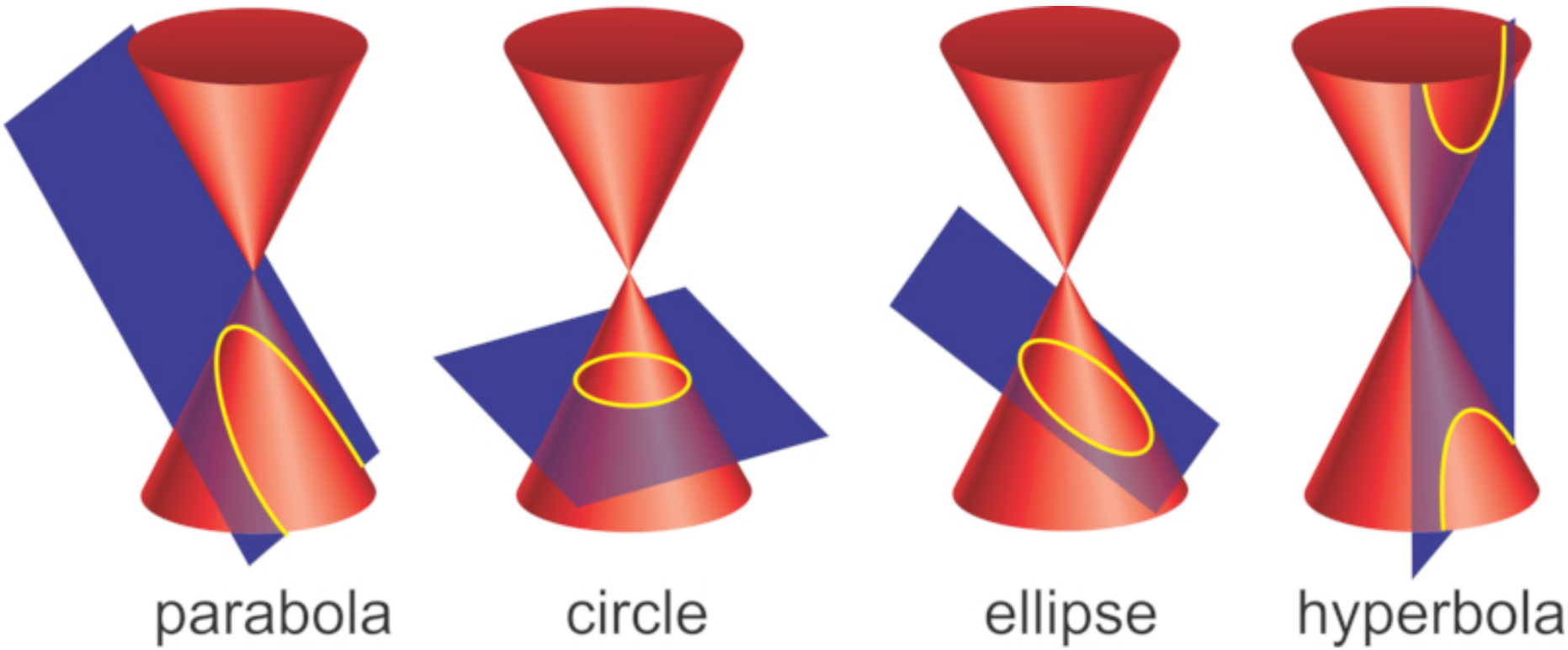
مکانیک تحلیلی
مقاطع مخروطی در مختصات قطبی

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

مقاطع مخروطی



دایره

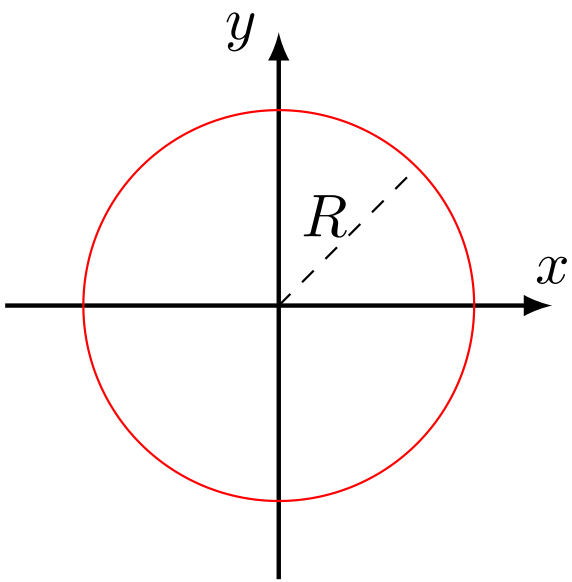
دستگاه مختصات دکارتی

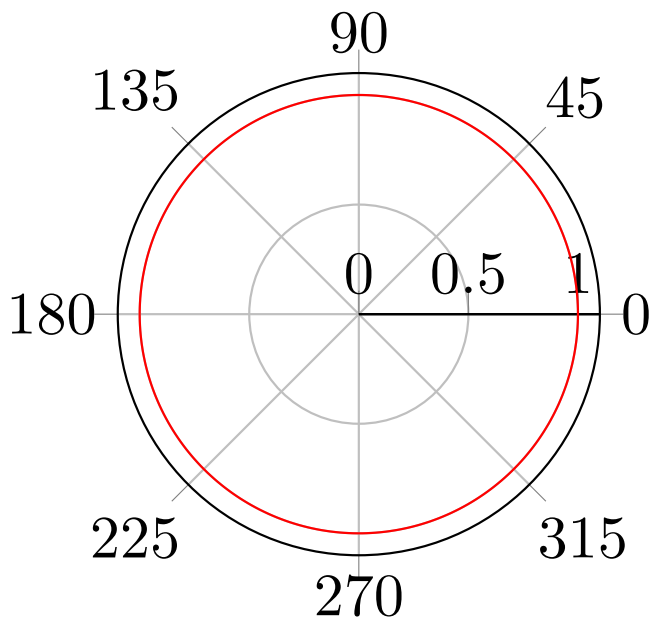
$$\text{دکارتی}: \quad x^2 + y^2 = R^2$$

در مختصات قطبی

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = R^2 \Rightarrow r = R$$

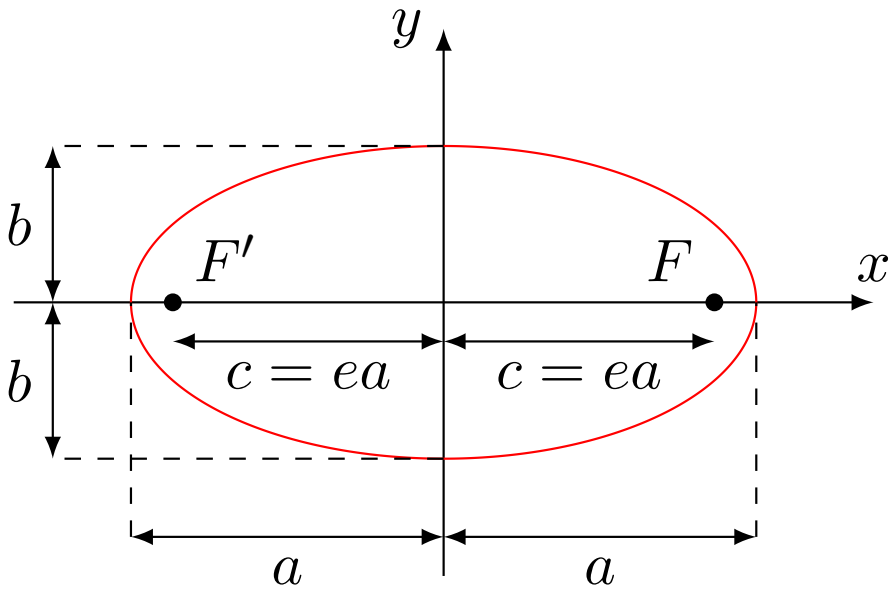
$$\text{قطبی}: \quad r(\theta) = R = \text{ثابت}$$





بیضی

دستگاه مختصات دکارتی

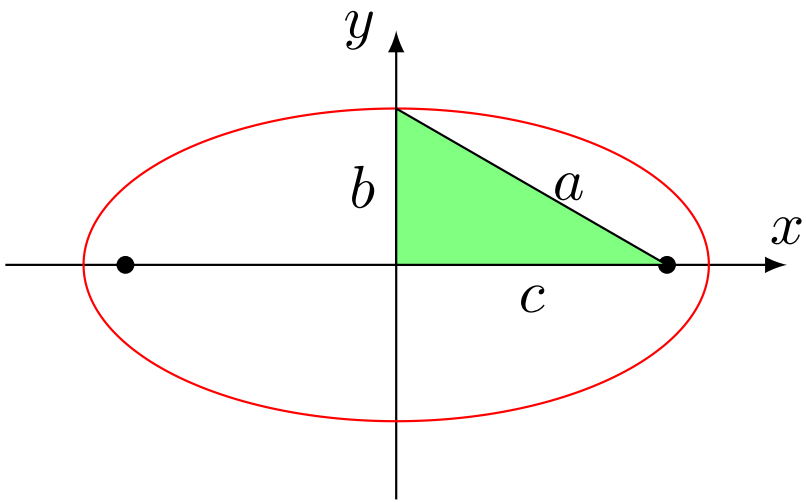


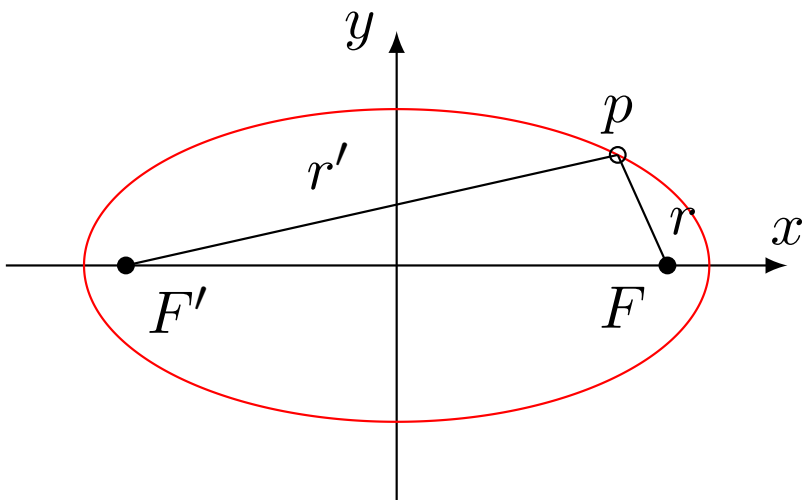
دکارتی : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

خروج از مرکز : $e = \frac{c}{a}, \quad 0 < e < 1$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2(1 - e^2)$$

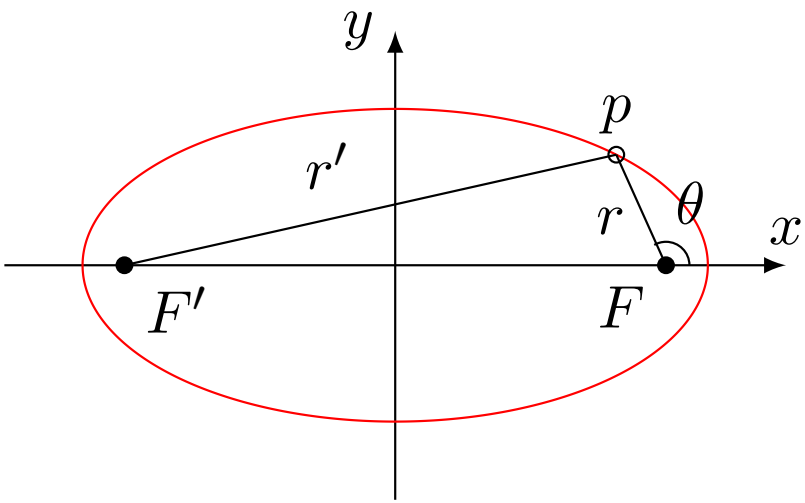
$$r + r' = 2a$$





بیضی

مختصات قطبی



$$r + r' = 2a \Rightarrow r' = -r + 2a$$

به توان ۲ رساندن : $r'^2 = r^2 - 4ar + 4a^2$

قانون کوسینوسها در مثلث FPF'

$$r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 - 4aer\cos(\pi - \theta)$$

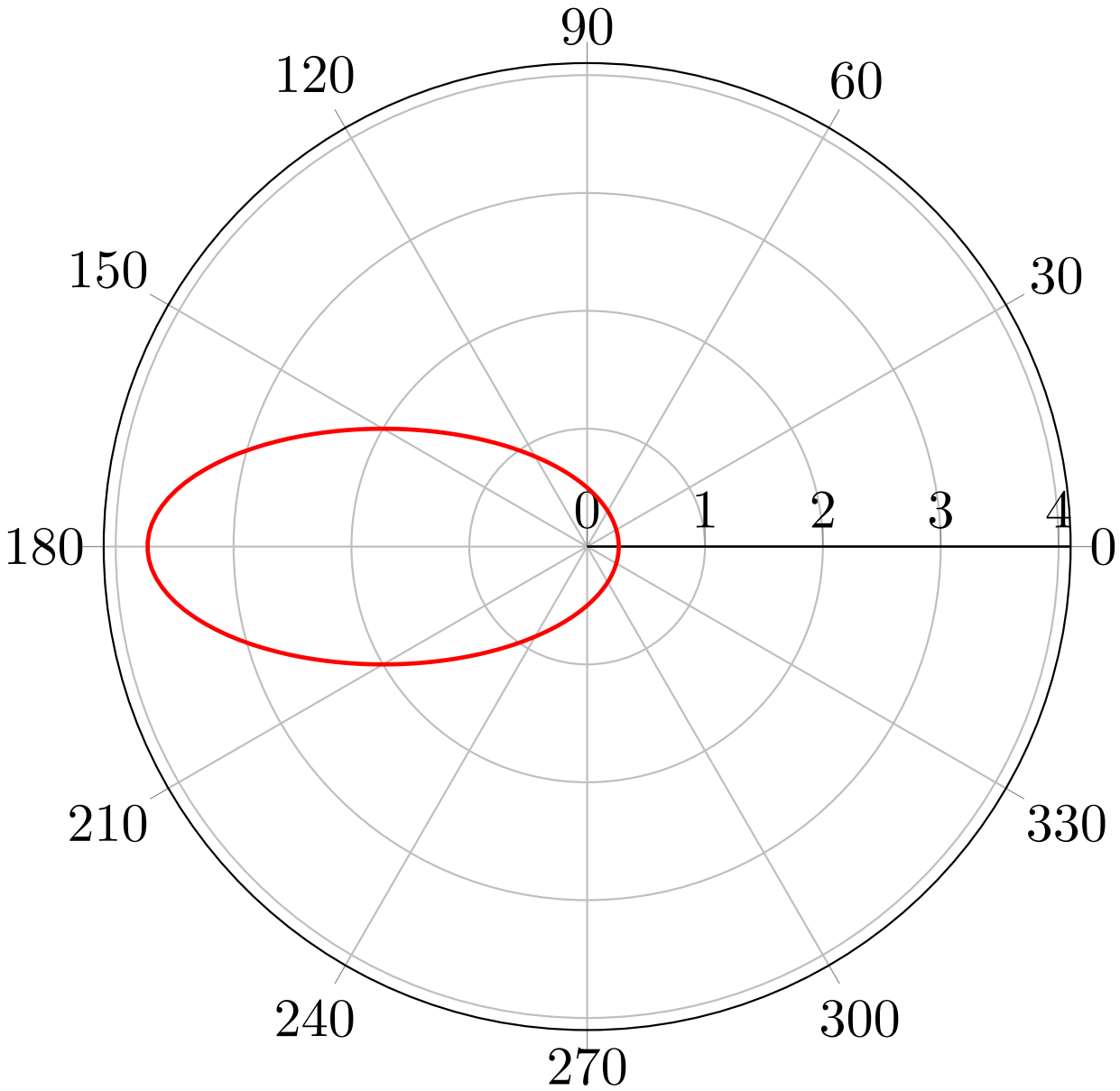
$$\begin{cases} r'^2 = r^2 - 4ar + 4a^2 \\ r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4aer\cos\theta \end{cases}$$

$$r^2 + 4a^2e^2 + 4aer\cos\theta = r^2 - 4ar + 4a^2$$

$$4ar(1 + e\cos\theta) = 4a^2(1 - e^2)$$

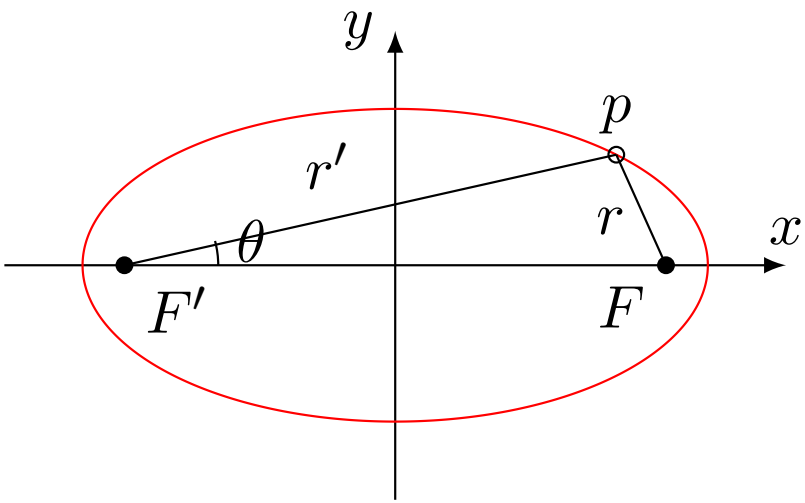
معادله بیضی نسبت به کانون F : $r = \dfrac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)}$

بیضی



بیضی

مختصات قطبی



$$r + r' = 2a \Rightarrow r = -r' + 2a$$

به توان ۲ رساندن : $r^2 = r'^2 - 4ar + 4a^2$

قانون کوسینوسها در مثلث FPF'

$$r^2 = r'^2 + 4a^2e^2 - 4aer'\cos\theta$$

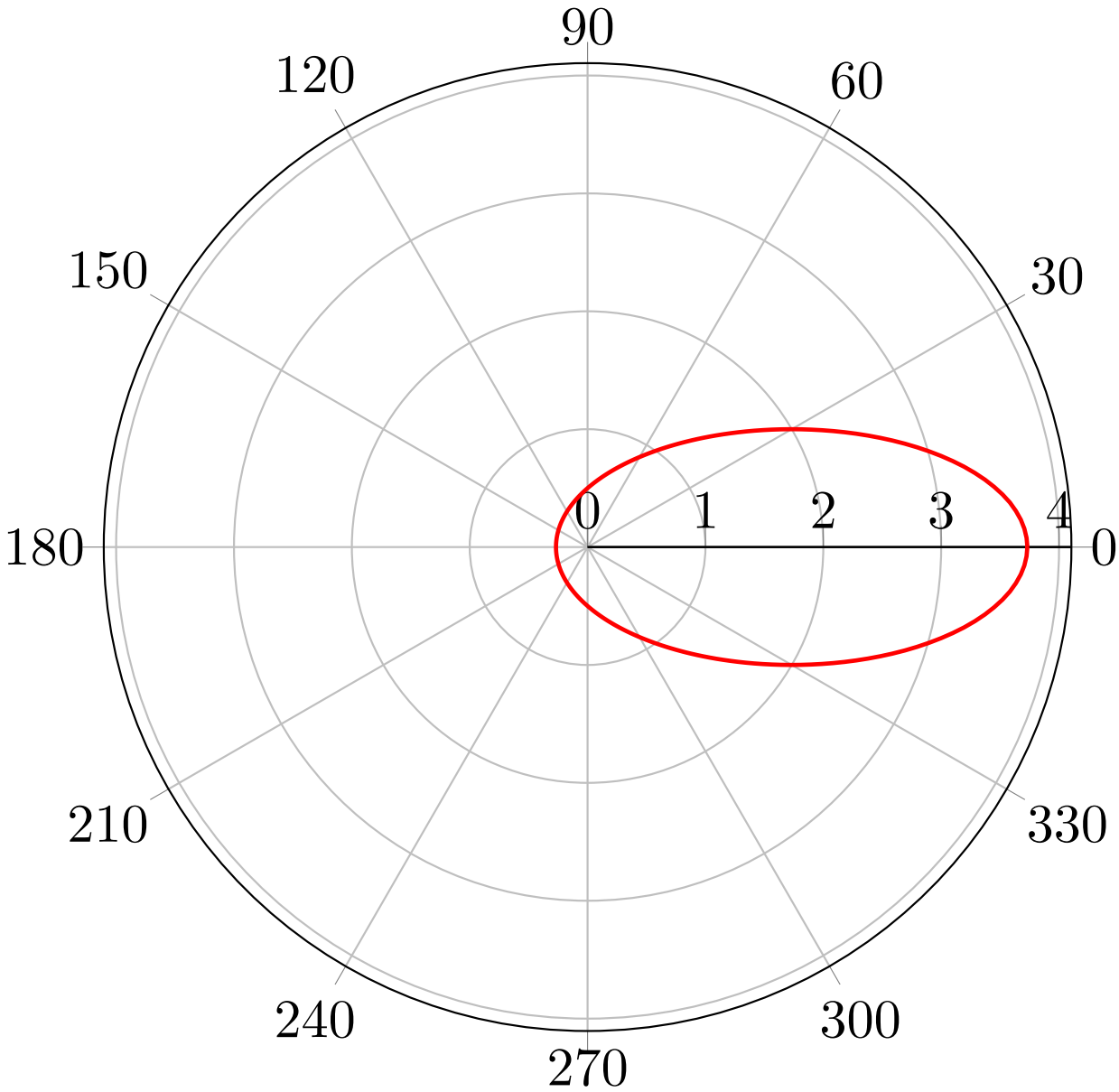
$$\begin{cases} r^2 = r'^2 - 4ar + 4a^2 \\ r^2 = r'^2 + 4a^2e^2 - 4aer'\cos\theta \end{cases}$$

$$r'^2 + 4a^2e^2 - 4aer'\cos\theta = r'^2 - 4ar' + 4a^2$$

$$4ar'(1 - e\cos\theta) = 4a^2(1 - e^2)$$

معادله بیضی نسبت به کانون F' : $r' = \dfrac{a(1-e^2)}{(1-e\cos\theta)}$

بیضی



بیضی

مختصات قطبی

$$\text{رابطه کلی}: \quad r = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos(\theta-\phi))}$$

که ϕ نحوی سمتگیری محور بزرگ بیضی را در صفحه نشان می‌دهد.

