هوالعلیم

حل تمرین شماره: ۳ درس: مکانیک تحلیلی ۱

۱) نشان دهید که نسبت دو بیشینه متوالی در جابجایی یک نوسانگر هماهنگ میرا مقداری ثابت است. (نکته: بیشینه‌ها در نقاط تماس منحنی جابجایی یا منحنی $Ae^{-\gamma t}$ واقع نمی‌شود.)

حل: اگر یکی از بیشینه‌ها در لحظه t باشد دیگری در لحظه‌ی $t+\frac{2\pi}{\omega_d}$ قرار دارد. بنابراین

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega_d t+\phi)$$
$$x(t+\frac{2\pi}{\omega_d}) = Ae^{-\gamma t}e^{-\gamma\frac{2\pi}{\omega_d}}\cos(\omega_d t+2\pi+\phi) = \cos(\omega_d t+\phi)$$

نسبت دو بیشینه متوالی در جابجایی برابر

$$\frac{x(t+\frac{2\pi}{\omega_d})}{x(t)} = \exp(-\frac{2\pi\gamma}{\omega_d})$$

۲) دوره تناوب یک نوسانگر وقتی نامیراست برابر T_0 است، و وقتی میراست برابر T_d است. فرض کنید بعد از n نوسان، دامنه نوسانگر میرا به $\frac{1}{e}$ مقدار اولیه‌اش کاهش پیدا می‌کند. نشان دهید که

$$\frac{T_d}{T_0} = \left(1+\frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{8\pi^2 n^2}\right)$$

که عبارت آخر رابطه بالا برای nهای بزرگ صادق می‌باشد.

حل: دامنه $(Ae^{-\gamma t})$ بعد $t=nT_d$ به (Ae^{-1}) مقدار خود می رسد، نتیجه می‌گیریم که

$$nT_d = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{nT_d}$$

در ادامه داریم

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T_d^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{1}{n^2T_d^2} \Rightarrow \frac{1}{T_d^2} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{4\pi^2n^2T_d^2} \Rightarrow \frac{T_d^2}{T_0^2} = \left(1+\frac{1}{4\pi^2n^2}\right)$$

و

$$\frac{T_d}{T_0} = \left(1+\frac{1}{4\pi^2 n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

وقتی که $1 \ll \frac{1}{4\pi^2n^2}$ داریم

$$\frac{T_d}{T_0} \sim \left(1+\frac{1}{8\pi^2 n^2}\right)$$

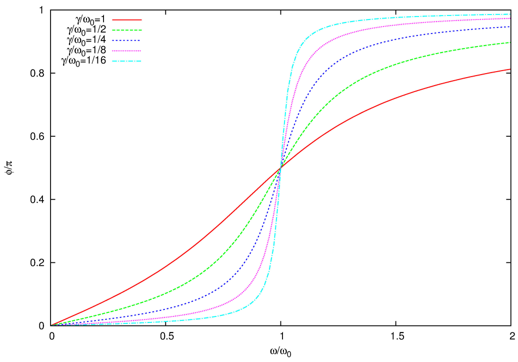
۳) برای یک حرکت نوسانگر کند میرا که تحت تاثیر نیروی واداشته $F_0 \cos(\omega t + \theta_0)$ قرار دارد، قسمت ناهمگن معادله حرکت برابر $A \cos(\omega t + \theta_0 - \Phi)$ است که

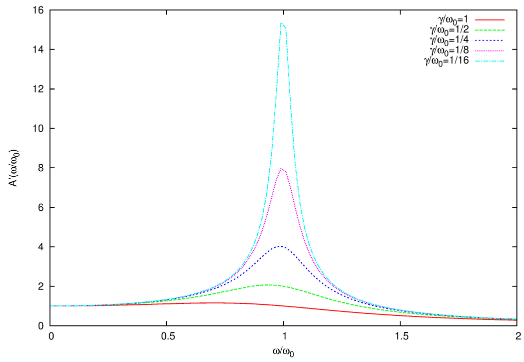
$$A = A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$
$$\Phi = \Phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

می‌باشد. در اینجا برای سادگی $A(\omega)$ را بدون بعد و $\Phi(\omega)$ را باز نویسی کرده‌ایم

$$A'(\frac{\omega}{\omega_0}) = \frac{mA(\omega)\omega_0^2}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$
$$\Phi(\frac{\omega}{\omega_0}) = \tan^{-1}\left(\frac{2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right)$$

