هوالعلیم

حل تمرین شماره: ۲ درس: مکانیک تحلیلی ۱

۱) نتایج زیر را برای یک نوسانگر هماهنگ ساده بدست آورید،

$$\langle V\rangle_{space}=\frac{1}{6}kA^2,\quad \langle K\rangle_{space}=\frac{1}{3}kA^2\quad \langle E\rangle_{space}=\langle V\rangle_{space}+\langle K\rangle_{space}=\langle E\rangle_{time}.$$

حل: انرژی یک نوسانگر ساده تشکیل شده است از دو جمله انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل $\frac{1}{2}kx^2$

$$E=K+V=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$$

متوسط یک تابع دلخواه $f(x)$ در یک بازه بسته $[x_1,x_2]$ برابر است با

$$\langle f\rangle=\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$$

متوسط فضایی انرژی نوسانگر در بازه $-A\le x\le A$ برابر با

$$\langle E\rangle_{space}=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)dx=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}mv^2dx+\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}kx^2dx$$

$$\langle E\rangle_{space}=\langle K\rangle_{space}+\langle V\rangle_{space}$$

که A دامنه نوسانات نوسانگر می‌باشد. اگر معادله حرکت نوسانگر ساده برابر $x=A\sin(\omega t+\phi)$ باشد که در آن ϕ فاز اولیه حرکت است. سرعت حرکت نوسانگر برابر $v=A\omega\cos(\omega t+\phi)$. متوسط‌های فضائی انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی برابر است با

$$\langle V\rangle_{space}=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}kx^2dx=\frac{1}{2}k\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}x^2dx=\frac{1}{6}kA^2$$

$$\langle K\rangle_{space}=\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\frac{1}{2}mv^2dx=\frac{1}{2}m\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}v^2dx=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\cos^2(\omega t+\phi)dx$$

$$\langle V\rangle_{space}=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\frac{1}{2A}\int_{-A}^{A}\left[1-\left(\frac{x}{A}\right)^2\right]dx=\frac{1}{3}m\omega^2A^2$$

با توجه به اینکه $k=m\omega^2$ بنابراین

$$\langle V\rangle_{space}=\frac{1}{6}m\omega^2A^2$$

$$\langle K\rangle_{space}=\frac{1}{3}m\omega^2A^2$$

با این نتیجه متوسط فضائی انرژی کل نوسانگر ساده برابر

$$\langle E\rangle_{space} = \langle V\rangle_{space} + \langle K\rangle_{space} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \qquad (1)$$

متوسط زمانی انرژی نوسانگر در بازه $0 \leq t \leq T$ برابر است با

$$\langle E\rangle_{time} = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}mv^2 dt + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kx^2 dt$$

$$\langle E\rangle_{time} = \langle K\rangle_{time} + \langle V\rangle_{time}$$

که $T = 2\pi/\omega$ پریود نوسانات نوسانگر می‌باشد. متوسط‌های زمانی انرژی پتانسیل و جنبشی برابر است با

$$\langle V\rangle_{time} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kx^2 dt = \frac{1}{2}kA^2\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \phi)dt = \frac{1}{2}kA^2\frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\langle K\rangle_{time} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}mv^2 dt = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t + \phi)dt = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\frac{1}{T}\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2$$

بنابراین

$$\langle V\rangle_{time} = \langle K\rangle_{time} = \frac{1}{4}m\omega^2 A^2$$

با این نتیجه متوسط زمانی انرژی کل نوسانگر ساده برابر

$$\langle E\rangle_{time} = \langle V\rangle_{time} + \langle K\rangle_{time} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \qquad (2)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند که متوسط فضائی و زمانی انرژی یک نوسانگر ساده با یکدیگر برابرند

$$\langle E\rangle_{time} = \langle E\rangle_{space} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

۲) جرم کوچک m در داخل یک جعبه‌ای به جرم M قرار دارد. جعبه بزرگ به فنر قائمی با ثابت فنر k بسته شده است. وقتی جعبه از حالت تعادلش به اندازه y_0 جابجا می‌شود و رها می‌شود، حرکت هماهنگ ساده انجام می دهد. واکنش بین m و M را بصورت تابعی از زمان بدست آورید.

حل: قانون دوم نیوتن برای جرم کوچک m برابر

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = N - mg \qquad (3)$$

و برای جعبه‌ی به جرم M برابر

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = N - Mg - ky$$

از جمع عبارتهای بالا با یکدیگر داریم

$$(M+m)\frac{d^2y}{dt^2} = -(M+m)g - ky \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{M+m}y = -g$$

که قانون دوم نیوتن برای ذره $M+m$ می‌باشد. اگر $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$، معادله دیفرانسیل حرکت برابر

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = -g$$

جواب قسمت همگن و ناهمگن معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ بالا برابر

$$y = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{g}{\omega^2}$$

ثوابت A و B با توجه به شرایط اولیه مسئله بدست می‌آیند، یعنی

$$y(t=0) = -y_0 \Rightarrow A - \frac{g}{\omega^2} = -y_0 \Rightarrow A = \frac{g}{\omega^2} - y_0$$

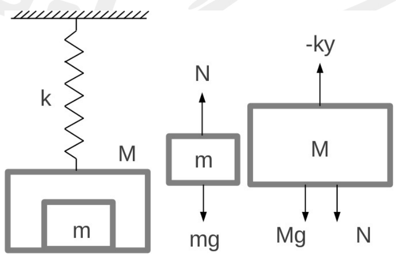
$$v(t=0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

بنابراین

$$y = \left(\frac{g}{\omega^2} - y_0\right)\cos\omega t - \frac{g}{\omega^2}$$

با استفاده از معادله (۳) داریم

$$N = m\frac{d^2y}{dt^2} + mg \Rightarrow N = m(-g + \omega^2 y_0)\cos\omega t + mg$$



۳) یک قطعه چوب به سطح مقطع A و چگالی جرمی ρ وقتی در آب شناور است حجمی برابر V از آب را جابجا می‌کند. اگر شخصی به جرم m روی این قطعه بپرد، فرکانس نوسانات کوچک را پیدا کنید.

