

(۱) نشان دهید که نسبت دو بیشینه متوالی در جابجایی یک نوسانگر هماهنگ میرا مقداری ثابت است. (نکته: بیشینه‌ها در نقاط تماس منحنی جابجایی یا منحنی  $Ae^{-\gamma t}$  واقع نمی‌شود.)

(۲) دوره تناوب یک نوسانگر وقتی نامیراست برابر  $T_0$  است، و وقتی میراست برابر  $T_d$  است. فرض کنید بعد از  $n$  نوسان، دامنه نوسانگر میرا به  $\frac{1}{e}$  مقدار اولیه‌اش کاهش پیدا می‌کند. نشان دهید که

$$\frac{T_d}{T_0} = \left(1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}\right)$$

که عبارت آخر رابطه بالا برای  $n$  های بزرگ صادق می‌باشد.

(۳) برای یک حرکت نوسانگر کند میرا که تحت تاثیر نیروی واداشته  $F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$  قرار دارد، قسمت ناهمگن معادله حرکت برابر  $A \cos(\omega t + \theta_0 - \Phi)$  است که

$$A = A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\Phi = \Phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

می‌باشد. در اینجا برای سادگی  $A(\omega)$  را بدون بعد و  $\Phi(\omega)$  را باز نویسی کرده‌ایم

$$A'\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{mA(\omega)\omega_0^2}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

الف) منحنی دامنه تشدید (یعنی  $A'\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ ) و فاز تشدید  $\Phi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$  قسمت واداشته حرکت را برحسب فرکانس نیروی واداشته  $\frac{\omega}{\omega_0}$  به ازای مقادیر مختلف  $0 \leq \frac{\gamma}{\omega_0} \leq 1$  رسم کنید. ب) فرکانسی تشدید که در آن دامنه تشدید به بیشینه مقدار خود می‌رسد را بدست آورید. جواب را وقتی  $\frac{\gamma}{\omega_0} \rightarrow 0$  بررسی کنید. ج) متوسط زمانی انرژی جنبشی،  $\langle K \rangle_{time}$ ، متوسط زمانی پتانسیل،  $\langle V \rangle_{time}$ ، و متوسط زمانی انرژی کل،  $\langle E \rangle_{time} = \langle K \rangle_{time} + \langle V \rangle_{time}$ ، را بدست آورید. د) فرکانسهایی که در آن متوسط زمانی انرژی جنبشی، متوسط زمانی انرژی پتانسیل و متوسط زمانی انرژی کل بیشینه‌اند را بدست آورید.

(۴) الکترونی در یک میدان نیروی متشکل از میدان الکتریکی  $\vec{E} = \hat{j}E$  و میدان مغناطیسی

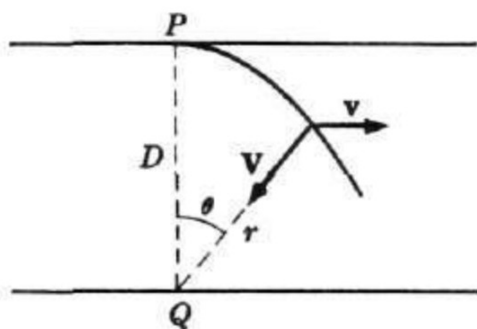
کند. مکان اولیه الکترون را مبدا و سرعت اولیه را بصورت  $\vec{v}_0 = \hat{i}v_0$  انتخاب کنید. معادله حرکت الکترون را در سه بعد بدست آورید.

(۵) حرکت پرتابه‌ی سه بعدی را بررسی کنید که تحت تاثیر گرانش و نیروی اصطکاک متناسب با سرعت قرار دارد. ذره با سرعت اولیه  $\vec{v}_0 = \hat{i}\dot{x}_0 + \hat{j}\dot{y}_0 + \hat{k}\dot{z}_0$  از مبدا پرتاب می‌شود. الف) معادله حرکت ذره را بدست آورید. ب) برای مقادیر کوچک و بزرگ  $t$  معادلات حرکت را بررسی کنید. ج) معادله مسیر حرکت پرتابه بدست آورید.