حالت خاص:

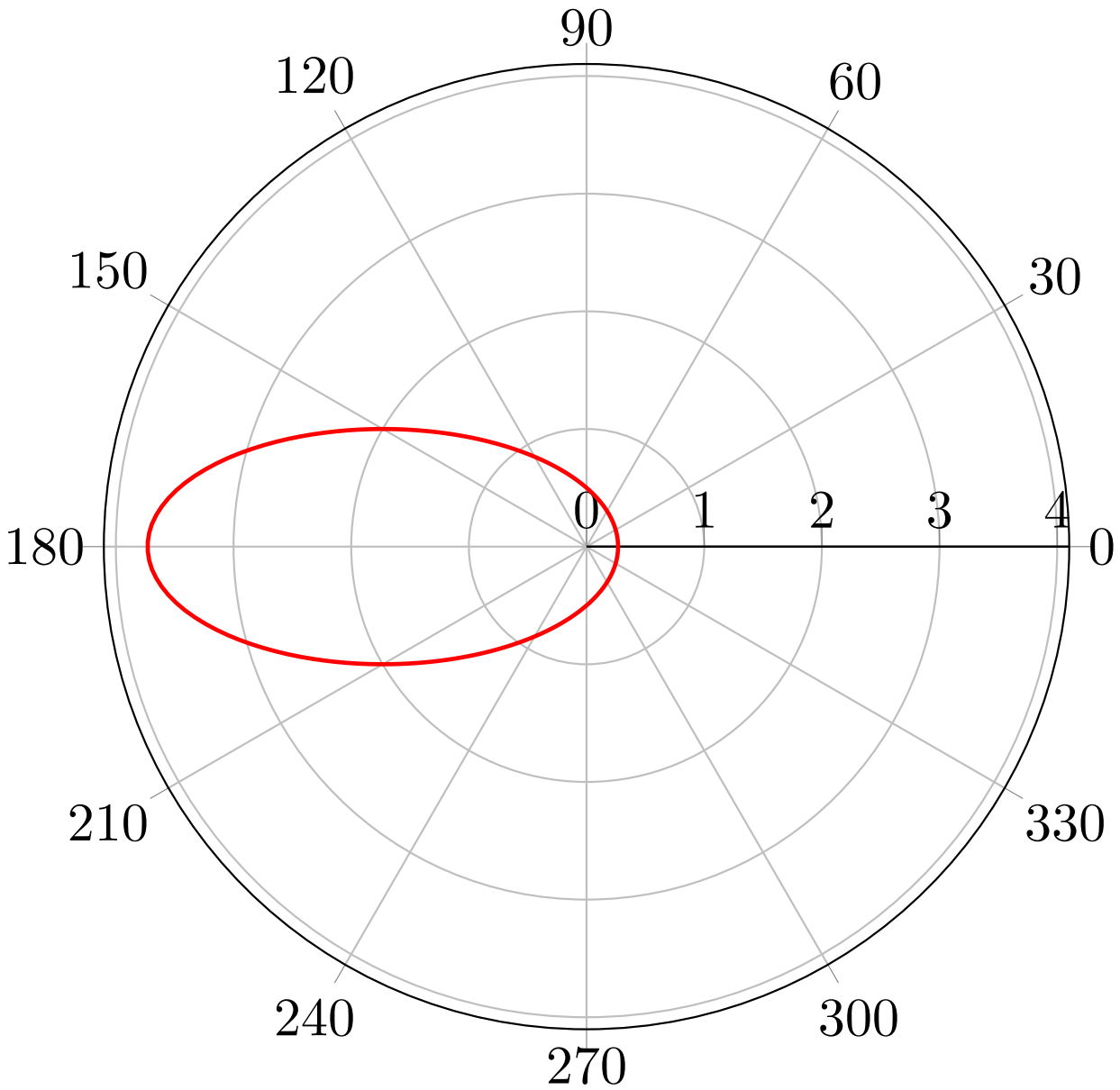
$$\phi = 0: \quad r = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)} : \text{ معادله بیضی نسبت به کانون } F$$

$$\phi = \pi: \quad r = \frac{a(1-e^2)}{(1-e\cos\theta)} : \text{ معادله بیضی نسبت به کانون } F'$$

