هوالعلیم

حل تمرین شماره: ۱ درس: مکانیک تحلیلی ۱

۱) بردار متغیر با زمان

$$\vec{A}(t) = \hat{i}\alpha t + \hat{j}\beta t^{۲} + \hat{k}\gamma t^{۳}$$

معلوم است، $\alpha$، $\beta$ و $\gamma$ ثابت‌اند. مشتقهای زمانی اول و دوم $\frac{d\vec{A}}{dt}$ و $\frac{d^{۲}\vec{A}}{dt^{۲}}$ را بدست آورید.

حل:

$$\frac{d}{dt}\vec{A}(t) = \hat{i}\alpha + ۲\hat{j}\beta t + ۳\hat{k}\gamma t^{۲}$$

$$\frac{d^{۲}}{dt^{۲}}\vec{A}(t) = ۲\hat{j}\beta + ۶\hat{k}\gamma t$$

۲) ذره‌ای در مسیر مارپیچی به معادله

$$\vec{r}(t) = \hat{i}b\sin\omega t + \hat{j}b\cos\omega t + \hat{k}ct^{۲}$$

حرکت می‌کند. نشان دهید که بزرگی شتاب حرکت این ذره ثابت است($b$، $\omega$ و $c$ ثابت‌اند).

حل:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = b\omega(\hat{i}\cos\omega t - \hat{j}\sin\omega t) + ۲c\hat{k}t$$

$$\vec{a} = \frac{d^{۲}}{dt^{۲}}\vec{r}(t) = -b\omega(\hat{i}\sin\omega t + \hat{j}\cos\omega t) + ۲c\hat{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{۲} + a_y^{۲} + a_z^{۲}} = \sqrt{(b\omega)^{۲} + ۴c^{۲}}$$

۳) معادله‌ی مسیر ذره‌ای در مختصات قطبی عبارت است از

$$r(t) = be^{kt}, \qquad \theta(t) = ct$$

که $b$، $k$ و $c$ ثابتهای مثبت‌اند. نشان دهید در حالی که سوی حرکت به خارج است، زاویه‌ی میان بردار سرعت و بردار شتاب ثابت باقی می‌ماند(راهنمائی: $\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{va}$ را بیابید).

حل:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^{۲})\hat{r} + (۲\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

که در آن

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

و

$$\dot{r} = bke^{kt} = kr, \qquad \ddot{r} = bk^۲e^{kt} = k^۲r$$
$$\dot{\theta} = c, \qquad \ddot{\theta} = ۰$$
$$\vec{v} = r(k\hat{r} + c\hat{\theta}), \qquad |\vec{v}| = r\sqrt{k^۲ + c^۲}$$
$$\vec{a} = r((k^۲ - c^۲)\hat{r} + ۲kc\hat{\theta}), \qquad |\vec{a}| = r(k^۲ + c^۲)$$

حاصلضرب داخلی سرعت وشتاب برابر

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = r^۲(k^۳ + kc^۲)$$

بدین ترتیب زاویه بین سرعت وشتاب برابر

$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{|\vec{v}||\vec{a}|} = \frac{k}{\sqrt{k^۲ + c^۲}}$$

۴) ذره‌ای بر روی توپی به شعاع ثابت $b$ چنان می‌لغزد که حرکت آن را در مختصات کروی با معادلات زیر بیان می‌کنند

$$r(t) = b, \qquad \phi(t) = \omega t, \qquad \theta(t) = \frac{\pi}{۲}[۱ + \frac{۱}{۴}\cos(۴\omega t)]$$

بزرگی سرعت این ذره را به صورت تابعی از زمان بدست آورید.

حل:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi}$$

که در آن

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\phi\sin\theta + \hat{j}\sin\phi\sin\theta + \hat{k}\cos\theta$$
$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\phi\cos\theta + \hat{j}\sin\phi\cos\theta - \hat{k}\sin\theta$$
$$\hat{\phi} = -\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi$$

$$\dot{r} = ۰, \qquad \dot{\theta} = -\frac{\pi}{۲}\omega\sin(۴\omega t), \qquad \dot{\phi} = \omega$$

بدین ترتیب بردار سرعت ذره برابر

$$\vec{v} = -b\omega\frac{\pi}{۲}\sin(۴\omega t)\hat{\theta} - b\omega\cos(\frac{\pi}{۸}\cos(۴\omega t))\hat{\phi}$$

و اندازه آن برابر

$$|\vec{v}| = b\omega\sqrt{\frac{\pi^۲}{۴}\sin^۲(۴\omega t) + \cos^۲(\frac{\pi}{۸}\cos(۴\omega t))}$$

۵) نشان دهید که $\vec{v} \cdot \vec{a} = v\dot{v}$، و از آنجا بررسی کنید که اگر بزرگی سرعت $v$ ثابت باشد، بردار سرعت و شتاب ذره برهم عمودند.

حل:

$$\vec{v}\cdot\vec{v}=v^{۲}$$

اگر از طرفین رابطه‌ی بالا $\frac{d}{dt}$ بگیریم

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=۲v\dot{v}$$

با توجه به تعریف شتاب $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ داریم

$$۲\vec{a}\cdot\vec{v}=۲v\dot{v}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{v}=v\dot{v}$$

اگر بزرگی سرعت ثابت باشد، در این صورت $\dot{v}=۰$ و در نتیجه $\vec{a}\cdot\vec{v}$ برابر صفر است.

