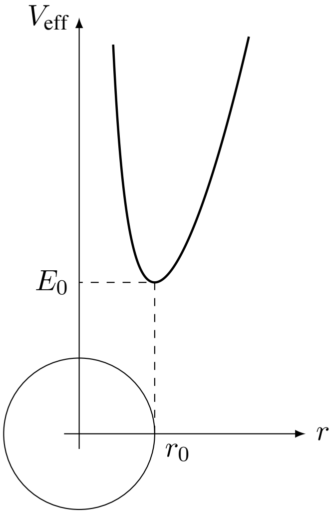
$$-\frac{l^2}{\mu r^3} + kr = 0$$

بنابراین

$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{l^2}{\mu k}} \quad \text{و} \quad V_{\text{eff}}(r_0) = \sqrt{\frac{l^2 k}{\mu}} = E_0$$

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی فنر:



$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

مینیمم پتانسیل موثر

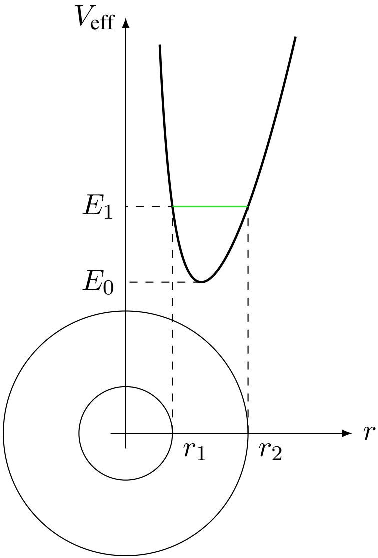
$$F_{\text{eff}} = -\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = 0$$

$$r_0 = \sqrt[4]{\frac{l^2}{\mu k}} \quad \text{و} \quad V_{\text{eff}}(r_0) = \sqrt{\frac{l^2 k}{\mu}} = E_0$$

مقیاس طول : $\sqrt[4]{\frac{l^2}{\mu k}}$، مقیاس انرژی : $\sqrt{\frac{l^2 k}{\mu}}$

ذره μ بر روی دایره‌ای به شعاع r_0، سرعت شعاعی صفر دارد.

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر



پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی فنر:

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

- ذره‌ی μ با انرژی بالاتر از انرژی E_0 نمودار پتانسیل موثر را در دونقطه قطع می‌کند که به این **نقاط که در آن سرعت شعاعی ذره برابر صفر می‌شود، نقطه‌ی بازگشت گفته می‌شود.**
- برای

$$E_1 > E_0$$

نقاط بازگشت r_1 و r_2 از رابطه‌ی

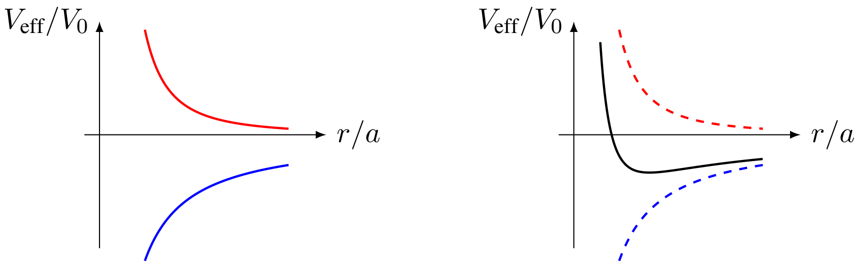
$$E_1 = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

بدست می‌آید.

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

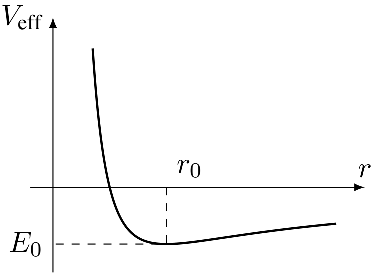
پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی جاذب کولنی:

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}, \quad k > 0$$



توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی کولنی:



$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}, \quad k > 0$$

مینیمم پتانسیل موثر

$$F_{\text{eff}} = -\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = 0$$

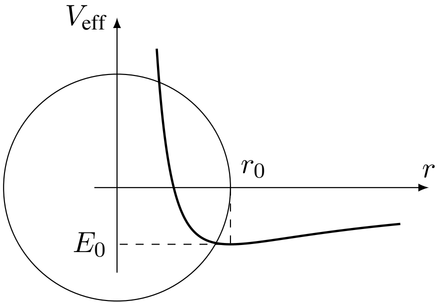
$$-\frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{k}{r^2} = 0$$

بنابراین

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu k} \quad \text{و} \quad V_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{1}{2}\frac{\mu k^2}{l^2} = E_0$$

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی کولنی:



$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}, \quad k > 0$$

مینیمم پتانسیل موثر

$$F_{\text{eff}} = -\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = 0$$

$$r_0 = \frac{l^2}{\mu k} \quad \text{و} \quad V_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{1}{2}\frac{\mu k^2}{l^2} = E_0$$

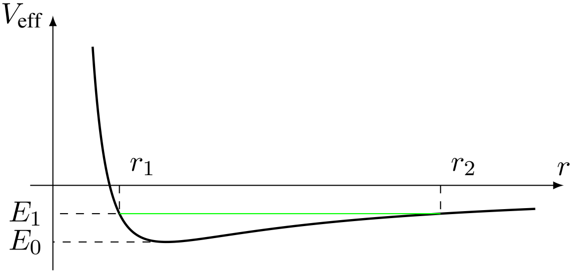
$\frac{\mu k^2}{l^2}$: مقیاس انرژی ، $\frac{l^2}{\mu k}$: مقیاس طول

ذره μ بر روی دایره‌ای به شعاع r_0، سرعت شعاعی صفر دارد.

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی کولنی جاذب:

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}, \quad k > 0$$

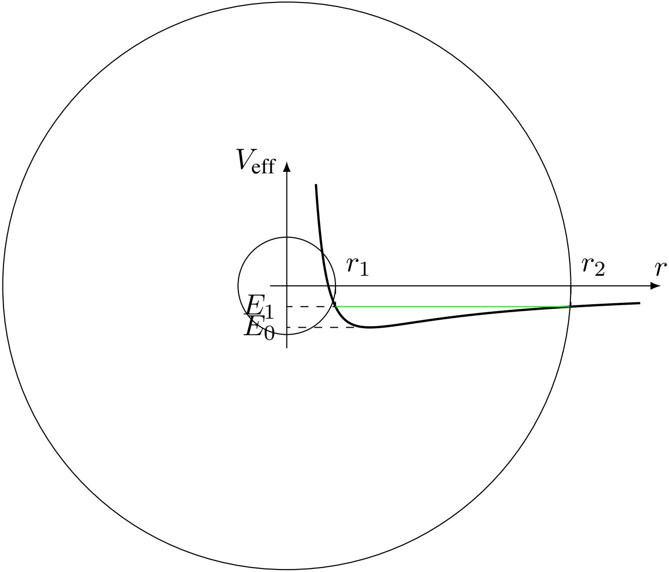


- برای $E_0 < E_1 < 0$ نقاط بازگشت r_1 و r_2 از رابطه‌ی زیر بدست می‌آیند،

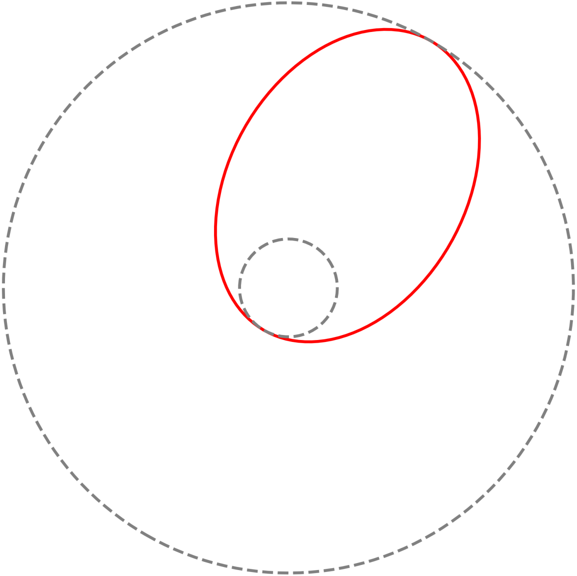
$$E_1 = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

- در نقاط بازگشت سرعت شعاعی ذره برابر صفر می‌شود.

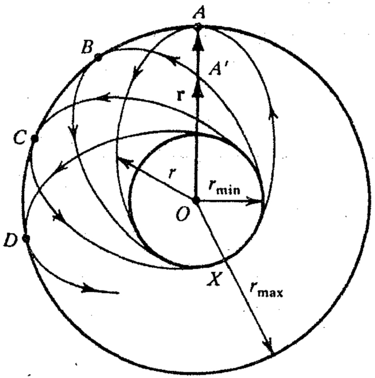
توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر



توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر



توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

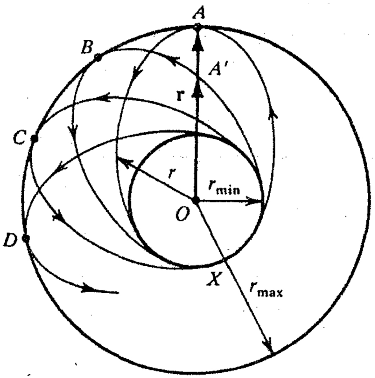


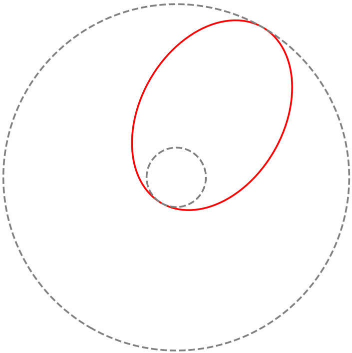
- زمان تناوب شعاعی T_r: مدت زمانی که ذره‌ی μ از A به X و بعد به B می‌رود. زمان تناوب شعاعی در حقیقت مدت زمان یک رفت و برگشت ذره بین دو شعاع $r_{\min} = r_1$ و $r_{\max} = r_2$ است.
- زمان تناوب زاویه‌ای T_θ: مدت زمانی که ذره‌ی μ از A به X و بعد به A' می‌رود. زمان تناوب زاویه‌ای در حقیقت مدت زمان چرخش بردار مکان ذره $\vec{r}$ به اندازه 2π است.
- اگر دوره‌های تناوبی همنوا باشند،

$$\frac{T_r}{n_r} = \frac{T_\theta}{n_\theta}$$

ذره نهایت به وضعیت اول بر می‌گردد. چنین مدارهایی را **مدار بسته** می‌نامند.

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر





برای پتانسیل مرکزی

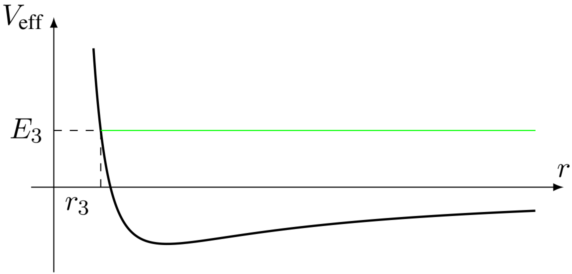
$$V(r) = -k/r$$

که $k > 0$ است، دوره تناوب شعاعی و زاویه‌ای برابرند ($T_r = T_\theta$).

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی کولنی جاذب:

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}, \quad k > 0$$



< برای $E_3 > 0$ تنها نقطه بازگشت r_3 از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید،

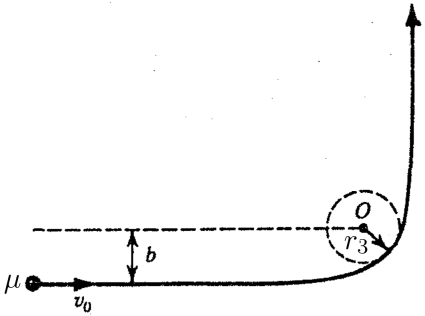
$$E_3 = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}$$

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی کولنی جاذب:

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}, \quad k > 0$$

< برای $E_3 = \frac{1}{2}\mu v_0^2 > 0$

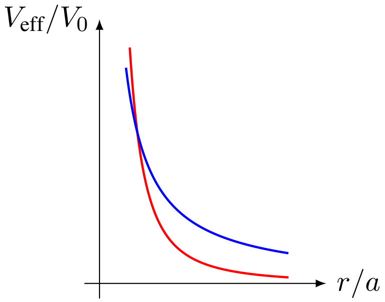


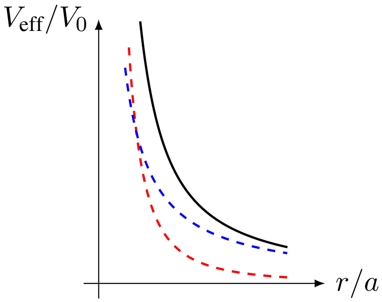
ذره μ با سرعت اولیه‌ی v_0 و پارامتر برخورد b وارد پتانسیل مرکزی شده و سپس از آن دور می‌شود.