۴) یک انتهای فنری با ثابت فنر k تثبیت شده است و انتهای دیگر آن به جرم m بسته شده است. برای مدت زمان $t_۰$ تحت تاثیر نیروی ثابت افقی F قرار می‌گیرد. نشان دهید که مکان جرم m پس از قطع نیرو با رابطه زیر داده می‌شود

$$x = x_۰ + \frac{F}{k}\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_۰) - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right).$$

حل: بازای $t \le t_۰$ معادله دیفرانسیل حرکت ذره برابر

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲} + kx = F \Rightarrow \frac{d^۲x}{dt^۲} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m} \Rightarrow \frac{d^۲x}{dt^۲} + \omega^۲ x = \frac{F}{m}$$

که جواب قسمت همگن و ناهمگن معادله بالا برابر

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{F}{m\omega^۲}$$

اگر فرض کنیم $x(t=۰) = ۰$ و $v(t=۰) = ۰$ داریم

$$۰ = A + \frac{F}{m\omega^۲} \Rightarrow A = -\frac{F}{m\omega^۲}$$

$$۰ = \omega B \Rightarrow B = ۰$$

بنابراین

$$x = -\frac{F}{m\omega^۲}\cos\omega t + \frac{F}{m\omega^۲}$$

بازای $t > t_۰$ معادله دیفرانسیل حرکت ذره برابر

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲} + kx = ۰ \Rightarrow \frac{d^۲x}{dt^۲} + \frac{k}{m}x = ۰ \Rightarrow \frac{d^۲x}{dt^۲} + \omega^۲ x = ۰$$

که جواب معادله دیفرانسیل بالا برابر

$$x = A'\cos\omega(t-t_۰) + B'\sin\omega(t-t_۰)$$

از قسمت قبل مسئله داریم $x(t=t_۰) = -\frac{F}{m\omega^۲}\cos\omega t_۰ + \frac{F}{m\omega^۲}$ و $v(t=t_۰) = \frac{F}{m\omega}\sin\omega t_۰$، پس

$$A' = -\frac{F}{m\omega^۲}\cos\omega t_۰ + \frac{F}{m\omega^۲}$$

$$B' = \frac{F}{m\omega^۲}\sin\omega t_۰$$

بنابراین

$$x = \frac{F}{m\omega^۲}(\cos\omega(t-t_۰) - \cos\omega t) = \frac{F}{k}\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_۰) - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

۵) نوسانگر نامیرائی به جرم m و فرکانس طبیعی $\omega_\circ$ در لحظه‌ی $t=\circ$ با سرعت اولیه $v_\circ$ از مبدا شروع به حرکت می‌کند و تا $t=\frac{۳\pi}{۲\omega_\circ}$ به آزادی نوسان می‌کند. از این لحظه به بعد نیروی $F=F_\circ\cos(\omega t+\theta)$ اعمال می‌شود. معادله حرکت را پیدا کنید.

حل: بازای $t\le\frac{۳\pi}{۲\omega_\circ}$ معادله دیفرانسیل حرکت ذره برابر

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲}+kx=\circ\Rightarrow\frac{d^۲x}{dt^۲}+\frac{k}{m}x=\circ\Rightarrow\frac{d^۲x}{dt^۲}+\omega_\circ^۲x=\circ$$

که جواب معادله دیفرانسیل بالا برابر

$$x=A\cos\omega_\circ t+B\sin\omega_\circ t$$

با اعمال شرایط اولیه داریم

$$x=\frac{v_\circ}{\omega_\circ}\sin\omega_\circ t$$

بازای $t>\frac{۳\pi}{۲\omega_\circ}$ معادله دیفرانسیل حرکت ذره برابر

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲}+kx=F_\circ\cos(\omega t+\theta)\Rightarrow\frac{d^۲x}{dt^۲}+\frac{k}{m}x=\frac{F_\circ}{m}\cos(\omega t+\theta)\Rightarrow\frac{d^۲x}{dt^۲}+\omega_\circ^۲x=\frac{F_\circ}{m}\cos(\omega t+\theta)$$

که جواب قسمت همگن و ناهمگن معادله دیفرانسیل بالا برابر

$$x=A'\cos\omega_\circ(t-\frac{۳\pi}{۲\omega_\circ})+B'\sin\omega_\circ(t-\frac{۳\pi}{۲\omega_\circ})+\frac{F_\circ}{m(\omega_\circ^۲-\omega^۲)}\cos(\omega t+\theta)$$

$$x=A'\cos(\omega_\circ t-\frac{۳\pi}{۲})+B'\sin(\omega_\circ t-\frac{۳\pi}{۲})+\frac{F_\circ}{m(\omega_\circ^۲-\omega^۲)}\cos(\omega t+\theta)$$

$$x=-A'\sin\omega_\circ t+B'\cos\omega_\circ t+\frac{F_\circ}{m(\omega_\circ^۲-\omega^۲)}\cos(\omega t+\theta)$$