۶) نشان دهید

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})]=\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\dot{\vec{a}})\cdot$$

حل:

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})]=\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\dot{\vec{a}})\cdot$$

از سمت راست عبارت بالا شروع می‌کنیم

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})]=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})+\vec{r}\cdot(\frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{a})+\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\frac{d\vec{a}}{dt})$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})]=\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})+\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{a})+\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\frac{d\vec{a}}{dt})$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})]=\vec{a}\cdot(\vec{v}\times\vec{v})+\vec{r}\cdot(\vec{a}\times\vec{a})+\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\frac{d\vec{a}}{dt})$$

جمله اول و دوم عبارت بالا برابر صفر است، بنابراین

$$\frac{d}{dt}[\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\vec{a})]=\vec{r}\cdot(\vec{v}\times\frac{d\vec{a}}{dt})$$

۷) نشان دهید مولفه مماسی شتاب را عبارت زیر بیان می‌کند

$$a_\tau=\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}\cdot$$

حل: از آنجایی که بردار مماس بر مسیر حرکت منطبق بر بردار سرعت است بنابراین بردار یکه مماسی بر مسیر حرکت را می‌توان بصورت $\hat{t}=\frac{\vec{v}}{v}$ نوشت. در حالت کلی اگر بردار شتاب را بتوان به دو راستای $\hat{t}$ و عمود بر آن $\hat{n}$ تجزیه کرد($\hat{t}\cdot\hat{n}=۰$)، داریم

$$\vec{a}=a_n\hat{n}+a_t\hat{t}\Rightarrow\vec{a}=a_n\hat{n}+a_t\frac{\vec{v}}{v}$$

حالا طرفین عبارت بالا را ضربدر بردار سرعت کنید

$$\vec{v}\cdot\vec{a}=a_n\vec{v}\cdot\hat{n}+a_t\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{v}$$

اگر طرفین را بر بزرگی سرعت تقسیم کنیم

$$\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}=a_n\frac{\vec{v}}{v}\cdot\hat{n}+a_t\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{v^2}\Rightarrow\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}=a_n\hat{t}\cdot\hat{n}+a_t$$

بنابراین

$$a_t=\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{v}$$

۸) نشان دهید

$$|\vec{v}\times\vec{a}|=\frac{v^3}{\rho}$$

که $\rho$ شعاع انحنای مسیر یک ذره متحرک است.

حل: با توجه به مسئله قبل، اگر شتاب را بتوان به دو راستای مماسی وعمودی تجزیه کرد، داریم

$$\vec{a}=a_n\hat{n}+a_t\frac{\vec{v}}{v}$$

حالا طرفین عبارت بالا را ضرب خارجی در بردار سرعت کنید

$$\vec{v}\times\vec{a}=a_n\vec{v}\times\hat{n}+a_t\frac{\vec{v}\times\vec{v}}{v}\Rightarrow\vec{v}\times\vec{a}=a_n\vec{v}\times\hat{n}$$

برای سادگی در عبارت سمت راست بالا یک بزرگی سرعت ضرب و تقسیم کنید

$$\vec{v}\times\vec{a}=a_nv(\frac{\vec{v}}{v}\times\hat{n})\Rightarrow\vec{v}\times\vec{a}=a_nv(\hat{t}\times\hat{n})$$

اندازه تساوی برداری بالا برابر

$$|\vec{v}\times\vec{a}|=a_nv$$

اگر شعاع انحنای مسیر ذره $\rho$ ثابت باشد، شتاب شعاعی ذره برابر $a_n=\frac{v^2}{\rho}$، بنابراین

$$|\vec{v}\times\vec{a}|=\frac{v^3}{\rho}$$

۹) چرخی به شعاع $b$ با شتاب ثابت $a_0$ بر روی زمین به جلو می‌غلتد. نشان دهید که در هر لحظه، بزرگی شتاب هر نقطه روی چرخ نسبت به مرکز چرخ بصورت $(a_0^2+\frac{v^4}{b^2})^{1/2}$ است، و نسبت به زمین نیز عبارت $a_0\left[2+2\cos\theta+\frac{v^4}{a_0^2b^2}-\left(\frac{2v^2}{a_0b}\right)\sin\theta\right]^{1/2}$ خواهد بود، که $v$ سرعت لحظه‌ای و $\theta$ و

وضعیت نقطه‌ای را روی چرخ تعیین می‌کند که از بالاترین نقطه به جلو اندازه‌گیری شده است. شتاب کدام نقطه نسبت به زمین بیشترین مقدار است.