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی دافع کولنی:

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r}, \quad k > 0$$

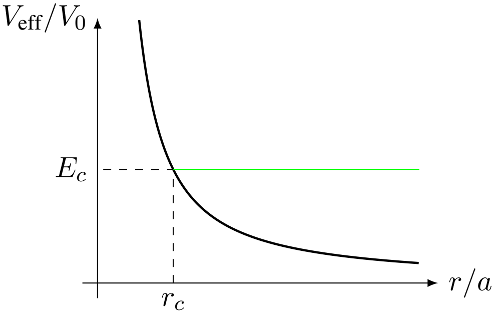




توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی دافع کولنی:

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r}, \quad k > 0$$



> برای $E_c > 0$، نقطه بازگشت r_c از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید،

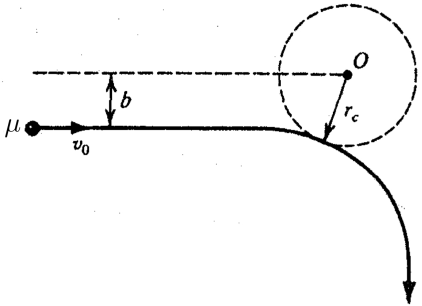
$$E_c = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r}$$

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

پتانسیل موثر در حضور پتانسیل مرکزی دافع کولنی:

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r}, \quad k > 0$$

- برای $E_c = \frac{1}{2}\mu v_0^2 > 0$



ذره μ با سرعت اولیه‌ی v_0 و پارامتر برخورد b وارد پتانسیل مرکزی شده و سپس از آن دور می‌شود.

مسئله-۲: بنابر نظریه یوکاوا در مورد نیروهای هسته‌ای، نیروهای جاذب بین یک نوترون و یک پروتون در داخل هسته با تابع پتانسیلی به شکل

$$V(r) = -\frac{k}{r}e^{-r/a}, \quad a, k > 0$$

نمایش داده می‌شود. الف) نیروی $F(r)$ را پیدا کنید. ب) نمودار V_{eff} را رسم و روی آن بحث کنید. ج) اگر ذره روی دایره‌ای به شعاع r_0 حرکت کند، E و L را محاسبه کنید. د) زمان تناوب حرکت دایره‌ای و زمان تناوب نوسانات کوچک را برای مدار دایره‌ای پریشیده را محاسبه کنید.

الف)

$$F(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -k\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar}\right)e^{-r/a}$$

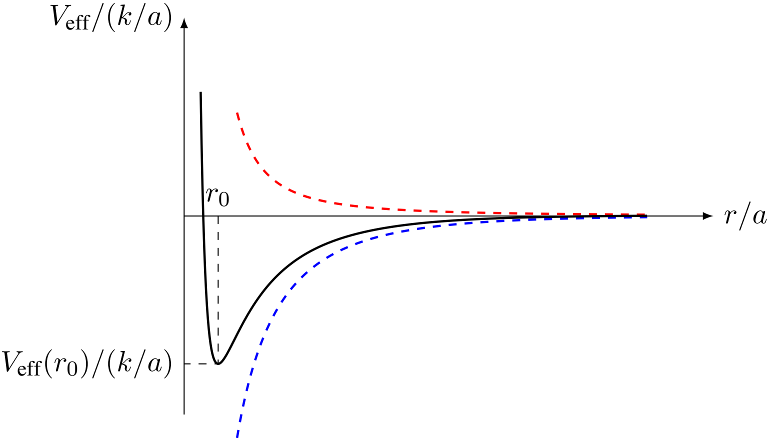
ب)

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}e^{-r/a}$$

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

مسئله-۲:

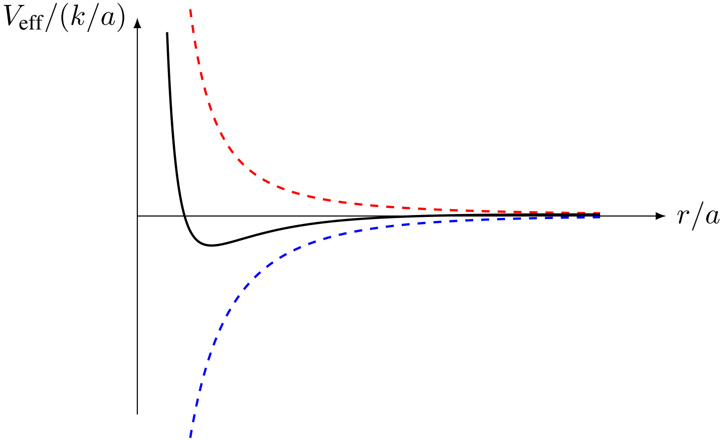
$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}e^{-ar}, \quad l^2 = \frac{1}{4}\mu k a$$



توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

مسئله-۲:

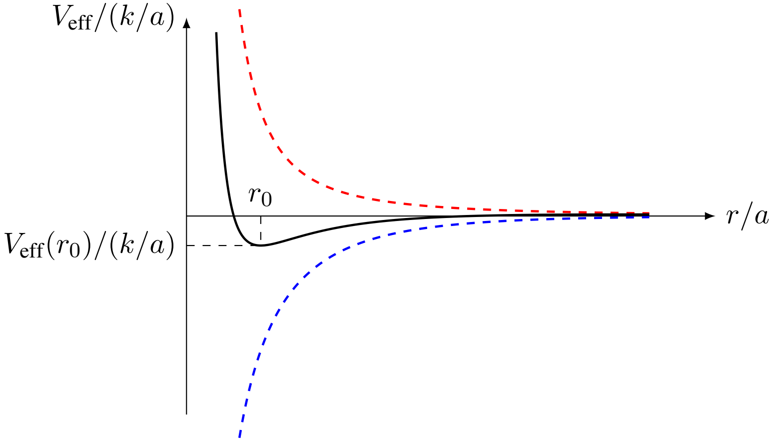
$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}e^{-ar}, \quad l^2 = \frac{1}{2}\mu k a$$



توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

مسئله–۲:

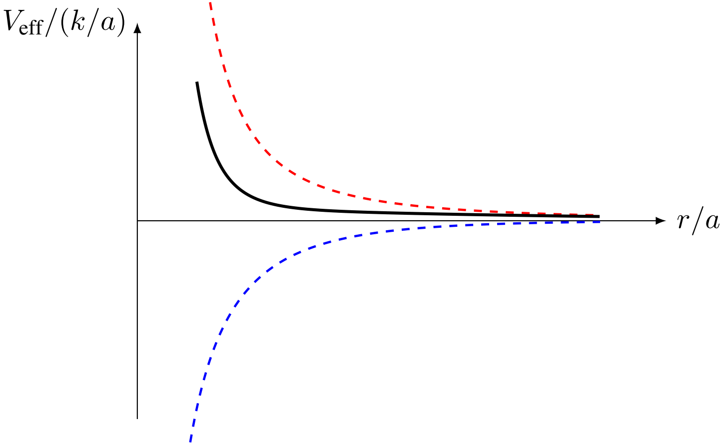
$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}e^{-ar}, \quad l^2 = \frac{1}{2}\mu k a$$



توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

مسئله–۲:

$$V_{\text{eff}} = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}e^{-ar}, \quad l^2 = \mu k a$$



مسئله-۲:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} e^{-r/a}$$

ج)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} V_{\text{eff}}\big|_{r_0} = 0 \Rightarrow -\frac{l^2}{\mu r_0^3} + \frac{k}{r_0^2} e^{-r_0/a} + \frac{k}{r_0 a} e^{-r_0/a} = 0$$

$$l^2 = \mu k \left(r_0 + \frac{r_0^2}{a} \right) e^{-r_0/a}$$

$$l = \left[\mu k \left(r_0 + \frac{r_0^2}{a} \right) e^{-r_0/a} \right]^{1/2}$$

$$E = V_{\text{eff}}(r_0)$$

$$E = \frac{l^2}{2\mu r_0^2} - \frac{k}{r_0} e^{-r_0/a} = -\frac{k}{2r_0} \left(1 - \frac{r_0}{a} \right) e^{-r_0/a}$$

مسئله-۲:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}e^{-r/a}$$

د)

$$l = \left[\mu k \left(r_0 + \frac{r_0^2}{a}\right) e^{-r_0/a}\right]^{1/2}$$

$$l = \mu r_0^2 \dot{\theta} = \mu r_0^2 \omega_\theta \Rightarrow \omega_\theta = \frac{l}{\mu r_0^2}$$

$$\omega_\theta = \frac{1}{\mu r_0^2}\left[\mu k \left(r_0 + \frac{r_0^2}{a}\right) e^{-r_0/a}\right]^{1/2} = \left[\frac{k}{\mu}\left(\frac{1}{r_0^3} + \frac{1}{a r_0^2}\right) e^{-r_0/a}\right]^{1/2}$$

$$T_\theta = 2\pi \left[\frac{k}{\mu}\left(\frac{1}{r_0^3} + \frac{1}{a r_0^2}\right) e^{-r_0/a}\right]^{-1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{(\mu r_0^3/k)e^{r_0/a}}{1 + (r_0/a)}}$$

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

مسئله-۲:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}e^{-r/a}$$

د)

$$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{eff}}(r_0) + \left(\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0}(r-r_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r-r_0)^2 + \cdots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} = 0$$

$$V_{\text{eff}}(r) \simeq V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r-r_0)^2$$

$$E = V_{\text{eff}}(r_0) + \boxed{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r-r_0)^2}$$

قسمت داخل جعبه برای حالتی است که مدار دایره‌ی پریشیده داشته باشیم.

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

مسئله–۲:

$$V_{\text{eff}}(r)=\frac{l^2}{2\mu r^2}-\frac{k}{r}e^{-r/a}$$

د)

$$E=V_{\text{eff}}(r_0)+\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r-r_0)^2$$

$$\omega_r=\sqrt{\frac{1}{\mu}\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}=\frac{k}{r_0^3}\left(1+\frac{r_0}{a}-\frac{r_0^2}{a^2}\right)e^{-r_0/a}$$

$$T_r=2\pi\sqrt{\frac{(\mu r_0^3/k)e^{r_0/a}}{1+(r_0/a)-(r_0/a)^2}}$$

توصیف حرکت مداری از روش نمودار پتانسیل موثر

مسئله-۲:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}e^{-r/a}$$

د)

$$T_\theta = 2\pi\sqrt{\frac{(\mu r_0^3/k)e^{r_0/a}}{1+(r_0/a)}}$$

$$T_r = 2\pi\sqrt{\frac{(\mu r_0^3/k)e^{r_0/a}}{1+(r_0/a)-(r_0/a)^2}}$$

$$\frac{T_r}{T_\theta} = \sqrt{\frac{1+(r_0/a)}{1+(r_0/a)-(r_0/a)^2}}$$

اگر $a \ll r_0$، می‌توان در مخرج کسر زیر رادیکال از جمله‌ی $(r_0/a)^2$ در مقابل جملات دیگر چشم‌پوشی کرد. در این شرایط پریود نوسانات شعاعی و زاویه‌ای با هم برابرند.

مدار در یک پتانسیل کولنی

معادله‌ی حرکت دیفرانسیلی ذره μ در پتانسیل (یا نیروی) کولنی

$$\text{پتانسیل جاذب} : V(r) = -\frac{k}{r}, \quad \text{پتانسیل دافع} : V(r) = \frac{k}{r}$$

$$\text{نیروی جاذب} : F(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{k}{r^2}, \quad \text{نیروی دافع} : F(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{k}{r^2}$$

بصورت زیر داده می‌شود،

$$\text{برای نیروی جاذب} : \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = \frac{\mu k}{l^2}$$

$$\text{برای نیروی دافع} : \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u = -\frac{\mu k}{l^2}$$

$$\text{برای نیروی جاذب} : \frac{1}{r} = u = u_{\text{همگن}} + u_{\text{ناهمگن}} = \frac{\mu k}{l^2} + A\cos(\theta - \phi)$$

$$\text{برای نیروی دافع} : \frac{1}{r} = u = u_{\text{همگن}} + u_{\text{ناهمگن}} = -\frac{\mu k}{l^2} + A\cos(\theta - \phi)$$

ثابت ϕ جهت گیری اولیه مدار در صفحه را مشخص می‌کند و ثابت مثبت A بوسیله‌ی نقاط بازگشت تعیین می‌شود.