از قسمت قبل مسئله داریم $x(t=\frac{۳\pi}{۲\omega_\circ})=-\frac{v_\circ}{\omega_\circ}$ و $v(t=\frac{۳\pi}{۲\omega_\circ})=\circ$، پس

$$A'=-\frac{v_\circ}{\omega_\circ}-\frac{F_\circ}{m(\omega_\circ^۲-\omega^۲)}\cos(\frac{۲\pi\omega}{۳\omega_\circ}+\theta)$$

$$B'=\frac{F_\circ\omega}{m(\omega_\circ^۲-\omega^۲)\omega_\circ}\sin(\frac{۲\pi\omega}{۳\omega_\circ}+\theta)$$

بنابراین

$$x=\left(\frac{v_\circ}{\omega_\circ}+\frac{F_\circ}{m(\omega_\circ^۲-\omega^۲)}\cos(\frac{۲\pi\omega}{۳\omega_\circ}+\theta)\right)\sin\omega_\circ t+\left(\frac{F_\circ\omega}{m(\omega_\circ^۲-\omega^۲)\omega_\circ}\sin(\frac{۲\pi\omega}{۳\omega_\circ}+\theta)\right)\cos\omega_\circ t$$
$$+\frac{F_\circ}{m(\omega_\circ^۲-\omega^۲)}\cos(\omega t+\theta)$$

۶) انرژی پتانسیل برای نیروی بین دو اتم در یک مولکول دو اتمی بصورت زیر است

$$V(x) = \frac{a}{x^{۱۲}} - \frac{b}{x^{۶}}.$$

که در آن x فاصله بین دو اتم از یکدیگر است و a و b ثابت‌های مثبت‌اند. الف) تابع نیرو را بدست آورید. ب) با فرض اینکه یکی از اتمها سنگین باشد و ساکن باقی بماند و اتم سبک در امتداد خط مستقیم حرکت کند. حرکات ممکنه ذره سبکتر را بحث کنید. پ) اگر جرم اتم سبکتر m باشد، نقطه تعادل و فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه تعادل را بدست آورید.

حل: برای سادگی ثوابت a و b را با ثوابت σ و ϵ بصورت زیر عوض می‌کنیم

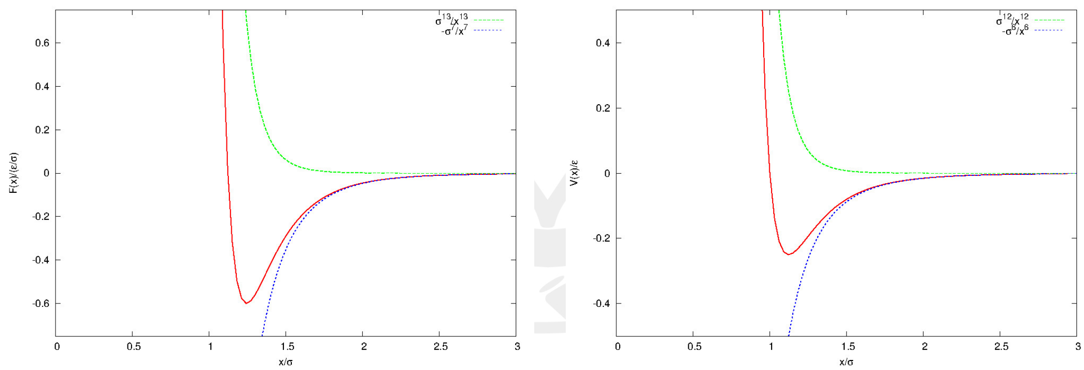
$$a = \epsilon\sigma^{۱۲}, \qquad b = \epsilon\sigma^{۶}$$

در این تغییر متغییر σ ابعاد طول، ϵ ابعاد انرژی و ϵ/σ ابعاد نیرو دارد. با این شرایط تابع انرژی پتانسیل و نیروی برابر

$$V(x) = \epsilon\left(\frac{\sigma^{۱۲}}{x^{۱۲}} - \frac{\sigma^{۶}}{x^{۶}}\right)$$

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = \epsilon\left(\frac{۱۲\sigma^{۱۲}}{x^{۱۳}} - \frac{۶\sigma^{۶}}{x^{۷}}\right) = \frac{\epsilon}{\sigma}\left(\frac{۱۲\sigma^{۱۳}}{x^{۱۳}} - \frac{۶\sigma^{۷}}{x^{۷}}\right)$$

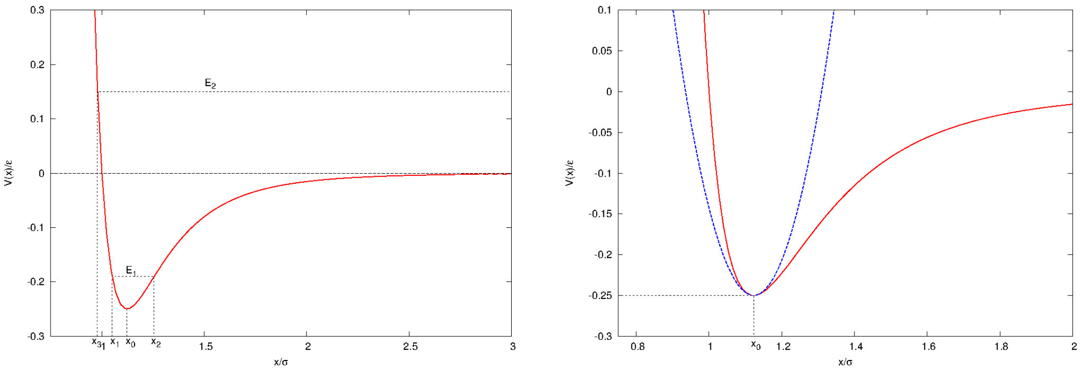
نمودار انرژی پتانسیل و نیروی ناشی از آن در شکلهای زیر داده شده است: از برابر صفر قرار