بیضی

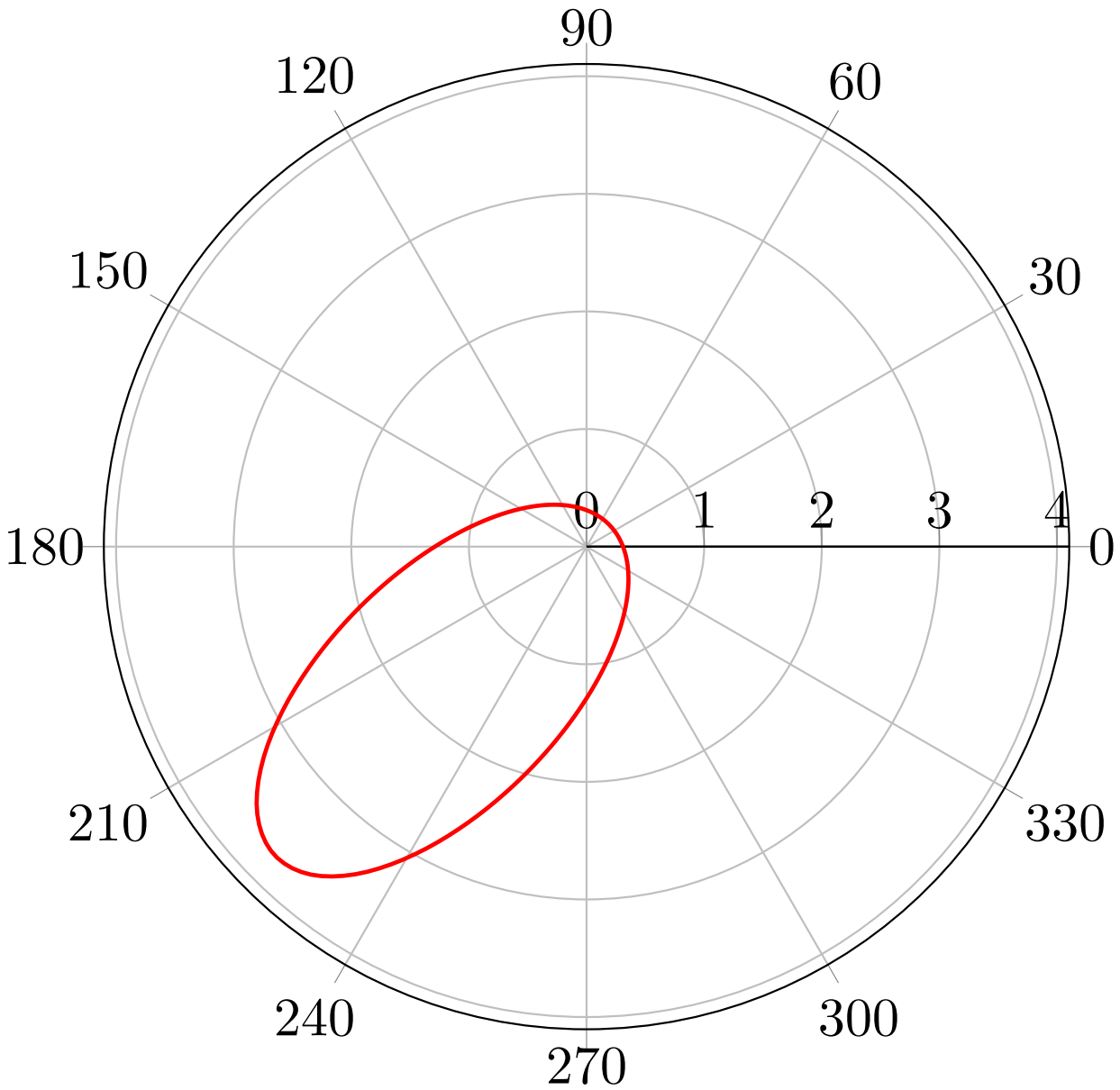
کانون F

$\phi = 0$



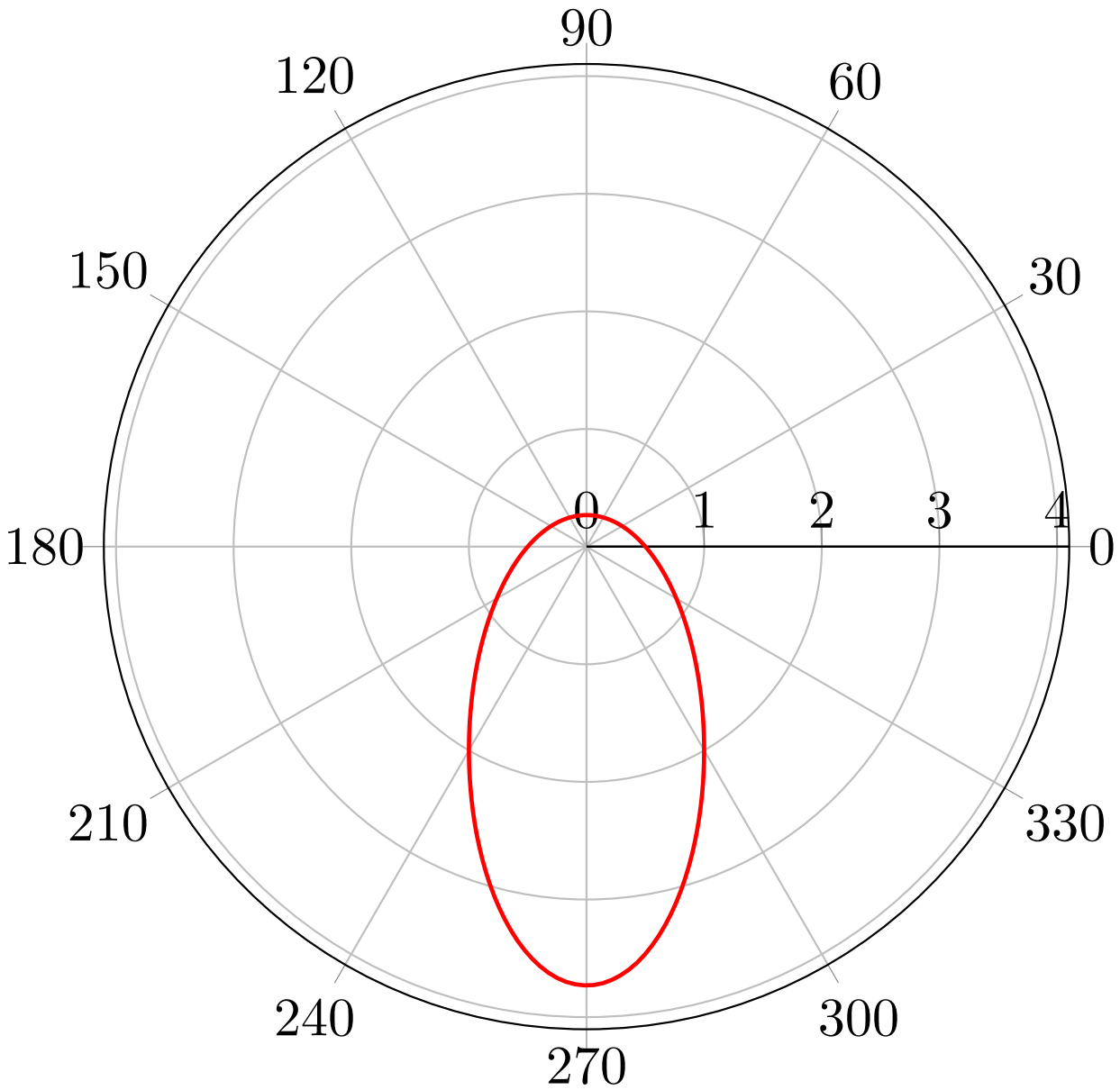
بیضی

$\phi = \pi/4$



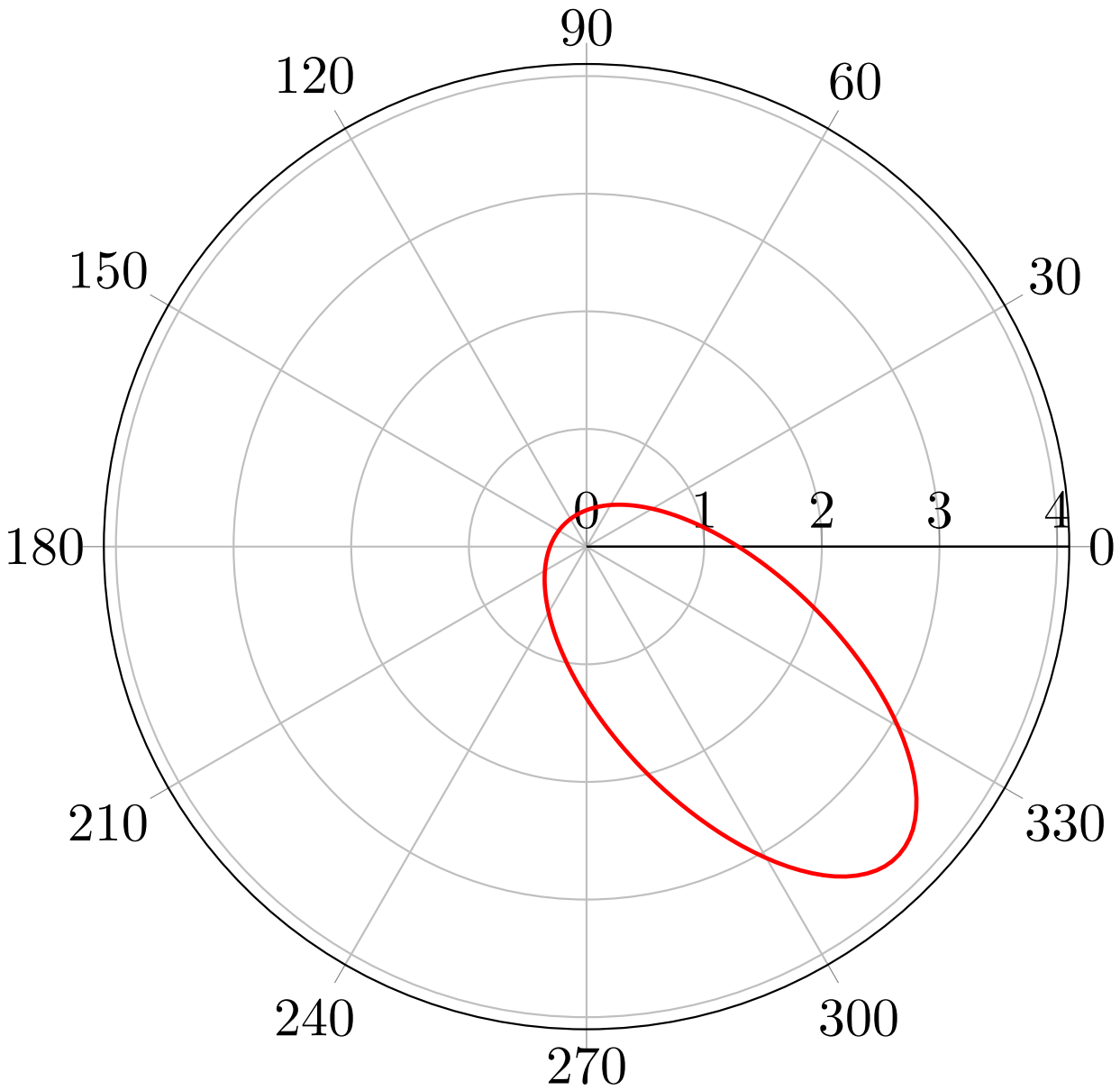
بیضی

$\phi = \pi/2$



بیضی

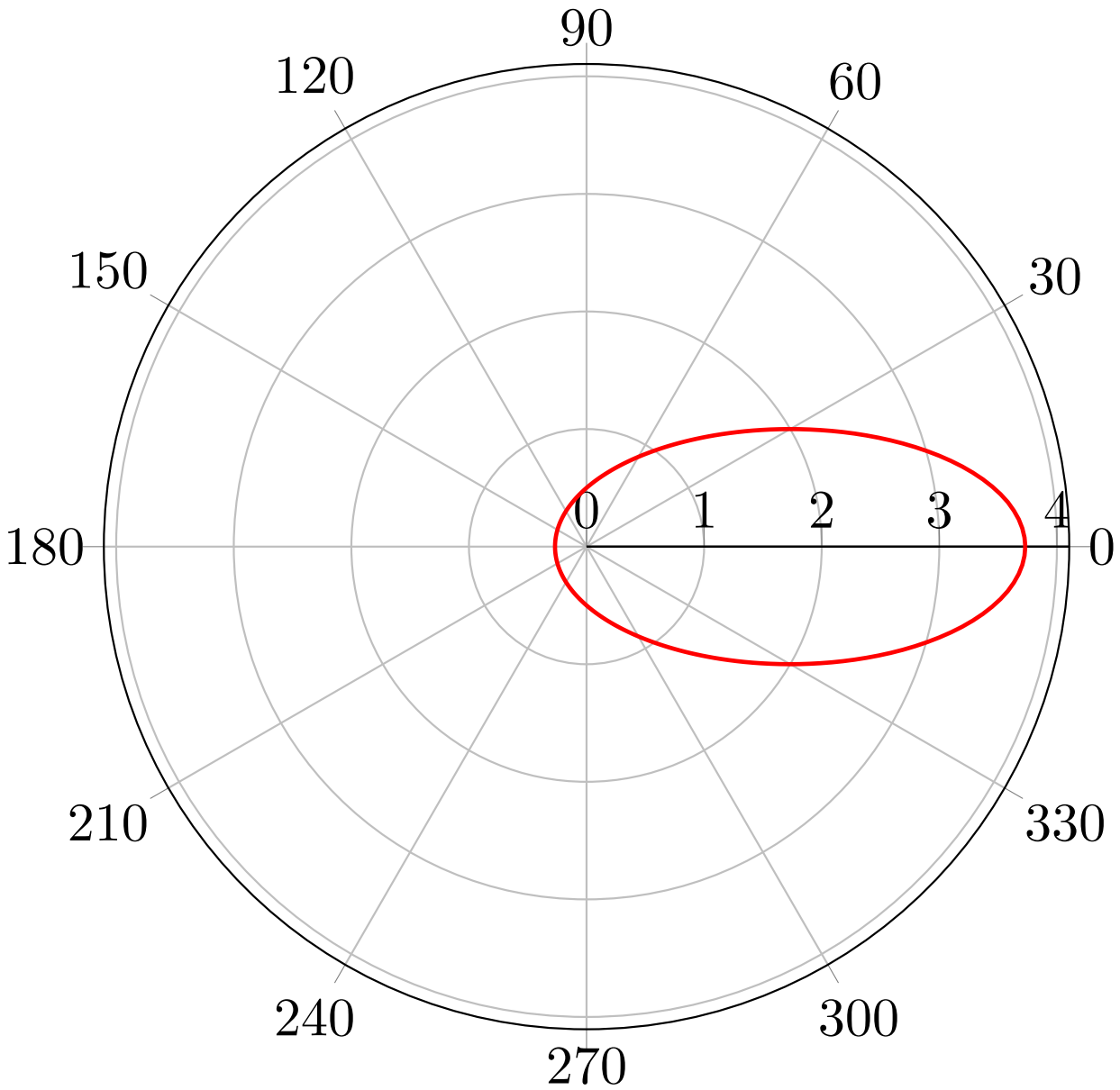
$\phi = 3\pi/4$



بیضی

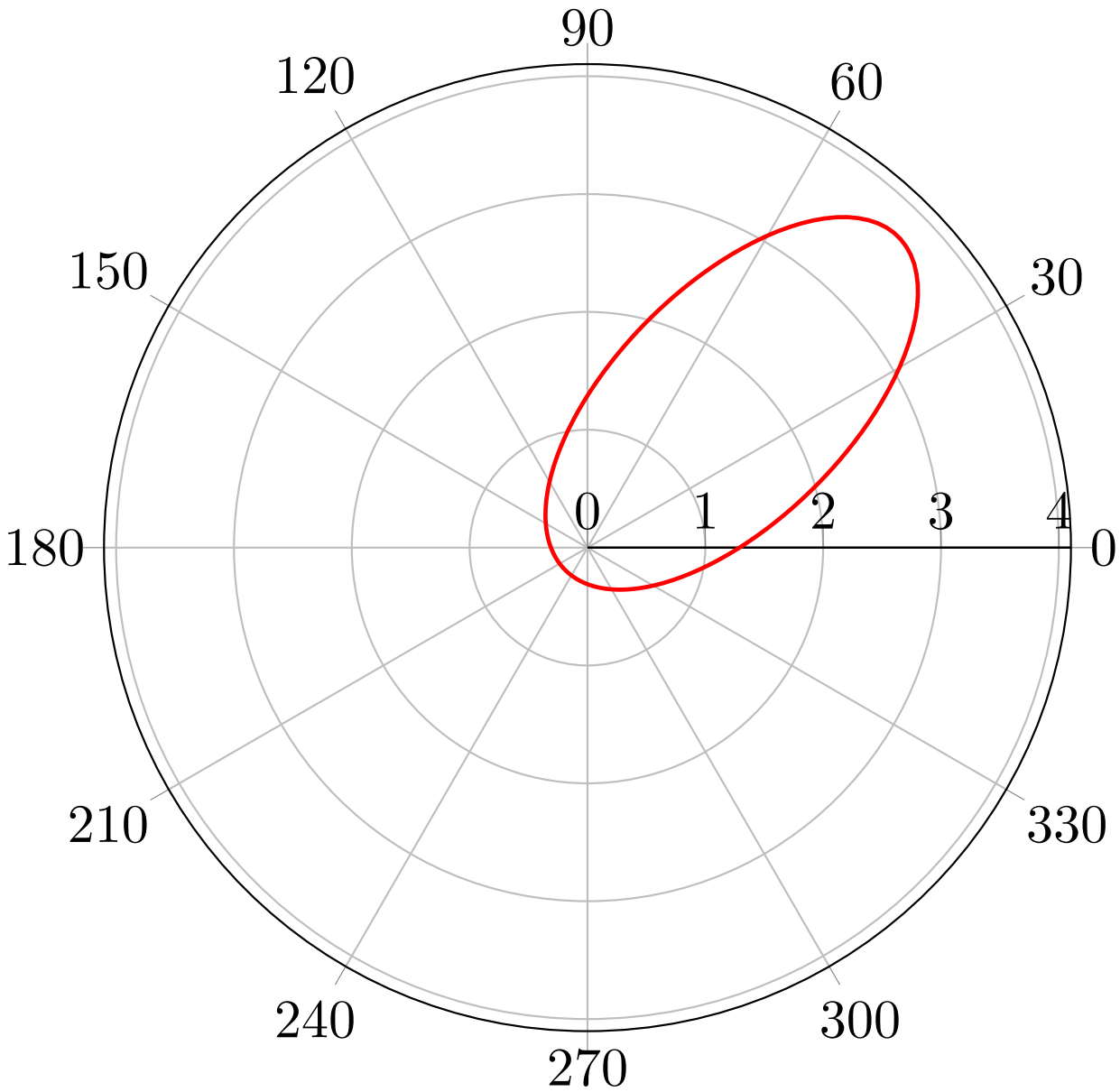
کانون F'

$\phi = \pi$



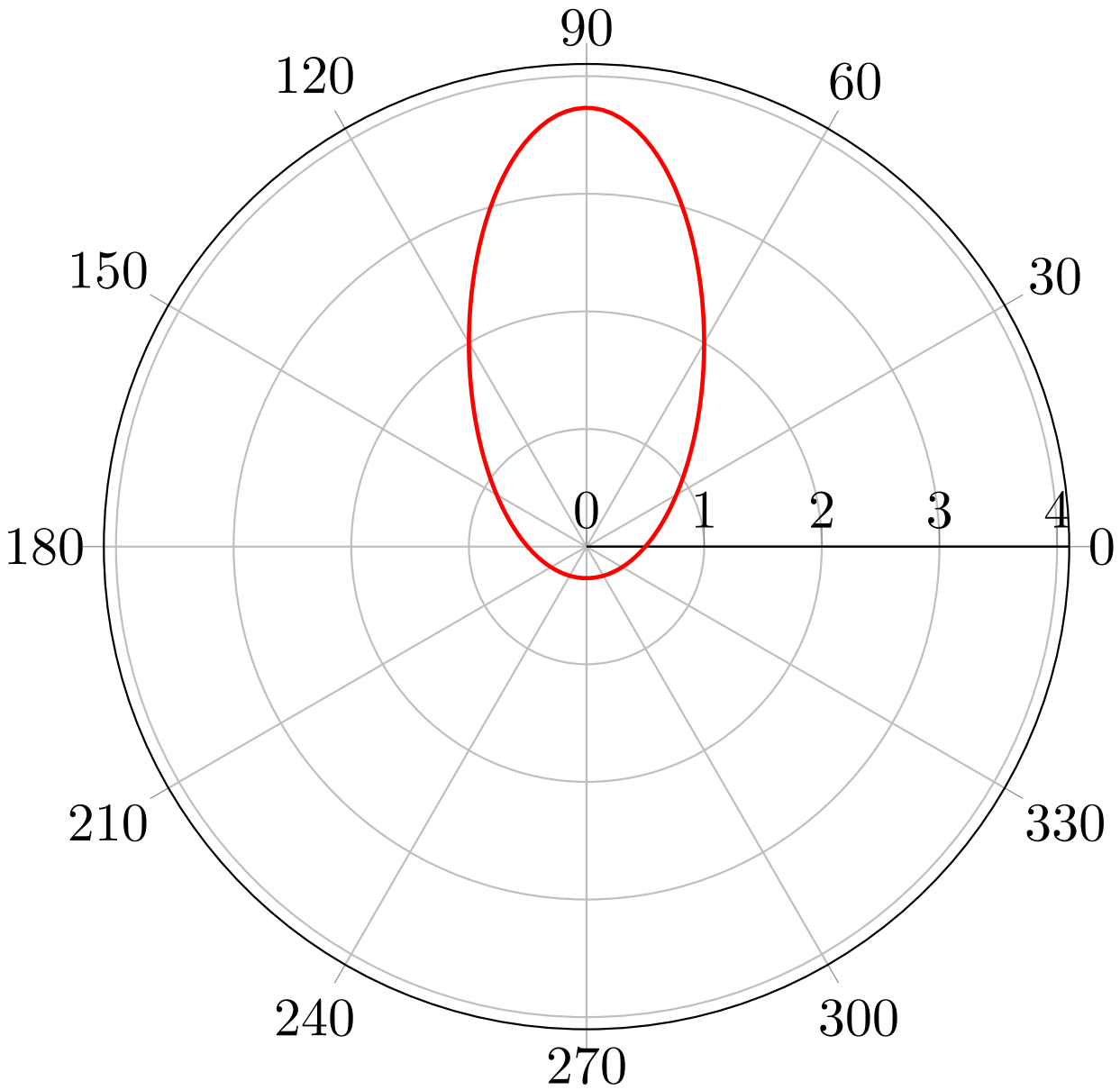
بیضی

$\phi = 5\pi/4$



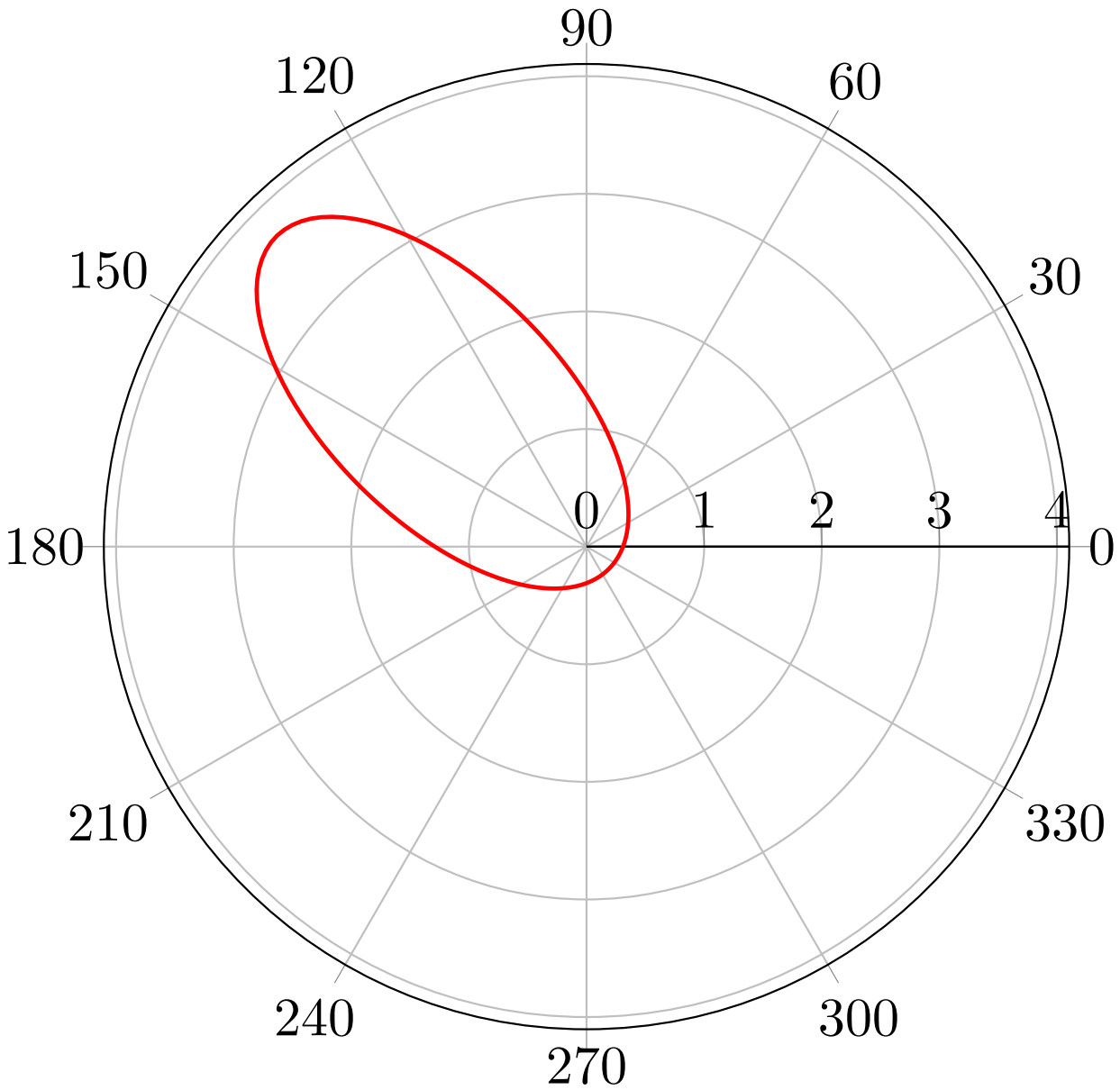
بیضی

$\phi = 3\pi/2$



بیضی

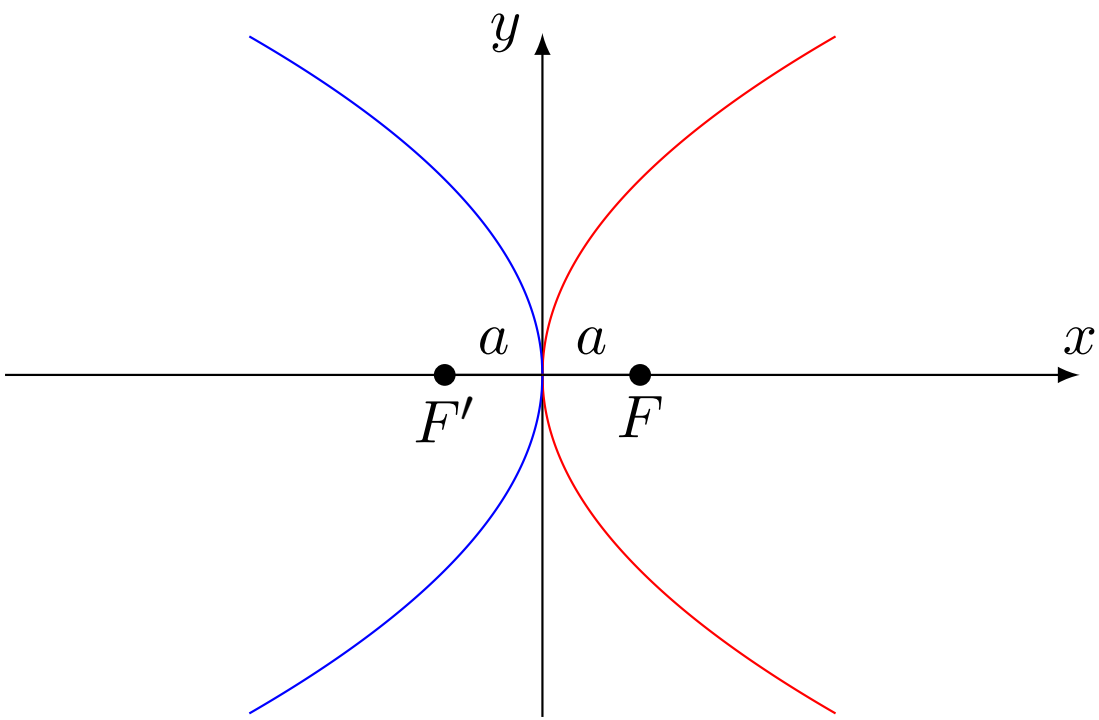
$\phi = 7\pi/4$



دستگاه مختصات دکارتی

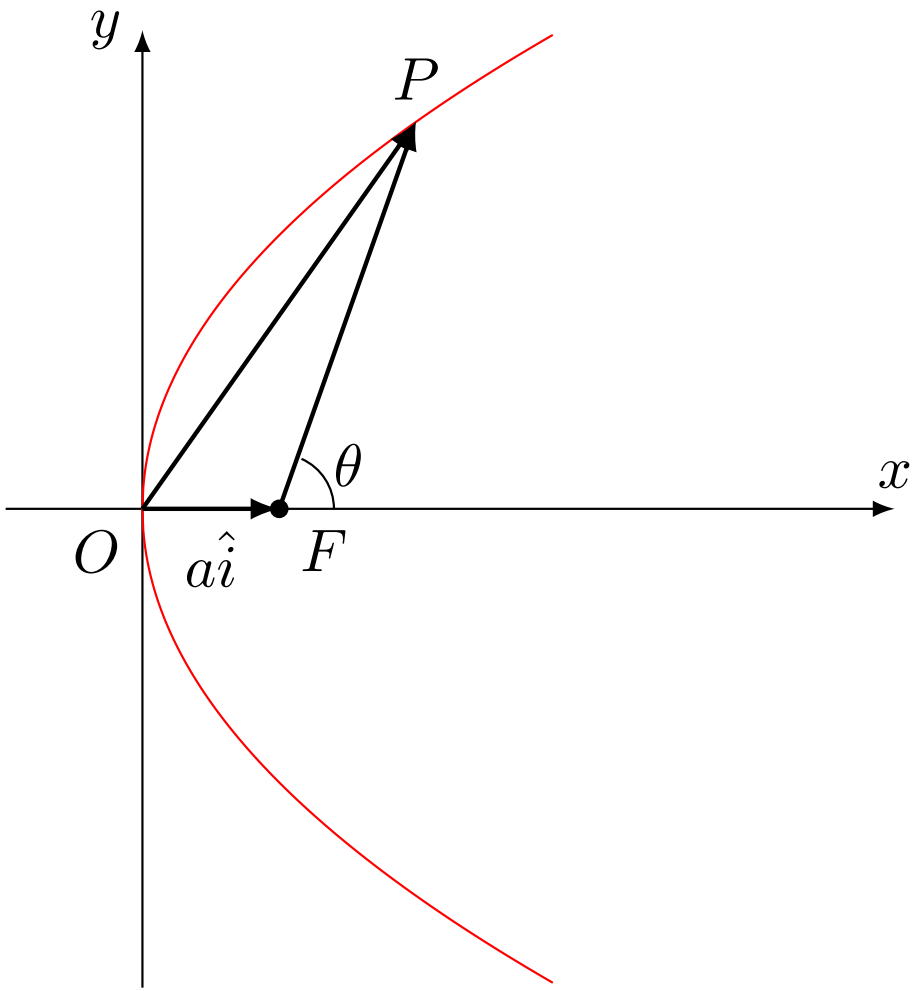
دکارتی : $y^2 = 4ax, \quad y^2 = -4ax$

خروج از مرکز : $e = \frac{c}{a} = 1$



سهمی

دستگاه مختصات دکارتی



دکارتی : $y^2 = 4ax$

$$OP = OF + FP$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} = a\hat{i} + FP$$

$$FP = (x-a)\hat{i} + y\hat{j}$$

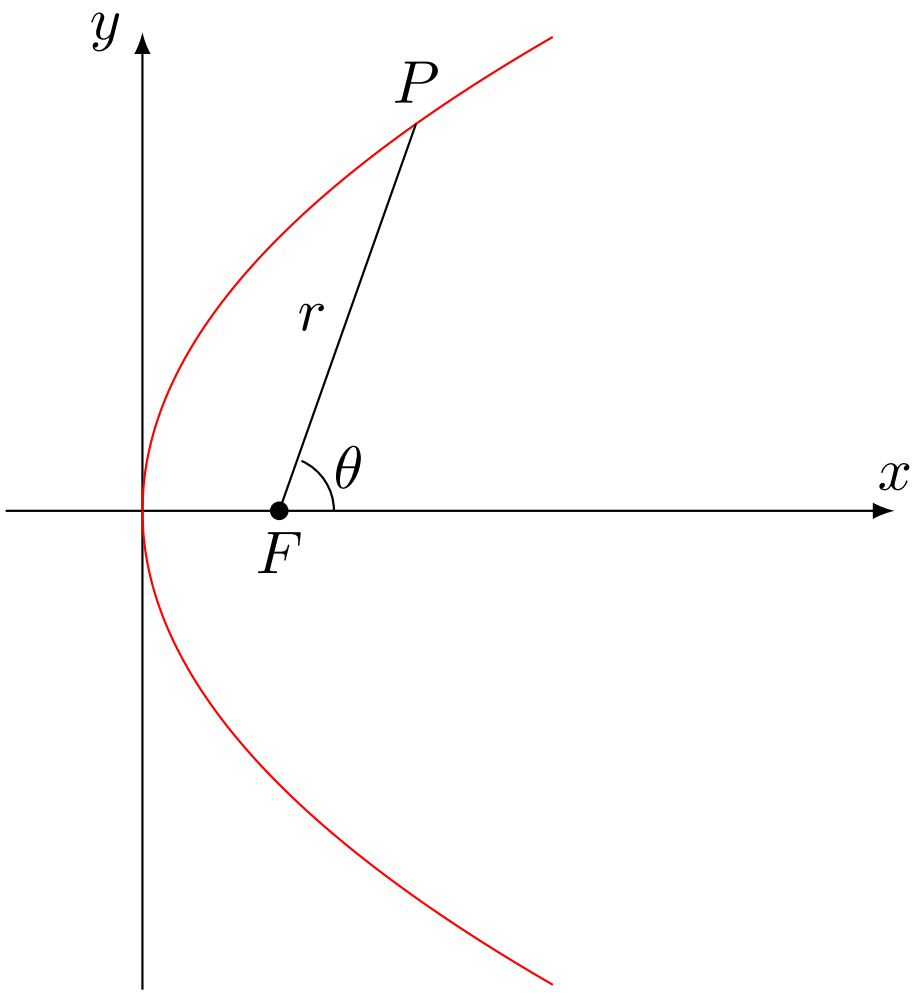
$$FP = r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j}$$

$$\begin{cases} r\cos\theta = x - a \\ r\sin\theta = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