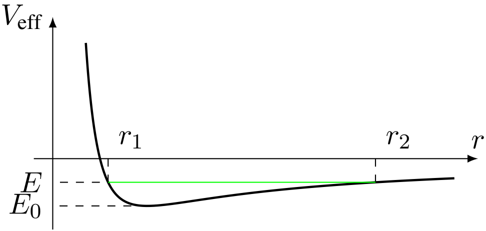
مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$ وقتی $E < 0$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} + A\cos\theta$$

کمترین و **بیشترین** مقدار r با توجه به محدودی $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ بصورت زیر داده می شود،

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{\mu k}{l^2} \pm A$$



تعیین A با استفاده از نقاط بازگشت

$$E = V_{\text{eff}}(r), \quad E_0 < E < 0$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2\mu k}{l^2}\frac{1}{r} - \frac{2\mu E}{l^2} = 0$$

$$E_0 = -\frac{1}{2}\frac{\mu k^2}{l^2}$$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$ وقتی $E < 0$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} + A\cos\theta$$

کمترین و **بیشترین** مقدار r با توجه به محدودی $-1 \le \cos\theta \le 1$ بصورت زیر داده می شود،

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{\mu k}{l^2} \pm A$$

تعیین A با استفاده از نقاط بازگشت

$$E = V_{\text{eff}}(r), \quad E < 0$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2\mu k}{l^2}\frac{1}{r} - \frac{2\mu E}{l^2} = 0$$

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{\mu k}{l^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{l^2}} \Rightarrow A = \sqrt{\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{l^2}}$$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$ وقتی $E < 0$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{l^2}}\cos\theta$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}\cos\theta\right] \Rightarrow r = \frac{(l^2/\mu k)}{1 + \sqrt{1 + (2El^2/\mu k^2)}\cos\theta}$$

مقایسه معادله‌ی بالا با معادله‌ی بیضی در مختصات قطبی

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}, \quad 0 < e < 1$$

خروج از مرکز و نیم قطر بزرگ مدار

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}, \quad a(1-e^2) = \frac{l^2}{\mu k}$$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$ وقتی $E < 0$

$$r = \frac{(l^2/\mu k)}{1 + \sqrt{1 + (2El^2/\mu k^2)} \cos\theta}$$

خروج از مرکز مدار

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}$$

$$1 + \frac{2El^2}{\mu k^2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{\mu k^2}{l^2} < E \Rightarrow E_0 < E$$

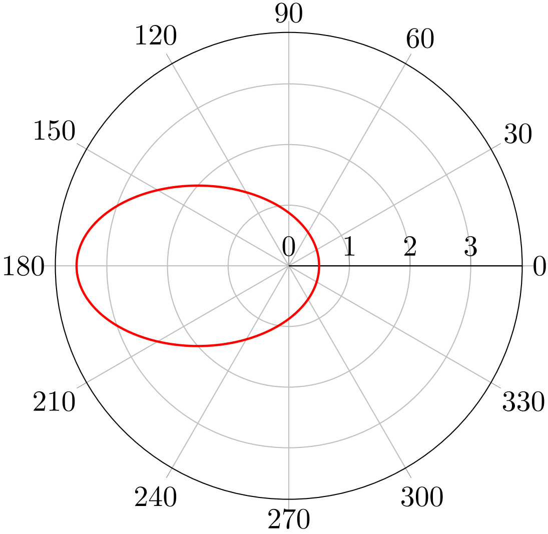
از آنجایی که $0 < e < 1$ بنابراین

$$E_0 < E < 0$$

قطر بزرگ و انرژی حالت مقید

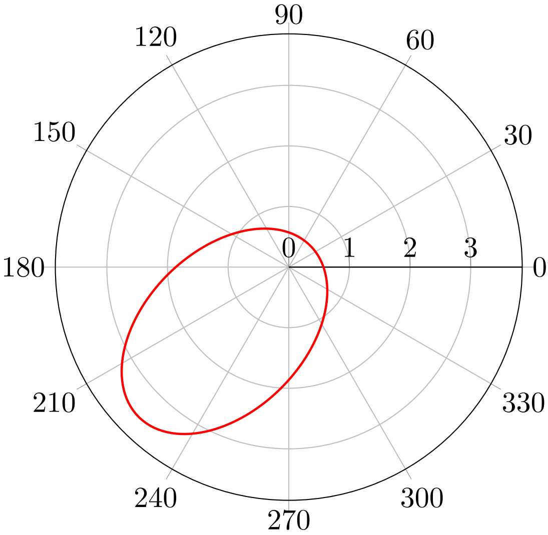
$$a(1 - e^2) = \frac{l^2}{\mu k} \Rightarrow -a\frac{2El^2}{\mu k^2} = \frac{l^2}{\mu k} \Rightarrow E = -\frac{k}{2a} = \text{ثابت}$$

مدار در یک پتانسیل کولنی



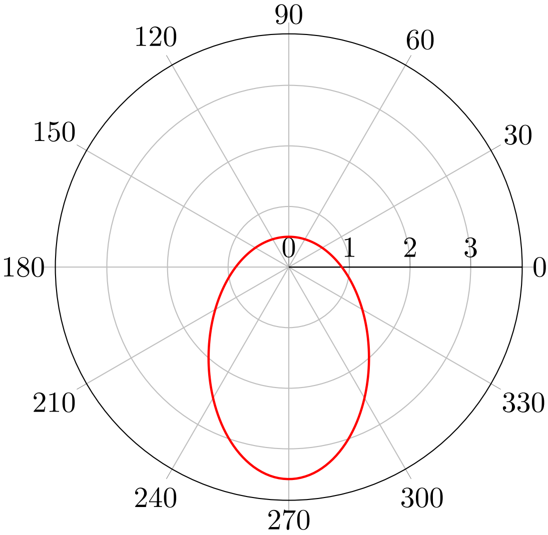
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0°$ وقتی $E < 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



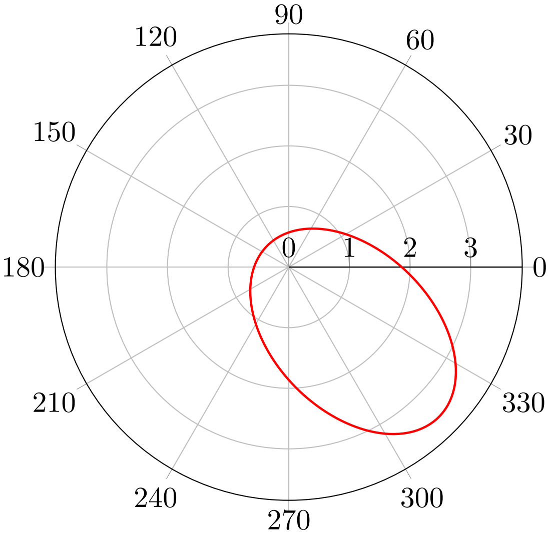
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 45^\circ$ وقتی $E < 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



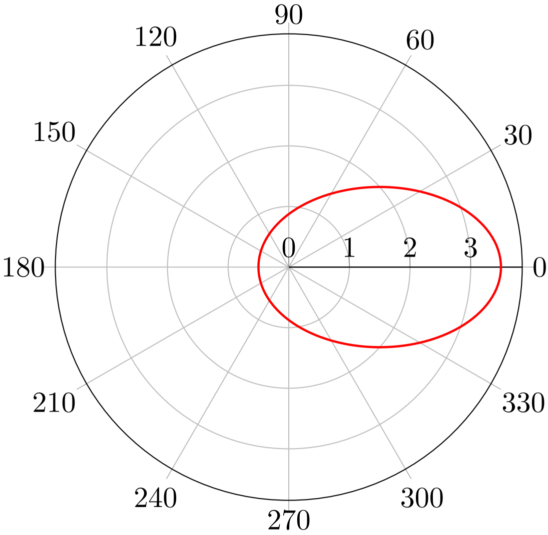
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری
اولیه $\phi = 90^\circ$ وقتی $E < 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 135^\circ$ وقتی $E < 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی

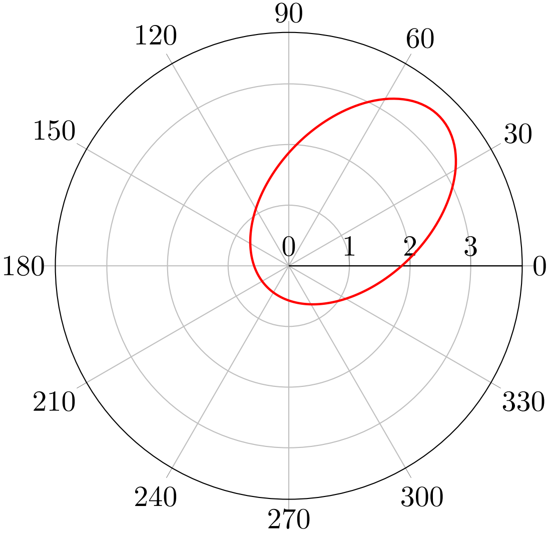


برای **نیروی جاذب** و جهتگیری

اولیه $\phi = 180^\circ$ وقتی

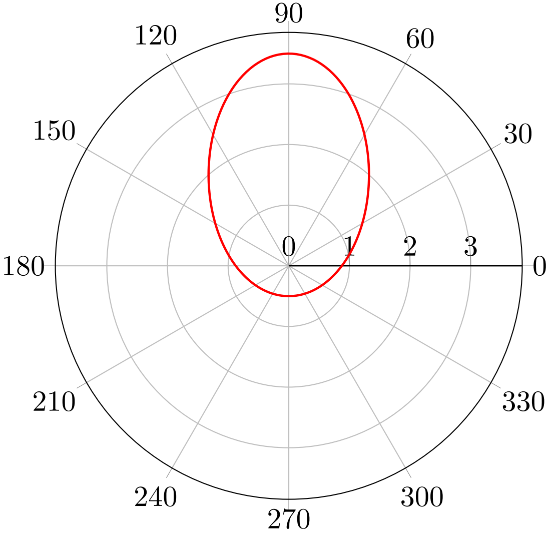
$E < 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



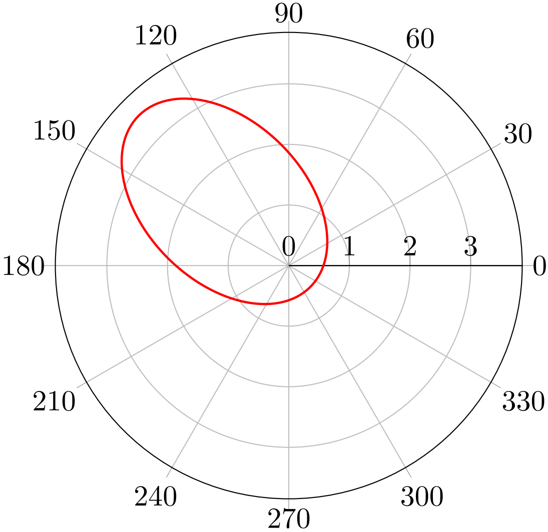
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 225°$ وقتی $E < 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 270^\circ$ وقتی $E < 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 315°$ وقتی $E < 0$

قوانین کپلر

- **قانون مدارها:** سیارات در مدارهایی بیضی شکل که خورشید در یکی ار کانونهای آن قرار دارد، حرکت می کنند.
- **قانون مساحتها:** خط واصل هر سیاره به خورشید در بازه‌های زمانی مساوی مساحتهای یکسان جاروب می‌کند.