حل: سرعت و شتاب حرکت یک ذره بر مسیر دایره با شعاع ثابت مطابق مسئله (۳) برابر

$$\vec{v} = b\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -b\dot{\theta}^2\hat{r} + b\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

بوسیله رابطه‌ی اول بزرگی سرعت برابر $v = b\dot{\theta}$ و با توجه به فرض مسئله شتاب مماسی هر نقطه از چرخ $a_0 = b\ddot{\theta}$ است. بنابراین

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{b}\hat{r} + a_0\hat{\theta}$$

بدین ترتیب بزرگی شتاب هر نقطه از چرخ برابر

$$|\vec{a}| = \sqrt{\frac{v^4}{b^2} + a_0^2}$$

برای ناظر روی زمین، معادله حرکت هر نقطه از چرخ بر حسب زاویه $\theta$ برابر

$$\vec{r} = \hat{i}b(\theta + \sin\theta) + \hat{j}b\cos\theta$$

با دو بار مشتق گیری زمانی از معادله‌ی بالا داریم

$$\vec{a} = \hat{i}(b\ddot{\theta} + b\ddot{\theta}\cos\theta - b\dot{\theta}^2\sin\theta) - \hat{j}(b\ddot{\theta}\sin\theta + b\dot{\theta}^2\cos\theta)$$

$$\vec{a} = a_0\left\{\hat{i}(1 + \cos\theta - \frac{v^2}{ba_0}\sin\theta) - \hat{j}(\sin\theta + \frac{v^2}{ba_0}\cos\theta)\right\}$$

بزرگی شتاب برابر است با

$$a = a_0\sqrt{2 + 2\cos\theta + \frac{v^4}{a_0^2b^2} - \left(\frac{2v^2}{a_0b}\right)\sin\theta}$$

۱۰) حرکت ذره‌ای به جرم $m$ را در نظر بگیرید که حرکت آن با نیروی اصطکاک $F(v) = -kv^{\frac{3}{2}}$ کند می شود. اگر سرعت اولیه ذره در $x = 0$ برابر $v_0$ باشد، نشان دهید که این ذره نمی‌تواند فاصله‌ای بیش از $\frac{2mv_0^{1/2}}{k}$ را بپیماید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^{\frac{3}{2}}$$

در اینجا می‌خواهیم فاصله طی شده وقتی ذره متوقف می‌شود را محاسبه کنیم، بنابراین نیاز به محاسبه رابطه سرعت ذره با جابجایی را داریم. برای این منظور از قاعده زنجیری $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx}$ استفاده می‌کنیم

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m}v^{\frac{3}{2}} \Rightarrow v^{-\frac{1}{2}}dv = -\frac{k}{m}dx$$

با انتگرالگیری از عبارت بالا داریم

$$\int_{v_\circ}^{\circ} v^{-\frac{1}{۲}} dv = -\frac{k}{m}\int_{x_\circ}^{x} dx \Rightarrow ۲(\circ - \sqrt{v_\circ}) = -\frac{k}{m}\Delta x$$

بنابراین

$$\Delta x = \frac{۲m\sqrt{v_\circ}}{k}$$

۱۱) ذره‌ای به جرم $m$ در مبدا در حال سکون است. در لحظه $t=\circ$ نیروی $F(t)=F_\circ e^{-kt}$ به آن وارد می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن

$$m\frac{dv}{dt} = F_\circ e^{-kt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F_\circ}{m} e^{-kt}$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بالا از دو قسمت همگن و ناهمگن تشکیل شده است. جواب نهایی مسئله برهم‌نهی از قسمت همگن $x_۱$ و قسمت ناهمگن $x_۲$ است، $x = x_۱ + x_۲$. قسمت همگن معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بالا،

$$\frac{d^۲x_۱}{dt^۲} = \circ$$

دارای یک جواب پیشنهادی بصورت $x_۱ = Ae^{rt}$ است که با دوبار مشتقگیری و قرار دادن آن در قسمت همگن معادله دیفرانسیل بالا منجر به معادله مشخصه $r^۲ = \circ$ و بنابراین $r_۱ = r_۲ = \circ$. در نتیجه جواب قسمت همگن برابر است با

$$x_۱ = A_۱ + A_۲ t$$

که $A_۱$ و $A_۲$ به شرایط اولیه مسئله بستگی دارد. جواب پیشنهادی برای حل قسمت ناهمگن

$$\frac{d^۲x_۲}{dt^۲} = \frac{F_\circ}{m} e^{-kt}$$

بصورت $x_۲ = Be^{-kt}$ می‌باشد که با دوبار مشتقگیری و قرار دادن آن در قسمت ناهمگن معادله دیفرانسیل بالا منجر به پیدا شدن $B$ می‌شود

$$Bk^۲ e^{-kt} = \frac{F_\circ}{m} e^{-kt} \Rightarrow B = \frac{F_\circ}{mk^۲}$$

بدین ترتیب جواب قسمت ناهمگن برابر است با

$$x_۲ = \frac{F_\circ}{mk^۲} e^{-kt}$$

جواب نهایی مسئله قبل از اعمال شرایط اولیه

$$x = x_۱ + x_۲ = A_۱ + A_۲ t + \frac{F_\circ}{mk^۲} e^{-kt}$$

می‌باشد که با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=\circ)=\circ=A_{۱}+\frac{F_\circ}{mk^{۲}}$$

$$v(t=\circ)=\circ=A_{۲}-\frac{F_\circ}{mk}$$

معادله حرکت و سرعت برابر

$$x=-\frac{F_\circ}{mk^{۲}}+\frac{F_\circ}{mk}t+\frac{F_\circ}{mk^{۲}}e^{-kt}$$

$$v=\frac{F_\circ}{mk}t-\frac{F_\circ}{mk}e^{-kt}$$

بررسی حالتهای حدی $(kt\ll ۱)$:

$$x\simeq-\frac{F_\circ}{mk^{۲}}+\frac{F_\circ}{mk}t+\frac{F_\circ}{mk^{۲}}(۱-kt+\frac{۱}{۲}(kt)^{۲}+\cdots)=\frac{۱}{۲}\frac{F_\circ}{m}t^{۲}+\cdots$$

$$v\simeq\frac{F_\circ}{mk}-\frac{F_\circ}{mk}(۱-kt+\cdots)=\frac{F_\circ}{m}t+\cdots$$