الف) منحنی دامنه تشدید (یعنی $A'(\frac{\omega}{\omega_0})$) و فاز تشدید $\Phi(\frac{\omega}{\omega_0})$ قسمت واداشته حرکت را برحسب فرکانس نیروی واداشته $\frac{\omega}{\omega_0}$ به ازای مقادیر مختلف $0 \le \frac{\gamma}{\omega_0} \le 1$ رسم کنید. ب) فرکانسی تشدید که در آن دامنه تشدید به بیشینه مقدار خود می‌رسد را بدست آورید. جواب را وقتی $\frac{\gamma}{\omega_0} \to 0$ بررسی کنید. ج) متوسط زمانی انرژی جنبشی، $\langle K\rangle_{time}$، متوسط زمانی انرژی پتانسیل، $\langle V\rangle_{time}$، و متوسط زمانی انرژی کل، $\langle E\rangle_{time} = \langle K\rangle_{time} + \langle V\rangle_{time}$، را بدست آورید. د) فرکانسهایی که در آن متوسط زمانی انرژی جنبشی، متوسط زمانی انرژی پتانسیل و متوسط زمانی انرژی کل بیشینه‌اند را بدست آورید.





$$\frac{dA}{d\omega} = \frac{F_0}{m}\frac{4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) - 8\gamma^2\omega}{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اگر $\frac{dA}{d\omega} = 0$ داریم

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \Rightarrow \omega = 0, \qquad \frac{\omega}{\omega_0} = \pm\sqrt{1 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_0}\right)^2}$$

در شکل سمت چپ بالا بیشینه های نمودار بازای $\frac{\gamma}{\omega_\circ}$ مختلف در $\frac{\omega}{\omega_\circ} = \sqrt{1 - 2\left(\frac{\gamma}{\omega_\circ}\right)^2}$ واقع شده‌اند. وقتی $\frac{\gamma}{\omega_\circ} \to 0$ بنابراین $\frac{\omega}{\omega_\circ} \to 1$.

۴) الکترونی در یک میدان نیروی متشکل از میدان الکتریکی $\vec{E} = \hat{j}E$ و میدان مغناطیسی $\vec{B} = \hat{k}B$ حرکت می‌کند. مکان اولیه الکترون را مبدا و سرعت اولیه را بصورت $\vec{v}_\circ = \hat{i}v_\circ$ انتخاب کنید. معادله حرکت الکترون را در سه‌بعد بدست آورید.

حل: معادله دینامیکی حرکت الکترون در یک میدان نیروی متشکل از میدان الکتریکی $\vec{E} = \hat{j}E$ و میدان مغناطیسی $\vec{B} = \hat{k}B$ برابر

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -e\left[\vec{E} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B}\right]$$
$$m(\hat{i}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z}) = -e\left[\hat{j}E + (\hat{i}\dot{x} + \hat{j}\dot{y} + \hat{k}\dot{z}) \times \hat{k}B\right] = -e\left[\hat{j}(E - \dot{x}B) + \hat{i}\dot{y}B\right]$$

معادله دینامیکی برای هر یک از سه مولفه دستگاه مختصات

$$m\ddot{x} = -eB\dot{y}$$
$$m\ddot{y} = -e(E - \dot{x}B)$$
$$m\ddot{z} = 0$$

دو تا معادله دیفرانسیل اول در یکدیگر جفت شده‌اند. اگر از طرفین معادله دینامیکی $m\ddot{x} = -eB\dot{y}$ نسبت به زمان انتگرالگیری کنیم داریم

$$m\ddot{x} = -eB\dot{y} \Rightarrow \int_{v_\circ}^{\dot{x}} d\dot{x} = -\frac{eB}{m}\int_\circ^y dy \Rightarrow \dot{x} = v_\circ - \frac{eB}{m}y \qquad (1)$$

با قرار دادن $\dot{x} = v_\circ - \frac{eB}{m}y$ در داخل دیگر معادله دینامیکی (یعنی $m\ddot{y} = -e(E - \dot{x}B)$) داریم

$$\ddot{y} = -\frac{e}{m}(E - v_\circ B) - \left(\frac{eB}{m}\right)^2 y \Rightarrow \ddot{y} + \omega_B^2 y = -\frac{e}{m}(E - v_\circ B)$$

که در آن $\omega_B = \frac{eB}{m}$ فرکانس سیکلترون است. معادله بالا یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب ثابت است که در آن جواب قسمت همگن و ناهمگن برابر است با

$$y = A_1 \sin\omega_B t + A_2 \cos\omega_B t + \frac{v_\circ - \frac{E}{B}}{\omega_B}$$

که A_1 و A_2 به شرایط اولیه مسئله مربوط می‌شود. با اعمال شرایط اولیه به مسئله داریم

$$y = \frac{v_\circ - \frac{E}{B}}{\omega_B}(1 - \cos\omega_B t)$$

با قرار دادن $y(t)$ در داخل معادله (۱) و انتگرالگیری از آن داریم

$$x = \frac{E}{B}t - \frac{v_\circ - \frac{E}{B}}{\omega_B}\sin\omega_B t$$

همچنین جواب قسمت z برابر $z = ۰$.