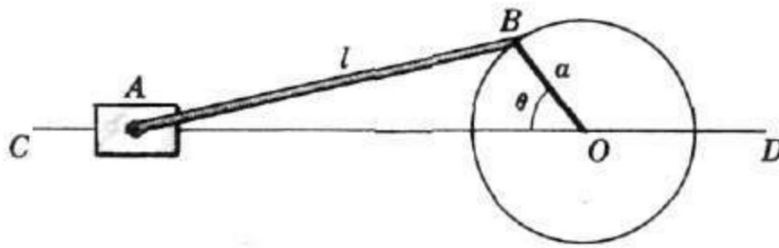
(۶) پرتابه‌ای در نظر بگیرید که با سرعت اولیه  $\vec{v}_0 = \hat{i}\dot{x}_0 + \hat{j}\dot{y}_0 + \hat{k}\dot{z}_0$  در حضور بادی با سرعت  $\vec{v}_w = \hat{j}v_w$  و مقاومت هوایی متناسب با سرعت از مبدا پرتاب می‌شود. معادلات حرکت را برای مختصات  $x$ ،  $y$  و  $z$  بر حسب زمان  $t$  حل کنید. فرض کنید پرتابه در نقطه  $(x_1, y_1)$  به زمین برمی‌گردد. این مکان را تا جمله فقط اول بر حسب  $b$  پیدا کنید. نشان دهید که اگر از مقاومت هوا صرفه نظر کنیم، فاصله هدف به نسبت  $\frac{v_b \dot{z}_0}{v_w mg}$  تغییر می‌کند و باد باعث تغییر دیگری در جهت  $y$  به اندازه  $\frac{2bv_w \dot{z}_0}{mg^2}$  می‌شود.

(۷) رودخانه‌ای به عرض  $w$  در نظر بگیرید. سرعت آب در نزدیکی ساحل صفر است اما بطور خطی افزایش می‌یابد و به  $v_c$  در مرکز رودخانه می‌رسد. اگر قایقی از یک ساحل در جهت عمود بر رودخانه با سرعت  $v_b$  پارو بزند، نشان دهید وقتی به ساحل دیگر می‌رسد به اندازه  $\frac{v_c w}{v_b}$  در جهت حرکت آب منحرف شده است.

(۸) رودخانه‌ای به عرض  $D$  را در نظر بگیرید که سرعت آب در داخل آن ثابت و برابر  $v$  است. قایقی قصد دارد از نقطه  $P$  در یک طرف رودخانه به نقطه مقابل خود  $Q$  در طرف دیگر رودخانه برود. قایقران با سرعت ثابت  $V$  همواره بطرف نقطه  $Q$  پارو می‌زند. اگر فاصله لحظه‌ای قایق از نقطه‌ی  $Q$  و زاویه‌ی بین  $\vec{r}$  و  $\vec{PQ}$  باشد، مسیر حرکت قایق یعنی  $r(\theta)$  را بدست آورید.



(۹) مطابق شکل،  $AB$  میله‌ی پیستونی به طول  $l$  است. اگر  $A$  در امتداد خط  $CD$  حرکت کند در حالیکه  $B$  با سرعت زاویه ثابت  $\omega$  حول دایره‌ای به شعاع  $a$  و مرکز  $O$  حرکت می‌کند. الف) سرعت و ب) شتاب حرکت پیستون  $A$  را پیدا کنید.