بررسی حالتهای حدی $(kt\gg ۱)$:

$$x\simeq-\frac{F_\circ}{mk^{۲}}+\frac{F_\circ}{mk}t$$

$$v\simeq\frac{F_\circ}{mk}$$

۱۲) ذره‌ای به جرم $m$ در مبدا در حال سکون است. در لحظه $t=\circ$ نیروی $F(t)=F_\circ\sin(\omega t+\phi)$ به آن وارد می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن

$$m\frac{dv}{dt}=F_\circ\sin(\omega t+\phi)\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{F_\circ}{m}\sin(\omega t+\phi)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بالا از دو قسمت همگن و ناهمگن تشکیل شده است. جواب نهایی مسئله برهم‌نهی از قسمت همگن $x_{۱}$ و قسمت ناهمگن $x_{۲}$ است، $x=x_{۱}+x_{۲}$.

مانند مسئله (۱۱) جواب قسمت همگن برابر $x_{۱}=A_{۱}+A_{۲}t$ می‌باشد و جواب پیشنهادی برای حل قسمت ناهمگن بصورت $x_{۲}=B_{۱}\sin\omega t+B_{۲}\cos\omega t$ می‌باشد که با دوبار مشتقگیری و با قرار دادن آن در معادله دیفرانسیل حرکت ضرایب بصورت

$$B_{۱}=-\frac{F_\circ}{m\omega^{۲}}\cos\phi,\qquad B_{۲}=-\frac{F_\circ}{m\omega^{۲}}\sin\phi$$

داده می‌شود. جواب نهایی مسئله قبل از اعمال شرایط اولیه

$$x = A_1 + A_2 t - \frac{F_0}{m\omega^2}\sin(\omega t + \phi)$$

می‌باشد که با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=0) = 0 = A_1 - \frac{F_0}{m\omega^2}\sin\phi$$

$$v(t=0) = 0 = A_2 - \frac{F_0}{m\omega}\cos\phi$$

معادله حرکت و سرعت برابر

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}\sin\phi + \frac{F_0}{m\omega}t\cos\phi - \frac{F_0}{m\omega^2}\sin(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{F_0}{m\omega}\cos\phi - \frac{F_0}{m\omega}\cos(\omega t + \phi)$$

بررسی حالتهای حدی ($kt \ll 1$):

$$x \simeq \frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2\sin\phi + \cdots$$

$$v \simeq \frac{F_0}{m}t\sin\phi + \cdots$$

۱۳) ذره‌ای به جرم $m$ در مبدا در حال سکون است. در لحظه $t = 0$ نیروی $F(t) = F_0\cos^2\omega t$ به آن وارد می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن

$$m\frac{dv}{dt} = F_0\cos^2\omega t \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{2m}(1 + \cos 2\omega t)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بالا از دو قسمت همگن و ناهمگن تشکیل شده است. جواب نهایی مسئله برهم‌نهی از قسمت همگن $x_1$ و قسمت ناهمگن $x_2$ است، $x = x_1 + x_2$.

مانند مسئله (۱۱) جواب قسمت همگن برابر $x_1 = A_1 + A_2 t$ می‌باشد و جواب پیشنهادی برای حل قسمت ناهمگن بصورت $x_2 = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + B_1\sin 2\omega t + B_2\cos 2\omega t$ می‌باشد که با دوبار مشتقگیری و با قرار دادن آن در معادله دیفرانسیل حرکت ضرایب بصورت

$$C_0 = C_1 = B_1 = 0, \qquad C_2 = \frac{F_0}{4m}, \qquad B_2 = -\frac{F_0}{8m\omega^2}$$

داده می‌شود. جواب نهایی مسئله قبل از اعمال شرایط اولیه

$$x = A_1 + A_2 t + \frac{F_0}{4m}t^2 - \frac{F_0}{8m\omega^2}\cos 2\omega t$$

می‌باشد که با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=0)=0=A_1-\frac{F_0}{8m\omega^2}$$
$$v(t=0)=0=A_2$$

معادله حرکت و سرعت برابر

$$x=\frac{F_0}{8m\omega^2}+\frac{F_0}{4m}t^2-\frac{F_0}{8m\omega^2}\cos 2\omega t$$
$$v=\frac{F_0}{2m\omega}t+\frac{F_0}{4m\omega}\sin 2\omega t$$

بررسی حالتهای حدی ($kt \ll 1$):

$$x\simeq\frac{1}{2}\frac{F_0}{m}t^2+\cdots$$
$$v\simeq\frac{F_0}{m}t+\cdots$$

۱۴) ذره‌ای به جرم $m$ در مبدا در حال سکون است. در لحظه $t=0$ نیروی $F(t)=F_0e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\phi)$ به آن وارد می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن

$$m\frac{dv}{dt}=F(t)=F_0e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\phi)\Rightarrow\frac{dv}{dt}=\frac{F_0}{m}e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\phi)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بالا از دو قسمت همگن و ناهمگن تشکیل شده است. جواب نهایی مسئله برهم‌نهی از قسمت همگن $x_1$ و قسمت ناهمگن $x_2$ است، $x=x_1+x_2$.