۵) حرکت پرتابه‌ی سه بعدی را بررسی کنید که تحت تاثیر گرانش و نیروی اصطکاک متناسب با سرعت قرار دارد. ذره با سرعت اولیه $\vec{v}_\circ = \hat{i}\dot{x}_\circ + \hat{j}\dot{y}_\circ + \hat{k}\dot{z}_\circ$ از مبدا پرتاب می‌شود. الف) معادله حرکت ذره را بدست آورید. ب) برای مقادیر کوچک و بزرگ t معادلات حرکت را بررسی کنید. ج) معادله مسیر حرکت پرتابه بدست آورید.

حل: معادله دینامیکی حرکت پرتابه برابر

$$m\frac{d^۲\vec{r}}{dt^۲} = -b\frac{d\vec{r}}{dt} - mg\hat{k}$$

که می‌توان آنرا برای هریک از سه جهت دستگاه مختصات بصورت زیر نوشت

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{۱}{\tau}\dot{x} = ۰$$
$$m\ddot{y} = -b\dot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{۱}{\tau}\dot{y} = ۰$$
$$m\ddot{z} = -b\ddot{z} - mg \Rightarrow \ddot{z} + \frac{۱}{\tau}\dot{z} = -g$$

که در آن $\tau = \frac{m}{b}$ است. با استفاده از روش حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت داریم

$$x(t) = A_۱ + A_۲ e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$y(t) = B_۱ + B_۲ e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$z(t) = C_۱ + C_۲ e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau t$$

با اعمال شرایط اولیه به معادلات بالا، معادلات حرکت در سه بعد بصورت زیر داده می‌شود

$$x(t) = \dot{x}_\circ \tau(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}})$$
$$y(t) = \dot{y}_\circ \tau(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}})$$
$$z(t) = (\dot{z}_\circ \tau + g\tau^۲)(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}}) - g\tau t$$

برای $t/\tau \ll ۱$ داریم

$$x(t) \sim \dot{x}_\circ \tau \left[۱ - \left(۱ - \frac{t}{\tau} + \frac{۱}{۲}\frac{t^۲}{\tau^۲} + \cdots\right)\right] = \dot{x}_\circ t - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\dot{x}_\circ}{\tau}\right)t^۲ + \cdots$$
$$y(t) \sim \dot{y}_\circ \tau \left[۱ - \left(۱ - \frac{t}{\tau} + \frac{۱}{۲}\frac{t^۲}{\tau^۲} + \cdots\right)\right] = \dot{y}_\circ t - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\dot{y}_\circ}{\tau}\right)t^۲ + \cdots$$
$$z(t) \sim (\dot{z}_\circ \tau + g\tau^۲)\left[۱ - \left(۱ - \frac{t}{\tau} + \frac{۱}{۲}\frac{t^۲}{\tau^۲} + \cdots\right)\right] - g\tau t = \dot{z}_\circ t - \frac{۱}{۲}\left(\frac{\dot{z}_\circ}{\tau} + g\right)t^۲ + \cdots$$

برای $t/\tau \gg ۱$ داریم

$$x(t) \sim \dot{x}_\circ \tau$$
$$y(t) \sim \dot{y}_\circ \tau$$
$$z(t) \sim (\dot{z}_\circ \tau + g\tau^۲) - g\tau t$$

اگر $\tau(۱-e^{-\frac{t}{\tau}})=\frac{x}{\dot{x}_۰}$ معادله مسیر حرکت بصورت زیر داده می‌شود

$$y=\frac{\dot{y}_۰}{\dot{x}_۰}x$$
$$z(t)=\frac{\dot{z}_۰+g\tau}{\dot{x}_۰}x+g\tau^۲\ln\left(۱-\frac{x}{\dot{x}_۰\tau}\right)$$

برای $\frac{x}{\dot{x}_۰\tau}\ll ۱$ داریم

$$z(t)=\frac{\dot{z}}{\dot{x}_۰}x+\frac{g}{۲\dot{x}_۰^۲}x^۲+\cdots$$

از فیزیک ۱ می‌دانیم که دو جمله‌ی معادله بالا، معادله مسیر حرکت یک پرتابه در غیاب نیروی اصطکاک است.