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{2\mu} = \text{ثابت}$$

$$\Delta A = \frac{l}{2\mu}\Delta t$$

- **قانون زمانهای تناوب:** مربع زمان تناوب دوران هر سیاره متناسب با مکعب نیم قطر بزرگ مدار است.

$$\frac{lT}{2\mu} = \text{مساحت بیضی : برای یک دوره تناوب}$$

$$\text{مساحت بیضی} = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$$

- **قانون زمانهای تناوب**: مربع زمان تناوب دوران هر سیاره متناسب با مکعب نیم قطر بزرگ مدار است.

$$\frac{lT}{2\mu} = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$$: برای یک دوره تناوب

در مدار بیضی

$$a(1-e^2) = \frac{l^2}{\mu k} \Rightarrow 1-e^2 = \frac{l^2}{\mu k a}$$

بنابراین

$$\frac{lT}{2\mu} = \pi a^2\sqrt{\frac{l^2}{\mu k a}}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم،

$$\frac{l^2T^2}{4\mu^2} = \pi^2 a^4 \frac{l^2}{\mu k a} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{k}a^3 \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{k} = \text{ثابت}}$$

قوانین کپلر

- **قانون زمانهای تناوب:** مربع زمان تناوب دوران هر سیاره متناسب با مکعب نیم قطر بزرگ مدار است.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2\mu}{k} = \text{ثابت}$$

برای نیروی گرانش

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}, \quad k = GMm$$

دراین صورت

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$$

چون $M \gg m$ بنابراین

$$\frac{T^2}{a^3} \simeq \frac{4\pi^2}{GM}$$

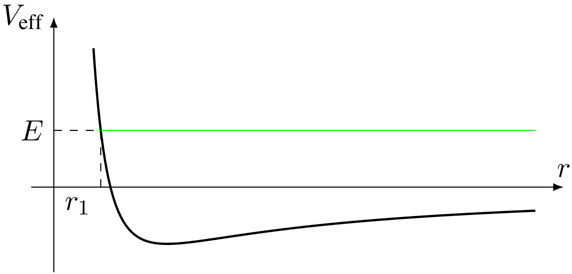
قوانین کپلر

	e	$a\ (\times 10^7\ \text{km})$	$T\ (\text{yr})$	a^3/T^2
سیارات				
عطارد	0.206	5.79	0.24	3.39×10^{18}
زهره	0.007	10.82	0.62	3.31×10^{18}
زمین	0.017	14.96	1.00	3.36×10^{18}
مریخ	0.093	22.79	1.88	3.37×10^{18}
مشتری	0.048	77.83	11.86	3.37×10^{18}
زحل	0.055	142.7	29.46	3.36×10^{18}
اورانوس	0.047	286.9	84.01	3.36×10^{18}
نپتون	0.009	449.8	164.97	3.37×10^{18}
پلوتو	0.249	590.0	248.4	3.35×10^{18}
ماهواره ها				
کاسموس ۳۸۳	0.260	18,117	143	2.91×10^{8}
ATS 2	0.455	24,123	219.7	2.91×10^{8}
کاوشگر ۲۸	0.952	273,740	8.4×10^{13}	2.91×10^{8}

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$ وقتی $E > 0$

$$\text{برای نیروی جاذب} : \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} + A\cos\theta$$



$$\text{نقطه بازگشت} : \quad V_{\text{eff}}(r) = E \Rightarrow \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = E, \qquad E > 0$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2\mu k}{l^2}\frac{1}{r} - \frac{2\mu E}{l^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_{1,2}} = \frac{\mu k}{l^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{l^2}}$$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$ وقتی $E > 0$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} + A\cos\theta \quad : \text{برای نیروی جاذب}$$

با توجه به محدودی $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ بصورت زیر داده می شود،

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{\mu k}{l^2} \pm A$$

نقطه بازگشت

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{\mu k}{l^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{l^2}} = \frac{\mu k}{l^2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}\right), \quad E > 0$$

$$A = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} > 1$$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$ وقتی $E > 0$

$$\text{برای نیروی جاذب} : \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos\theta$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos\theta\right] \Rightarrow r = \frac{(l^2/\mu k)}{1 + \sqrt{1 + (2El^2/\mu k^2)} \cos\theta}$$

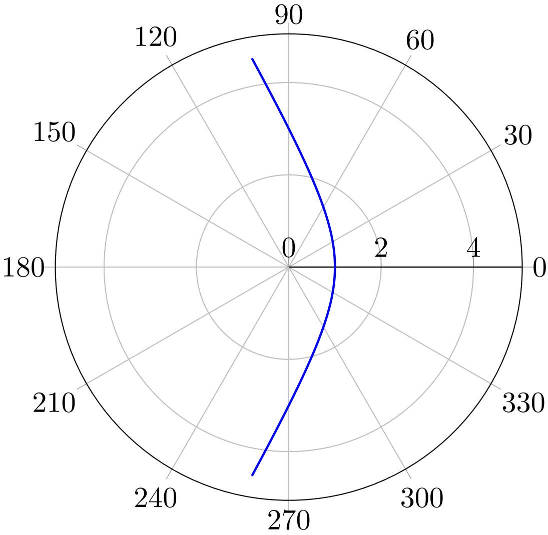
مقایسه معادله‌ی بالا با معادله‌ی هذلولی در مختصات قطبی

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos\theta}, \quad e > 1$$

خروج از مرکز و نصف محور اصلی مدار

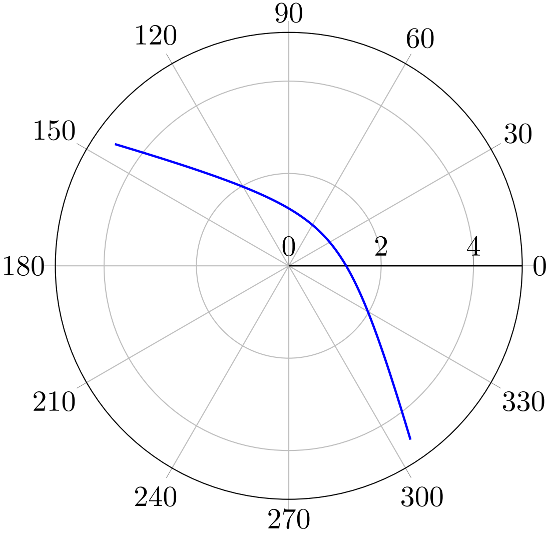
$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} > 1, \quad a(e^2 - 1) = \frac{l^2}{\mu k} \Rightarrow E = \frac{k}{2a} = \text{ثابت}$$

مدار در یک پتانسیل کولنی



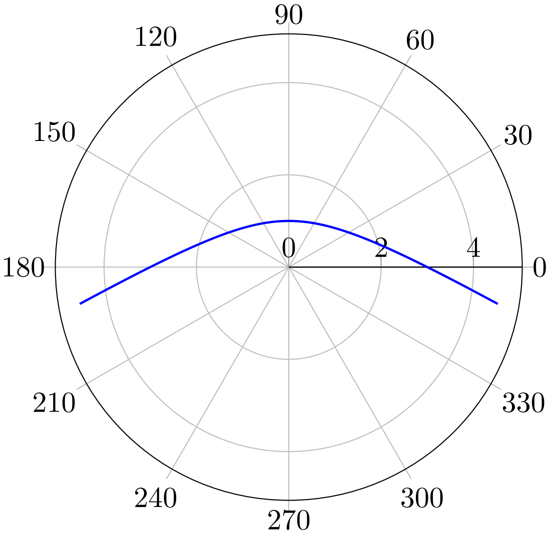
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0^\circ$ وقتی $E > 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



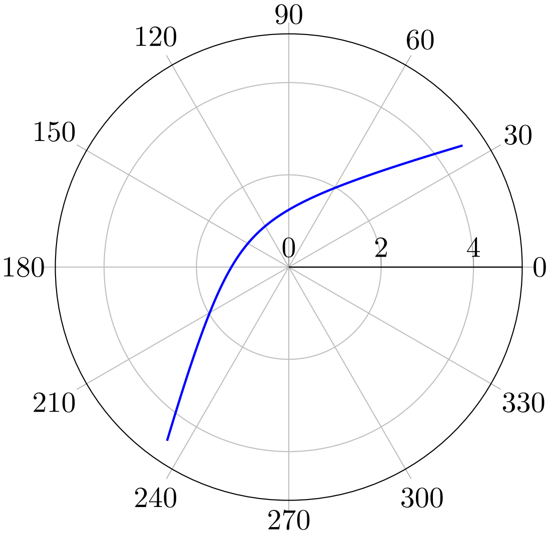
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری
اولیه $\phi = 45^\circ$ وقتی $E > 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



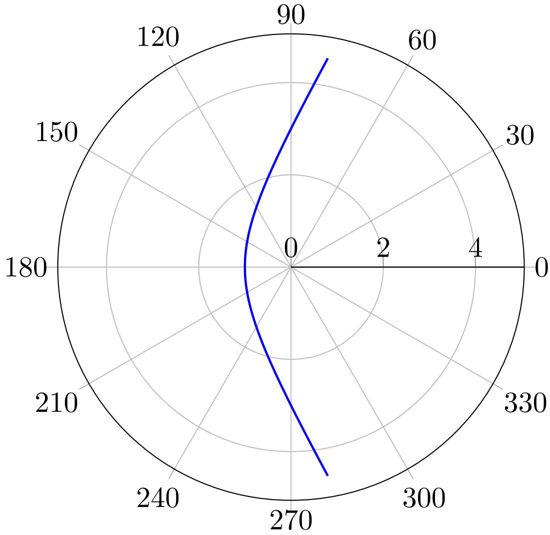
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری
اولیه $\phi = 90°$ وقتی $E > 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



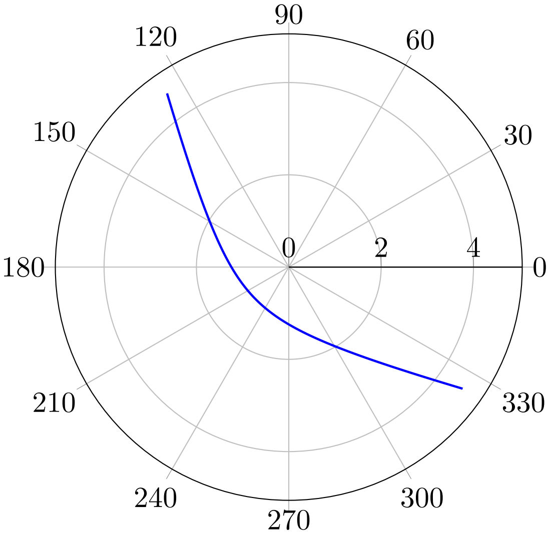
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 135^\circ$ وقتی $E > 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



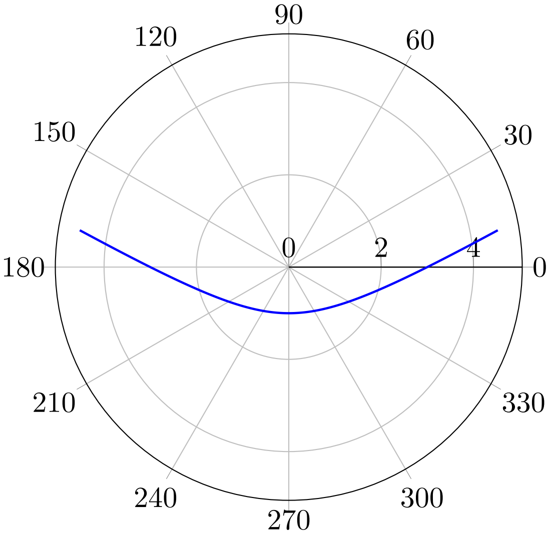
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 180^\circ$ وقتی $E > 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



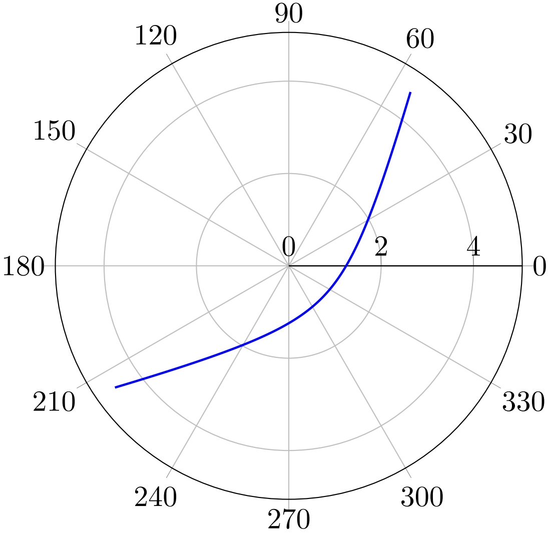
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 225^\circ$ وقتی $E > 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 270°$ وقتی $E > 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