مانند مسئله (۱۱) جواب قسمت همگن برابر $x_1=A_1+A_2t$ می‌باشد و جواب پیشنهادی برای حل قسمت ناهمگن بصورت $x_2=e^{-\alpha t}(B_1\sin\omega t+B_2\cos\omega t)$ می‌باشد که با دوبار مشتقگیری و با قرار دادن آن در معادله دیفرانسیل حرکت ضرایب بصورت

$$B_1=\frac{F_0}{m}\frac{(\alpha^2-\omega^2)\cos\phi-2\alpha\omega\sin\phi}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2},\qquad B_2=\frac{F_0}{m}\frac{(\alpha^2-\omega^2)\sin\phi+2\alpha\omega\cos\phi}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$$

داده می‌شود. جواب نهایی مسئله قبل از اعمال شرایط اولیه

$$x=A_1+A_2t+\frac{F_0}{m}e^{-\alpha t}\frac{(\alpha^2-\omega^2)\sin(\omega t+\phi)+2\alpha\omega\cos(\omega t+\phi)}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$$

می‌باشد که با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=0)=0=A_1+\frac{F_0}{m}\frac{(\alpha^2-\omega^2)\sin\phi+2\alpha\omega\cos\phi}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$$

$$v(t=0)=0=A_2-\frac{F_0}{m}\frac{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha\sin\phi+\omega\cos\phi)}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$$

معادله حرکت و سرعت برابر

$$x=-\frac{F_0}{m}\frac{(\alpha^2-\omega^2)\sin\phi+2\alpha\omega\cos\phi}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}+\frac{F_0}{m}\frac{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha\sin\phi+\omega\cos\phi)}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}t$$

$$+\frac{F_0}{m}e^{-\alpha t}\frac{(\alpha^2-\omega^2)\sin(\omega t+\phi)+2\alpha\omega\cos(\omega t+\phi)}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$$

$$v=\frac{F_0}{m}\frac{(\alpha^2+\omega^2)(\alpha\sin\phi+\omega\cos\phi)}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}-\frac{F_0\alpha}{m}e^{-\alpha t}\frac{(\alpha^2-\omega^2)\sin(\omega t+\phi)+2\alpha\omega\cos(\omega t+\phi)}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$$

$$+\frac{F_0\omega}{m}e^{-\alpha t}\frac{(\alpha^2-\omega^2)\cos(\omega t+\phi)-2\alpha\omega\sin(\omega t+\phi)}{(\alpha^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}$$

بررسی حالتهای حدی ($kt\ll 1$):

۱۵) گلوله ای به جرم $m$ با سرعت $v_0$ در روی یک سطح افقی پرتاب می‌شود. نیروی کندساز متناسب با ریشه‌ی دوم سرعت لحظه‌ای است. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن

$$m\frac{dv}{dt}=-kv^2\Rightarrow\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v^2$$

در اینجا با توجه به شکل معادله دیفرانسیل، روش انتگرالگیری از طرفین پیشنهاد می‌شود، بدین ترتیب

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v^2\Rightarrow\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=-\frac{k}{m}\int_0^t dt\Rightarrow\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}\right)=\frac{k}{m}t\Rightarrow\frac{v_0}{v}=1+\frac{kv_0}{m}t$$

در اینجا $\frac{m}{kv_0}$ مقیاس زمان دارد، که اگر $\tau=\frac{m}{kv_0}$ داریم

$$v=\frac{v_0}{1+\frac{t}{\tau}}$$

با انتگرالگیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$dx=\frac{v_0}{1+\frac{t}{\tau}}dt\Rightarrow\int_0^x dx=\int_0^t\frac{v_0}{1+\frac{t}{\tau}}dt\Rightarrow x=v_0\tau\ln(1+\frac{t}{\tau})$$

بررسی حالتهای حدی ($t/\tau\ll 1$):

$$x\simeq v_0t-\frac{v_0}{2\tau}t^2$$

$$v\simeq v_0-\frac{v_0}{\tau}t$$

۱۶ ) گلوله ای به جرم $m$ با سرعت اولیه $v_\circ$ از روی سطح زمین بطور قائم به بالا پرتاب می‌شود. اگر نیروی کندساز متناسب با سرعت لحظه‌ای ذره باشد است. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بالا از دو قسمت همگن و ناهمگن تشکیل شده است. جواب نهایی مسئله برهم‌نهی از قسمت همگن $y_۱$ و قسمت ناهمگن $y_۲$ است، $y = y_۱ + y_۲$. در اینجا $\frac{m}{k}$ مقیاس زمان دارد، بنابراین $\tau = \frac{m}{k}$.