۶) پرتابه‌ای در نظر بگیرید که با سرعت اولیه $\vec{v}_۰=\hat{i}\dot{x}_۰+\hat{j}\dot{y}_۰+\hat{k}\dot{z}_۰$ در حضور بادی با سرعت $\vec{v}_w=\hat{j}v_w$ و مقاومت هوایی متناسب با سرعت از مبدا پرتاب می‌شود. معادلات حرکت را برای مختصات x، y و z بر حسب زمان t حل کنید. فرض کنید پرتابه در نقطه $(x_۱,y_۱)$ به زمین برمی‌گردد. این مکان را تا جمله فقط اول برحسب b پیدا کنید. نشان دهید که اگر از مقاومت هوا صرفه‌نظر کنیم، فاصله هدف به نسبت $\frac{۴b\dot{z}_۰^۲}{۳mg}$ تغییر می‌کند و باد باعث تغییر دیگری در جهت y به اندازه $\frac{۲bv_m\dot{z}_۰^۲}{mg^۲}$ می‌شود.

حل: معادله دینامیکی حرکت پرتابه برابر

$$m\frac{d^۲\vec{r}}{dt^۲}=-b\left(\frac{d\vec{r}}{dt}+\hat{j}v_w\right)-mg\hat{k}$$

که می‌توان آنرا برای هریک از سه جهت دستگاه مختصات بصورت زیر نوشت

$$m\ddot{x}=-b\dot{x}\Rightarrow\ddot{x}+\frac{۱}{\tau}\dot{x}=۰$$
$$m\ddot{y}=-b\dot{y}+bv_w\Rightarrow\ddot{y}+\frac{۱}{\tau}\dot{y}=-\frac{۱}{\tau}v_w$$
$$m\ddot{z}=-b\dot{z}-mg\Rightarrow\ddot{z}+\frac{۱}{\tau}\dot{z}=-g$$

که در آن $\tau=\frac{m}{b}$ است. با استفاده از روش حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت داریم

$$x(t)=A_۱+A_۲e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$y(t)=B_۱+B_۲e^{-\frac{t}{\tau}}-v_wt$$
$$z(t)=C_۱+C_۲e^{-\frac{t}{\tau}}-g\tau t$$

با اعمال شرایط اولیه به معادلات بالا، معادلات حرکت در سه بعد بصورت زیر داده می‌شود

$$x(t)=\dot{x}_۰\tau(۱-e^{-\frac{t}{\tau}})$$
$$y(t)=(\dot{y}_۰+v_w)\tau(۱-e^{-\frac{t}{\tau}})-v_wt$$
$$z(t)=(\dot{z}_۰\tau+g\tau^۲)(۱-e^{-\frac{t}{\tau}})-g\tau t$$

اگر $\frac{x}{\dot{x}_\circ} = \tau(۱ - e^{-\frac{t}{\tau}})$ معادله مسیر حرکت بصورت زیر داده می‌شود

$$y = \frac{\dot{y}_\circ + v_w}{\dot{x}_\circ}x + v_w\tau \ln\left(۱ - \frac{x}{\dot{x}_\circ\tau}\right)$$
$$z = \frac{\dot{z}_\circ + g\tau}{\dot{x}_\circ}x + g\tau^۲ \ln\left(۱ - \frac{x}{\dot{x}_\circ\tau}\right)$$

برای $\frac{x}{\dot{x}_\circ\tau} \ll ۱$ داریم

$$z = \frac{\dot{z}_\circ}{\dot{x}_\circ}x + \frac{g}{۲\dot{x}_\circ^۲}x^۲ + \cdots$$

وقتی گلوله به زمین برمی‌گردد، مولفه z گلوله برابر صفر می‌شود(یعنی $z = \circ$). تا تقریب دوم معادله مسیر حرکت بالا داریم

$$z = \circ \Rightarrow x = \circ, \qquad x = \frac{۲\dot{z}_\circ\dot{x}_\circ}{g}$$

برای $\frac{x}{\dot{x}_\circ\tau} \ll ۱$ همچنین داریم

$$y = \frac{\dot{y}_\circ}{\dot{x}_\circ}x + \frac{v_w}{۲g\tau^۲}x^۲ + \cdots$$

تا تقریب دوم معادله مسیر حرکت بالا و بازای $x = \frac{۲\dot{z}_\circ\dot{x}_\circ}{g}$ داریم

$$y = \frac{۲\dot{y}_\circ\dot{z}_\circ}{g} - \frac{۲v_w\dot{z}_\circ^۲}{g^۲\tau} + \cdots$$

مقدار انحراف در امتداد محور y برابر $\frac{۲bv_w\dot{z}_\circ^۲}{mg^۲} = \frac{۲v_w\dot{z}_\circ^۲}{g^۲\tau}$ است.