شکل ۱: نمودار قرمز سمت چپ مربوط به انرژی پتانسیل و نمودار سمت راست مربوط به نیروی یک ذره به جرم m در فاصله x از مبدا می‌باشد. نمودارهای قرمز از برهم‌نهی نمودار خطچین(سبز) و نمودار نقطه‌چین(آبی) بدست می‌آیند.

دادن نیرو یا مشتق اول پتانسیل، نقطه یا نقاط تعادل بدست می‌آید

$$-F(x_{۰}) = \left(\frac{dV(x)}{dx}\right)_{x_{۰}} = ۰ \Rightarrow \epsilon\left(-\frac{۱۲\sigma^{۱۲}}{x^{۱۳}} + \frac{۶\sigma^{۶}}{x^{۷}}\right)_{x_{۰}} = ۰ \Rightarrow x_{۰} = \sigma\sqrt[۶]{۲}$$



شکل ۲: در شکل سمت چپ نمودار پتانسیل انرژی $V(x)$ (رنگ قرمز) با نمودار انرژی پتانسیل تقریب زده شده در رابطه‌ی (۴) (رنگ آبی) همزمان رسم شده‌اند. این نمودار نشان می‌دهد که برای xهای خیلی کوچک حول نقطه x_0 حرکت ذره مانند نوسانگر ساده است. در شکل سمت راست نمودار پتانسیل بازای انرژیهای مختلف بحث شده است. برای $E < 0$ مانند E_1 ذره مقید است و بین دو نقطه بازگشت x_1 و x_2 نوسان می کند برای $E > 0$ مانند E_2 ذره رفتار آزاد دارد و وقتی از فواصل دور به مرکز نزدیک می‌شود در نقطه x_3 به دیواره پتانسیل برخورد می‌کند وباز می‌گردد.

مقدار انرژی در نقطه تعادل برابر $V(x_0) = -\frac{1}{4}\epsilon$. برای تغییرات کوچک x حول نقطه تعادل x_0، انرژی پتانسیل بصورت زیر بسط داده می‌شود

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{dV(x)}{dx}\right)_{x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_{x_0} + \cdots$$

جمله دوم سمت راست بسط بالا برابر صفر است، پس

$$V(x) \simeq -\frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_{x_0} \qquad (۴)$$

با مقایسه جمله دوم رابطه‌ی (۴) با انرژی پتانسیل جرم و فنر حول نقطه تعادل x_0، $\frac{1}{2}k(x - x_0)^2$ ،ثابت فنر برابر

$$k = \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)_{x_0} = \frac{18\epsilon}{\sqrt[3]{2}\sigma^2}$$

فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه x_0 برابر

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{18\epsilon}{m\sqrt[3]{2}\sigma^2}}$$

۷) ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی زیر قرار می‌گیرد

$$F(x) = B\left(\frac{a^2}{x^2} - \frac{28a^5}{x^5} + \frac{27a^8}{x^8}\right).$$

الف) تابع انرژی پتانسیل را یافته و آنرا رسم کنید(a و B ثابت‌های مثبت‌اند). ب) انواع حرکات ممکنه را بحث کنید. ج) تمام نقاط تعادل را پیدا کنید و فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه‌های تعادل پایدار را بدست آورید.

حل: در اینجا برعکس مسئله قبل نیرو معلوم است و قصد داریم انرژی پتانسیل را بدست آوریم، پس

$$F(x)dx = -dV \Rightarrow \int_{\infty}^{x} F(x)dx = -(V(x) - V(\infty))$$

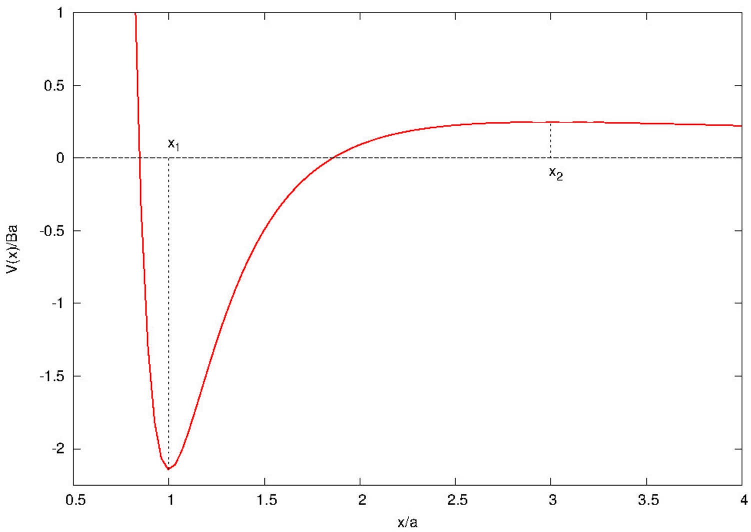
با توجه به شکل نیرو $V(\infty)$ را برابر صفر در نظر می‌گیریم، بنابراین

$$V(x) = -\int_{\infty}^{x} F(x)dx = -B\int_{\infty}^{x}\left(\frac{a^{2}}{x^{2}} - \frac{28a^{5}}{x^{5}} + \frac{27a^{8}}{x^{8}}\right)dx \Rightarrow V(x) = Ba\left(\frac{a}{x} - \frac{28a^{4}}{4x^{4}} + \frac{27a^{7}}{7x^{7}}\right)$$