قسمت همگن معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بالا،

$$\frac{d^۲y_۱}{dt^۲} + \frac{۱}{\tau}\frac{dy_۱}{dt} = \circ$$

دارای یک جواب پیشنهادی بصورت $y_۱ = Ae^{rt}$ است که با دوبار مشتقگیری و قرار دادن آن در قسمت همگن معادله دیفرانسیل بالا منجر به معادله مشخصه $r^۲ + \frac{۱}{\tau}r = \circ$ می‌شود.

در نتیجه جواب قسمت همگن $r_۱ = \circ, \quad r_۲ = -\frac{۱}{\tau}$ برابر است با

$$y_۱ = A_۱ + A_۲e^{-\frac{t}{\tau}}$$

که $A_۱$ و $A_۲$ به شرایط اولیه مسئله بستگی دارد.

جواب پیشنهادی برای حل قسمت ناهمگن

$$\frac{d^۲y_۲}{dt^۲} + \frac{۱}{\tau}\frac{dy_۲}{dt} = -g$$

بصورت $y_۲ = C_\circ + C_۱t + C_۲t^۲$ می‌باشد که با دوبار مشتقگیری و قرار دادن آن در قسمت ناهمگن معادله دیفرانسیل بالا منجر به پیدا شدن ضرایب می‌شود، $C_\circ = C_۲ = \circ, C_۱ = -g\tau$. بدین ترتیب جواب قسمت ناهمگن برابر است با

$$y_۲ = -g\tau t$$

جواب نهایی مسئله قبل از اعمال شرایط اولیه

$$y = y_۱ + y_۲ = A_۱ + A_۲e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau t$$

می‌باشد که با اعمال شرایط اولیه

$$x(t = \circ) = \circ = A_۱ + A_۲$$

$$v(t = \circ) = v_\circ = -\frac{۱}{\tau}A_۲ - g\tau \Rightarrow A_۲ = -(v_\circ\tau + g\tau^۲)$$

معادله حرکت و سرعت برابر

$$x = (v_\circ \tau + g\tau^۲)(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}}) - g\tau t$$

$$v = (v_\circ + g\tau)e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau$$

بررسی حالتهای حدی ($t/\tau \ll ۱$):

$$x \simeq v_\circ t - \frac{۱}{۲}(\frac{v_\circ}{\tau} + g)t^۲ + \cdots$$

$$v \simeq v_\circ - (\frac{v_\circ}{\tau} + g)t + \cdots$$

زمان رسیدن به ارتفاع اوج $t_s$ برابر است با $v = \circ$،

$$v = \circ \Rightarrow (v_\circ + g\tau)e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau = \circ \Rightarrow t_s = \tau \ln\left(۱ + \frac{v_\circ}{g\tau}\right)$$

۱۷) گلوله ای به جرم $m$ با سرعت اولیه $v_\circ$ از روی سطح زمین بطور قائم به بالا پرتاب می‌شود. اگر نیروی کندساز متناسب با مربع سرعت لحظه‌ای ذره باشد است. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن داریم

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv^۲ \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v^۲ \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g(۱ + \frac{k}{mg}v^۲) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g\left(۱ + \frac{v^۲}{v_t^۲}\right)$$

نسبت $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ مقیاس سرعت دارد. در اینجا بخاطر شکل معادله دیفرانسیل از روش انتگرالگیری برای حل مسئله استفاده می‌کنیم.

$$\int_{v_\circ}^{v} \frac{dv}{۱ + \frac{v^۲}{v_t^۲}} = -g\int_\circ^t dt \Rightarrow v_t\left(\tan^{-۱}\left(\frac{v}{v_t}\right) - \tan^{-۱}\left(\frac{v_\circ}{v_t}\right)\right) = -gt$$

اگر $\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{v_\circ}{v_t}\right)$

$$v = -v_t \tan\left(\frac{gt}{v_t} - \phi\right)$$

نسبت $\frac{v_t}{g}$ مقیاس زمان دارد.

$$v = -v_t \tan\left(\frac{t}{\tau} - \phi\right)$$

با انتگرالگیری دوباره از معادله بالا،

$$\int_\circ^y dy = -v_t \int_\circ^t \tan\left(\frac{t}{\tau} - \phi\right) dt \Rightarrow y = v_t\tau \ln\left[\cos\left(\frac{t}{\tau} - \phi\right)\right]$$

بررسی حالتهای حدی ($t/\tau \ll ۱$):

$$x \simeq v_t\tau \ln\cos\phi + v_\circ t - \frac{۱}{۲}g\left(۱+\frac{v_\circ^۲}{v_t^۲}\right)t^۲+\cdots$$

$$v \simeq v_\circ - g\left(۱+\frac{v_\circ^۲}{v_t^۲}\right)t+\cdots$$

۱۸ ) گلوله ای به جرم $m$ از ارتفاع $y_\circ$ در لحظه $t=\circ$ رها می‌شود. اگر نیروی اصطکاک هوا متناسب با سرعت لحظه‌ای ذره باشد است. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m}v$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بالا از دو قسمت همگن و ناهمگن تشکیل شده است. جواب نهایی مسئله برهم‌نهی از قسمت همگن $y_۱$ و قسمت ناهمگن $y_۲$ است، $y=y_۱+y_۲$. در اینجا $\frac{m}{k}$ مقیاس زمان دارد، بنابراین $\tau=\frac{m}{k}$.