سهمی

دستگاه مختصات دکارتی



دکارتی : $y^2 = 4ax$

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

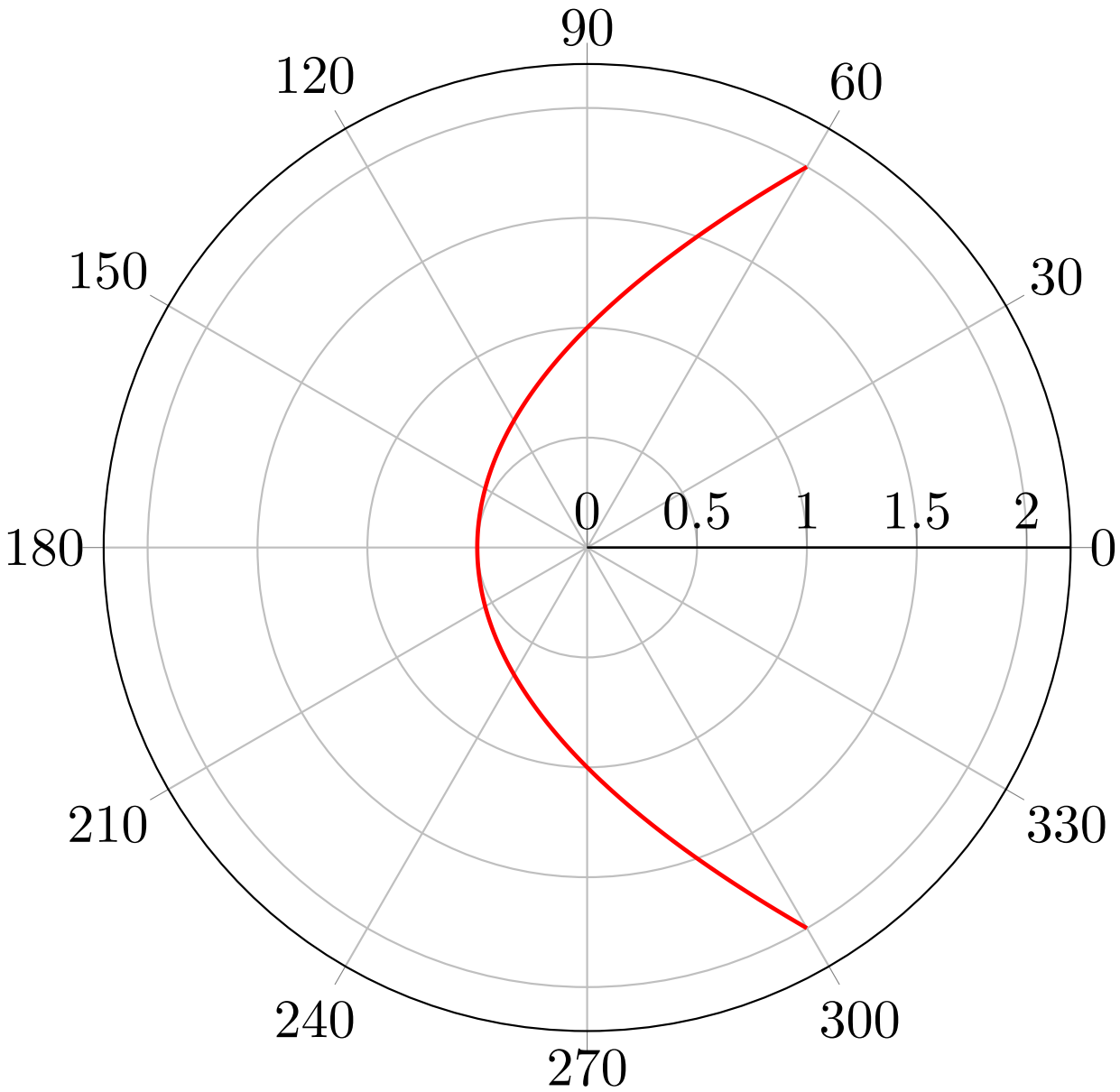
$$r^2\sin^2\theta = 4a(a + r\cos\theta)$$

$$(\sin^2\theta)r^2 - 2(2a\cos\theta)r - 4a^2 = 0$$

از میان دو جواب معادله درجه دوم بالا، جواب $r > 0$ قابل قبول است، بنابراین

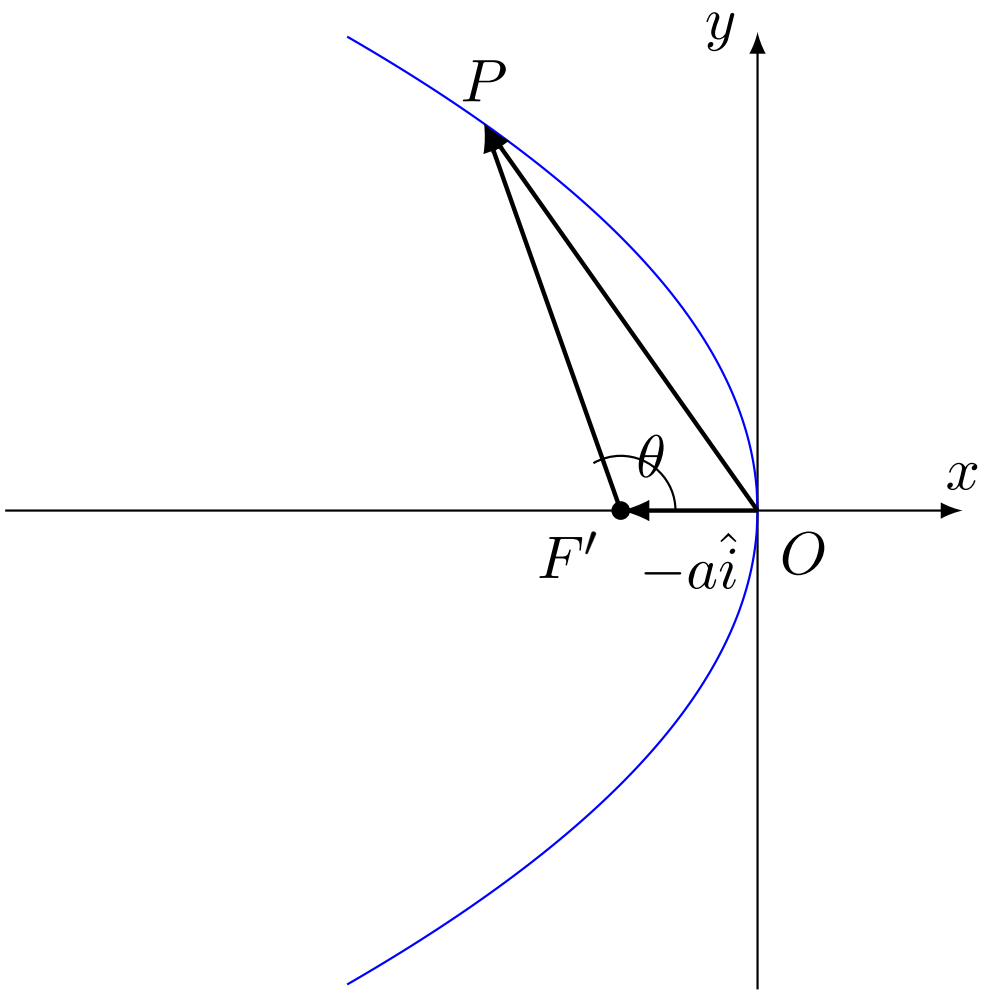
$$r = \frac{2a}{1 - \cos\theta} \qquad \theta \neq 0, 2\pi$$

سهمی



سهمی

دستگاه مختصات دکارتی



دکارتی : $y^2 = -4ax$

$$OP = OF' + F'P$$

$$x\hat{i} + y\hat{j} = -a\hat{i} + F'P$$

$$F'P = (x+a)\hat{i} + y\hat{j}$$

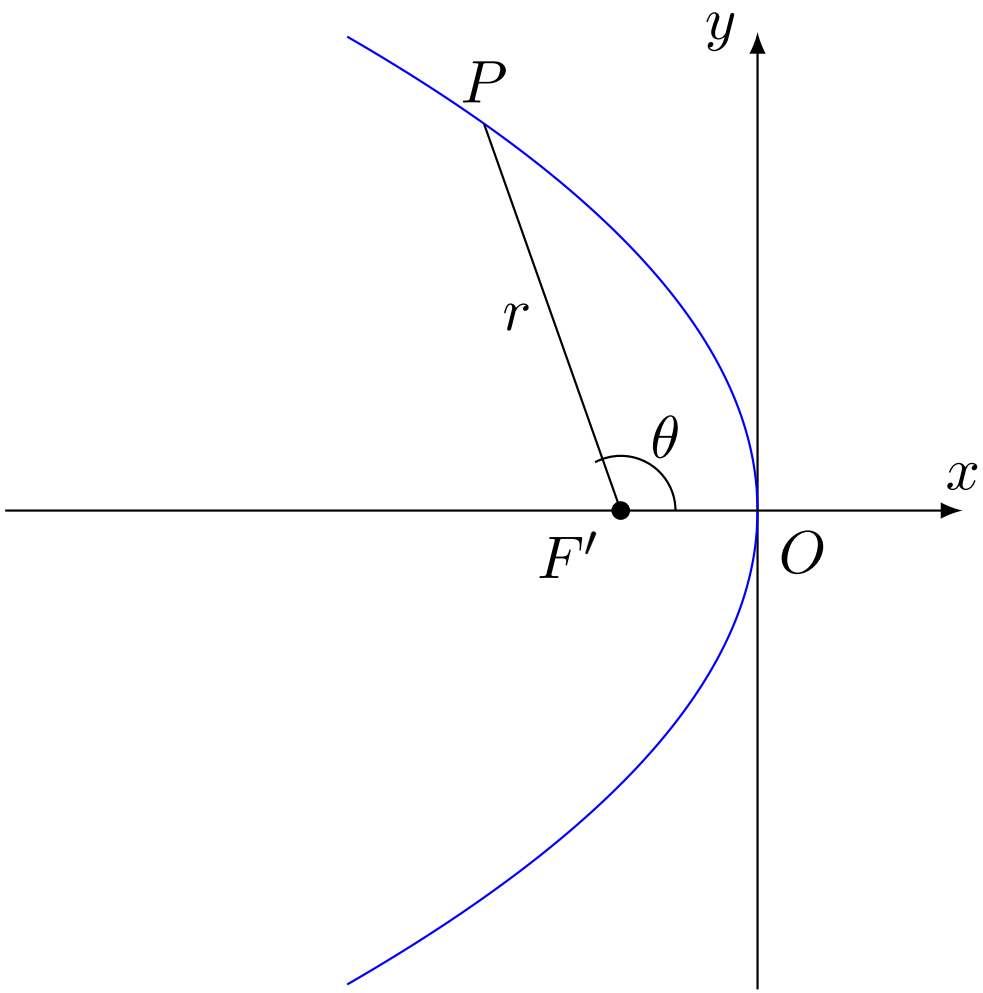
$$F'P = r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j}$$

$$\begin{cases} r\cos\theta = x + a \\ r\sin\theta = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -a + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

سهمی

دستگاه مختصات دکارتی



دکارتی : $y^2 = -4ax$

$$\begin{cases} x = -a + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

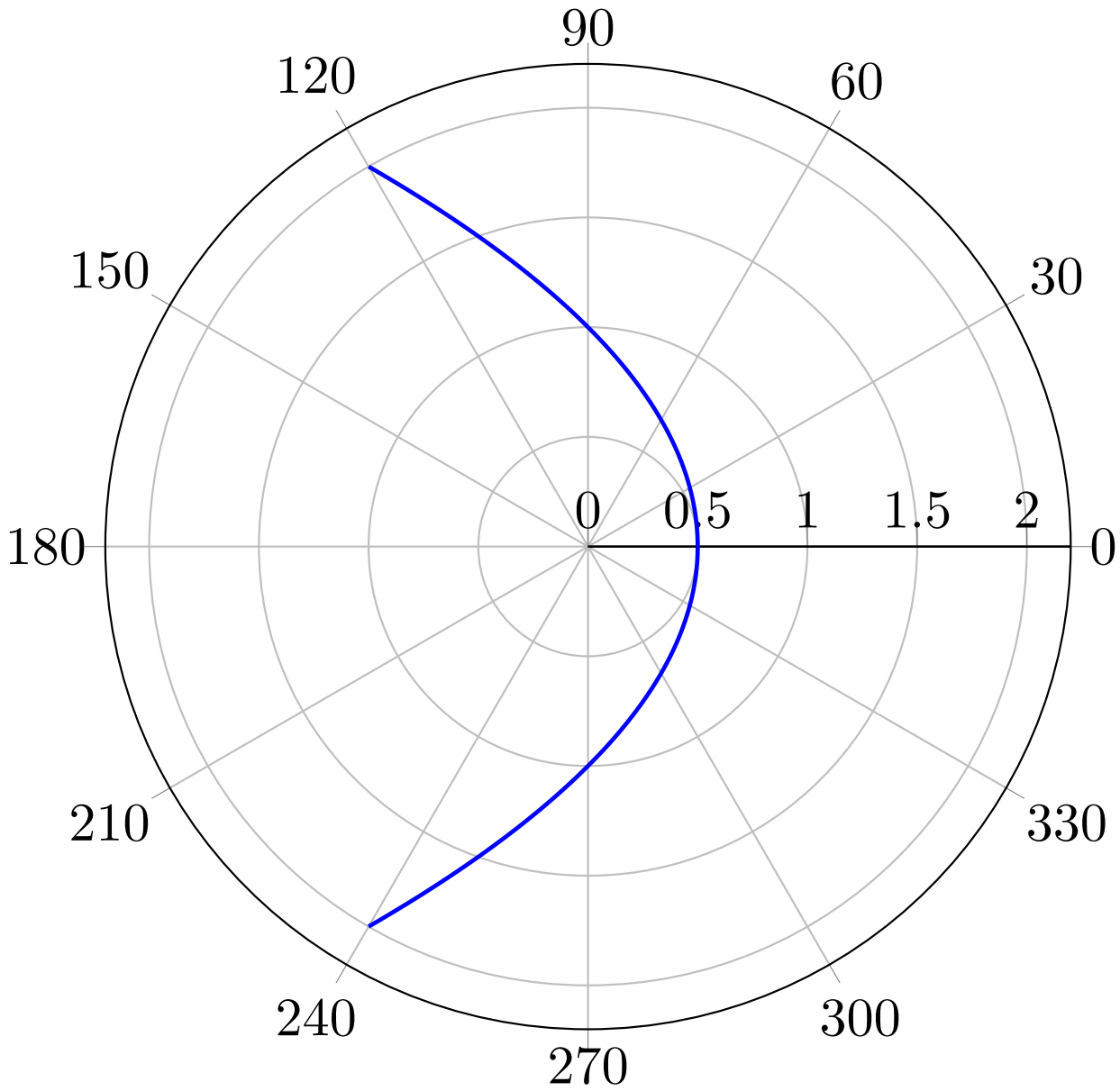
$$r^2\sin^2\theta = -4a(-a + r\cos\theta)$$

$$(\sin^2\theta)r^2 + 2(2a\cos\theta)r - 4a^2 = 0$$

از میان دو جواب معادله درجه دوم بالا، جواب $r > 0$ قابل قبول است، بنابراین

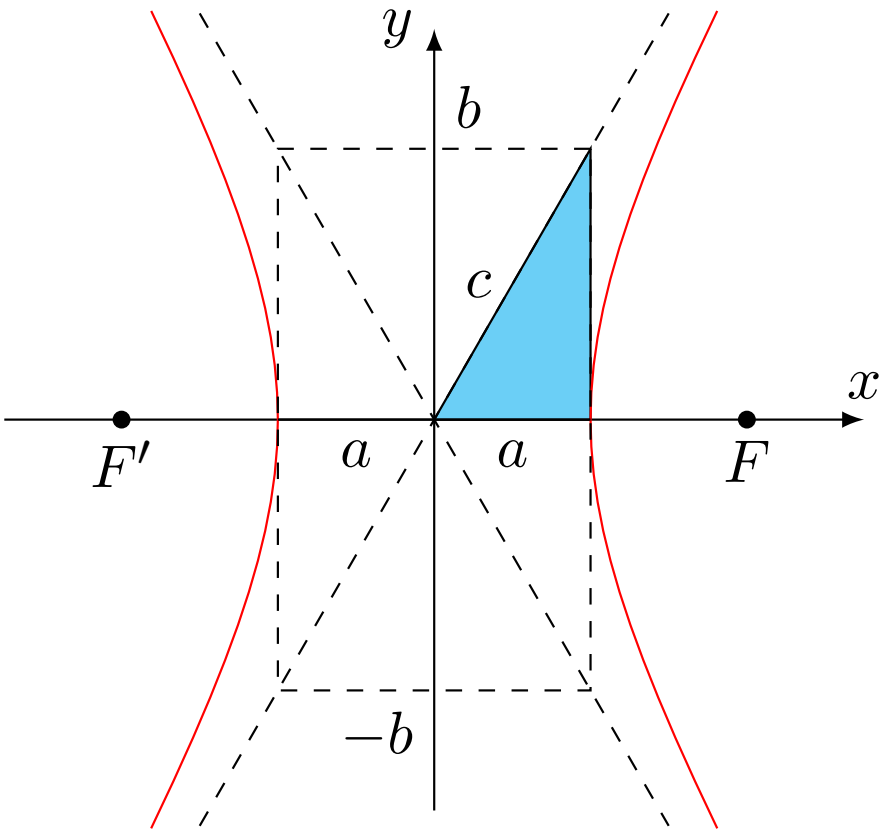
$$r = \frac{2a}{1+\cos\theta} \qquad \theta \neq \pi$$

سهمی



هذلولی

دستگاه مختصات دکارتی



دکارتی : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

خروج از مرکز : $e = \frac{c}{a}, \quad e > 1$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