در اینجا a ابعاد طول، B ابعاد نیرو و Ba ابعاد انرژی دارد. برای بدست آوردن نقاط تعادل نیرو را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$-F(x) = \left(\frac{dV(x)}{dx}\right) = 0 \Rightarrow B\left(-\frac{a^{2}}{x^{2}} + \frac{28a^{5}}{x^{5}} - \frac{27a^{8}}{x^{8}}\right) = 0$$

پتانسیل دارای دو نقطه تعادل $x_1 = a$ و $x_2 = 3a$ است که مطابق شکل x_1 نقطه تعادل پایدار و x_2 نقطه تعادل ناپایدار است. لازم به اشاره است که علامت مشتق دوم پتانسیل در یک نقطه



تعادل مانند x_e نوع تعادل یعنی پایداری، $\left(\frac{d^{2}V(x)}{dx^{2}}\right)_{x_e} > 0$، و ناپایداری، $\left(\frac{d^{2}V(x)}{dx^{2}}\right)_{x_e} < 0$، آنرا مشخص می‌کند

$$k = \frac{d^{2}V(x)}{dx^{2}} = \frac{B}{a}\left(\frac{2a^{3}}{x^{3}} - \frac{140a^{6}}{x^{6}} + \frac{216a^{9}}{x^{9}}\right)$$

که در نقطه $x_۱$ برابر $k = \frac{۷۸B}{a} > ۰$ و در نقطه $x_۲$ برابر $k = -۰/۱۰۷\frac{B}{a} < ۰$ است. فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه تعادل $x_۱$ برابر

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{۷۸B}{ma}}$$

است. فراموش نکنید که حرکت نوسانی فقط حول نقاط تعادل پایدار وجود دارد که ذره در آن نقاط دارای دو نقطه بازگشت است.

۸) ذره‌ای به جرم m در چاه پتانسیل زیر حرکت می‌کند

$$V(x) = -V_۰ \frac{a^۲(a^۲+x^۲)}{۸a^۴+x^۴}.$$

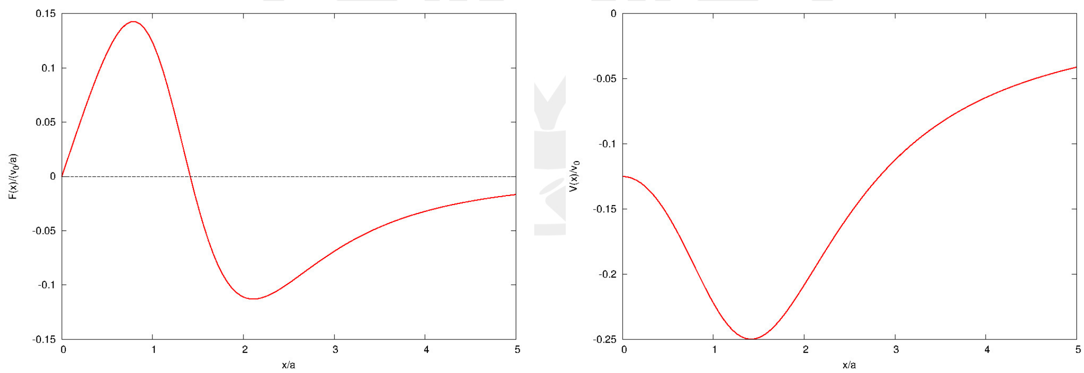
الف) $V(x)$ و $F(x)$ را رسم کنید($V_۰$ و a ثابت‌های مثبت‌اند). ب) انواع حرکات ممکنه را بحث کنید. ج) تمام نقاط تعادل را پیدا کنید و فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه‌های تعادل پایدار را بدست آورید.

حل: در اینجا ثوابت $V_۰$ و a بترتیب ابعاد انرژی و طول دارند.

$$V(x) = -V_۰ \frac{۱+(\frac{x}{a})^۲}{۸+(\frac{x}{a})^۴}$$

نیروی وارد بر ذره برابر است با

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx} = V_۰ \frac{۲a^۲x(۸a^۴-۲a^۲x^۲-x^۴)}{(۸a^۴+x^۴)^۲} = \frac{V_۰}{a}\frac{۲(\frac{x}{a})(۸-۲(\frac{x}{a})^۲-(\frac{x}{a})^۴)}{(۸+(\frac{x}{a})^۴)^۲}$$



بازای $x \geq ۰$ انرژی پتانسیل دو نقطه تعادل در $x_۱ = ۰$ و $x_۲ = \sqrt{۲}a$ دارد. با توجه منحنی انرژی پتانسیل $x_۱$ نقطه تعادل ناپایدار و $x_۲$ نقطه تعادل پایدار می‌باشد.

$$k = \frac{d^۲V(x)}{dx^۲} = -\frac{V_۰}{a^۲}\frac{۲(۶۴-۴۸(\frac{x}{a})^۲-۹۶(\frac{x}{a})^۴+۱۰(\frac{x}{a})^۶+۳(\frac{x}{a})^۸)}{(۸+(\frac{x}{a})^۴)^۳}$$