۷) رودخانه‌ای به عرض w در نظر بگیرید. سرعت آب در نزدیکی ساحل صفر است اما بطور خطی افزایش می‌یابد و به v_c در مرکز رودخانه می‌رسد. اگر قایقی از یک ساحل در جهت عمود بر رودخانه با سرعت v_b پارو بزنند، نشان دهید وقتی به ساحل دیگر می‌رسد به اندازه $\frac{v_c w}{۲v_b}$ در جهت حرکت آب منحرف شده است.

حل: اگر عرض رودخانه در امتداد محور y و جهت رودخانه در امتداد محور x باشد، پروفایل سرعت رودخانه با توجه به فرض مسئله بصورت

$$v_d = \begin{cases} \frac{۲v_c}{w}y, & y \leq \frac{w}{۲} \\ \frac{۲v_c}{w}(w - y), & \frac{w}{۲} \leq y \leq w \end{cases}$$

داده می‌شود. سرعت رودخانه در امتداد محور x است بنابراین

$$\frac{dx}{dt} = \begin{cases} \frac{۲v_c}{w}y, & y \leq \frac{w}{۲} \\ \frac{۲v_c}{w}(w - y), & \frac{w}{۲} \leq y \leq w \end{cases}$$

و سرعت قایق در امتداد y است بنابراین

$$\frac{dy}{dt} = v_b$$

در ادامه نیاز به نسبت $\frac{dx}{dy}$ داریم، یعنی

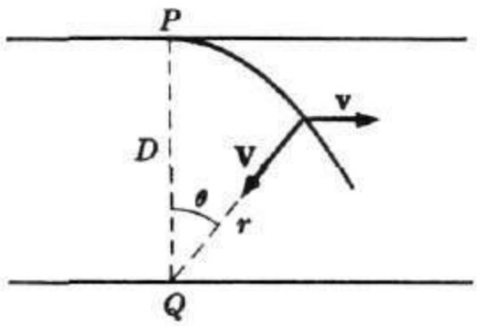
$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{dx}{dy} = \frac{۲v_c}{wv_b}\begin{cases} y, & y \leq \frac{w}{۲} \\ w-y, & \frac{w}{۲} \leq y \leq w \end{cases}$$

اگر از y در بازه ۰ تا w انتگرالگیری کنیم داریم

$$\int_۰^X dx = \frac{۲v_c}{wv_b}\left(\int_۰^{\frac{w}{۲}} ydy + \int_{\frac{w}{۲}}^{w}(w-y)dy\right) \Rightarrow X = \frac{v_c w}{۲v_b}$$

۸) رودخانه‌ای به عرض D را در نظر بگیرید که سرعت آب در داخل آن ثابت و برابر v است. قایقی قصد دارد از نقطه P در یک طرف رودخانه به نقطه مقابل خود Q در طرف دیگر رودخانه برود. قایقران باسرعت ثابت V همواره بطرف نقطه Q پارو می‌زند. اگر r فاصله لحظه‌ای قایق از نقطه‌ی Q و θ زاویه‌ی بین $\vec{r}$ و $\vec{PQ}$ باشد، مسیر حرکت قایق یعنی $r(\theta)$ را بدست آورید.

حل: اگر جهت جریان رودخانه را در امتداد محور x و عرض رودخانه را در جهت y در نظر



بگیریم با توجه به انتخاب r و θ در شکل داده شده، مختصاتهای x و y برحسب r و θ بصورت

$$x = r\sin\theta$$
$$y = r\cos\theta$$

داده می شود و بردارهای یکه متناظر با $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ بر حسب $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بصورت

$$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$
$$\hat{\theta} = \hat{i}\cos\theta - \hat{j}\sin\theta$$

داده می‌شود. همچنین مولفه‌های بردار سرعت برابر

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{r}\dot{r} + \hat{\theta}r\dot{\theta} \qquad (۲)$$

است. اگر $\vec{w}$ برابر $-V\hat{r}+v\hat{i}$ باشد می‌توان بردار یکه $\hat{i}$ را برحسب $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ بصورت

$$\hat{i}=\sin\theta\hat{r}+\cos\theta\hat{\theta}$$

نوشت. بدین‌ترتیب $\vec{w}$ برابر

$$\vec{w}=-V\hat{r}+v\hat{i}=\hat{r}(-V+v\sin\theta)+\hat{\theta}v\cos\theta$$

با مقایسه مولفه‌های بردار سرعت قایق در دستگاه قطبی با رابطه (۲) داریم

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=-V+v\sin\theta$$
$$r\dot{\theta}=\frac{dr}{rdt}=v\cos\theta$$