برای **نیروی جاذب** و جهتگیری

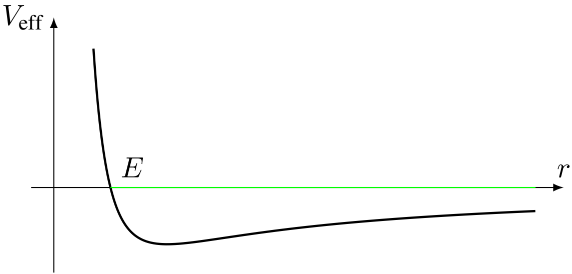
اولیه $\phi = 315^\circ$ وقتی

$E > 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$ وقتی $E = 0$

$$\text{برای نیروی جاذب} : \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} + A\cos\theta$$



$$\text{نقطه بازگشت} : \quad V_{\text{eff}}(r) = 0 \Rightarrow \frac{l^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} = 0, \quad E > 0$$

$$\frac{1}{r^2} - \frac{2\mu k}{l^2}\frac{1}{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_{1,2}} = 0, \; \frac{2\mu k}{l^2}$$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$ وقتی $E = 0$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} + A\cos\theta \quad : \text{برای نیروی جاذب}$$

با توجه به محدودی $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ بصورت زیر داده می شود،

$$\frac{1}{r_{1,2}} = \frac{\mu k}{l^2} \pm A$$

نقطه بازگشت

$$\frac{1}{r_{1,2}} = 0, \; \frac{2\mu k}{l^2}$$

$$A = \frac{\mu k}{l^2}$$

بنابراین

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}(1 + \cos\theta)$$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$ وقتی $E = 0$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}(1 + \cos\theta) \quad : \text{برای نیروی جاذب}$$

$$r = \frac{(l^2/\mu k)}{1 + \cos\theta}$$

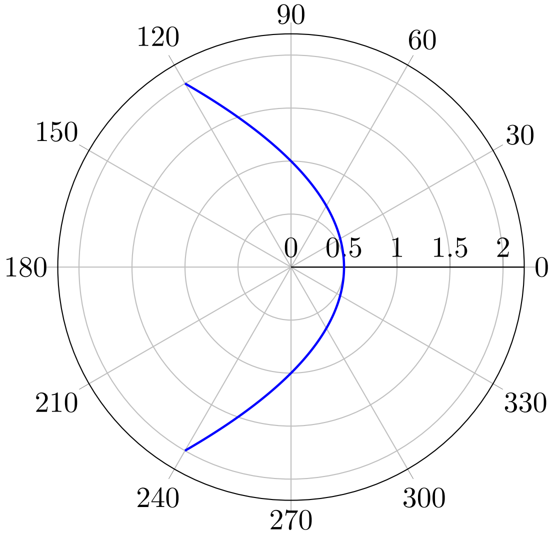
مقایسه معادله‌ی بالا با معادله‌ی سهمی در مختصات قطبی

$$r = \frac{2a}{1 + \cos\theta}, \quad e = 1$$

نیم محور اصلی مدار

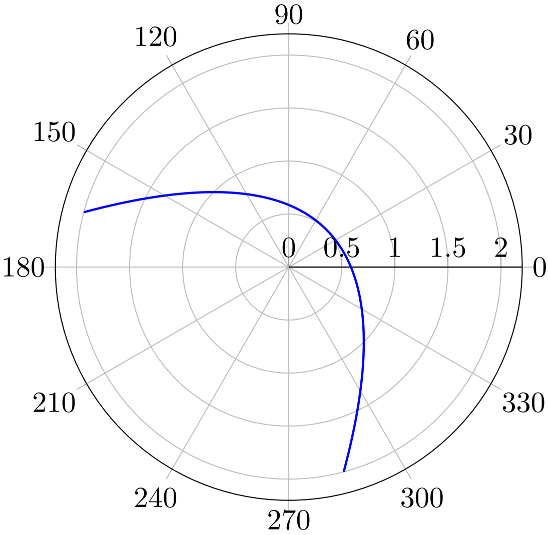
$$2a = \frac{l^2}{\mu k} \Rightarrow a = \frac{l^2}{2\mu k}$$

مدار در یک پتانسیل کولنی



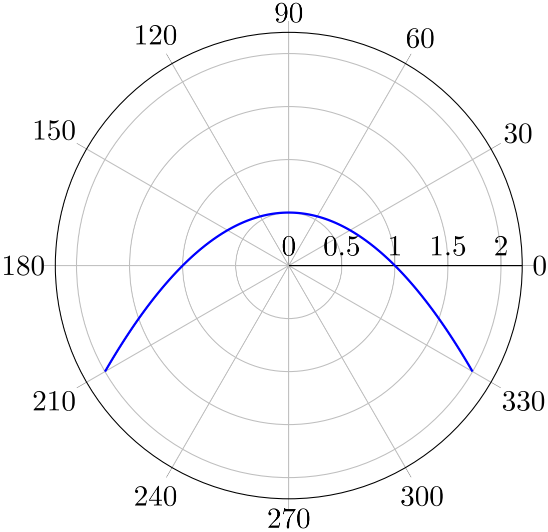
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 0°$ وقتی $E = 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



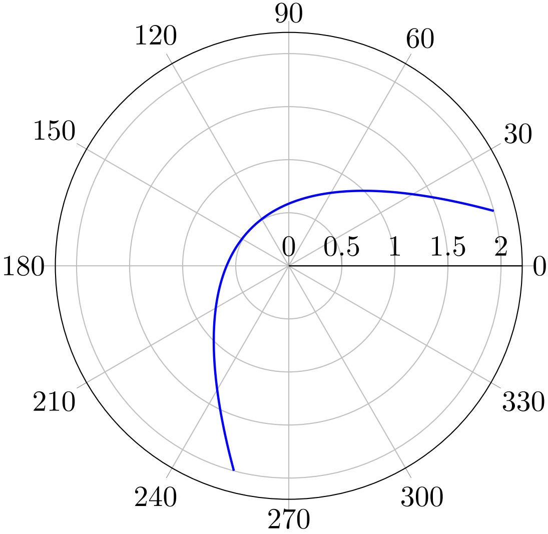
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 45^\circ$ وقتی $E = 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



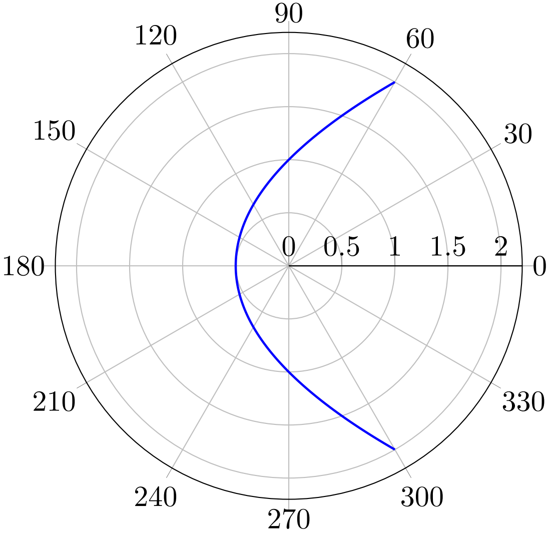
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 90^\circ$ وقتی $E = 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



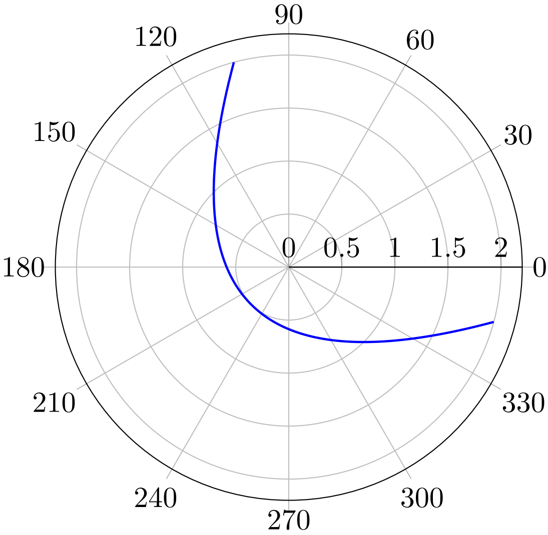
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 135°$ وقتی $E = 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



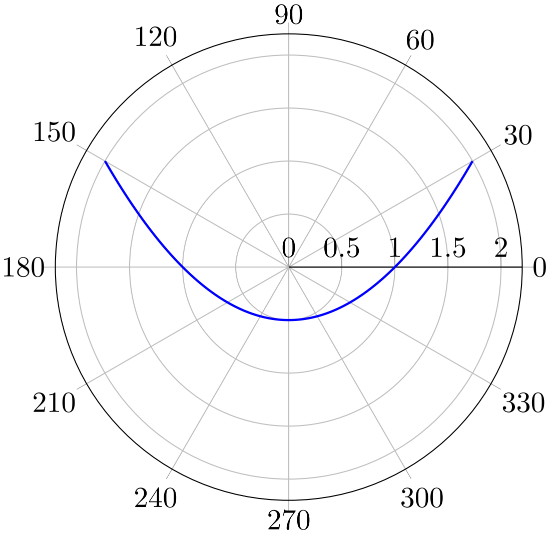
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 180°$ وقتی $E = 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



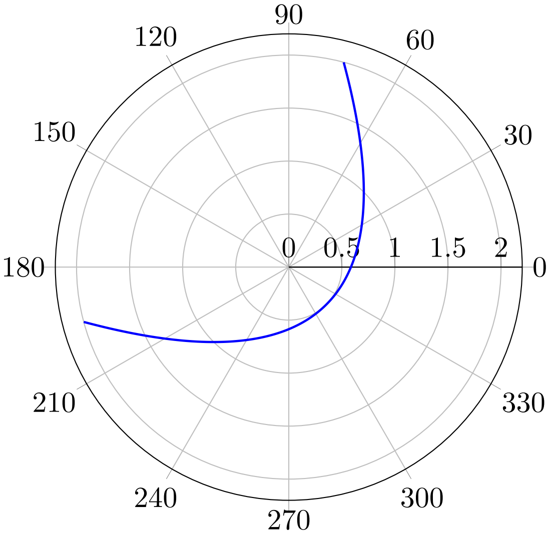
برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 225°$ وقتی $E = 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی



برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 270°$ وقتی
$E = 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی

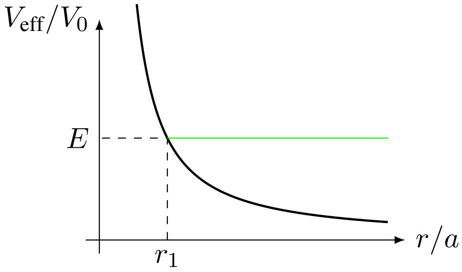


برای **نیروی جاذب** و جهتگیری اولیه $\phi = 315^\circ$ وقتی $E = 0$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی دافع** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$

$$\text{برای نیروی دافع}:\quad \frac{1}{r} = -\frac{\mu k}{l^2} + A\cos\theta$$



$$\text{نقطه بازگشت}:\quad V_{\text{eff}}(r) = E \Rightarrow \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} = E, \quad E > 0$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{2\mu k}{l^2}\frac{1}{r} - \frac{2\mu E}{l^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r_{1,2}} = -\frac{\mu k}{l^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{l^2}}$$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی دافع** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$

$$\frac{1}{r} = -\frac{\mu k}{l^2} + A\cos\theta \quad : \text{برای نیروی دافع}$$

با توجه به محدودی $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ بصورت زیر داده می شود،

$$\frac{1}{r_{1,2}} = -\frac{\mu k}{l^2} \pm A$$

نقطه بازگشت

$$\frac{1}{r_{1,2}} = -\frac{\mu k}{l^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu k}{l^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{l^2}} = \frac{\mu k}{l^2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}\right), \quad E > 0$$

$$A = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} > 1$$

مدار در یک پتانسیل کولنی

برای **نیروی دافع** و جهتگیری اولیه $\phi = 0$

$$\text{برای نیروی دافع}: \quad \frac{1}{r} = -\frac{\mu k}{l^2} + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos\theta$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos\theta\right] \Rightarrow r = \frac{(l^2/\mu k)}{-1 + \sqrt{1 + (2El^2/\mu k^2)}\cos\theta}$$