نقطه $x_۱$ دارای تعادل ناپایدار است، چون $k = -\frac{V_۰}{۴a^۲} < ۰$ و نقطه $x_۲$ دارای تعادل پایدار است، چون $k = \frac{V_۰}{۳a^۲} > ۰$. فرکانس نوسانات کوچک حول نقطه تعادل $x_۲$ برابر

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{V_۰}{۳ma^۲}}$$

۹) ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی بازگرداننده‌ی $-kx$ و نیروی میرائی $-bv$ قرار گرفته است به اندازه $x_۰$ از حالت تعادل خود جابجا می‌شود و سپس با سرعت اولیه‌ای برابر با صفر رها می‌گردد. معادله حرکت کندمیرا، میرای بحرانی و تند میرا را پیدا کنید.

حل: برای حرکت تندمیرا

$$x = e^{-\gamma t}(A_۱ \cosh \beta t + A_۲ \sinh \beta t)$$

که $\beta = \sqrt{\gamma^۲ - \omega_۰^۲}$. با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=۰) = x_۰ = A_۱$$

$$v(t=۰) = ۰ = -\gamma A_۱ + \beta A_۲ \Rightarrow A_۲ = \frac{\gamma}{\beta} x_۰$$

بنابراین

$$x = x_۰ e^{-\gamma t}(\cosh \beta t + \frac{\gamma}{\beta} \sinh \beta t)$$

برای حرکت میرابحرانی

$$x = (B_۱ + B_۲ t)e^{-\gamma t}$$

با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=۰) = x_۰ = B_۱$$

$$v(t=۰) = ۰ = -\gamma B_۱ + B_۲ \Rightarrow B_۲ = \gamma x_۰$$

بنابراین

$$x = x_۰(۱ + \gamma t)e^{-\gamma t}$$

برای حرکت کندمیرا

$$x = e^{-\gamma t}(C_۱ \cos \omega_۱ t + C_۲ \sin \omega_۱ t)$$

با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=۰) = x_۰ = C_۱$$

$$v(t=۰) = ۰ = -\gamma C_۱ + \omega_۱ C_۲ \Rightarrow C_۲ = \frac{\gamma}{\omega_۱} x_۰$$

بنابراین

$$x = x_۰ e^{-\gamma t}(\cos \omega_۱ t + \frac{\gamma}{\omega_۱} \sin \omega_۱ t)$$

۱۰) مسئله (۱۱) را برای حالتی حل کنید که جرم از حالت تعادل خود با سرعت اولیه $v_۰$ شروع به حرکت می کند.

حل: برای حرکت تندمیرا

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 \cosh \beta t + A_2 \sinh \beta t)$$

که $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=0) = 0 = A_1$$

$$v(t=0) = v_0 = -\gamma A_1 + \beta A_2 \Rightarrow A_2 = \frac{1}{\beta} v_0$$

بنابراین

$$x = \frac{v_0}{\beta} e^{-\gamma t} \sinh \beta t$$

برای حرکت میرابحرانی

$$x = (B_1 + B_2 t) e^{-\gamma t}$$

با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=0) = 0 = B_1$$

$$v(t=0) = v_0 = -\gamma B_1 + B_2 \Rightarrow B_2 = v_0$$

بنابراین

$$x = v_0 t e^{-\gamma t}$$

برای حرکت کندمیرا

$$x = e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t)$$

با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=0) = 0 = C_1$$

$$v(t=0) = v_0 = -\gamma C_1 + \omega_1 C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{\omega_1} v_0$$

بنابراین

$$x = \frac{v_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t$$

۱۱) نیروی $F_0(1 - e^{-at})$ بر نوسانگر وارد می‌شود که در لحظه $t = 0$ ساکن است. جرم نوسانگرد m و ثابت فنر $k = 4ma^2$ و $b = ma$ است. معادله حرکت را پیدا کنید.

حل: با توجه به قانون دوم نیوتن معادله دیفرانسیل حرکت برابر

$$m\ddot{x} + ma\dot{x} + 4ma^2 x = F_0(1 - e^{-at}) \Rightarrow \ddot{x} + a\dot{x} + 4a^2 x = \frac{F_0}{m}(1 - e^{-at})$$

جواب قسمت همگن و ناهمگن برابر

$$x = e^{\frac{-at}{2}} \left(A \cos \frac{\sqrt{15} at}{2} + B \sin \frac{\sqrt{15} at}{2} \right) + \frac{F_0}{4ma^2} (1 - e^{-at})$$

با اعمال شرایط اولیه داریم

$$x=-\frac{F_\circ}{4ma^2}e^{\frac{-at}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{15}at}{2}+\frac{3}{\sqrt{15}}\sin\frac{\sqrt{15}a}{2}\right)+\frac{F_\circ}{4ma^2}\left(1-e^{-at}\right)$$

۱۲) معادله حرکت $x(t)$ یک نوسانگر میرا وقتی ذره m تحت تاثیر یک نیروی هماهنگ میرا $F_\circ e^{-\alpha t}\cos\omega t$ قرار دارد را بدست آورید.