معادله خط مجانب : $y = \pm\frac{b}{a}x$

زاویه مجانب $y = (b/a)x$ با مثبت محور x

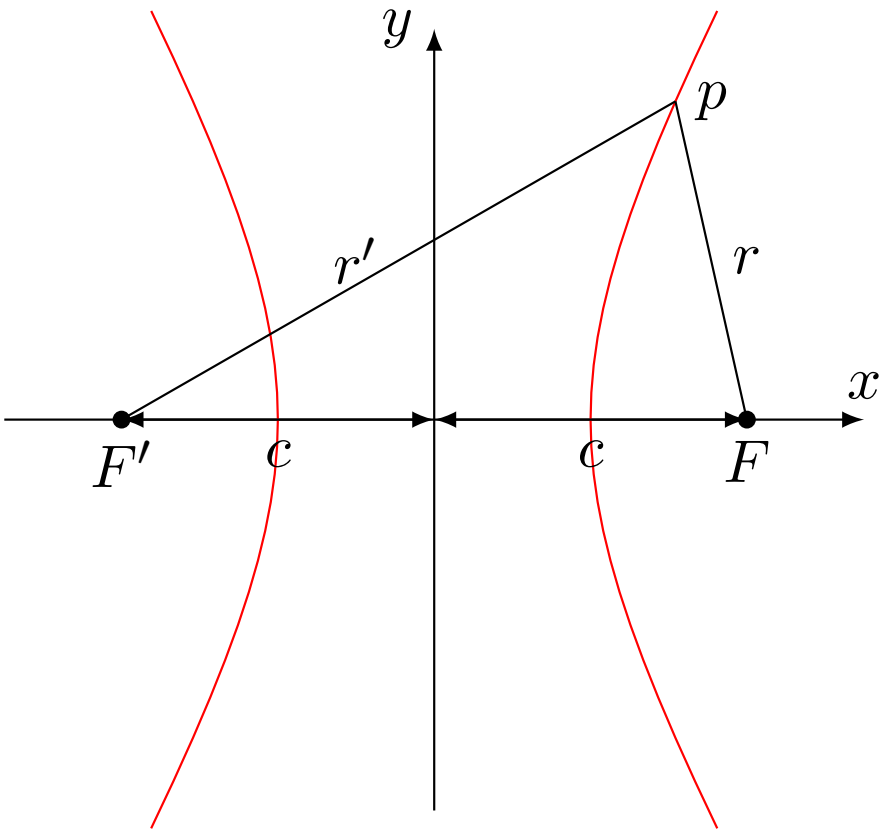
$$\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}$$

زاویه مجانب $y = -(b/a)x$ با مثبت محور x

$$\cos\alpha = -\frac{a}{c} = -\frac{1}{e}$$

هذلولی

دستگاه مختصات دکارتی



دکارتی : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

خروج از مرکز : $e = \frac{c}{a}, \quad e > 1$

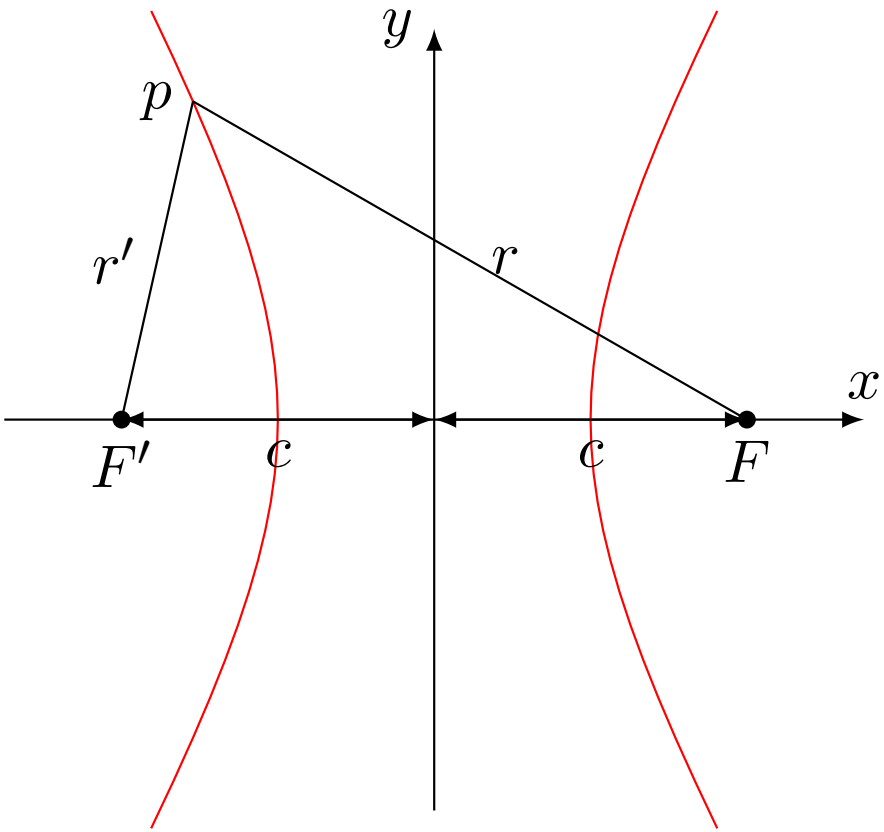
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

معادله خط مجانب : $y = \pm \frac{b}{a} x$

شاخه‌ی سمت راست : $r' - r = 2a$

هذلولی

دستگاه مختصات دکارتی



دکارتی : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

خروج از مرکز : $e = \frac{c}{a}, \quad e > 1$

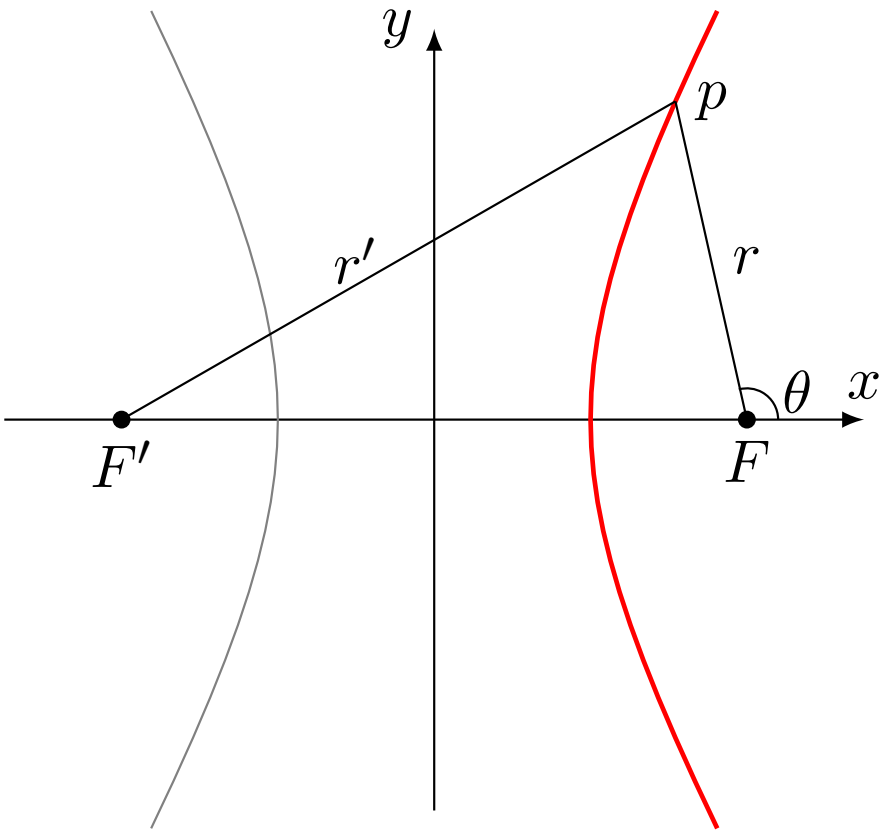
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

معادله خط مجانب : $y = \pm\frac{b}{a}x$

شاخه‌ی سمت چپ : $r - r' = 2a$

هذلولی

دستگاه مختصات قطبی نسبت به کانون F



شاخه‌ی سمت راست : $r' - r = 2a$

$$r' = r + 2a$$

به توان ۲ رساندن : $r'^2 = r^2 + 4a^2 + 4ar$

قانون کوسینوسها در مثلث $F'PF$

$$r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 - 4aer\cos(\theta - \pi)$$

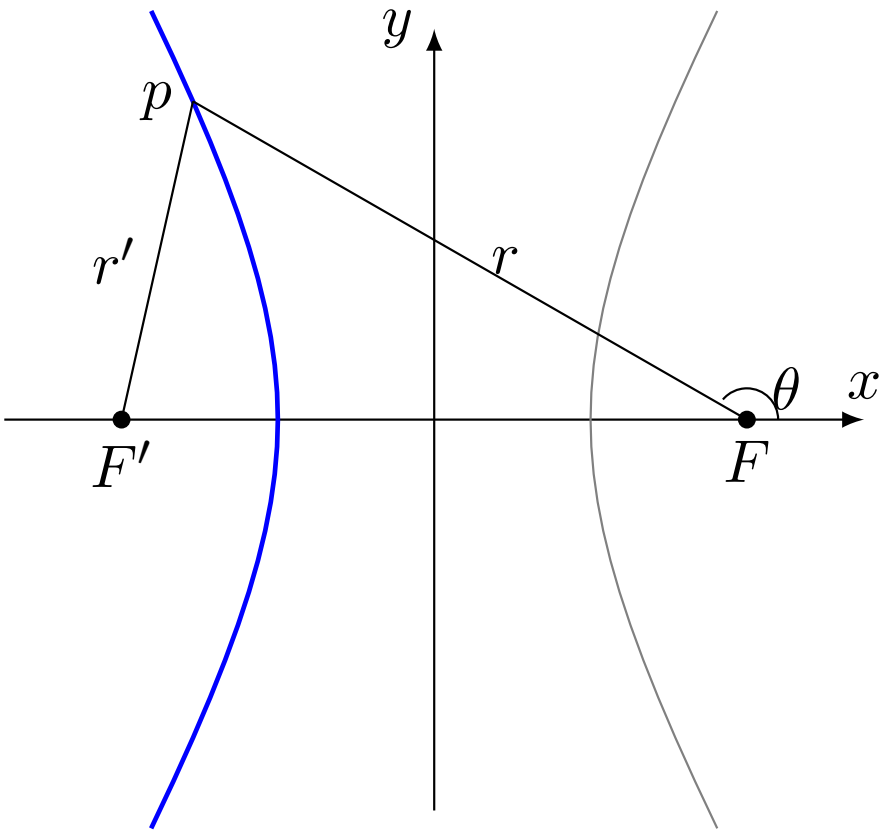
$$\begin{cases} r'^2 = r^2 + 4a^2 + 4ar \\ r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4aer\cos\theta \end{cases}$$

$$r^2 + 4a^2e^2 + 4aer\cos\theta = r^2 + 4a^2 + 4ar$$

معادله هذلولی نسبت به کانون F : $r = \dfrac{a(e^2-1)}{1 - e\cos\theta}$

هذلولی

دستگاه مختصات قطبی نسبت به کانون F



شاخه‌ی سمت چپ : $r - r' = 2a$

$$r' = r - 2a$$

به توان ۲ رساندن : $r'^2 = r^2 + 4a^2 - 4ar$

قانون کوسینوسها در مثلث $F'PF$

$$r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 - 4aer\cos(\theta - \pi)$$

$$\begin{cases} r'^2 = r^2 + 4a^2 - 4ar \\ r'^2 = r^2 + 4a^2e^2 + 4aer\cos\theta \end{cases}$$

$$r^2 + 4a^2e^2 + 4aer\cos\theta = r^2 + 4a^2 - 4ar$$

معادله هذلولی نسبت به کانون F : $r = \dfrac{a(e^2-1)}{-1 - e\cos\theta}$

هذلولی

دستگاه مختصات قطبی نسبت به کانون F

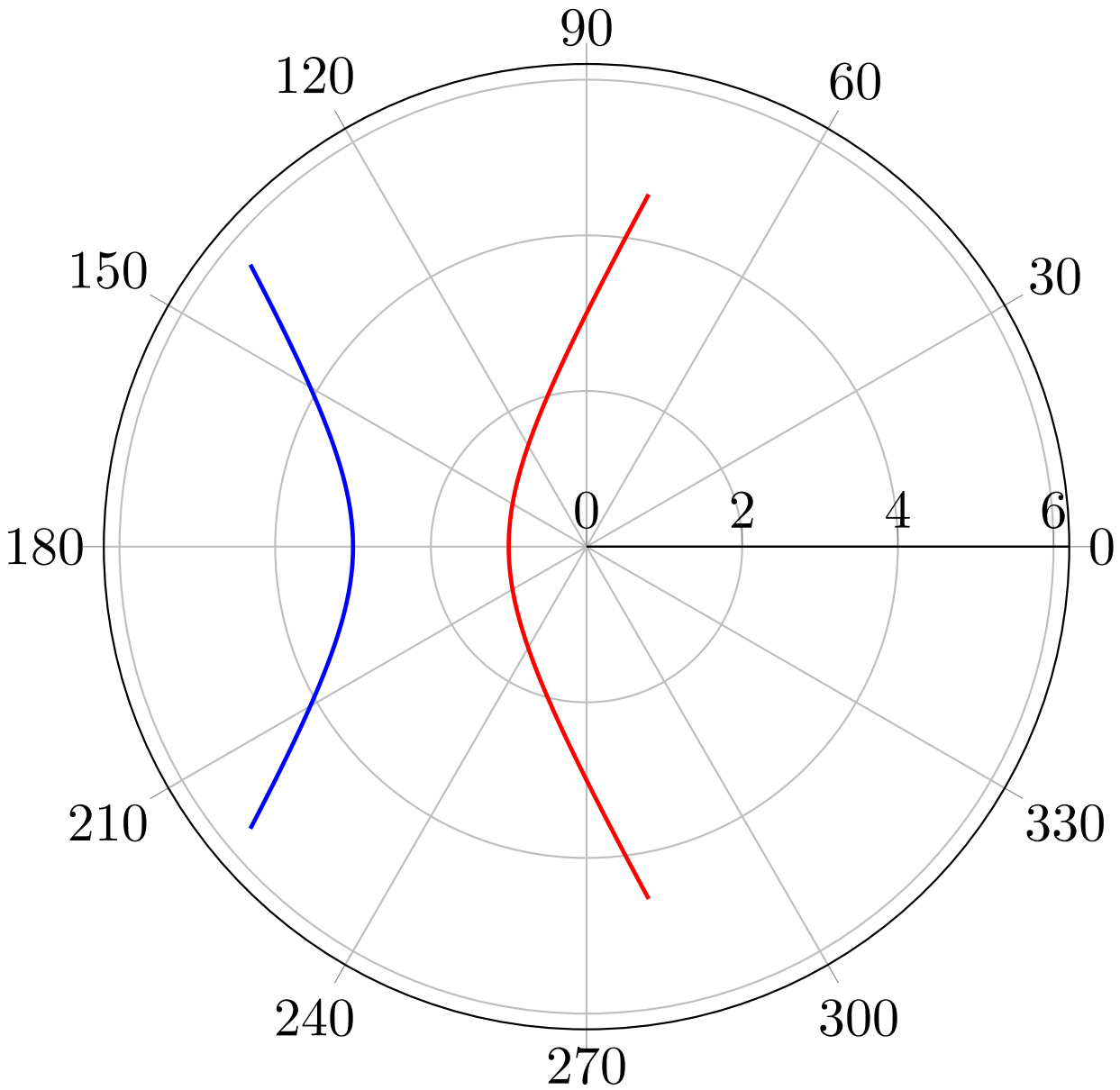
رابطه کلی

شاخه‌ی سمت راست : $r = \dfrac{a(e^2-1)}{1-e\cos(\theta-\phi)}$

شاخه‌ی سمت چپ : $r = \dfrac{a(e^2-1)}{-1-e\cos(\theta-\phi)}$

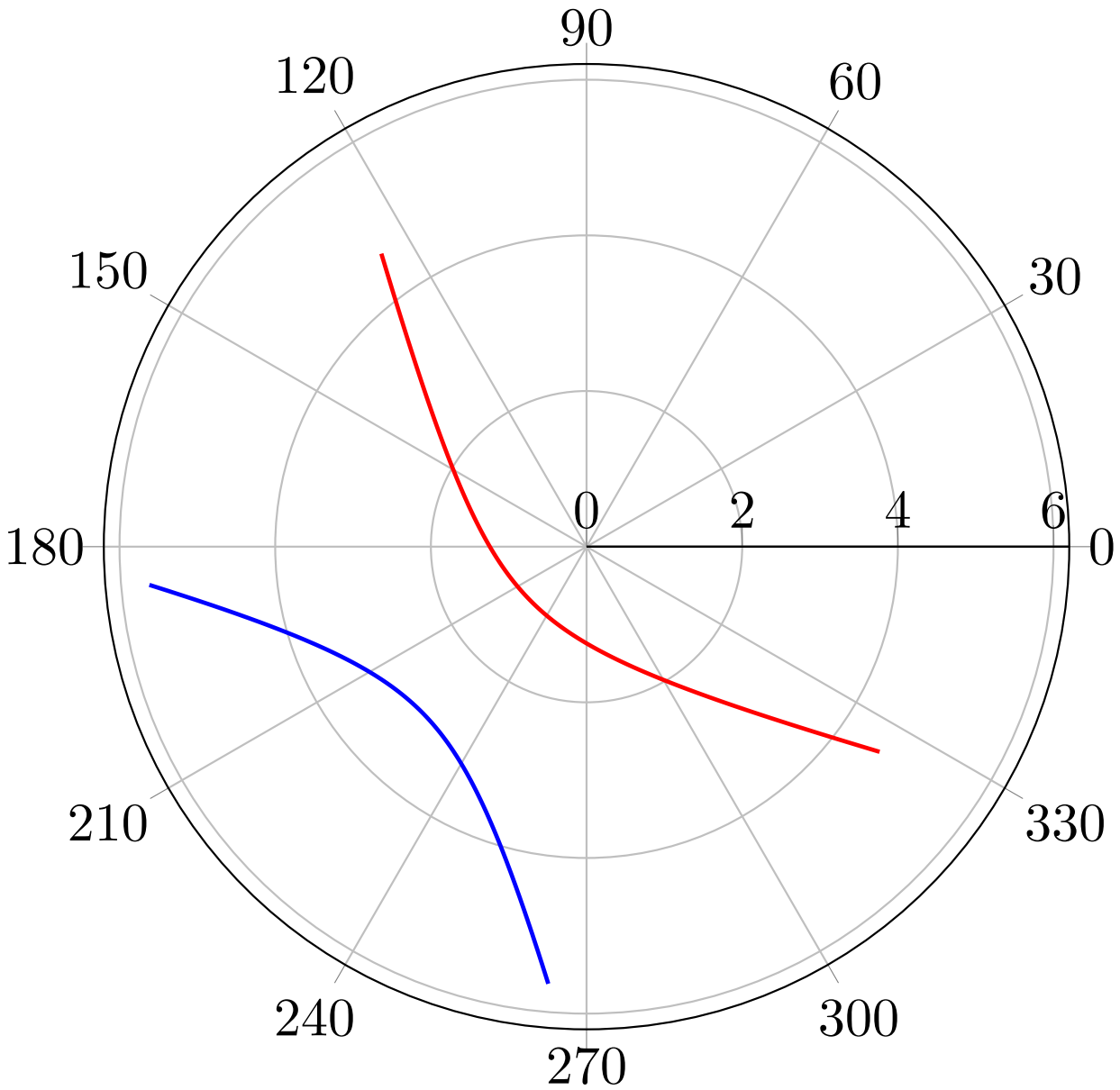
که ϕ زاویه‌ی راستای FF' نسبت به محور افقی است. مرکز در مختصات قطبی کانون F است.