اگر در عبارت بالا نسبت $\frac{\dot{r}}{r\dot{\theta}}$ را بدست آوریم، یعنی

$$\frac{dr}{rd\theta}=\frac{-V+v\sin\theta}{v\cos\theta}$$

و

$$\frac{dr}{r}=\frac{-V+v\sin\theta}{v\cos\theta}d\theta$$

با انتگرالگیری از عبارت بالا

$$\int_D^r\frac{dr}{r}=-\frac{V}{v}\int_{\circ}^{\theta}\frac{d\theta}{\cos\theta}+\int_{\circ}^{\theta}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta$$

و

$$\ln\left(\frac{r}{D}\right)=-\frac{V}{v}\ln\left(\sec\theta+\tan\theta\right)-\ln\cos\theta=-\ln\left(\sec\theta+\tan\theta\right)^{\frac{V}{v}}+\ln\sec\theta=\ln\left(\frac{\sec\theta}{(\sec\theta+\tan\theta)^{\frac{V}{v}}}\right)$$

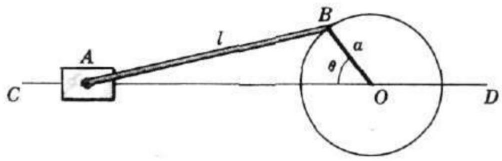
و سرانجام

$$r=\frac{D\sec\theta}{(\sec\theta+\tan\theta)^{\frac{V}{v}}}$$

۹) مطابق شکل، AB میله‌ی پیستونی به طول l است. اگر A در امتداد خط CD حرکت کند در حالیکه B با سرعت زاویه ثابت ω حول دایره‌ای به شعاع a و مرکز O حرکت می‌کند. الف) سرعت و ب) شتاب حرکت پیستون A را پیدا کنید.

حل: اگر مبدا مختصات را روی نقطه O قرار دهیم و محور x را در جهت DC طوری انتخاب کنیم که جهت مثبت از D به C باشد و همچنین زاویه بین AO و AB را α در نظر بگیریم می توان معادله پیستون A را بصورت

$$x=l\cos\alpha+a\cos\theta$$



نوشت. با استفاده از قانون سینوسها در مثلث OAB می‌توان α را بصورت

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{l}{\sin\theta}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{a\sin\theta}{l}$$

بدست آورد و همچنین $\cos\alpha=\frac{\sqrt{l^۲-a^۲\sin^۲\theta}}{l}$ که باعث می شود در آن معادله حرکت پیستون فقط تابعی از θ بشود، یعنی

$$x=\sqrt{l^۲-a^۲\sin^۲\theta}+a\cos\theta$$

برای بدست آوردن معادله سرعت پیستون، باید از معادله بالا نسبت به زمان مشتق گرفته شود

$$v=-\dot{\theta}\frac{a^۲\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{l^۲-a^۲\sin^۲\theta}}-a\dot{\theta}\sin\theta=-\omega\frac{a^۲\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{l^۲-a^۲\sin^۲\theta}}-a\omega\sin\theta$$

برای بدست آوردن معادله شتاب پیستون، باید از معادله بالا نسبت به زمان مشتق گرفته شود

$$a=-\omega^۲\frac{a^۲\cos ۲\theta}{(l^۲-a^۲\sin^۲\theta)^{\frac{۱}{۲}}}-\omega^۲\frac{(a^۲\sin\theta\cos\theta)^۲}{(l^۲-a^۲\sin^۲\theta)^{\frac{۳}{۲}}}-a\omega^۲\cos\theta$$

۱۰) کدامیک از نیروهای زیر پایستار هستند؟ پتانسیل متناظر آنهایی که پایستار هستند را پیدا کنید.

$$F_x=۳az(x^۲-y^۲),\quad F_y=-۶azxy,\quad F_z=ax(x^۲-۳y^۲)$$
$$F_x=axe^{ax^۲+by^۲+cz^۲},\quad F_y=bye^{ax^۲+by^۲+cz^۲},\quad F_z=cze^{ax^۲+by^۲+cz^۲}$$
$$F_x=Kx^۲ye^{az},\quad F_y=Kxy^۲e^{az},\quad F_z=Kx^۲y^۲e^{az}$$

حل: از بین نیروهای داده شده در تمرین فقط سه نیروی بالا را بررسی می‌کنیم. با علم به این موضوع که صفر شدن کرل نیرو پایسته بودن نیرو را نشان می دهد کرل نیروهای بالا را بدست می‌آوریم

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ ۳az(x^۲-y^۲) & -۶azxy & ax(x^۲-۳y^۲)\end{vmatrix}=۰$$

برای بدست آوردن پتانسیل مربوط به نیروی پایسته، داریم

$$F_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x},\qquad F_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y},\qquad F_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

با انتگرالگیری از سه معادله بالا

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-3az(x^2-y^2)\Rightarrow\phi=-azx^3+3azy^2x+g_1(y,z)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=6azxy\Rightarrow\phi=3azy^2x+g_2(x,z)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=-ax(x^2-3y^2)\Rightarrow\phi=-azx^3+3zy^2x+g_3(x,y)$$

اگر فرض کنیم که $g_1=g_3=0$ و $g_2(x,z)=-azx^3$ در اینصورت سه جواب پیشنهادی بالا با یکدیگر هم‌ارز هستند

$$\phi=-azx^3+3azy^2x+g_0$$

که g_0 هر مقدار ثابتی می‌تواند باشد.