حل: قانون دوم نیوتن برای یک نوسانگر میرا که تحت تاثیر یک نیروی واداشته میرا قرار دارد

$$m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=F_\circ e^{-\alpha t}\cos\omega t\Rightarrow\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_\circ^2x=\frac{F_\circ}{m}e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

که $\omega_\circ^2=\frac{k}{m}$ و $2\gamma=\frac{b}{m}$ است. جواب قسمت همگن با توجه به مقدار $\gamma^2-\omega_\circ^2$ بصورت برای $\gamma>\omega_\circ$

$$x(t)=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t}$$

که $r_{1,2}=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_\circ^2}$ است و $A_{1,2}$ با توجه به شرایط اولیه بدست می‌آیند.
برای $\gamma=\omega_\circ$

$$x(t)=(B_1+B_2t)e^{-\gamma t}$$

که $B_{1,2}$ با توجه به شرایط اولیه بدست می‌آیند.
برای $\gamma<\omega_\circ$

$$x(t)=Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_dt+\phi)$$

که $\omega_d=\sqrt{\omega_\circ^2-\gamma^2}$ است و A و ϕ با توجه به شرایط اولیه بدست می‌آیند.
برای بدست آوردن قسمت ناهمگن معادله دیفرانسیل، جواب پیشنهادی و مشتقات آن بصورت

$$x(t)=Ce^{-\alpha t}\cos(\omega t+\beta)$$
$$\dot{x}(t)=Ce^{-\alpha t}(-\alpha\cos(\omega t+\beta)-\omega\sin(\omega t+\beta))$$
$$\ddot{x}(t)=Ce^{-\alpha t}[(\alpha^2-\omega^2)\cos(\omega t+\beta)+2\omega\alpha\sin(\omega t+\beta)]$$

ارائه می‌شود. که در آن C وβ و مجهول هستند که قصد داریم با جایگزینی جواب پیشنهادی و مشتقات آن در معادله دیفرانسیل بالا آنها را بدست آوریم

$$Ce^{-\alpha t}[(\alpha^2-\omega^2-2\gamma\alpha+\omega_\circ^2)\cos(\omega t+\beta)+2\omega(\alpha-\gamma)\sin(\omega t+\beta)]=\frac{F_\circ}{m}e^{-\alpha t}\cos\omega t$$

می‌توان $e^{-\alpha t}$ را از طرفین عبارت بالا ساده کرد و برای هم‌ارز قرار دادن سمت چپ و راست معادله بالا، $cos\omega t$ سمت راست را بصورت $\cos(\omega t+\beta-\beta)$ باز نویسی می‌کنیم و آنرا بسط می‌دهیم

$$C[(\alpha^2-\omega^2-2\gamma\alpha+\omega_\circ^2)\cos(\omega t+\beta)+2\omega(\alpha-\gamma)\sin(\omega t+\beta)]$$
$$=\frac{F_\circ}{m}\cos(\omega t+\beta-\beta)$$
$$=\frac{F_\circ}{m}(\cos(\omega t+\beta)\cos\beta+\sin(\omega t+\beta)\sin\beta)$$

بنابراین

$$C(\alpha^2-\omega^2-2\gamma\alpha+\omega_0^2)=\frac{F_0}{m}\cos\beta$$

$$2C\omega(\alpha-\gamma)=\frac{F_0}{m}\sin\beta$$

$$\beta=\tan^{-1}\left(\frac{2\omega(\alpha-\gamma)}{\alpha^2-\omega^2-2\gamma\alpha+\omega_0^2}\right)$$

$$C=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\alpha^2-\omega^2-2\gamma\alpha+\omega_0^2)^2+4\omega^2(\alpha-\gamma)^2}}$$

۱۳) معادله حرکت $x(t)$ یک نوسانگر میرا بحرانی وقتی ذره m از مبدا با سرعت اولیه v_0 تحت تاثیر یک نیروی واداشته $F_0\sin\omega t$ شروع به حرکت می‌کند را بدست آورید.

حل: قسمت ناهمگن معادله دیفرانسیل حرکت یک نوسانگر میرا که تحت تاثیر یک نیروی واداشته $F_0\cos(\omega t+\phi)$ قرار دارد، بصورت

$$x=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cos\left(\omega t+\phi+\tan^{-1}\left(\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

است اگر نیروی واداشته $F_0\sin\omega t$ را بصورت $F_0\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$ باز بنویسیم، در حل قسمت ناهمگن بالا $\phi=-\frac{\pi}{2}$ است، بنابراین

$$x=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\left(\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

یا

$$x=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\sin\left(\omega t+\tan^{-1}\left(\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

با توجه به اینکه نوسانگر میرا بحرانی می باشد جواب نهایی برابر

$$x=(A_1+A_2t)e^{-\gamma t}+\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\sin\left(\omega t+\tan^{-1}\left(\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

که A_1 و A_2 با توجه به شرایط اولیه بدست می‌آیند.

۱۴) یک نوسانگر میرائی را که در آن $\gamma=\frac{\omega_0}{4}$ است را تحت تاثیر نیروی واداشته

$$F=A_1\cos\omega t+A_3\cos 3\omega t$$

قرار داده‌ایم مقدار $x(t)$ را محاسبه کنید.