هذلولی



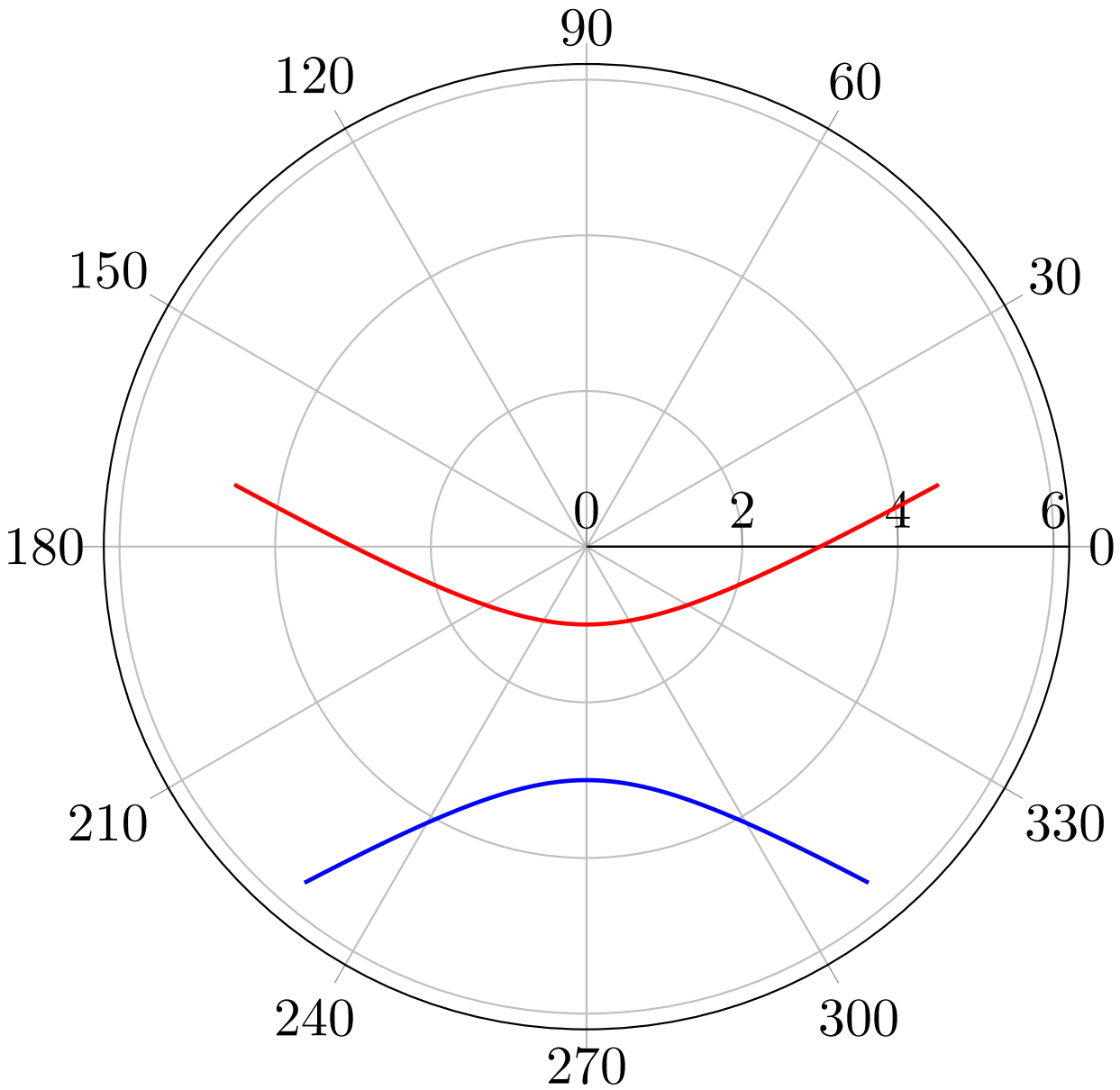
$\phi = 0$

هذلولی



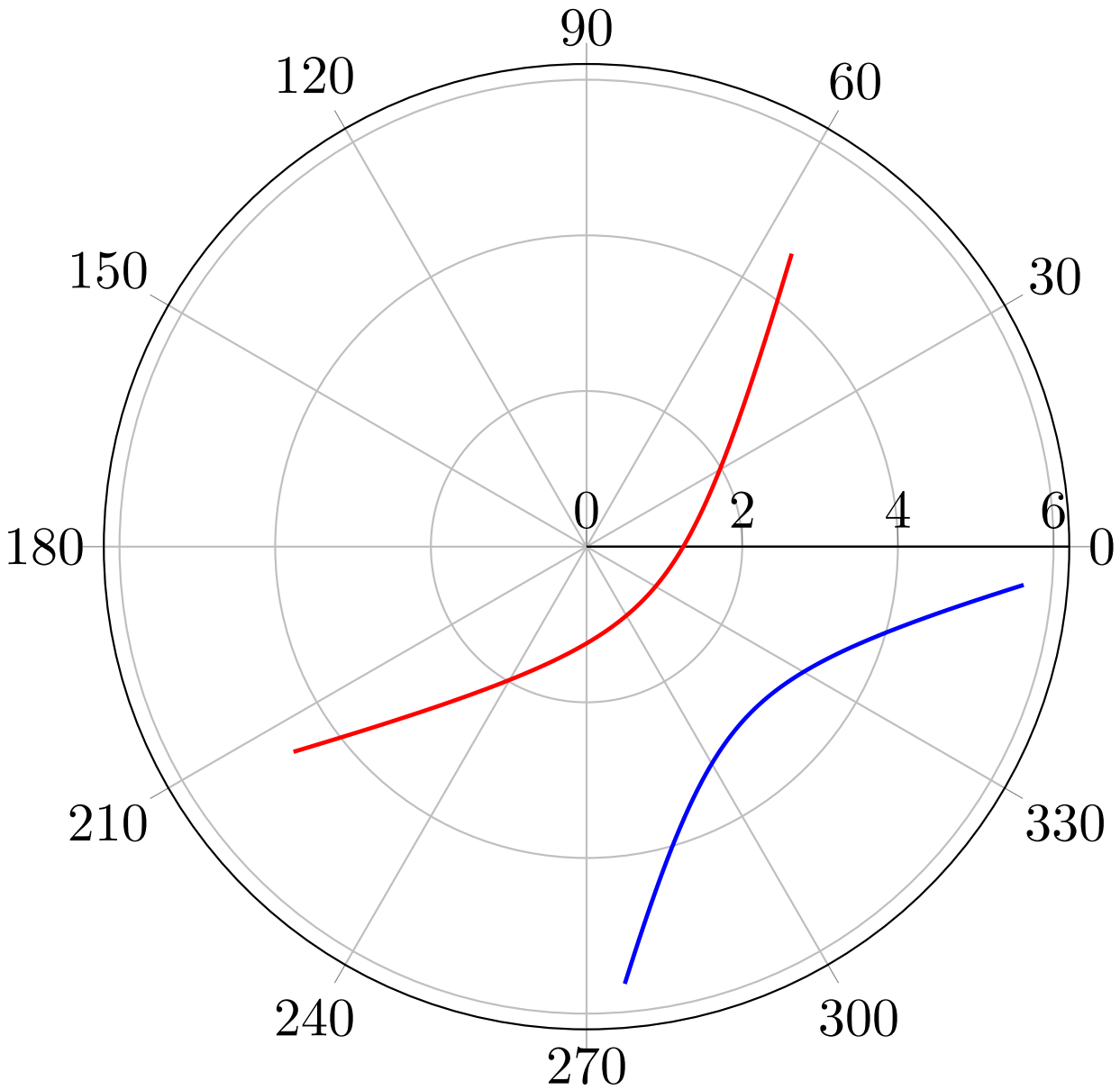
$\phi = \pi/4$

هذلولی



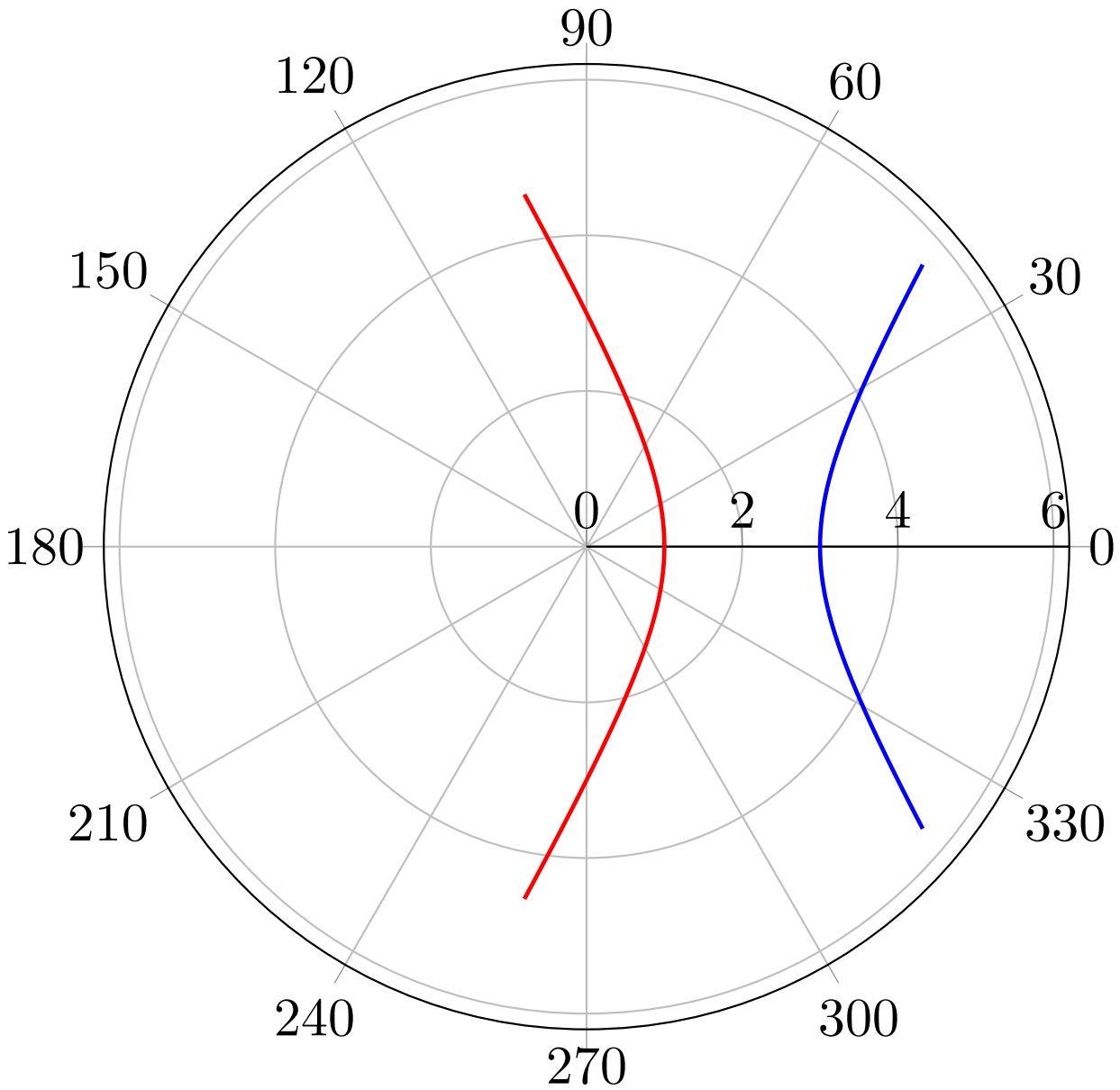
$\phi = \pi/2$

هذلولی



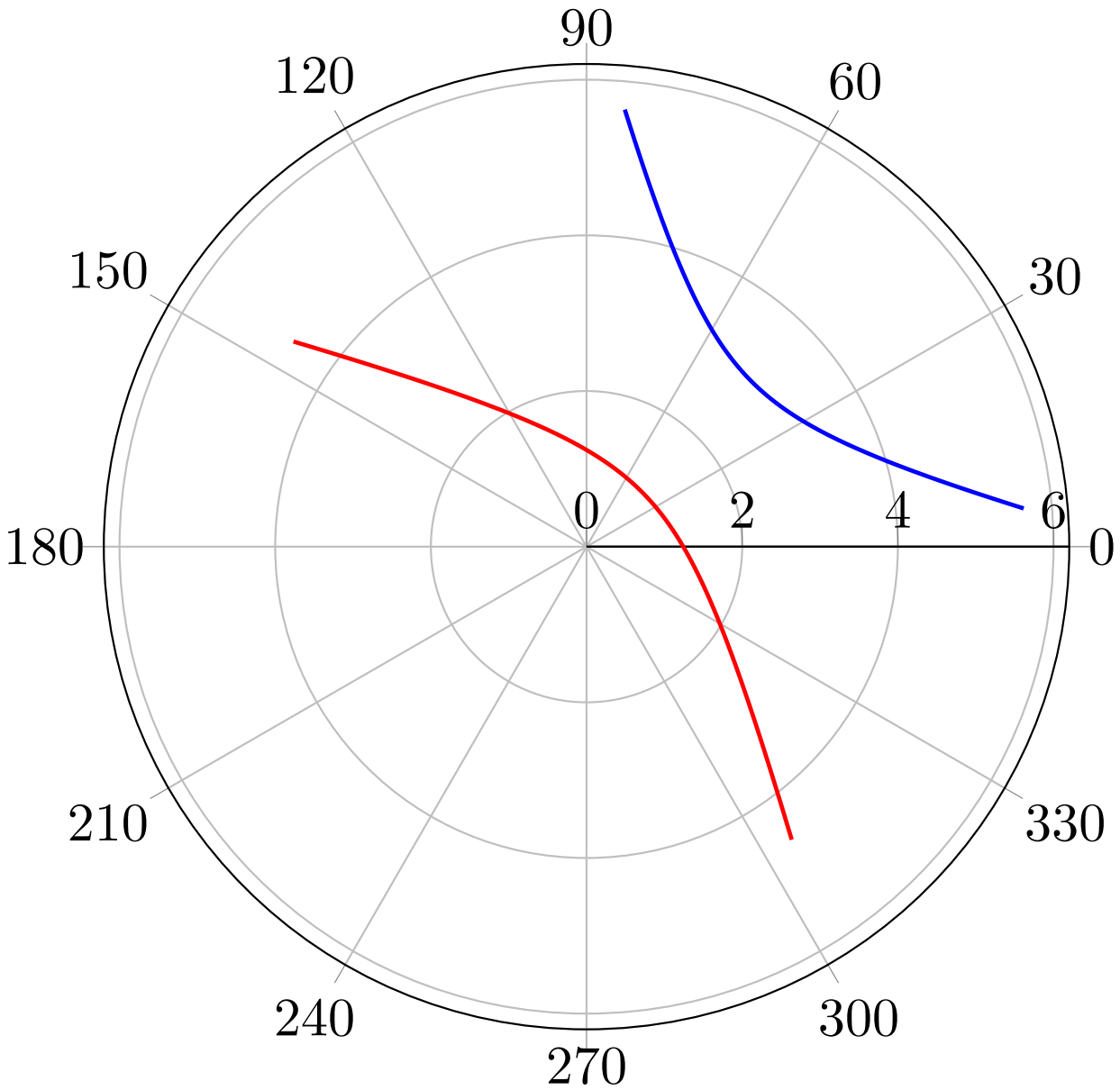
$$\phi = 3\pi/4$$

هذلولی



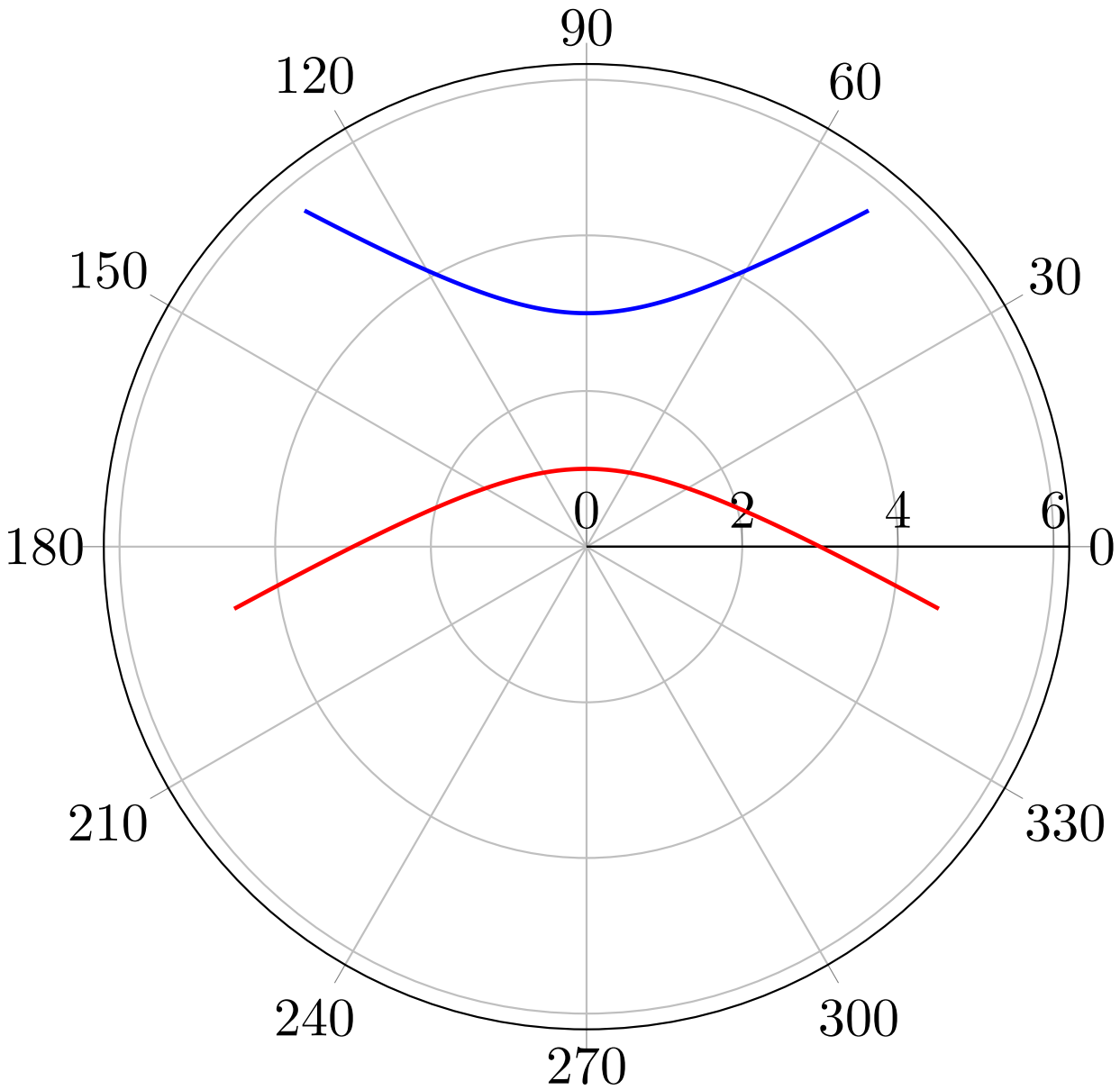
$\phi = \pi$

هذلولی



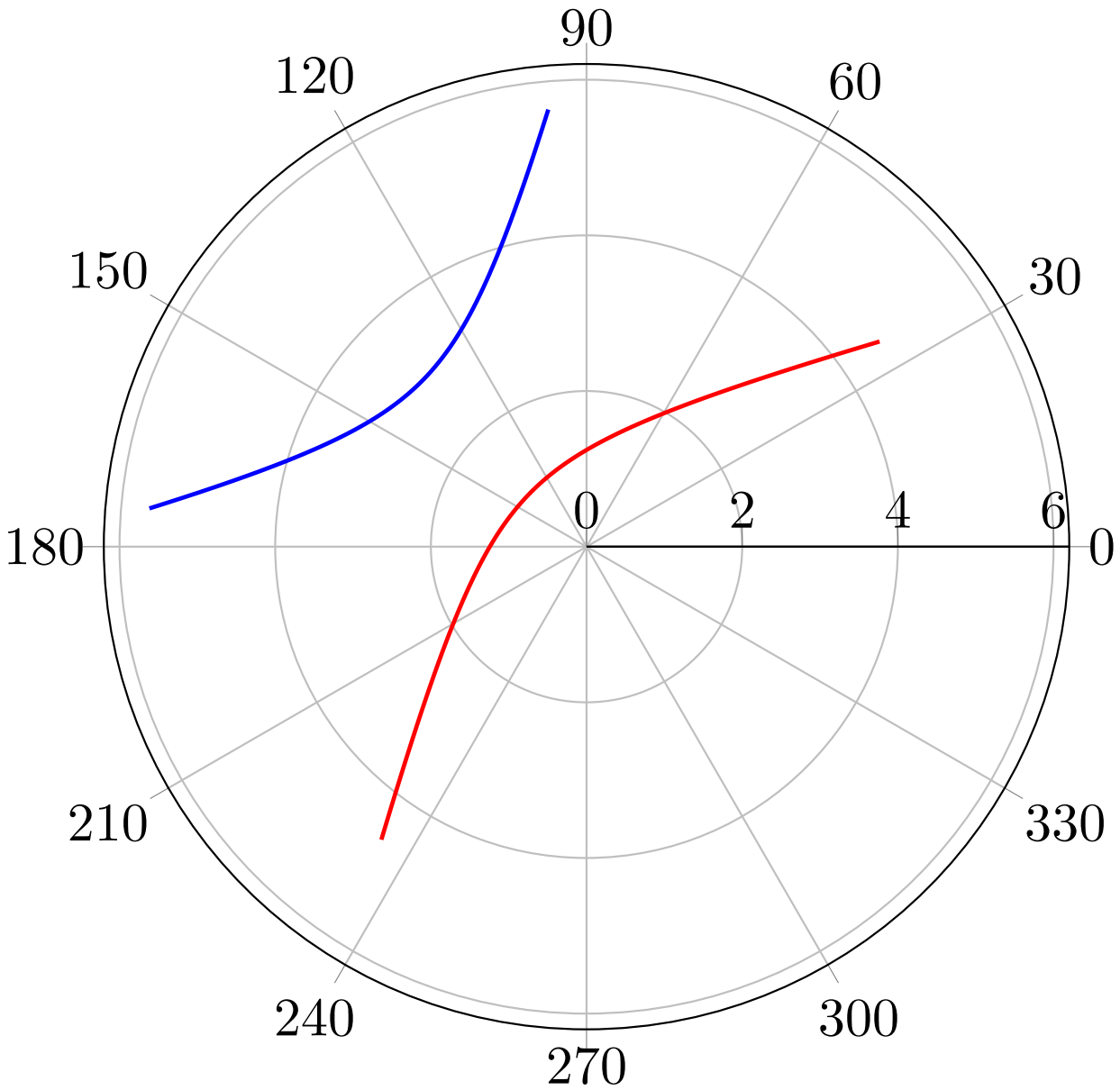
$$\phi = 5\pi/4$$

هذلولی



$$\phi = 3\pi/2$$

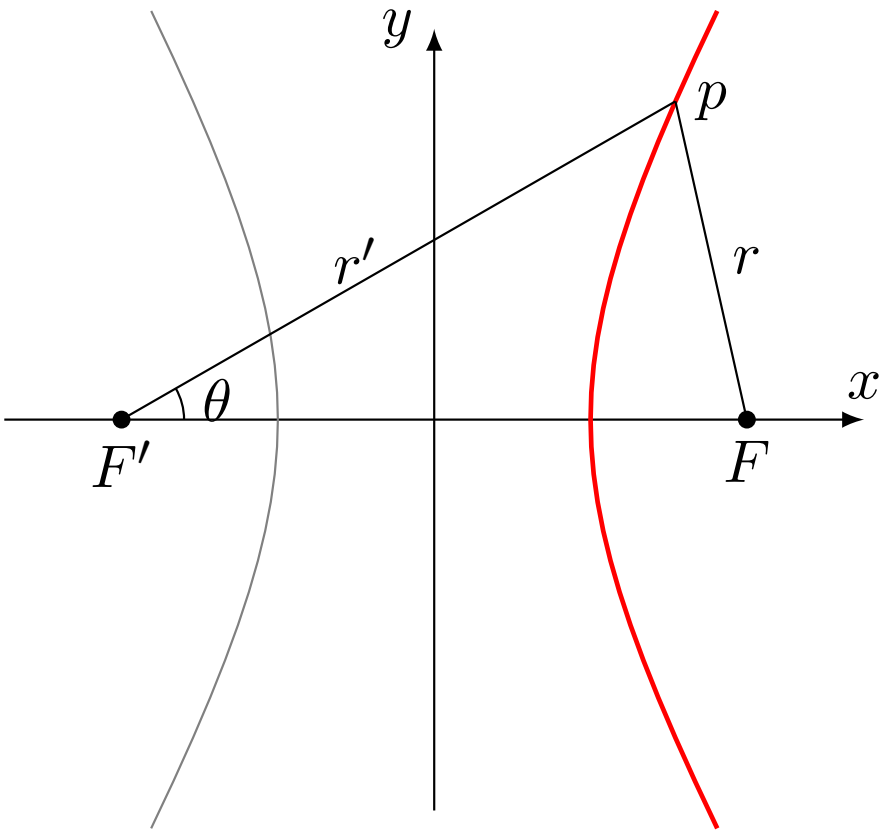
هذلولی



$$\phi = 7\pi/4$$

هذلولی

دستگاه مختصات قطبی نسبت به کانون F'



شاخه‌ی سمت راست : $r' - r = 2a$

$$r = r' - 2a$$

به توان ۲ رساندن : $r^2 = r'^2 + 4a^2 - 4ar'$

قانون کوسینوسها در مثلث $F'PF$

$$r^2 = r'^2 + 4a^2e^2 - 4aer' \cos\theta$$

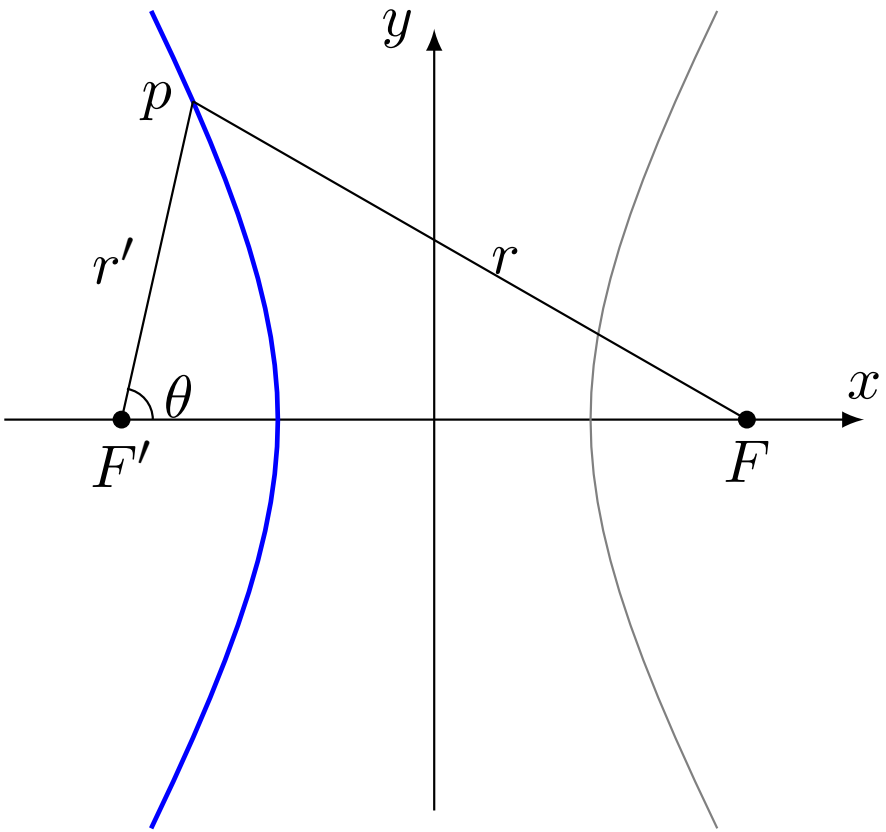
$$\begin{cases} r^2 = r'^2 + 4a^2 - 4ar' \\ r^2 = r'^2 + 4a^2e^2 - 4aer' \cos\theta \end{cases}$$

$$r'^2 + 4a^2e^2 - 4aer' \cos\theta = r'^2 + 4a^2 - 4ar'$$