۱۰) کدامیک از نیروهای زیر پایستار هستند؟ پتانسیل متناظر آنهایی که پایستار هستند را پیدا کنید.

$$F_x = 3az(x^2 - y^2), \quad F_y = -6azxy, \quad F_z = ax(x^2 - 3y^2)$$

$$F_x = -ay^2, \quad F_y = ayz, \quad F_z = -ay^2$$

$$F_x = ax^2yz, \quad F_y = bxy^2z, \quad F_z = cxyz^2$$

$$F_x = cx^2yz, \quad F_y = cxy^2z, \quad F_z = cxyz^2$$

$$F_x = ax^2y, \quad F_y = axy^2, \quad F_z = az^3$$

$$F_x = axe^{ax^2+by^2+cz^2}, \quad F_y = bye^{ax^2+by^2+cz^2}, \quad F_z = cze^{ax^2+by^2+cz^2}$$

$$F_x = Kxyz, \quad F_y = Kxyz, \quad F_z = Kxyz$$

$$F_x = Kx, \quad F_y = Ky, \quad F_z = Kz$$

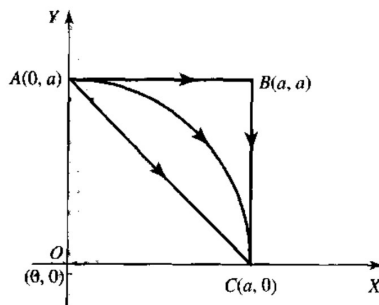
$$F_x = Kx^2ye^{az}, \quad F_y = Kxy^2e^{az}, \quad F_z = Kx^2y^2e^{az}$$

۱۱) جسمی به جرم  $m$  از سه مسیر متفاوت نمایش داده شده مطابق شکل، از  $A$  به  $C$  برده می‌شود: الف) از  $A$  به  $B$  و از  $B$  به  $C$ ، ب) در طول یک خط مستقیم از  $A$  به  $C$  و ج) در طول قوس یک دایره‌ای از  $A$  به  $C$  کار انجام شده در هر مورد را برای هر یک از سه نیروی زیر محاسبه کنید

$$\vec{F} = kx\hat{i} + ky\hat{j}$$

$$\vec{F} = \frac{k}{x}\hat{i} + \frac{k}{y}\hat{j}$$

$$\vec{F} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j}$$

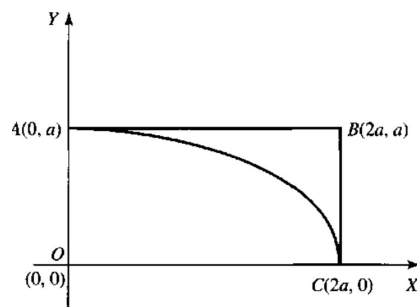


۱۲) جسمی به جرم  $m$  از سه مسیر متفاوت نمایش داده شده مطابق شکل، از  $A$  به  $C$  برده می‌شود: الف) از  $A$  به  $B$  و از  $B$  به  $C$  و ب) در طول قطعه‌ای از یک بیضی از  $A$  به  $C$ . کار انجام شده در هر مورد را برای هر یک از سه نیروی زیر محاسبه کنید

$$\vec{F} = kx\hat{i} + ky\hat{j}$$

$$\vec{F} = 2y\hat{i} - 2x\hat{j}$$

$$\vec{F} = x^2y\hat{i} + xy^2\hat{j}$$



۱۳) در لحظه  $t = 0$  نیروی  $\vec{F}(t) = at\hat{i} + bt^2\hat{j} + ct^3\hat{k}$  به ذره ساکن به جرم  $m$  در  $\vec{r}_0 = 2\hat{i} + 3\hat{j}$  وارد می‌شود. مکان و سرعت ذره را بصورت تابعی  $t$  پیدا کنید.

۱۴) در لحظه  $t = 0$  نیروی  $\vec{F}(t) = at\hat{i} + be^{kt}\hat{j}$  به ذره به جرم  $m$  در  $\vec{r}_0 = 2\hat{i} + 3\hat{j}$  که با سرعت  $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$  حرکت می‌کند، وارد می‌شود. مکان و سرعت ذره را بصورت تابعی  $t$  پیدا کنید.

مظفری