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\\partial_x&\partial_y&\partial_z\\axe^{ax^2+by^2+cz^2}&bye^{ax^2+by^2+cz^2}&cze^{ax^2+by^2+cz^2}\end{vmatrix}=0$$

برای بدست آوردن پتانسیل مربوط به نیروی پایسته، داریم

$$F_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x},\qquad F_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y},\qquad F_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

با انتگرالگیری از سه معادله بالا

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-axe^{ax^2+by^2+cz^2}\Rightarrow\phi=-\frac{1}{2}e^{ax^2+by^2+cz^2}+g_1(y,z)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=-bye^{ax^2+by^2+cz^2}\Rightarrow\phi=-\frac{1}{2}e^{ax^2+by^2+cz^2}+g_2(x,z)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=-cze^{ax^2+by^2+cz^2}\Rightarrow\phi=-\frac{1}{2}e^{ax^2+by^2+cz^2}+g_3(x,y)$$

اگر فرض کنیم که $g_1=g_2=g_3=0$ در اینصورت سه جواب پیشنهادی بالا با یکدیگر هم‌ارز هستند

$$\phi=-\frac{1}{2}e^{ax^2+by^2+cz^2}+g_0$$

که g_0 هر مقدار ثابتی می‌تواند باشد.

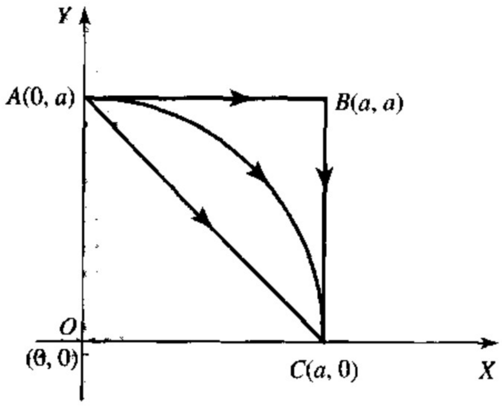
$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\\partial_x&\partial_y&\partial_z\\Kx^2ye^{az}&Kxy^2e^{az}&Kx^2y^2e^{az}\end{vmatrix}\neq0$$

۱۱) جسمی به جرم m از سه مسیر متفاوت نمایش داده شده مطابق شکل، از A به C برده

می‌شود: الف) از A به B و از B به C، ب) در طول یک خط مستقیم از A به C و ج) در طول قوس یک دایره‌ای از A به C کار انجام شده در هر مورد را برای هر یک از سه نیروی زیر محاسبه کنید

$$\vec{F} = kx\hat{i} + ky\hat{j}$$
$$\vec{F} = \frac{k}{x}\hat{i} + \frac{k}{y}\hat{j}$$
$$\vec{F} = x^{۲}\hat{i} + y^{۲}\hat{j}$$

حل: کار نیروی $\vec{F} = kx\hat{i} + ky\hat{j}$ را روی مسیرهای داده شده الف) از A به B مسیر حرکت برابر



$d\vec{r} = \hat{i}dx$ و از B به C مسیر حرکت برابر $d\vec{r} = \hat{j}dy$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(k\int_{۰}^{a} xdx\right)_{A\to B} + \left(k\int_{a}^{۰} ydy\right)_{B\to C}$$
$$= k\int_{۰}^{a} xdx - k\int_{۰}^{a} ydy = ۰$$

ب) از A به C مسیر حرکت برابر $d\vec{r} = \hat{i}dx - \hat{j}dx$ و برای $y = -x$ نیرو برابر $\vec{F} = kx\hat{i} - kx\hat{j}$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = k\int_{۰}^{a} xdx + \int_{a}^{۰} xdx = ۰$$

ج) بروی مسیر دایره‌ای $x = a\sin\theta$ و $y = a\cos\theta$ بنابراین $d\vec{r} = a(\hat{i}\cos\theta - \hat{j}\sin\theta)d\theta$ و نیرو برابر $\vec{F} = ka\sin\theta\hat{i} + ka\cos\theta\hat{j}$

