به نام خدا

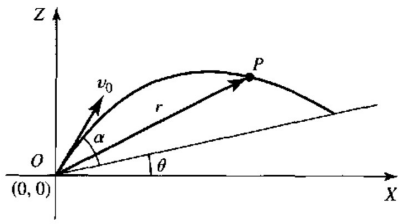
تمرین شماره: ۵ درس مکانیک تحلیلی ۱ تحویل: ۹۲/۲/۱۸

---

۱) تفنگی گلوله‌ای را با سرعت v_0 تحت زاویه α مطابق شکل به بالای تپه‌ای به شیب θ پرتاب می‌کند. نشان دهید برد گلوله برابر

$$r = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\theta}\sin\alpha\cos(\alpha+\theta)$$

است. زاویه پرتاب چه مقداری داشته باشد که برد گلوله بیشینه مقدار خود را داشته باشد(از مسائل فیزیک ۱).

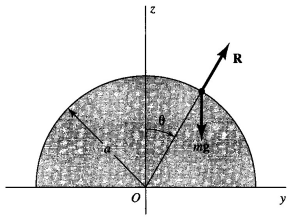


۲) ذرات گل و لای از لبه چرخ در حال حرکتی پرتاب می شود.اگر سرعت رو به جلو چرخ v_0 و شعاع چرخ b باشد، نشان می دهد که بیشترین ارتفاع بالاتر از سطح زمین است که گل می تواند تا آنجا پرتاب شود برابر

$$b + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2v_0^2}$$

در اینجا لازم است فرض کنید که $v_0^2 \geq bg$.

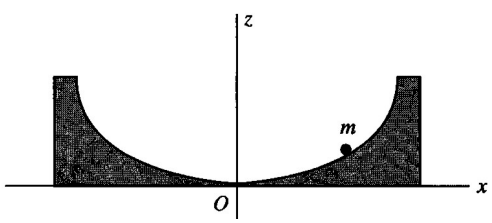
۳) ذره در بالای کره‌ی صافی شعاع a قرار داده شده است.اگر ذره کمی مختل شود مطابق شکل در روی سطح کره شروع به لغزیدن می‌کند، در چه زاویه‌ای ذره سطح کره را ترک می‌کند(از مسائل فیزیک ۱)؟



٤) ذره به جرم m در داخل سیکلوئیدی مطابق شکل می‌لغزد.سیکلوئید با معادله پارامتری

$$x = A(2\phi + \sin 2\phi)$$
$$z = A(1 - \cos 2\phi)$$

مشخص می‌شود. فرکانس نوسانات ذره را در داخل سیکلوئید بدست آورید.



۵) در یک نوسانگر دوبعدی با ثوابت فنر یکسان $k_x = k_y = k$ در صورتیکه نیرو نیروی بازگرداننده متناسب با فاصله باشد داریم

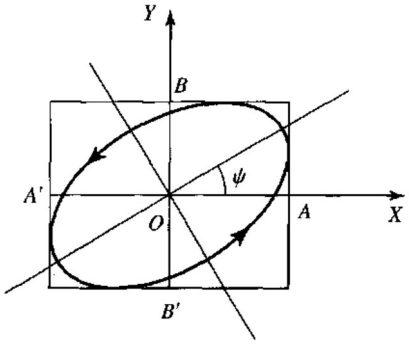
$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x = A\cos(\omega t + \phi_A) \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \Rightarrow y = B\cos(\omega t + \phi_B) \end{cases}$$

هر دو نوسانگر یک فرکانس دارند ولی دامنه و فاز آنها متفاوت است. برای بدست آوردن مسیر حرکت ذره t را باید از معادلات بالا حذف کرد. نشان دهید

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\phi_B - \phi_A) = \sin^2(\phi_B - \phi_A) \qquad (1)$$

این معادله معادله یک بیضی است که در شکل نشان داده شده است. قطر بزرگ این بیضی با محور X زاویه ψ می‌سازد، نشان دهید

$$\tan 2\psi = \frac{2AB\cos(\phi_B - \phi_A)}{A^2 - B^2}$$



(نکته: معادله (۱) یک شکل عمومی مقاطع مخروطی بصورت $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$ دارد که اگر $b^2 - 4ac$ منفی باشد بیضی، اگر مثبت باشد هزلولی و اگر صفر باشد سهمی است)

۶) بنابر نظریه یوکاوا در مورد نیروهای هسته ای، نیروی جاذب بین یک ذره نوترون و یک پروتون در داخل هسته با تابع پتانسیل

$$V(r) = \frac{ke^{-ar}}{r}$$

نمایش داده می‌شود که kو a ثابتند و $k < 0$.

