هوالعلیم

تمرین شماره: ۲ درس: مکانیک تحلیلی ۱

۱) نتایج زیر را برای یک نوسانگر هماهنگ ساده بدست آورید،

$$\langle V\rangle_{space} = \frac{۱}{۶}kA^۲, \quad \langle K\rangle_{space} = \frac{۱}{۳}kA^۲ \quad \langle E\rangle_{space} = \langle V\rangle_{space} + \langle K\rangle_{space} = \langle E\rangle_{time}.$$

۲) جرم کوچک m در داخل یک جعبه‌ای به جرم M قرار دارد. جعبه بزرگ به فنر قائمی با ثابت فنر k بسته شده است. وقتی جعبه از حالت تعادلش به اندازه $y_۰$ جابجا می‌شود و رها می‌شود، حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد. واکنش بین m و M را بصورت تابعی از زمان بدست آورید.

۳) یک قطعه چوب به سطح مقطع A و چگالی جرمی ρ وقتی در آب شناور است حجمی برابر V از آب را جابجا می‌کند. اگر شخصی به جرم m روی این قطعه بپرد، فرکانس نوسانات کوچک را پیدا کنید.

۴) یک انتهای فنری با ثابت فنر k تثبیت شده است و انتهای دیگر آن به جرم m بسته شده است. برای مدت زمان $t_۰$ تحت تاثیر نیروی ثابت افقی F قرار می‌گیرد. نشان دهید که مکان جرم m پس از قطع نیرو با رابطه زیر داده می‌شود

$$x = x_۰ + \frac{F}{k}\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_۰) - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

۵) نوسانگر نامیرائی به جرم m و فرکانس طبیعی $\omega_۰$ در لحظه‌ی $t = ۰$ با سرعت اولیه $v_۰$ از مبدا شروع به حرکت می‌کند و تا $t = \frac{۳\pi}{۲\omega_۰}$ به آزادی نوسان می‌کند. از این لحظه به بعد نیروی $F = F_۰\cos(\omega t + \theta)$ اعمال می‌شود. معادله حرکت را پیدا کنید.

۶) انرژی پتانسیل برای نیروی بین دو اتم در یک مولکول دو اتمی بصورت زیر است

$$V(x) = \frac{a}{x^{۱۲}} - \frac{b}{x^۶}.$$

که در آن x فاصله بین دو اتم از یکدیگر است و a و b ثابت‌های مثبت‌اند. الف) تابع نیرو را بدست آورید. ب) با فرض اینکه یکی از اتمها سنگین باشد و ساکن باقی بماند و اتم سبک در امتداد خط مستقیم حرکت کند. حرکات ممکنه ذره سبکتر را بحث کنید. پ) اگر جرم اتم سبکتر m باشد، نقطه تعادل و فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه تعادل را بدست آورید.

۷) ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی زیر قرار می‌گیرد

$$F(x) = B\left(\frac{a^۲}{x^۲} - \frac{۲۸a^۵}{x^۵} + \frac{۲۷a^۸}{x^۸}\right).$$

الف) تابع انرژی پتانسیل را یافته و آنرا رسم کنید(a و B ثابت‌های مثبت‌اند). ب) انواع حرکات ممکنه را بحث کنید. ج) تمام نقاط تعادل را پیدا کنید و فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه‌های تعادل پایدار را بدست آورید.

۸) ذره‌ای به جرم m در چاه پتانسیل زیر حرکت می‌کند

$$V(x) = -V_۰\frac{a^۲(a^۲ + x^۲)}{۸a^۴ + x^۴}.$$

الف) $V(x)$ و $F(x)$ را رسم کنید($V_۰$ و a ثابت‌های مثبت‌اند). ب) انواع حرکات ممکنه را بحث کنید. ج) تمام نقاط تعادل را پیدا کنید و فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه‌های تعادل پایدار را بدست آورید.

۹) ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی بازگرداننده‌ی $-kx$ و نیروی میرائی $-bx$ قرار گرفته است به اندازه $x_۰$ از حالت تعادل خود جابجا می‌شود و سپس با سرعت اولیه‌ای برابر با صفر رها می‌گردد. معادله حرکت کندمیرا، میرای بحرانی و تند میرا را پیدا کنید.

۱۰) مسئله (۱۱) را برای حالتی حل کنید که جرم از حالت تعادل خود با سرعت اولیه $v_۰$ شروع به حرکت می کند.

۱۱) نیروی $F_۰(۱-e^{-at})$ بر نوسانگر وارد می‌شود که در لحظه $t = ۰$ ساکن است. جرم نوسانگرد m و ثابت فنر $k = ۴ma^۲$ و $b = ma$ است. معادله حرکت را پیدا کنید.

۱۲) معادله حرکت $x(t)$ یک نوسانگر میرا وقتی ذره m تحت تاثیر یک نیروی هماهنگ میرا $F_۰e^{-\alpha t}\cos\omega t$ قرار دارد را بدست آورید.

۱۳) معادله حرکت $x(t)$ یک نوسانگر میرا بحرانی وقتی ذره m از مبدا با سرعت اولیه $v_۰$ تحت تاثیر یک نیروی واداشته $F_۰\sin\omega t$ شروع به حرکت می‌کند را بدست آورید.

۱۴) یک نوسانگر میرائی را که در آن $\gamma = \frac{\omega_۰}{۴}$ است را تحت تاثیر نیروی واداشته

$$F = A_۱\cos\omega t + A_۳\cos ۳\omega t$$

قرار داده‌ایم مقدار $x(t)$ را محاسبه کنید.

۱۵) مسئله (۱۴) را برای یک نوسانگر میرا تکرار کنید.

۱۶) معادله حرکت $x(t)$ یک نوسانگر هماهنگ ساده را وقتی تحت تاثیر نیروی نوسانی

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0, & \frac{T}{2} \le t \le T \end{cases}$$

قرار دارد را محاسبه کنید(T پریود نوسانات نیرو می‌باشد).

۱۷) مسئله (۱۶) را برای یک نوسانگر میرا تکرار کنید.

۸) برای یک نوسانگر میرا نشان دهید

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2.$$

مظفری