معادله هذلولی نسبت به کانون F' : $r' = \dfrac{a(e^2-1)}{-1 + e\cos\theta}$

هذلولی

دستگاه مختصات قطبی نسبت به کانون F'



شاخه‌ی سمت چپ : $r - r' = 2a$

$$r = r' + 2a$$

به توان ۲ رساندن : $r^2 = r'^2 + 4a^2 + 4ar'$

قانون کوسینوسها در مثلث $F'PF$

$$r^2 = r'^2 + 4a^2e^2 - 4aer' \cos\theta$$

$$\begin{cases} r^2 = r'^2 + 4a^2 + 4ar' \\ r^2 = r'^2 + 4a^2e^2 - 4aer' \cos\theta \end{cases}$$

$$r'^2 + 4a^2e^2 - 4aer' \cos\theta = r'^2 + 4a^2 + 4ar'$$

معادله هذلولی نسبت به کانون F' : $r' = \dfrac{a(e^2-1)}{1 + e\cos\theta}$

هذلولی

دستگاه مختصات قطبی نسبت به کانون F'

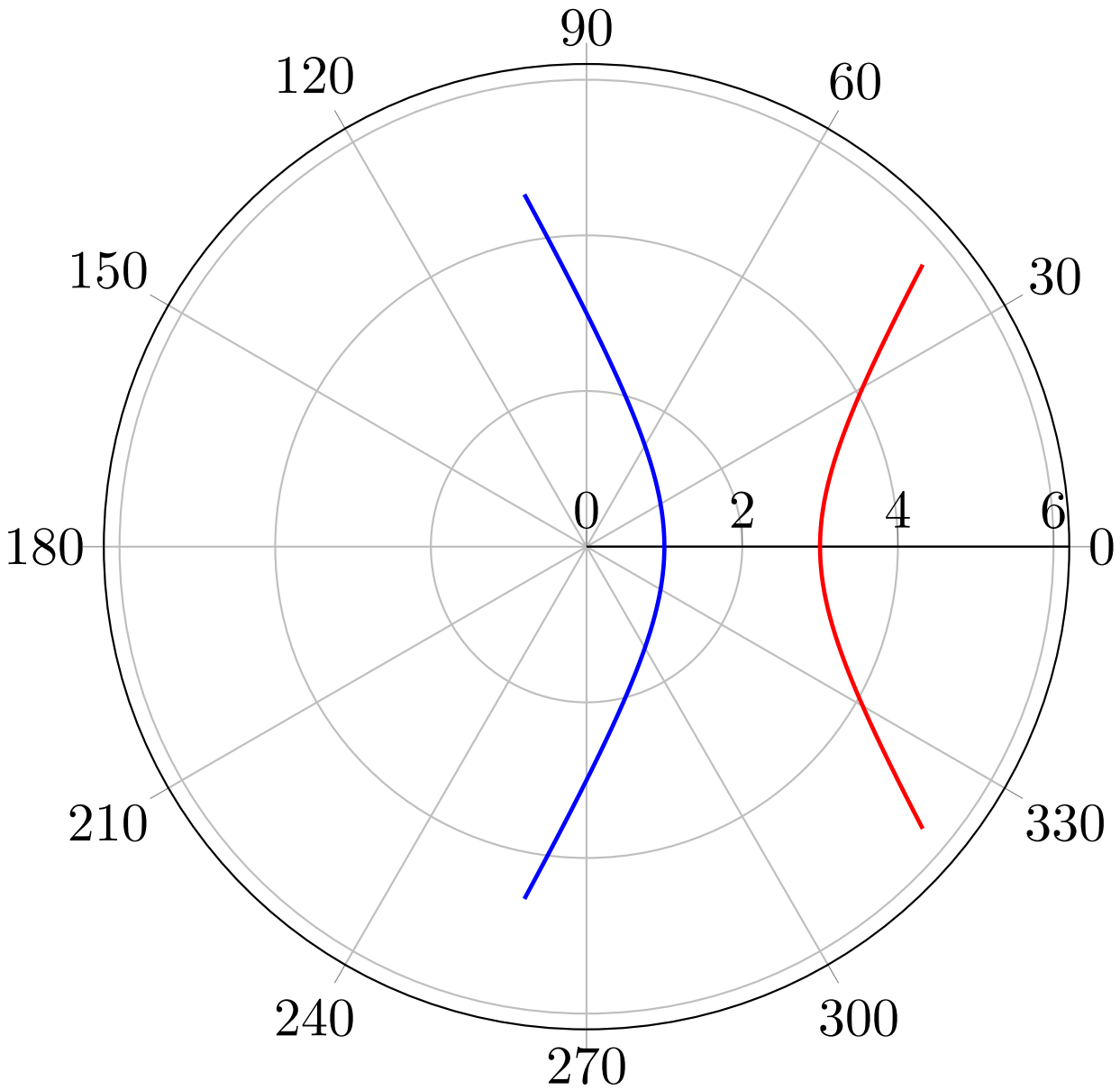
رابطه کلی

$$\text{شاخه‌ی سمت راست} : \quad r' = \frac{a(e^2-1)}{-1+e\cos(\theta-\phi)}$$

$$\text{شاخه‌ی سمت چپ} : \quad r' = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos(\theta-\phi)}$$

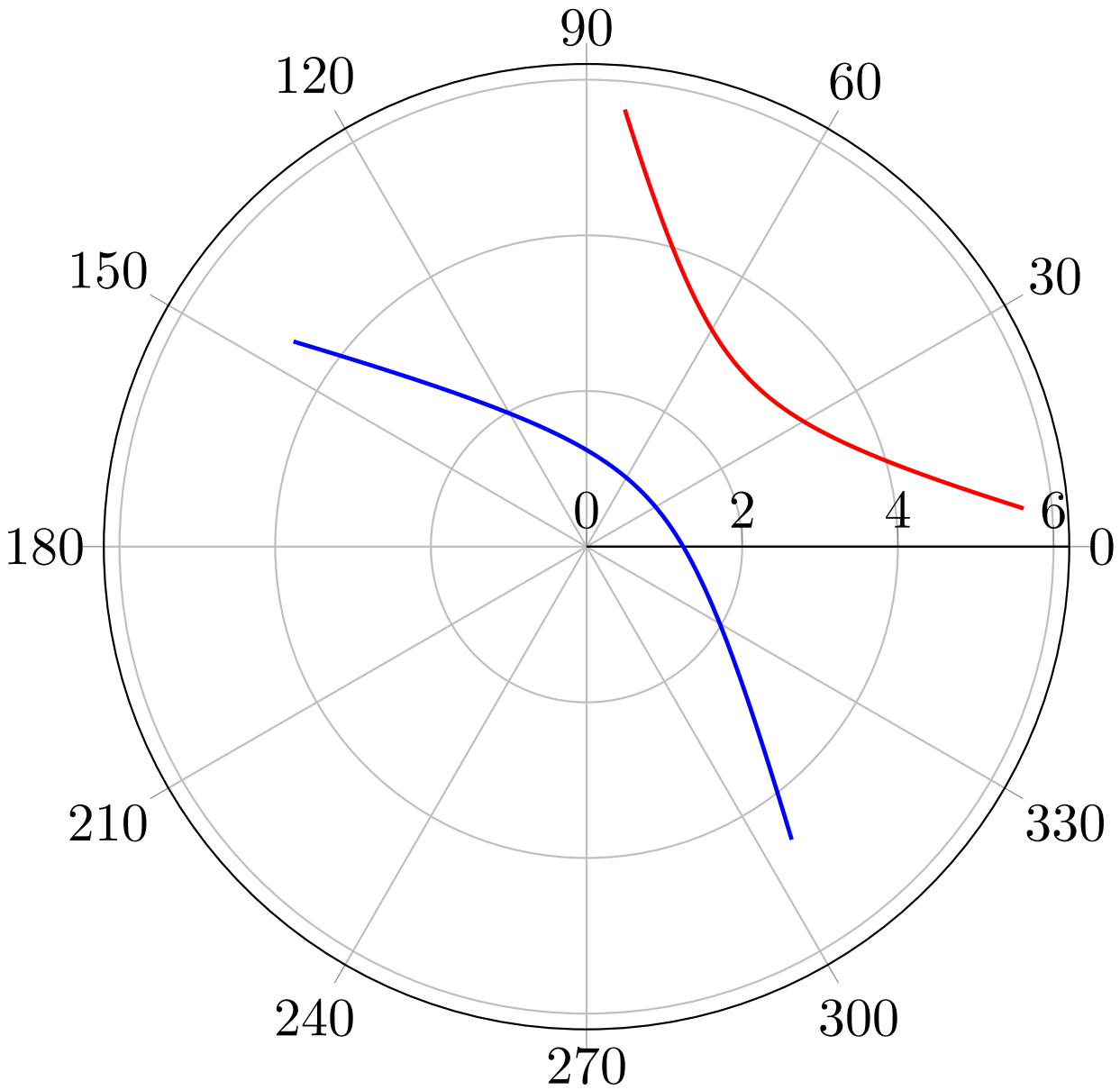
که ϕ زاویه‌ی راستای FF' نسبت به محور افقی است. مرکز در مختصات قطبی کانون F' است.