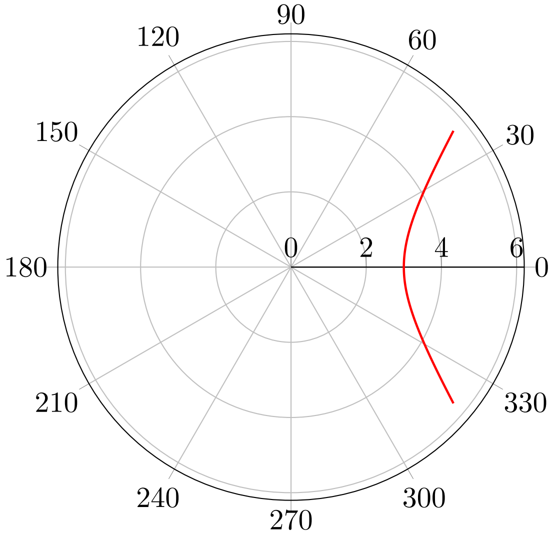
مقایسه معادله‌ی بالا با معادله‌ی هذلولی در مختصات قطبی

$$r = \frac{a(e^2-1)}{-1 + e\cos\theta}, \quad e > 1$$

خروج از مرکز و نصف محور اصلی مدار

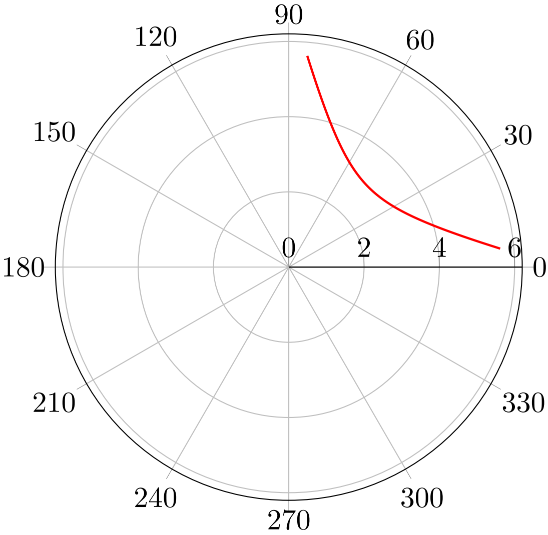
$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} > 1, \quad a(e^2-1) = \frac{l^2}{\mu k} \Rightarrow E = \frac{k}{2a} = \text{ثابت}$$

مدار در یک پتانسیل کولنی



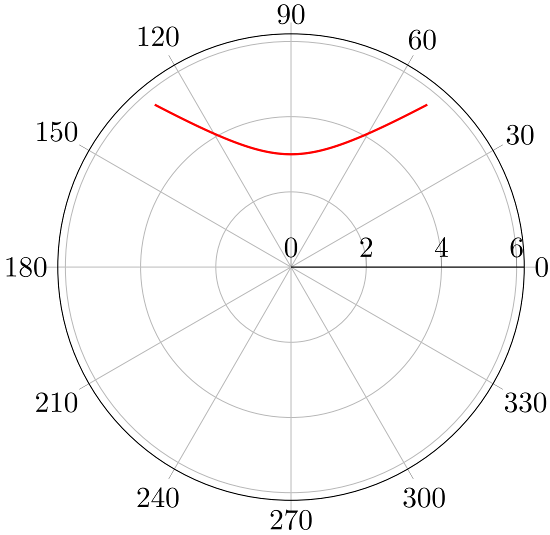
برای **نیروی دافع** و جهتگیری
اولیه $\phi = 0^\circ$

مدار در یک پتانسیل کولنی



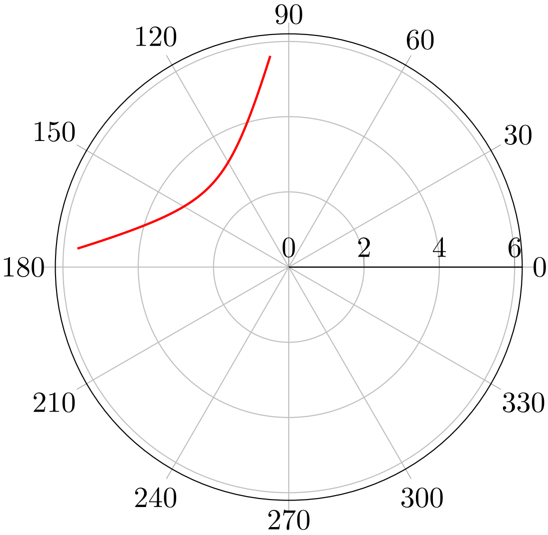
برای **نیروی دافع** و جهتگیری اولیه $\phi = 45^\circ$

مدار در یک پتانسیل کولنی



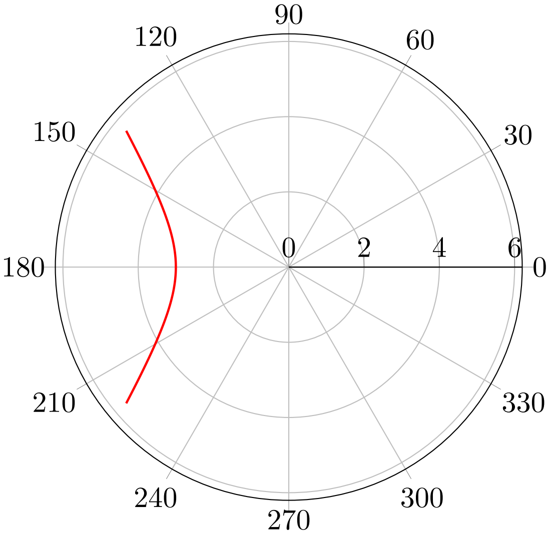
برای **نیروی دافع** و جهتگیری اولیه $\phi = 90°$

مدار در یک پتانسیل کولنی



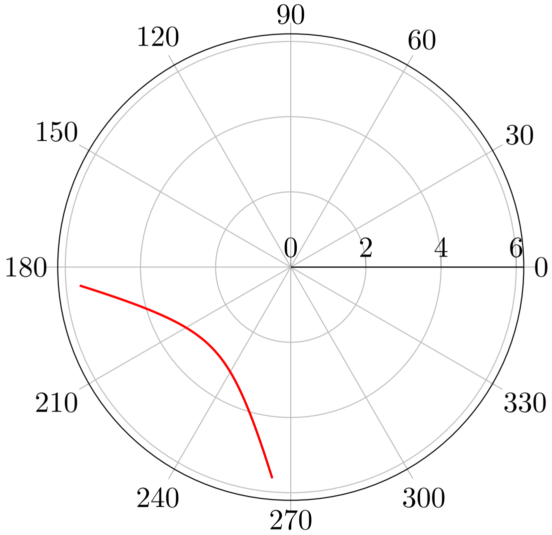
برای **نیروی دافع** و جهتگیری
اولیه $\phi = 135^\circ$

مدار در یک پتانسیل کولنی



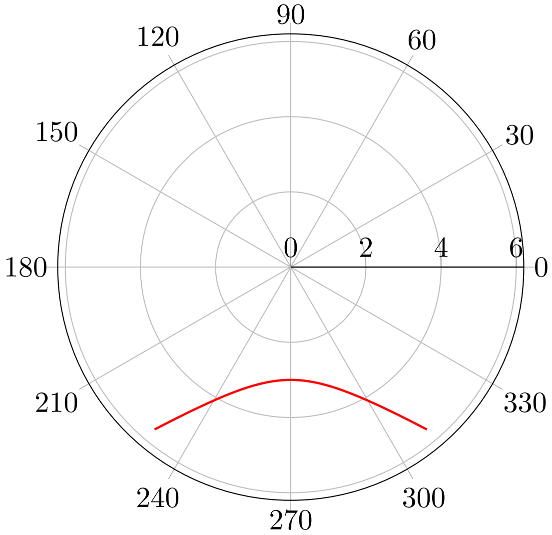
برای **نیروی دافع** و جهتگیری اولیه $\phi = 180^\circ$

مدار در یک پتانسیل کولنی



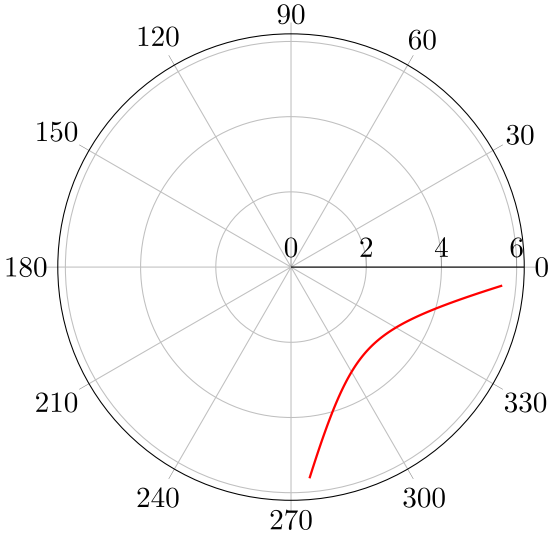
برای **نیروی دافع** و جهتگیری
اولیه $\phi = 225°$

مدار در یک پتانسیل کولنی



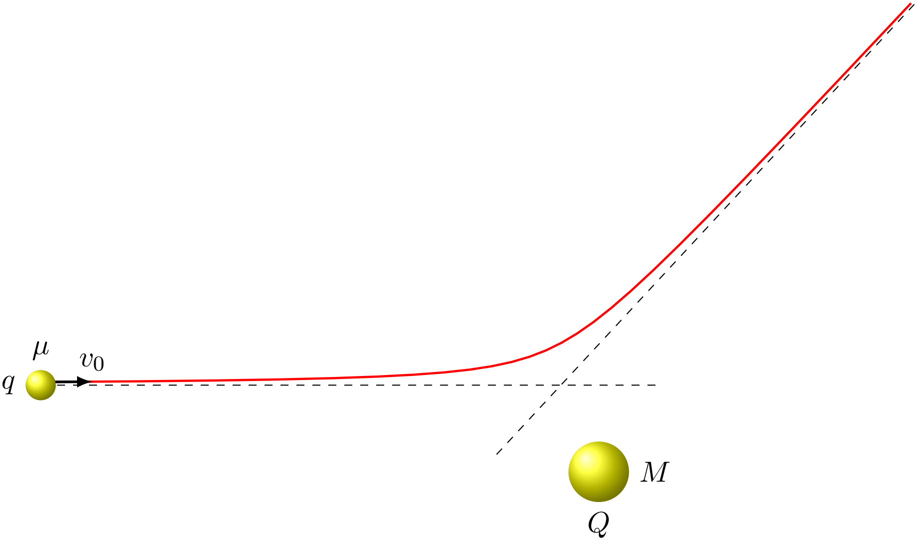
برای **نیروی دافع** و جهتگیری اولیه $\phi = 270°$

مدار در یک پتانسیل کولنی



برای **نیروی دافع** و جهتگیری اولیه $\phi = 315^\circ$

سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع



سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع

معادله مدار هذلولی

$$r = \frac{(l^2/\mu k)}{-1 + \sqrt{1 + (2El^2/\mu k^2)} \cos\theta} = \frac{a(e^2 - 1)}{-1 + e\cos\theta}$$

- فرض می‌کنیم که ذره μ با سرعت v_0 از فواصل دور (بینهایت) بر روی یکی از مجانبهای مدار هذلولی بطرف میدان دافع ذره‌ی M پرتاب می شود و پس از پراکنده شدن بر روی مجانب دیگر بطرف بینهایت دور می‌شود.
- برای $r = \infty$، ذره μ از پتانسیل کولنی دافع ذره M به اندازه کافی دور است، یعنی

