هوالعلیم

تمرین شماره: ۱ درس: مکانیک تحلیلی ۱

۱) بردار متغیر با زمان

$$\vec{A}(t) = \hat{i}\alpha t + \hat{j}\beta t^{۲} + \hat{k}\gamma t^{۳}$$

معلوم است، α، β و γ ثابت‌اند. مشتقهای زمانی اول و دوم $\frac{d\vec{A}}{dt}$ و $\frac{d^{۲}\vec{A}}{dt^{۲}}$ را بدست آورید.

۲) ذره‌ای در مسیر مارپیچی به معادله

$$\vec{r}(t) = \hat{i}b\sin\omega t + \hat{j}b\cos\omega t + \hat{k}ct^{۲}$$

حرکت می‌کند. نشان دهید که بزرگی شتاب حرکت این ذره ثابت است(b، ω و c ثابت‌اند).

۳) معادله‌ی مسیر ذره‌ای در مختصات قطبی عبارت است از

$$r(t) = be^{kt}, \qquad \theta(t) = ct$$

که b، k و c ثابتهای مثبت‌اند. نشان دهید در حالی که سوی حرکت به خارج است، زاویه‌ی میان بردار سرعت و بردار شتاب ثابت باقی می‌ماند(راهنمائی: $\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{va}$ را بیابید).

۴) ذره‌ای بر روی توپی به شعاع ثابت b چنان می‌لغزد که حرکت آن را در مختصات کروی با معادلات زیر بیان می‌کنند

$$r(t) = b, \qquad \phi(t) = \omega t, \qquad \theta(t) = \frac{\pi}{۲}[۱ + \frac{۱}{۴}\cos(۴\omega t)]$$

بزرگی سرعت این ذره را به صورت تابعی از زمان بدست آورید.

۵) نشان دهید که $\vec{v}\cdot\vec{a} = v\dot{v}$، و از آنجا بررسی کنید که اگر بزرگی سرعت v ثابت باشد، بردار سرعت و شتاب ذره برهم عمودند.

۶) نشان دهید

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})] = \vec{r}\cdot(\vec{v}\times\dot{\vec{a}}).$$

۷) نشان دهید مولفه مماسی شتاب را عبارت زیر بیان می‌کند

$$a_{\tau} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}.$$

۸) نشان دهید

$$|\vec{v}\times\vec{a}| = \frac{v^{۳}}{\rho}$$

که ρ شعاع انحنای مسیر یک دره متحرک است.

۹) چرخی به شعاع b با شتاب ثابت $a_\circ$ بر روی زمین به جلو می‌غلتد. نشان دهید که در هر لحظه، بزرگی شتاب هر نقطه روی چرخ نسبت به مرکز چرخ بصورت $(a_\circ^2+\frac{v^4}{b^2})^{1/2}$ است، و نسبت به زمین نیز عبارت $a_\circ\left[2+2\cos\theta+\frac{v^4}{a_\circ^2 b^2}-\left(\frac{2v^2}{a_\circ b}\right)\sin\theta\right]^{1/2}$ خواهد بود، که v سرعت لحظه‌ای و θ وضعیت نقطه‌ای را روی چرخ تعیین می‌کند که از بالاترین نقطه به جلو اندازه‌گیری شده است. شتاب کدام نقطه نسبت به زمین بیشترین مقدار است.

۱۰) حرکت ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که حرکت آن با نیروی اصطکاک $F(v)=-kv^{\frac{3}{2}}$ کند می شود. اگر سرعت اولیه ذره در $x=0$ برابر $v_\circ$ باشد، نشان دهید که این ذره نمی‌تواند فاصله‌ای بیش از $\frac{2mv_\circ^{1/2}}{k}$ را بپیماید.

۱۱) ذره‌ای به جرم m در مبدا در حال سکون است. در لحظه $t=0$ نیروی $F(t)=F_\circ e^{-kt}$ به آن وارد می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

۱۲) ذره‌ای به جرم m در مبدا در حال سکون است. در لحظه $t=0$ نیروی $F(t)=F_\circ\sin(\omega t+\phi)$ به آن وارد می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

۱۳) ذره‌ای به جرم m در مبدا در حال سکون است. در لحظه $t=0$ نیروی $F(t)=F_\circ\cos^2\omega t$ به آن وارد می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

۱۴) ذره‌ای به جرم m در مبدا در حال سکون است. در لحظه $t=0$ نیروی $F(t)=F_\circ e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\phi)$ به آن وارد می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

۱۵) گلوله ای به جرم m با سرعت $v_\circ$ در روی یک سطح افقی پرتاب می‌شود. نیروی کندساز متناسب با ریشه‌ی دوم سرعت لحظه‌ای است. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

۱۶) گلوله ای به جرم m با سرعت اولیه $v_\circ$ از روی سطح زمین بطور قائم به بالا پرتاب می‌شود. اگر نیروی کندساز متناسب با سرعت لحظه‌ای ذره باشد است. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

۱۷) گلوله ای به جرم m با سرعت اولیه $v_\circ$ از روی سطح زمین بطور قائم به بالا پرتاب می‌شود. اگر نیروی کندساز متناسب با مربع سرعت لحظه‌ای ذره باشد است. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

۱۸) گلوله ای به جرم m از ارتفاع $y_\circ$ در لحظه $t = \circ$ رها می‌شود. اگر نیروی اصطکاک هوا متناسب با سرعت لحظه‌ای ذره باشد است. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

۱۹) گلوله ای به جرم m از ارتفاع $y_\circ$ در لحظه $t = \circ$ رها می‌شود. اگر نیروی اصطکاک هوا متناسب با مربع سرعت لحظه‌ای ذره باشد است. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

۲۰) موتور قایقی وقتی که سرعت آن $v_\circ$ خاموش می‌شود. از این به بعد حرکت قایق در اثر یک نیروی کندساز $F(t) = F_\circ e^{-kv}$ کند می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید. چه مدت طول می‌کشد تا قایق متوقف شود و چه فاصله‌ای را تا توقف طی می‌کند.

۲۱) ذره‌ای به جرم m با سرعت اولیه $v_\circ$، در حالی که تحت تاثیر $F(v) = m(kv + cv^۲)$ قرار دارد، شروع به حرکت می‌کند. جابجایی را بصورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۲۲) از مسئله ۱۷ و ۱۹ استفاده کنید و نشان دهید که سرعت گلوله هنگام بازگشت به مکان اولیه برابر

$$\frac{v_\circ v_t}{\sqrt{v_\circ^۲ + v_t^۲}}$$

است که در آن سرعت حدی v_t برابر $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ است.

مظفری