قسمت همگن معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بالا،

$$\frac{d^۲y_۱}{dt^۲}+\frac{۱}{\tau}\frac{dy_۱}{dt}=\circ$$

دارای یک جواب پیشنهادی بصورت $y_۱=Ae^{rt}$ است که با دوبار مشتقگیری و قرار دادن آن در قسمت همگن معادله دیفرانسیل بالا منجر به معادله مشخصه $r^۲+\frac{۱}{\tau}r=\circ$ می‌شود. در نتیجه جواب قسمت همگن $r_۱=\circ, \quad r_۲=-\frac{۱}{\tau}$ برابر است با

$$y_۱ = A_۱ + A_۲e^{-\frac{t}{\tau}}$$

که $A_۱$ و $A_۲$ به شرایط اولیه مسئله بستگی دارد.

جواب پیشنهادی برای حل قسمت ناهمگن

$$\frac{d^۲y_۲}{dt^۲}+\frac{۱}{\tau}\frac{dy_۲}{dt}=-g$$

بصورت $y_۲=C_\circ+C_۱t+C_۲t^۲$ می‌باشد که با دوبار مشتقگیری و قرار دادن آن در قسمت ناهمگن معادله دیفرانسیل بالا منجر به پیدا شدن ضرایب می‌شود، $C_\circ=C_۲=\circ, C_۱=-g\tau$. بدین ترتیب جواب قسمت ناهمگن برابر است با

$$y_۲=-g\tau t$$

جواب نهایی مسئله قبل از اعمال شرایط اولیه

$$y=y_۱+y_۲=A_۱+A_۲e^{-\frac{t}{\tau}}-g\tau t$$

می‌باشد که با اعمال شرایط اولیه

$$v(t=\circ)=\circ=-\frac{۱}{\tau}A_۲-g\tau \Rightarrow A_۲=-g\tau^۲$$

$$y(t=\circ)=y_\circ=A_۱+A_۲ \Rightarrow A_۱=y_\circ+g\tau^۲$$

معادله حرکت و سرعت برابر

$$y=y_\circ+g\tau^۲(۱-e^{-\frac{t}{\tau}})-g\tau t$$

$$v=g\tau e^{-\frac{t}{\tau}}-g\tau$$

بررسی حالتهای حدی $(t/\tau \ll ۱)$:

$$x \simeq y_\circ-\frac{۱}{۲}gt^۲+\cdots$$

$$v \simeq -gt+\cdots$$

برای زمانهای با اندازه کافی بزرگ، سرعت حدی ذره $v_t$ برابر

$$\lim_{\frac{t}{\tau}\to\infty} v=-g\tau=-v_t$$

۱۹) گلوله ای به جرم $m$ از ارتفاع $y_\circ$ در لحظه $t=\circ$ رها می‌شود. اگر نیروی اصطکاک هوا متناسب با مربع سرعت لحظه‌ای ذره باشد است. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن داریم

$$m\frac{dv}{dt}=-mg+kv^۲ \Rightarrow \frac{dv}{dt}=-g-\frac{k}{m}v^۲ \Rightarrow \frac{dv}{dt}=-g(۱-\frac{k}{mg}v^۲) \Rightarrow \frac{dv}{dt}=-g\left(۱-\frac{v^۲}{v_t^۲}\right)$$

نسبت $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ مقیاس سرعت دارد. در اینجا بخاطر شکل معادله دیفرانسیل از روش انتگرالگیری برای حل مسئله استفاده می‌کنیم.

$$\int_\circ^v \frac{dv}{۱-\frac{v^۲}{v_t^۲}}=-g\int_\circ^t dt \Rightarrow v_t\tanh^{-۱}\left(\frac{v}{v_t}\right)=-gt$$

و

$$v=-v_t\tanh\left(\frac{gt}{v_t}\right)$$

نسبت $\frac{v_t}{g}$ مقیاس زمان دارد.

$$v=-v_t\tanh\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

با انتگرالگیری دوباره از معادله بالا،

$$\int_\circ^y dy=-v_t\int_\circ^t \tanh\left(\frac{t}{\tau}\right)dt \Rightarrow y=-v_t\tau\ln\left[\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

بررسی حالتهای حدی $(t/\tau \ll 1)$:

$$x \simeq -\frac{1}{2}gt^2 + \cdots$$
$$v \simeq -gt + \cdots$$

بررسی حالتهای حدی $(t/\tau \gg 1)$:

$$x \simeq -\frac{1}{2}gt^2 + \cdots$$
$$v \simeq -gt + \cdots$$

۲۰) موتور قایقی وقتی که سرعت آن $v_0$ خاموش می‌شود. از این به بعد حرکت قایق در اثر یک نیروی کندساز $F(t) = F_0 e^{-kv}$ کند می‌شود. $x(t)$ و $v(t)$ را محاسبه کنید و در مورد حالتهای حدی $x(t)$ و $v(t)$ بحث کنید. چه مدت طول می‌کشد تا قایق متوقف شود و چه فاصله‌ای را تا توقف طی می‌کند.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن داریم

$$m\frac{dv}{dt} = F_0 e^{-kv} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m}e^{-kv}$$