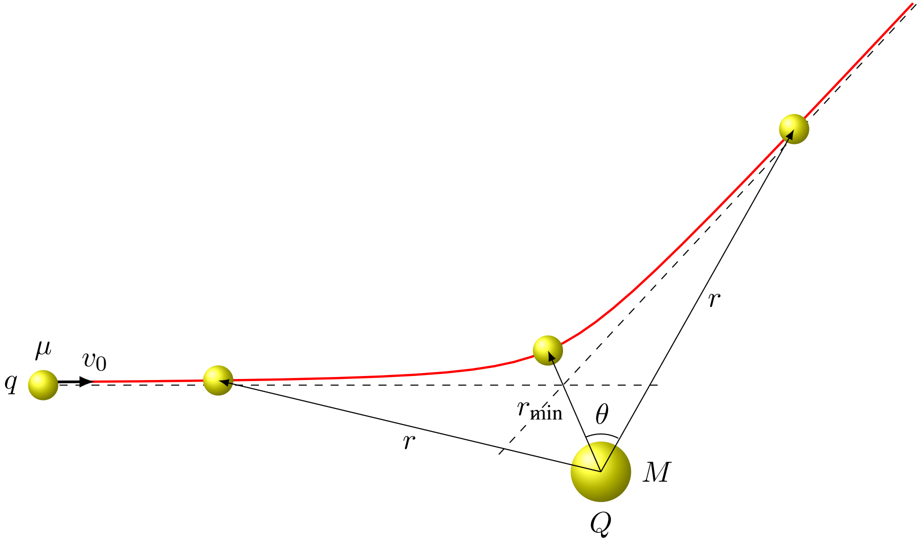
$$V(r) \to 0$$

و انرژی آن برابر با

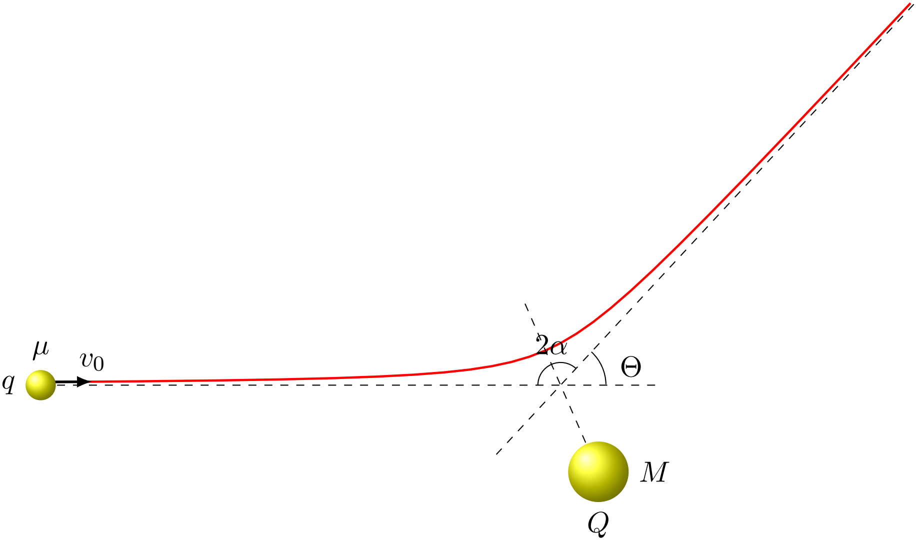
$$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2$$

است.

سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع



سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع



سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع

معادله مدار هذلولی

$$r = \frac{(l^2/\mu k)}{-1+\sqrt{1+(2El^2/\mu k^2)}\cos\theta} = \frac{a(e^2-1)}{-1+e\cos\theta}$$

- فرض می‌کنیم که ذره μ با سرعت v_0 از فواصل دور (بینهایت) بر روی یکی از مجانبهای مدار هذلولی بطرف میدان دافع ذره‌ی M پرتاب می شود و پس از پراکنده شدن بر روی مجانب دیگر بطرف بینهایت دور می‌شود.
- برای $r=\infty$، انرژي ذره μ برابر است با

$$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2$$

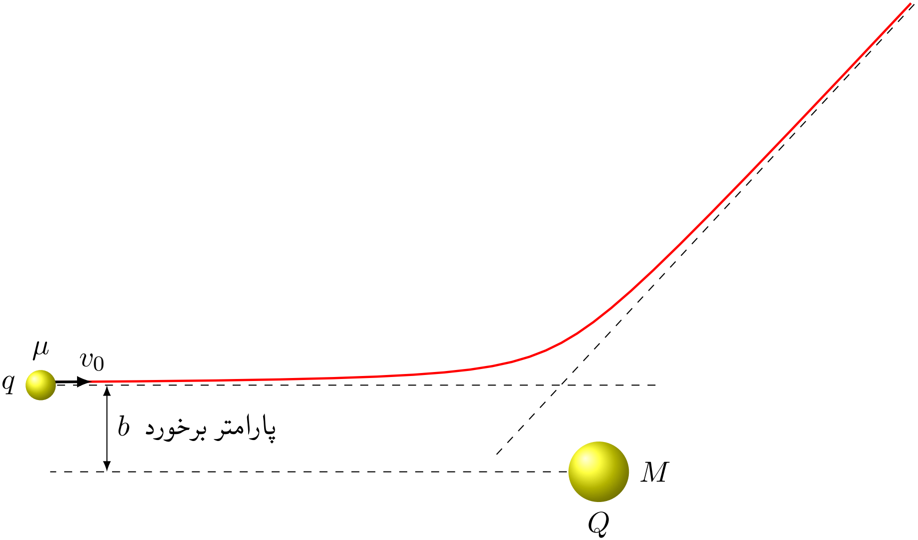
- برای $r=\infty$، $\alpha = \theta$
- برای $r=\infty$ داریم

$$\cos\theta = \cos\alpha = \frac{1}{e}$$

- رابطه بین زاویه پراکندگی 2α و زاویه بین دو مجانب Θ عبارت است از

$$\Theta = \pi - 2\alpha$$

سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع



سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع

- فرض می‌کنیم که ذره μ با سرعت v_0 از فواصل دور (بینهایت) بر روی یکی از مجانبهای مدار هذلولی بطرف میدان دافع ذره‌ی M پرتاب می شود و پس از پراکنده شدن بر روی مجانب دیگر بطرف بینهایت دور می‌شود.
- برای $r = \infty$، انرژي ذره μ برابر است با

$$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2$$

- برای $r = \infty$، $\alpha = \theta$
- برای $r = \infty$ داریم

$$\cos\theta = \cos\alpha = \frac{1}{e}$$

- رابطه بین زاویه پراکندگی 2α و زاویه بین دو مجانب Θ عبارت است از

$$\Theta = \pi - 2\alpha$$

- در $r = \infty$، اندازه حرکت زاویه‌ای ذره μ برابر است با

$$l = \mu v_0 b$$

سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع

رابطه پارامتر برخورد با زاویه‌ی دو مجانب Θ

$$\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

اگر

$$\cos\alpha = \frac{1}{e}$$

بنابراین

$$\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \cot\alpha = \frac{1/e}{\sqrt{1 - 1/e^2}} = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \Rightarrow \tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\mu k^2}{2El^2}}$$

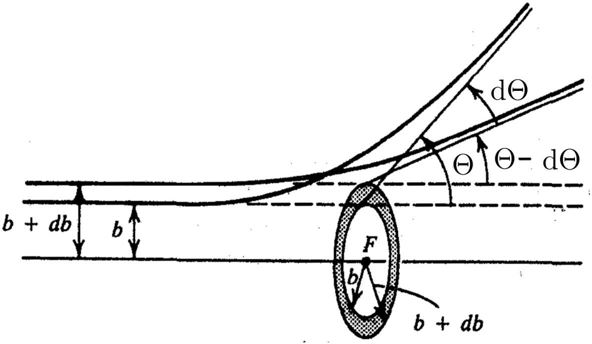
چون $E = \mu v_0^2/2$ و $l = \mu v_0 b$

$$\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\mu k^2}{2El^2}} = \sqrt{\frac{\mu k^2}{2(\mu v_0^2/2)(\mu v_0 b)^2}} = \frac{k}{\mu v_0^2 b}$$

سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع

رابطه پارامتر برخورد با زاویه‌ی بین دو مجانب Θ

$$\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)=\frac{k}{\mu v_0^2 b} \quad \text{یا} \quad b=\frac{k}{\mu v_0^2}\cot\left(\frac{\Theta}{2}\right) \quad \text{و} \quad \mathrm{d}b=-\frac{k}{2\mu v_0^2}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\sin^2(\Theta/2)}$$



هر چه پارامتر برخورد، b، بزرگتر شود، زاویه بین دو مجانب، Θ، کوچکتر می‌شود. زاویه Θ در آزمایشگاه قابل اندازه‌گیری است.

سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع

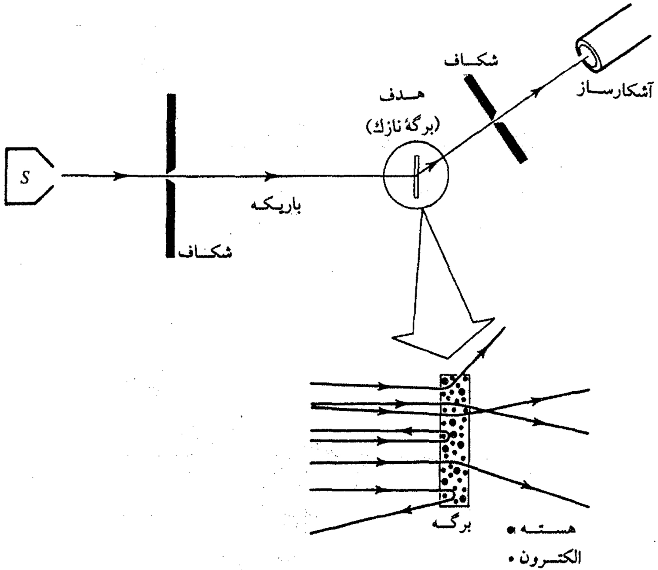
رابطه پارامتر برخورد با زاویه‌ی بین دو مجانب Θ

$$b = \frac{k}{\mu v_0^2} \cot\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{k}{\mu v_0^2} \frac{\cos(\Theta/2)}{\sin(\Theta/2)} = \frac{k}{\mu v_0^2} \frac{\sin\Theta}{2\sin(\Theta/2)} \frac{1}{\sin(\Theta/2)}$$

$$b = \frac{k}{2\mu v_0^2} \frac{\sin\Theta}{\sin^2(\Theta/2)}$$

$$\mathrm{d}b = -\frac{k}{2\mu v_0^2} \frac{\mathrm{d}\Theta}{\sin^2(\Theta/2)}$$

سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع



سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع

- یک دسته ذرات باردار آلفا از منبع S به برگه نازک طلا می‌تابد که برگه نازک طلا از یک ردیف از اتمهای طلا تشکیل شده است.
- ذرات پس برخورد با هسته‌ها در جهتهای مختلف پراکنده می‌شوند.
- اگر ذرات با پارامتر برخورد b تحت زاویه‌ی Θ منحرف شوند، برای ذرات با پارامتر برخورد $b+\mathrm{d}b$ تحت زاویه‌ی $\Theta+\mathrm{d}\Theta$ منحرف می شوند که $\mathrm{d}\Theta$ منفی است.
- اگر N ذره‌ی آلفا به برگه نازک طلا برخورد کنند و برگه نازک طلا شامل n هسته بر واحد سطح باشد. بنابراین تعداد $\mathrm{d}N$ ذره ی آلفا که در زاویه‌ی $\Theta+\mathrm{d}\Theta$ منحرف می‌شود برابر است با

$$\mathrm{d}N = nN\mathrm{d}\sigma$$

که $\mathrm{d}\sigma$ مقطع موثر پراکندگی نامیده می‌شود.

- مقطع موثر σ برابر با سطح قرصی به شعاع b و مرکز هسته اتم پراکنده می‌باشد،

$$\sigma = \pi b^2$$

در اینصورت

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi b \mathrm{d}b$$

سطح مقطع پراکندگی در پتانسیل کولنی دافع

- مقطع موثر $\mathrm{d}\sigma$، ذرات فرودی‌ای با پارامتر برخورد b و $b + \mathrm{d}b$ که به مرکز پراکندگی نزدیک می‌شوند را نشان می‌دهد که تحت زاویه‌ای بین Θ و $\Theta + \mathrm{d}\Theta$ منحرف می‌شوند.

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi b \mathrm{d}b = 2\pi \left(\frac{k}{2\mu v_0^2} \frac{\sin\Theta}{\sin^2(\Theta/2)} \right) \left(-\frac{k}{2\mu v_0^2} \frac{\mathrm{d}\Theta}{\sin^2(\Theta/2)} \right)$$

با حذف علامت منفی

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi \left(\frac{k}{2\mu v_0^2} \right)^2 \frac{\sin\Theta}{\sin^4(\Theta/2)} \mathrm{d}\Theta \quad (1)$$

اولین بار راترفورد سطح مقطع پراکندگی را بصورت تجربی از رابطه

$$\mathrm{d}N = N n \mathrm{d}\sigma$$

با شمارش تعداد ذرات منحرف شده $\mathrm{d}N$ نسبت به تعداد ذرات فرودی N برای یک چگالی مشخصی از اتمها پراکنده کننده بر واحد سطح بر حسب Θ بدست آورد و نتیجه حاصله را با رابطه (۱) مقایسه کرد.