حل: قسمت ناهمگن معادله دیفرانسیل حرکت یک نوسانگر میرا که تحت تاثیر یک نیروی واداشته $F_0\cos(\omega t+\phi)$ قرار دارد، بصورت

$$x=\frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}\cos\left(\omega t+\phi+\tan^{-1}\left(\frac{2\omega\gamma}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

است. اگر نیروی واداشته برابر $A_۱ \cos\omega t$ باشد، در حل قسمت ناهمگن بالا $\phi = ۰$ است، بنابراین

$$x_۱ = \frac{\frac{A_۱}{m}}{\sqrt{(\omega_۰^۲ - \omega^۲)^۲ + ۴\gamma^۲\omega^۲}} \cos\left(\omega t + \tan^{-۱}\left(\frac{۲\omega\gamma}{\omega_۰^۲ - \omega^۲}\right)\right)$$

و اگر نیروی واداشته برابر $A_۳ \cos ۳\omega t$ باشد، در حل قسمت ناهمگن بالا $\phi = ۰$ و $\omega \to ۳\omega$، بنابراین

$$x_۳ = \frac{\frac{A_۳}{m}}{\sqrt{(\omega_۰^۲ - ۹\omega^۲)^۲ + ۳۶\gamma^۲\omega^۲}} \cos\left(۳\omega t + \tan^{-۱}\left(\frac{۶\omega\gamma}{\omega_۰^۲ - ۹\omega^۲}\right)\right)$$

با توجه به اینکه نوسانگر کند میرا می باشد جواب نهایی برابر

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t + \theta) + \frac{\frac{A_۱}{m}}{\sqrt{(\omega_۰^۲ - \omega^۲)^۲ + ۴\gamma^۲\omega^۲}} \cos\left(\omega t + \tan^{-۱}\left(\frac{۲\omega\gamma}{\omega_۰^۲ - \omega^۲}\right)\right)$$
$$+\frac{\frac{A_۳}{m}}{\sqrt{(\omega_۰^۲ - ۹\omega^۲)^۲ + ۳۶\gamma^۲\omega^۲}} \cos\left(۳\omega t + \tan^{-۱}\left(\frac{۶\omega\gamma}{\omega_۰^۲ - ۹\omega^۲}\right)\right)$$

که $\omega_d = \sqrt{\omega_۰^۲ - \gamma^۲}$ و اینکه A و θ با توجه به شرایط اولیه بدست می‌آیند.

۱۵) مسئله (۱۴) را برای یک نوسانگر میرا تکرار کنید.

۱۶) معادله حرکت $x(t)$ یک نوسانگر هماهنگ ساده را وقتی تحت تاثیر نیروی نوسانی

$$F(t) = \begin{cases} F_۰, & ۰ \le t \le \frac{T}{۲} \\ ۰, & \frac{T}{۲} \le t \le T \end{cases}$$

قرار دارد را محاسبه کنید(T پریود نوسانات نیرو می‌باشد).

حل: برای $a_۰$

$$a_۰ = \frac{۲}{T}\int_۰^T F(t)dt = \frac{۲F_۰}{T}\int_۰^{\frac{T}{۲}} dt = F_۰$$

برای a_n

$$a_n = \frac{۲}{T}\int_۰^T F(t)\cos n\omega t dt = \frac{۲F_۰}{T}\int_۰^{\frac{T}{۲}} \cos n\omega t dt = \frac{۲F_۰}{T}\frac{۱}{n\omega}[\sin n\omega t]_۰^{\frac{T}{۲}} = ۰$$

برای a_n

$$b_n = \frac{۲}{T}\int_۰^T F(t)\sin n\omega t dt = \frac{۲F_۰}{T}\int_۰^{\frac{T}{۲}} \sin n\omega t dt = -\frac{۲F_۰}{T}\frac{۱}{n\omega}[\cos n\omega t]_۰^{\frac{T}{۲}} = -\frac{۲F_۰}{T}\frac{۱}{n\omega}[\cos n\pi - ۱]$$

$$b_n = \frac{۲F_۰}{T}\frac{۱}{n\omega}[۱ - (-۱)^n] = \frac{F_۰}{n\pi}[۱ - (-۱)^n] = \frac{۲F_۰}{(۲n+۱)\pi}$$

بنابراین

$$F(t) = F_۰ + \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲F_۰}{(۲n+۱)\pi}\sin(۲n+۱)\omega t = F_۰ + \sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۲F_۰}{(۲n+۱)\pi}\cos\left((۲n+۱)\omega t + \frac{\pi}{۲}\right)$$

جواب قسمت همگن و ناهمگن برابر

$$x = A\cos(\omega_\circ t + \theta) + \frac{F_\circ}{m\omega_\circ^۲} + \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{۲F_\circ}{m(۲n+۱)\pi|(۲n+۱)^۲\omega^۲ - \omega_\circ^۲|} \sin(۲n+۱)\omega t$$

۱۷) مسئله (۱۶) را برای یک نوسانگر میرا تکرار کنید.
۱۸) برای یک نوسانگر میرا نشان دهید

$$\frac{dE}{dt} = -bv^۲.$$

حل: انرژی سیستم برابر

$$E = \frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲$$

اگر از طرفین نسبت به زمان تغییرات بگیریم

$$\frac{dE}{dt} = \frac{۱}{۲}m\frac{d}{dt}v^۲ + \frac{۱}{۲}k\frac{d}{dt}x^۲$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{۱}{۲}m(۲v\frac{dv}{dt}) + \frac{۱}{۲}k(۲x\frac{dx}{dt})$$

$$\frac{dE}{dt} = v(ma + kx)$$

باتوجه به اینکه معادله دیفرانسیلی حرکت یک نوسانگر میرا برابر $ma + bv + kx = \circ$ داریم

$$\frac{dE}{dt} = v(ma + kx) = v(-bv) = -bv^۲$$

مظفری