الف) نیروی $F(r) = -\frac{dV}{dr}$ را پیدا کنید.

ب) پتانسیل موثر $V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$ را بطور کیفی رسم کرد و روی نقاط مختلف آن برحسب انرژی بحث کنید.

ج) E و L را اگر ذره روی دایره‌ای به شعاع r_0 حرکت می‌کند محاسبه کنید

د) پریود نوسانات دایره‌ای ω_θ را بدست آورید.

ی) پریود نوسانات شعاعی ω_r را برای مدار دایره‌ای پریشیده بدست آورید.

۷) ذره‌ای در میدان نیرویی که پتانسیل آن بصورت $V(r) = kr^{٤}$ با $k > ٠$ حرکت می‌کند
الف) نیروی $F(r) = -\frac{dV}{dr}$ را پیدا کنید.
ب) پتانسیل موثر $V_{eff} = \frac{L^{٢}}{٢\mu r^{٢}} + V(r)$ را بطور کیفی رسم کرد و روی نقاط مختلف آن برحسب انرژی بحث کنید.
ج) E و L را اگر ذره روی دایره‌ای به شعاع $r_{٠}$ حرکت می‌کند محاسبه کنید
د) پریود نوسانات دایره‌ای ω_{θ} را بدست آورید.
ی) پریود نوسانات شعاعی ω_{r} را برای مدار دایره‌ای پریشیده بدست آورید.

۸) ذره‌ای در میدان نیرویی بصورت $\vec{F}(r) = \frac{k}{r^{٣}}\hat{e}_{r}$ با $k < ٠$ حرکت می‌کند
الف) پتانسیل $V(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r)dr$ را پیدا کنید.
ب) پتانسیل موثر $V_{eff} = \frac{L^{٢}}{٢\mu r^{٢}} + V(r)$ را بطور کیفی رسم کرد و روی نقاط مختلف آن برحسب انرژی بحث کنید.
ج) E و L را اگر ذره روی دایره‌ای به شعاع $r_{٠}$ حرکت می‌کند محاسبه کنید
د) پریود نوسانات دایره‌ای ω_{θ} را بدست آورید.
ی) پریود نوسانات شعاعی ω_{r} را برای مدار دایره‌ای پریشیده بدست آورید.

۹) ذره‌ای در میدان نیروی مرکزی روی دایره‌ای که از مرکز نیرو می‌گذرد حرکت می‌کند. در نتیجه مدار بصورت $r = r_{٠}\cos\theta$ نوشته می‌شود. نشان دهید که این نیرو با توان پنجم فاصله‌ی شعاعی نسبت معکوس دارد.

۱۰) ذره‌ای تحت تاثیر یک نیروی مرکزی که همیشه متوجه مبدا است، مداری با معادله $r = a(١ + \cos\theta)$ را طی می‌کند. نیرو را پیدا کنید.

۱۱) ذره‌ای در میدان نیروی مرکزی به شکل

$$\vec{F}(r) = \frac{k}{r^{٣}}, \qquad k > ٠$$

حرکت می‌کند. نشان دهید که مسیر $r(\theta)$ی جسم با معادله

$$\frac{١}{r} = A\cos[\beta(\theta - \theta_{٠})]$$

داده می‌شود. مقادیر A و β را برحسب L، مکان و سرعت اولیه پیدا کنید.

۱۲) ذره‌ای در میدان نیروی مرکزی به شکل

$$\vec{F}(r) = \frac{k}{r^{٢}}, \qquad k < ٠$$

حرکت می‌کند. نشان دهید که مسیر $r(\theta)$ی جسم با معادله

$$\frac{١}{r} = B + A\cos(\theta - \theta_{٠})$$

داده می‌شود. مقادیر A و B را برحسب L ونقاط بازگشت نمودار پتانسیل موثر پیدا کنید.

مظفّری