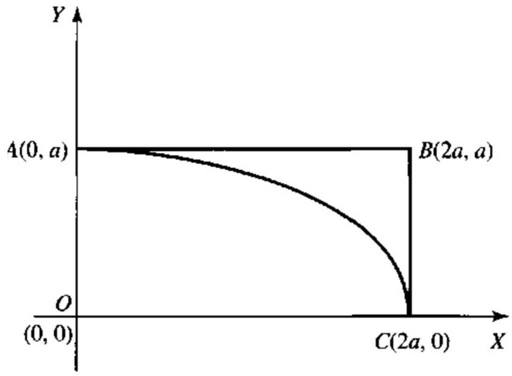
$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = ka^{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} (\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)\cdot(\hat{i}\cos\theta - \hat{j}\sin\theta)d\theta = ۰$$

۱۲) جسمی به جرم m از سه مسیر متفاوت نمایش داده شده مطابق شکل، از A به C برده می‌شود: الف) از A به B و از B به C و ب) در طول قطعه‌ای از یک بیضی از A به C. کار

انجام شده در هر مورد را برای هر یک از سه نیروی زیر محاسبه کنید

$$\vec{F} = kx\hat{i} + ky\hat{j}$$
$$\vec{F} = ۲y\hat{i} - ۲x\hat{j}$$
$$\vec{F} = x^۲y\hat{i} + xy^۲\hat{j}$$

حل: کار نیروی $\vec{F} = kx\hat{i} + ky\hat{j}$ در روی مسیرهای داده شده الف) از A به B مسیر حرکت برابر



$d\vec{r} = \hat{i}dx$ و از B به C مسیر حرکت برابر $d\vec{r} = \hat{j}dy$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(k\int_{\circ}^{۲a} xdx\right)_{A\to B} + \left(k\int_{a}^{\circ} ydy\right)_{B\to C}$$
$$= k\int_{\circ}^{۲a} xdx - k\int_{\circ}^{a} ydy = \frac{۳}{۲}ka^۲$$

ب) بروی مسیر بیضی $x = ۲a\sin\theta$ و $y = a\cos\theta$ بنابراین $d\vec{r} = a(۲\hat{i}\cos\theta - \hat{j}\sin\theta)d\theta$ و نیرو برابر

$$\vec{F} = ۲ka\sin\theta\hat{i} + ka\cos\theta\hat{j}$$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = ka^۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} (۲\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)\cdot(۲\hat{i}\cos\theta - \hat{j}\sin\theta)d\theta = ۳ka^۲\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{۳}{۲}ka^۲$$

۱۳) در لحظه $t = \circ$ نیروی $\vec{F}(t) = at\hat{i} + bt^۲\hat{j} + ct^۳\hat{k}$ به ذره ساکن به جرم m در $\vec{r}_\circ = ۲\hat{i} + ۳\hat{j}$ وارد می‌شود. مکان و سرعت ذره را بصورت تابعی t پیدا کنید.

$$\ddot{x} = \frac{a}{m}t \Rightarrow \dot{x} = \frac{a}{۲m}t^۲ \Rightarrow x = ۲ + \frac{a}{۶m}t^۳$$
$$\ddot{y} = \frac{b}{m}t^۲ \Rightarrow \dot{y} = \frac{b}{۳m}t^۳ \Rightarrow y = ۳ + \frac{a}{۱۲m}t^۴$$
$$\ddot{z} = \frac{c}{m}t^۳ \Rightarrow \dot{z} = \frac{c}{۴m}t^۴ \Rightarrow z = \frac{c}{۲\circ m}t^۵$$

۱۴) در لحظه $t = \circ$ نیروی $\vec{F}(t) = at\hat{i} + be^{kt}\hat{j}$ به ذره به جرم m در $\vec{r}_\circ = ۲\hat{i} + ۳\hat{j}$ که با سرعت $\vec{v}_\circ = v_{\circ x}\hat{i} + v_{\circ y}\hat{j}$ حرکت می‌کند، وارد می‌شود. مکان و سرعت ذره را بصورت تابعی t پیدا کنید.

$$\ddot{x} = \frac{a}{m}t \Rightarrow \dot{x} = v_{\circ x} + \frac{a}{۲m}t^۲ \Rightarrow x = ۲ + v_{\circ x}t + \frac{a}{۶m}t^۳$$
$$\ddot{y} = \frac{b}{m}e^{kt} \Rightarrow \dot{y} = v_{\circ y} + \frac{b}{۲mk}\left(e^{kt} - ۱\right) \Rightarrow y = ۳ + \left(v_{\circ y} - \frac{b}{۲mk}\right)t + \frac{b}{۲mk^۲}\left(e^{kt} - ۱\right)$$

مظفری