هذلولی



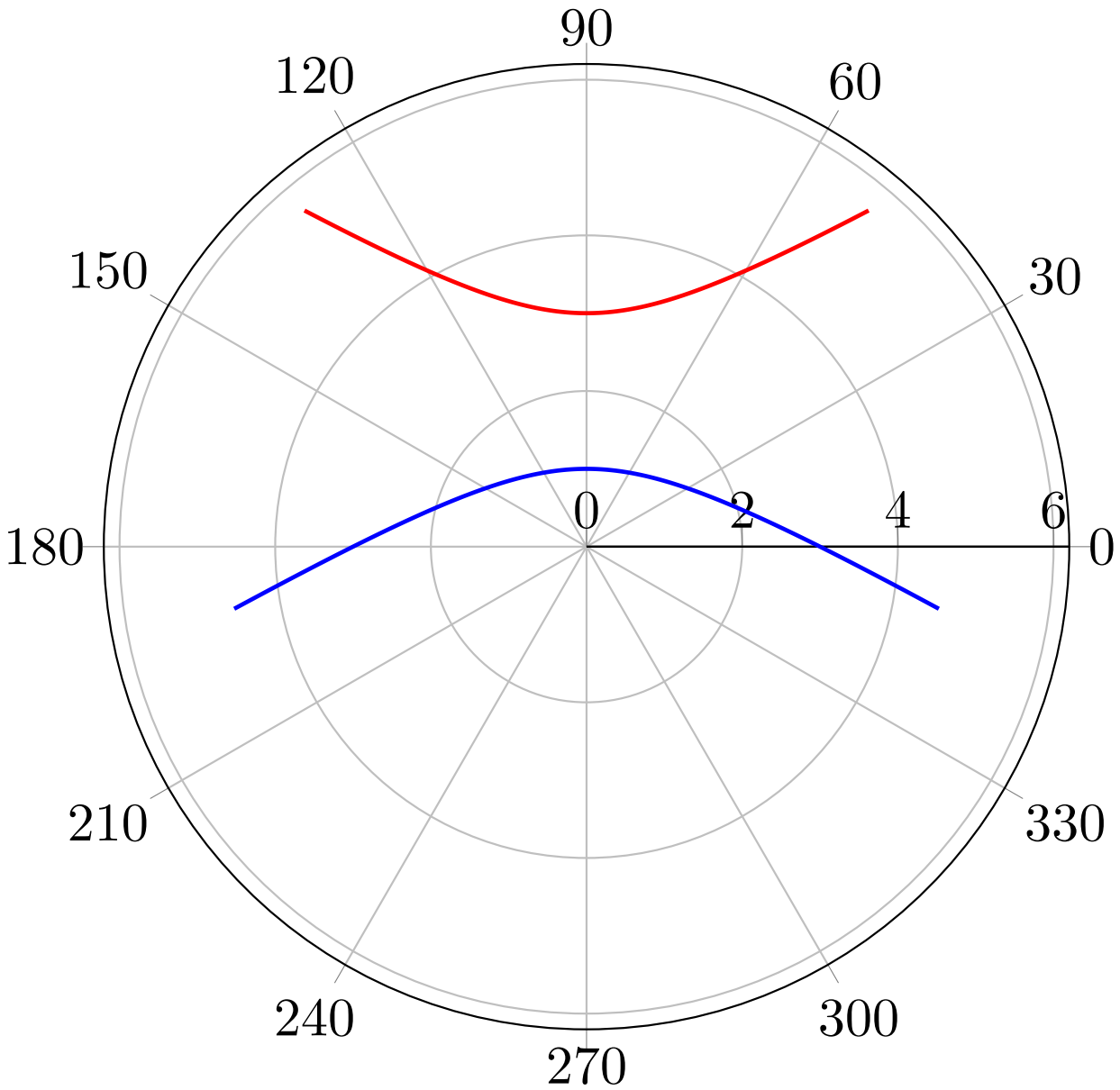
$\phi = 0$

هذلولی



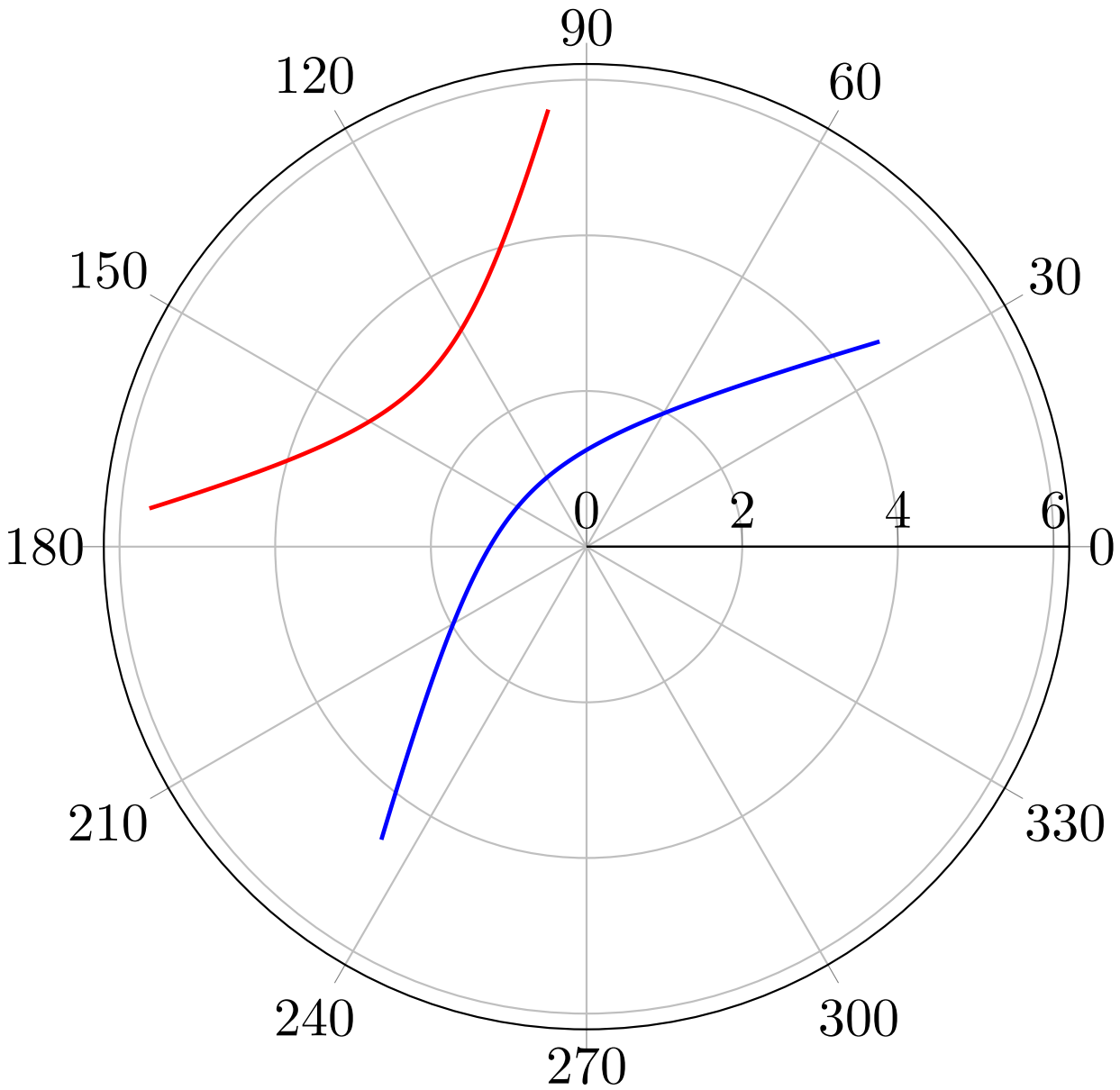
$\phi = \pi/4$

هذلولی



$$\phi = \pi/2$$

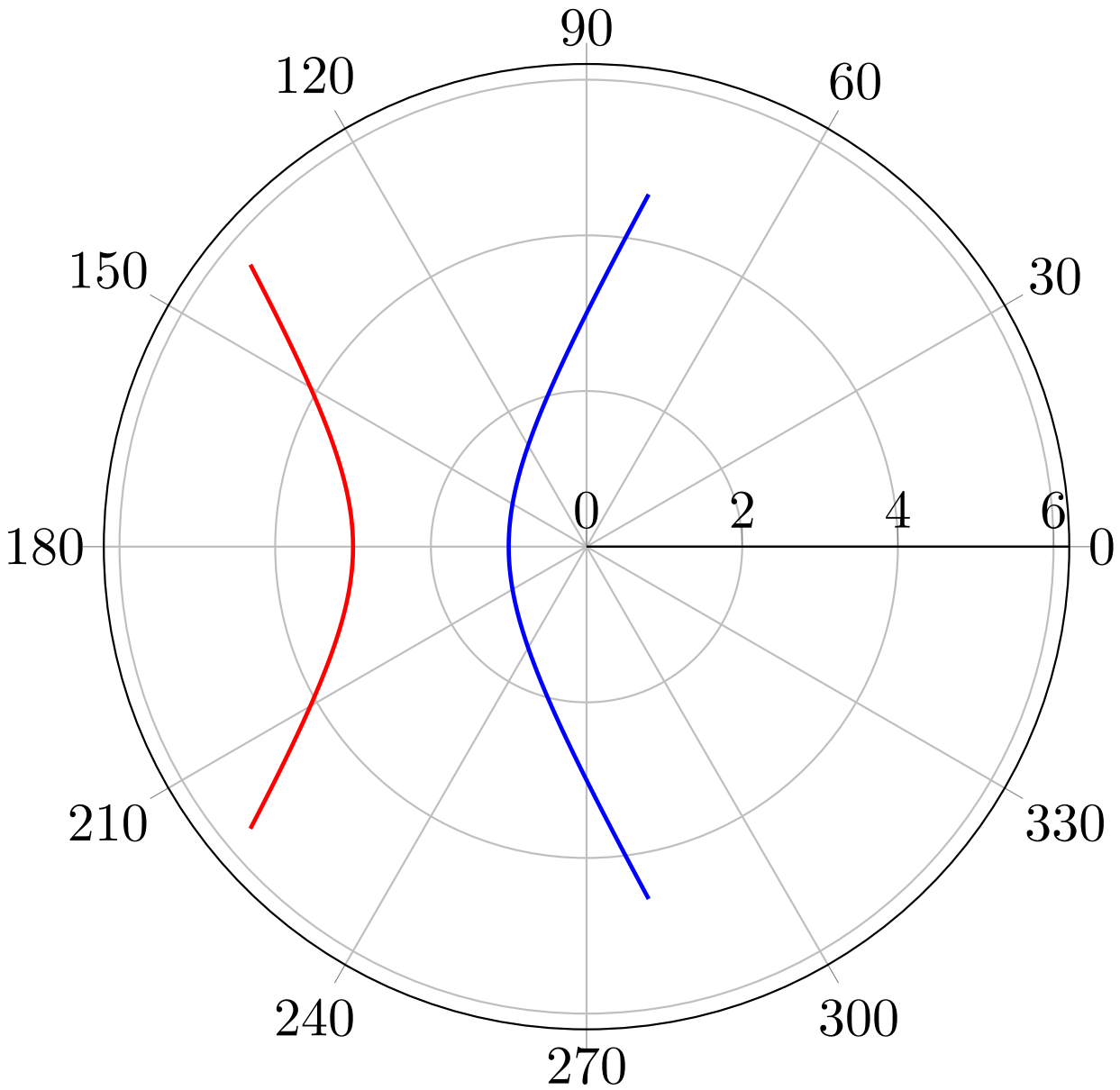
هذلولی



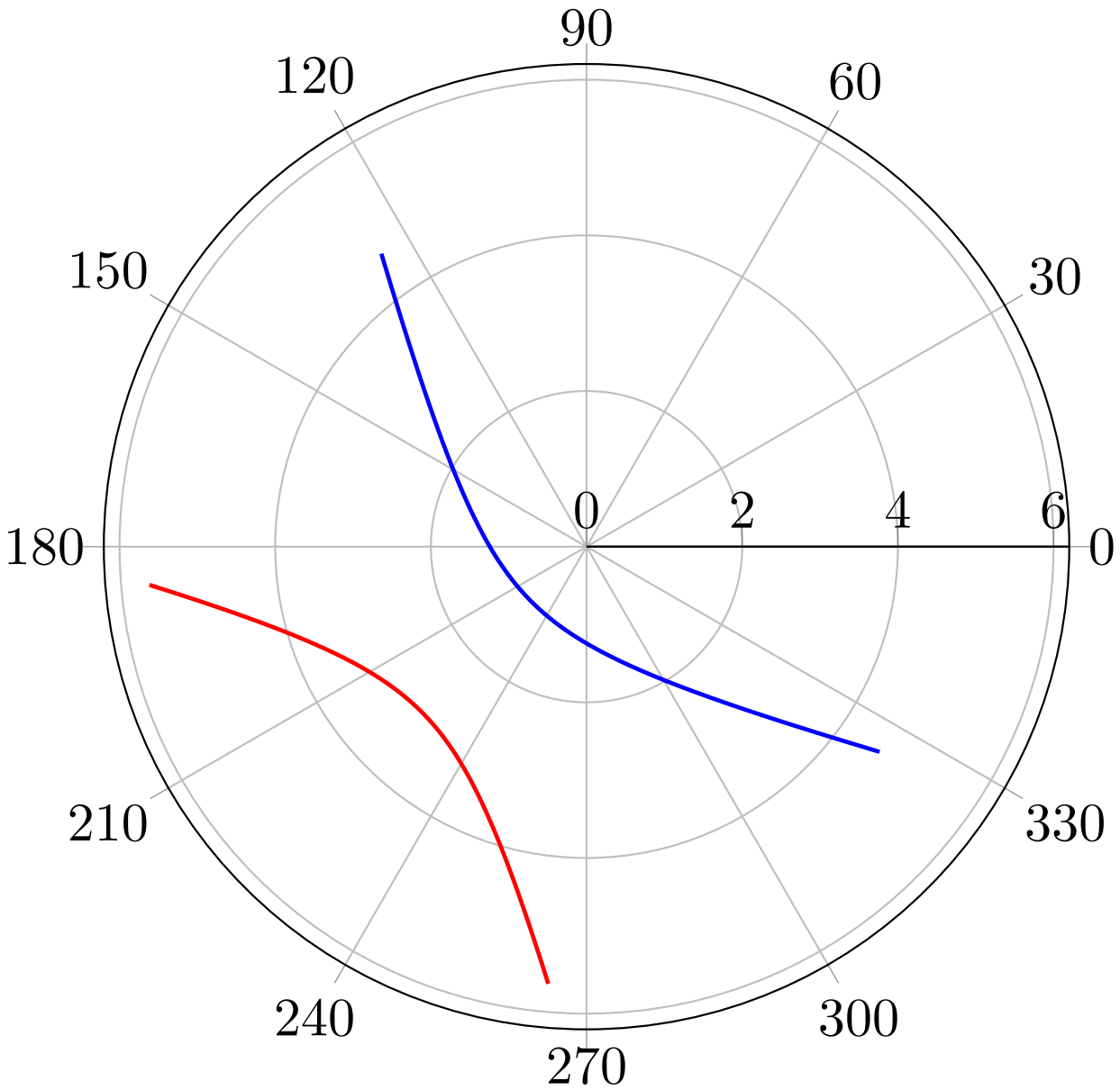
$$\phi = 3\pi/4$$

هذلولی

$\phi = \pi$

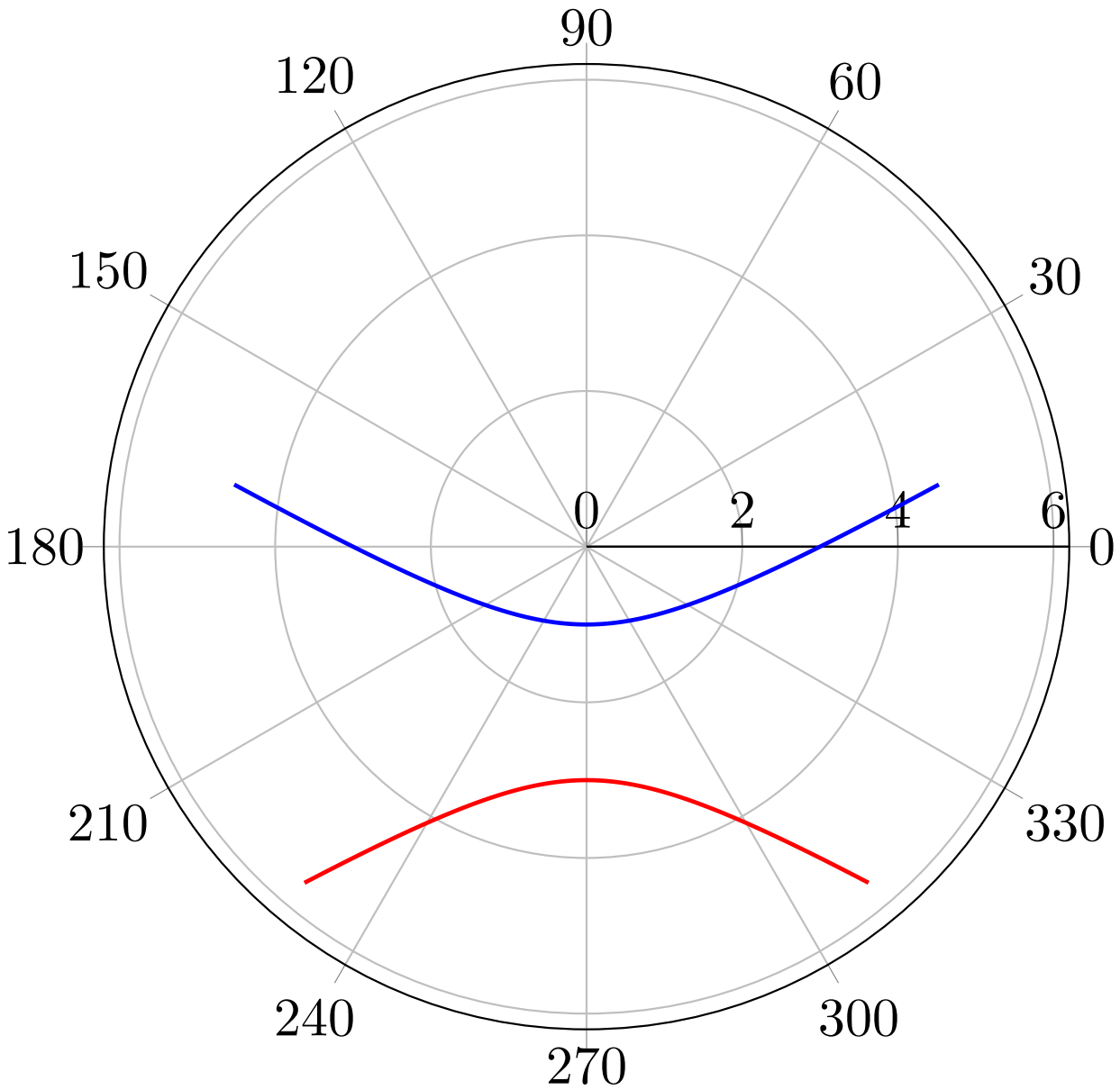


هذلولی



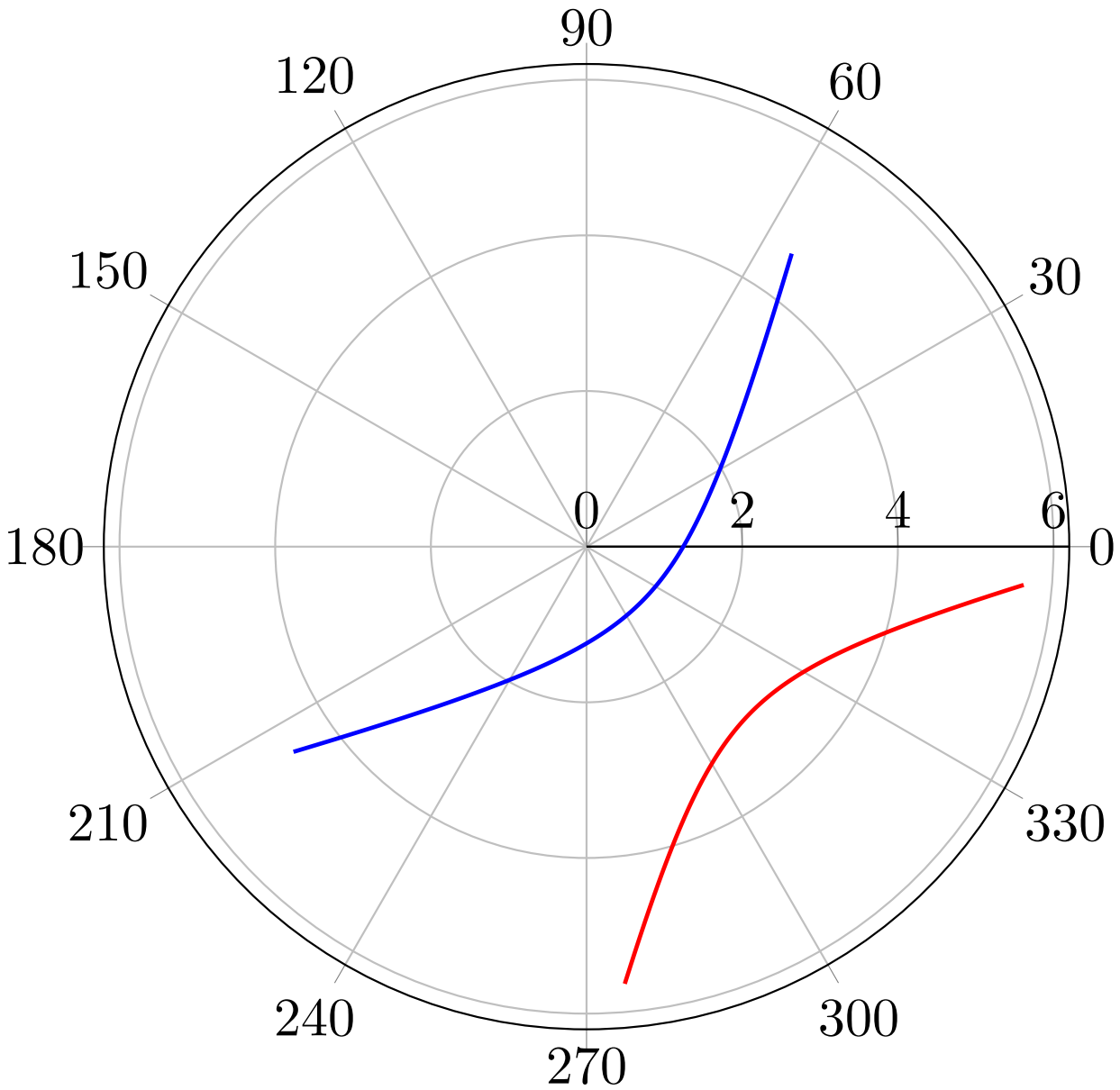
$$\phi = 5\pi/4$$

هذلولی



$$\phi = 3\pi/2$$

هذلولی



$$\phi = 7\pi/4$$