ثابت $k$ ابعاد سرعت دارد. در اینجا بخاطر شکل معادله دیفرانسیل از روش انتگرالگیری برای حل مسئله استفاده می‌کنیم.

$$\int_0^v e^{kv}dv = \frac{F_0}{m}\int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{k}(e^{kv} - e^{kv_0}) = \frac{F_0}{m}t$$

و

$$v = \frac{1}{k}\ln\left(e^{kv_0} + \frac{kF_0}{m}t\right) = \frac{1}{k}\ln\left[e^{kv_0}\left(1 + \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right)\right] = v_0 + \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right)$$

با انتگرالگیری دوباره از معادله بالا،

$$\int_0^x dx = v_0 t + \frac{1}{k}\int_0^t \ln\left(1 + \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right)dt \Rightarrow x = v_0 t + \frac{me^{kv_0}}{F_0 k^2}\int_0^{t'} \ln(1+t')dt'$$

که در آن $t' = \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t$

$$x = v_0 t + \frac{me^{kv_0}}{F_0 k^2}\left[\left(1 + \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right)\ln\left(1 + \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right) - \left(1 + \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right)\right]_0^t$$

$$x = v_0 t + \frac{me^{kv_0}}{F_0 k^2}\left[\left(1 + \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right)\ln\left(1 + \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right) - \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right]$$

$$x = \left(v_0 - \frac{1}{k}\right)t + \frac{me^{kv_0}}{F_0 k^2}\left(1 + \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right)\ln\left(1 + \frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right)$$

برای بدست آوردن زمان توقف $v=0$، بنابراین

$$-v_0 = \frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{kF_0 e^{-kv_0}}{m}t\right) \to t_{stop} = \frac{m}{kF_0}(1-e^{kv_0})$$

مسافت طی شده برابر است با

$$\Delta x = \frac{mv_0}{kF_0} - \frac{m}{k^2F_0}(1+e^{kv_0})$$

۲۱) ذره‌ای به جرم $m$ با سرعت اولیه $v_0$، در حالی که تحت تاثیر $F(v)=m(kv+cv^2)$ قرار دارد، شروع به حرکت می‌کند. جابجایی را بصورت تابعی از زمان پیدا کنید.

حل: بر اساس قانون دوم نیوتن داریم

$$m\frac{dv}{dt} = m(kv+cv^2) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = kv+cv^2$$

در اینجا بخاطر شکل معادله دیفرانسیل از روش انتگرالگیری برای حل مسئله استفاده می‌کنیم.

$$\frac{1}{k}\int_{v_0}^{v}\left(\frac{1}{v}-\frac{c}{k+cv}\right)dv = \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) - \ln\left(\frac{k+cv}{k+cv_0}\right) = kt$$

و

$$v = \frac{kv_0}{\left(\frac{k+cv_0}{v_0}\right)e^{-kt} - c} \tag{1}$$

با انتگرالگیری دوباره از قانون دوم نیوتن،

$$m\frac{dv}{dt} = m(kv+cv^2) \Rightarrow \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = kv+cv^2 \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = kv+cv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = k+cv$$

و

$$x = \frac{1}{c}\ln\left(\frac{k+cv}{k+cv_0}\right) \tag{2}$$

از ترکیب رابطه (۱) و (۲) بایکدیگر جابجایی بصورت تابعی از زمان بدست می‌آید.

۲۲) از مسئله ۱۷ و ۱۹ استفاده کنید و نشان دهید که سرعت گلوله هنگام بازگشت به مکان اولیه برابر

$$\frac{v_0 v_t}{\sqrt{v_0^2+v_t^2}}$$

است که در آن سرعت حدی $v_t$ برابر $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ است.

حل: وقتی ذره صعود می‌کند، قانون دوم نیوتن برابر

$$m\frac{dv}{dt} = -mg-kv^2 \Rightarrow m\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = -mg-kv^2 \Rightarrow m\frac{vdv}{mg+kv^2} = -dy \tag{3}$$

وقتی ذره سقوط می‌کند، قانون دوم نیوتن برابر

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + kv^{2} \Rightarrow m\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = -mg + kv^{2} \Rightarrow m\frac{vdv}{-mg + kv^{2}} = dy \qquad (4)$$

در رابطه (۳) با انتگرالگیری داریم

$$m\int_{v_0}^{0} \frac{vdv}{mg + kv^{2}} = -\int_{0}^{y_s} dy \Rightarrow \frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg}{mg + kv_0^{2}}\right) = -y_s \qquad (5)$$

در رابطه (۴) با انتگرالگیری داریم

$$m\int_{0}^{u} \frac{vdv}{-mg + kv^{2}} = \int_{y_s}^{0} dy \Rightarrow \frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg - kv^{2}}{mg}\right) = -y_s \qquad (6)$$

از برابر قرار دادن روابط (۵) و (۶) با یکدیگر داریم

$$\frac{mg}{mg + kv_0^{2}} = \frac{mg - kv^{2}}{mg} \Rightarrow v = \frac{v_0 v_t}{\sqrt{v_0^{2} + v_t^{2}}}$$

که در آن سرعت حدی $v_t$ برابر $\sqrt{\frac{mg}{k}}$ است.

مظفری