سطح مقطع پراکندگی

مسئله ۳: برای نیروی مرکزی دافع

$$F(r) = \frac{k}{r^3}, \quad k > 0$$

سطح مقطع پراکندگی $\mathrm{d}\sigma$ بین زاویه Θ و زاویه‌ی $\Theta + \mathrm{d}\Theta$ بدست آورید،

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{2\pi^3 k}{m v_0^2} \frac{\pi - \Theta}{\Theta^2 (2\pi - \Theta)^2} \mathrm{d}\Theta$$

ابتدا معادله مسیر حرکت ذره‌ی پراکنده شده را مشخص بدست می‌آوریم

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + u = -\frac{\mu}{l^2 u^2} F(1)$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + u = -\frac{\mu k}{l^2} u \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} + \left(1 + \frac{\mu k}{l^2}\right) u = 0$$

$$u = \frac{1}{r} = A\cos\beta(\theta - \theta_0), \quad \theta_0 = 0 : \text{شرایط اولیه} \Rightarrow \frac{1}{r} = A\cos\beta\theta$$

سطح مقطع پراکندگی

مسئله ۳:

$$\frac{1}{r} = A\cos\beta\theta, \quad \beta = \sqrt{1+\frac{\mu k}{l^2}}$$

از انجایی که $-1 \leq \cos\beta\theta \leq 1$ بنابراین ثابت A با استفاده از نقطه بازگشت مشخص می‌شود

$$V_{\text{eff}}(r) = E \Rightarrow \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r^2} = E \Rightarrow \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2+\mu k}}$$

بنابراین

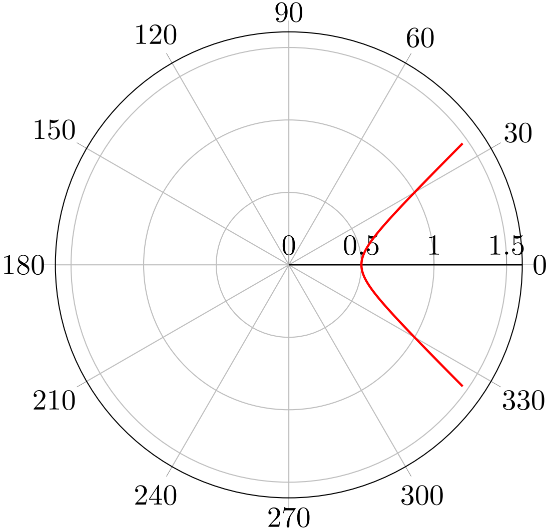
$$\text{معادله مسیر حرکت}: \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2+\mu k}}\cos\beta\theta$$

وقتی ذره به اندازه کافی از میدان نیروی دافع دور باشد($r=\infty$)، بزرگی اندازه حرکت زاویه‌ای و انرژی برابر است با

$$l = \mu v_0 b, \quad E = \mu v_0^2/2$$

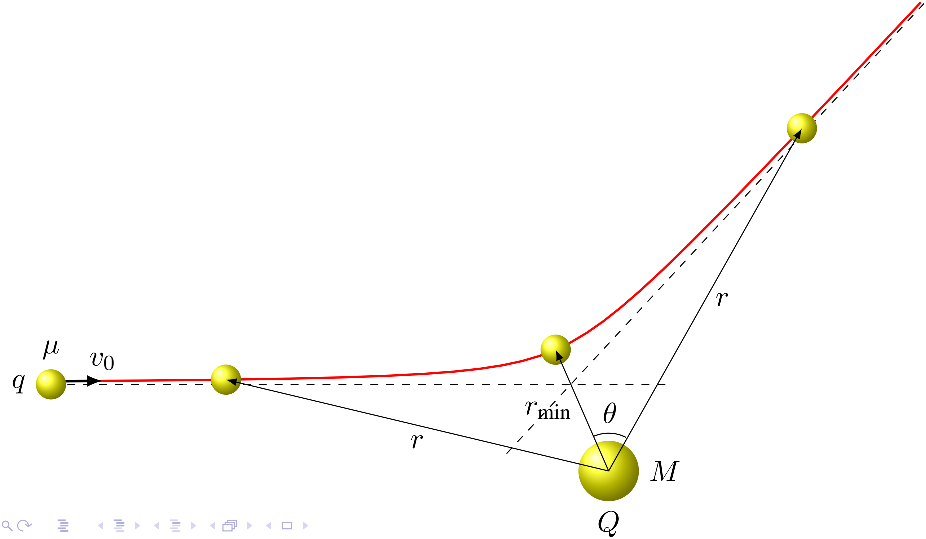
سطح مقطع پراکندگی

مسئله-۳:



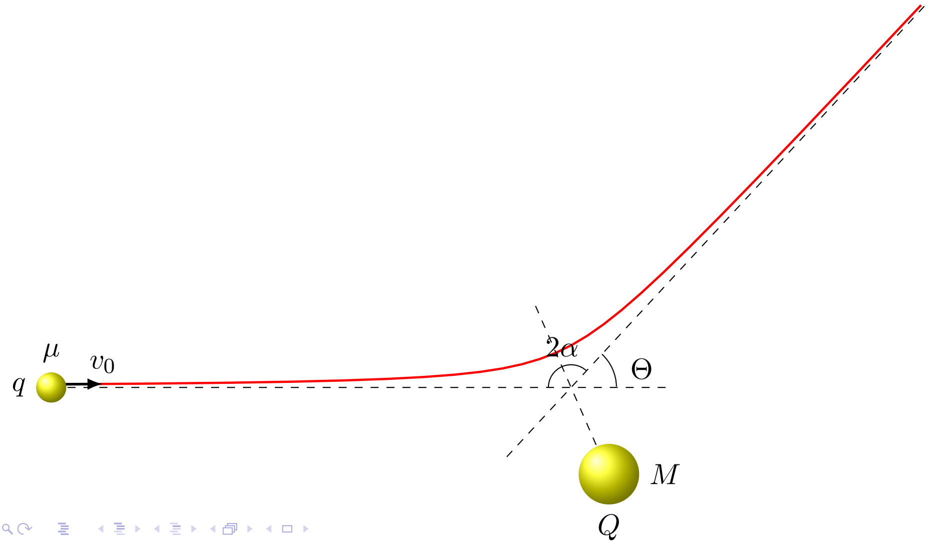
سطح مقطع پراکندگی

مسئله–۳:



سطح مقطع پراکندگی

مسئله–۳:



سطح مقطع پراکندگی

مسئله–۳:

$$\text{معادله مسیر حرکت}: \quad \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2\mu E}{l^2+\mu k}}\cos\beta\theta, \qquad \beta = \sqrt{1+\frac{\mu k}{l^2}}$$

- برای $r=\infty$، $\alpha=\theta$
- برای $r=\infty$ داریم

$$\cos\beta\theta = 0 \Rightarrow \beta\theta = \beta\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{\beta}$$

- رابطه بین زاویه پراکندگی 2α و زاویه بین دو مجانب Θ عبارت است از

$$\Theta = \pi - 2\alpha$$

$$\Theta = \pi - \frac{\pi}{\beta} \Rightarrow \frac{\pi}{\beta} = \pi - \Theta \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{\pi-\Theta} \Rightarrow \beta^2 = \left(\frac{\pi}{\pi-\Theta}\right)^2$$

$$1+\frac{\mu k}{l^2} = \left(\frac{\pi}{\pi-\Theta}\right)^2 \Rightarrow l^2 = \mu k\frac{(\pi-\Theta)^2}{\Theta(2\pi-\Theta)} \Rightarrow b^2 = \frac{k}{\mu v_0^2}\frac{(\pi-\Theta)^2}{(2\pi\Theta-\Theta^2)}$$

سطح مقطع پراکندگی

مسئله–۳:

$$b^2 = \frac{k}{\mu v_0^2}\frac{(\pi-\Theta)^2}{(2\pi\Theta-\Theta^2)}$$

سطح مقطع پراکندگی

$$\sigma = \pi b^2 = \frac{\pi k}{\mu v_0^2}\frac{(\pi-\Theta)^2}{(2\pi\Theta-\Theta^2)}$$

دیفرانسیل سطح مقطع پراکندگی

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{2\pi^3 k}{m v_0^2}\frac{\pi-\Theta}{\Theta^2(2\pi-\Theta)^2}\mathrm{d}\Theta$$

مدار دایره‌ای پریشیده یا مدار تقریبا دایره‌ای

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = V_{\mathrm{eff}}(r_0) + \left(\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0}(r-r_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r-r_0)^2 + \cdots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} = 0$$

$$V_{\mathrm{eff}}(r) \simeq V_{\mathrm{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r-r_0)^2$$

$$E = V_{\mathrm{eff}}(r_0) + \boxed{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r-r_0)^2}$$

قسمت داخل جعبه برای حالتی است که مدار دایره‌ی پریشیده داشته باشیم.

مدار دایره‌ای پریشیده یا مدار تقریبا دایره‌ای

$$E = V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r-r_0)^2$$

فرکانس نوسانات شعاعی برای چنین مدارهایی بصورت زیر داده می‌شود،

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{\mu}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}}$$

نقطه تعادل : $\left(\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} = -\frac{l^2}{\mu r_0^3} + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right)_{r_0} = -\frac{l^2}{\mu r_0^3} - F(r_0) = 0$

$$l^2 = -\mu r_0^3 F(r_0)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0} = \frac{3l^2}{\mu r_0^4} + F'(r_0) = -\frac{3F(r_0)}{r_0} - F'(r_0)$$

$$E = V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r - r_0)^2$$

فرکانس نوسانات شعاعی برای چنین مدارهایی بصورت زیر داده می‌شود

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{\mu}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}}$$

$$l^2 = -\mu r_0^3 F(r_0)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0} = \frac{3l^2}{\mu r_0^4} + F'(r_0) = -\frac{3F(r_0)}{r_0} - F'(r_0)$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{\mu}\left(-\frac{3F(r_0)}{r_0} - F'(r_0)\right)}$$

مدار دایره‌ای پریشیده یا مدار تقریبا دایره‌ای

$$E = V_{\rm eff}(r_0) + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V_{\rm eff}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r-r_0)^2$$

فرکانس نوسانات شعاعی برای چنین مدارهایی بصورت زیر داده می‌شود

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{\mu}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V_{\rm eff}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}} = \sqrt{\frac{1}{\mu}\left(-\frac{3F(r_0)}{r_0} - F'(r_0)\right)}$$

$$l^2 = -\mu r_0^3 F(r_0)$$

فرکانس نوسانات زاویه‌ای بصورت زیر داده می‌شود

$$\dot{\theta} = \omega_\theta = \frac{l}{\mu r_0^2} = \sqrt{-\frac{F(r_0)}{\mu r_0}}$$

مدار دایره‌ای پریشیده یا مدار تقریبا دایره‌ای

$$E = V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\right)_{r_0}(r - r_0)^2$$

فرکانس نوسانات شعاعی برای چنین مدارهایی بصورت زیر داده می‌شود

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{\mu}\left(-\frac{3F(r_0)}{r_0} - F'(r_0)\right)}, \quad -\frac{3F(r_0)}{r_0} - F'(r_0) > 0$$

فرکانس نوسانات زاویه‌ای بصورت زیر داده می‌شود

$$\dot{\theta} = \omega_\theta = \frac{l}{\mu r_0^2} = \sqrt{-\frac{F(r_0)}{\mu r_0}}, \quad -F(r_0) > 0$$

وقتی r از r_{min} به r_{max} می رود، زاویه‌ای را جاروب می کند که **زاویه‌ی اوج** نامیده می‌شود و برابر است با

$$\psi = \omega_\theta\left(\frac{1}{2}T_r\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3 + [F'(r_0)/F(r_0)]r_0}}$$

مدار دایره‌ای پریشیده یا مدار تقریبا دایره‌ای

برای نیروی $F(r) = kr^n$، شرط نوسانات پریشیده شعاعی مدار دایره‌ای بصورت

$$-\frac{3F(r_0)}{r_0} - F'(r_0) > 0 \Rightarrow -nkr_0^{n-1} - \frac{3}{r_0}kr_0^n > 0$$

داده می‌شود که در این شرایط n باید بصورت

$$n > -3$$

برقرار باشد و زاویه‌ی اوج برابر است با

$$\psi = \omega_\theta \left(\frac{1}{2}T_r\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3 + [F'(r_0)/F(r_0)]r_0}} = \frac{\pi}{\sqrt{3+n}}$$

نکته: برای هر مدار بسته که خود را تکرار می کند، باید مخرج کسر یک عدد درست باشد. بدین ترتیب با اعمال شرط $n > -3$ در اینصورت مقادیر n برای یک مسیر بسته برابر با

$$-2, 1, 6, 13, \cdots$$

خواهد بود که $n = -2$ نیروی کولنی و $n = 1$ نیروی فنری است.