به نام خدا

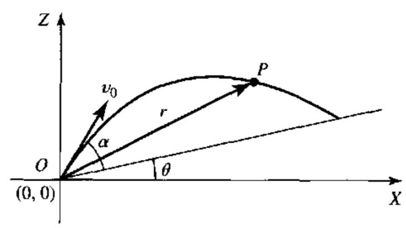
تمرین شماره: ۵ درس مکانیک تحلیلی ۱ تحویل: ۹۲/۲/۱۸

---

۱) تفنگی گلوله‌ای را با سرعت $v_۰$ تحت زاویه α مطابق شکل به بالای تپه‌ای به شیب θ پرتاب می‌کند. نشان دهید برد گلوله برابر

$$r = \frac{۲v_۰^۲}{g\cos^۲\theta}\sin\alpha\cos(\alpha+\theta)$$

است. زاویه پرتاب چه مقداری داشته باشد که برد گلوله بیشینه مقدار خود را داشته باشد(از مسائل فیزیک ۱).



معادله مسیر حرکت یک پرتابه در دوبعد برابر

$$z = -\frac{g}{۲v_۰^۲\cos^۲(\alpha+\theta)}x^۲ + \tan(\alpha+\theta)x$$

اگر $x = r\cos\theta$ و $z = r\sin\theta$ مختصات فرود ذره روی تپه باشد، داریم

$$r\sin\theta = -\frac{g}{۲v_۰^۲\cos^۲(\alpha+\theta)}r^۲\cos^۲\theta + r\frac{\cos\theta\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)}$$

و

$$\begin{aligned}\sin\theta - \frac{\cos\theta\sin(\alpha+\theta)}{\cos(\alpha+\theta)} &= -\frac{g}{۲v_۰^۲\cos^۲(\alpha+\theta)}r\cos^۲\theta\\ -\frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha+\theta)} &= -\frac{g}{۲v_۰^۲\cos^۲(\alpha+\theta)}r\cos^۲\theta\end{aligned}$$

در نتیجه فاصله محل برخورد گلوله با تپه از محل شلیک برابر

$$r = \frac{۲v_۰^۲}{g\cos^۲\theta}\sin\alpha\cos(\alpha+\theta)$$

زاویه‌ای که تحت آن بیشینه برد r_{max} بدست می‌آید، بصورت

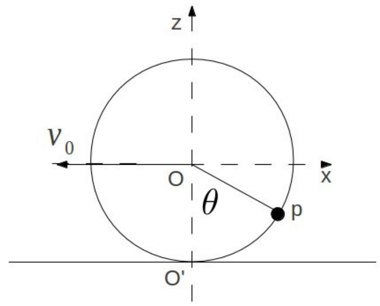
$$\frac{dr}{d\alpha} = ۰ \Rightarrow \frac{۲v_۰^۲}{g\cos^۲\theta}\left(\cos\alpha\cos(\alpha+\theta) - \sin\alpha\sin(\alpha+\theta)\right) = ۰ \Rightarrow \cos(۲\alpha+\theta) = ۰ \Rightarrow \alpha = -\frac{\theta}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

داده می‌شود

۲) ذرات گل و لای از لبه چرخ در حال حرکتی پرتاب می شود.اگر سرعت رو به جلو چرخ $v_۰$ و شعاع چرخ b باشد، نشان می دهد که بیشترین ارتفاع بالاتر از سطح زمین است که گل می تواند تا آنجا پرتاب شود برابر

$$b+\frac{v_0^2}{2g}+\frac{gb^2}{2v_0^2}$$

در اینجا لازم است فرض کنید که $v_0^2 \geq bg$.



مختصات و سرعت نقطه p از مبدا O برحسب زاویه θ بصورت زیر داده می‌شود

$$x=b\sin\theta \Rightarrow v_x=b\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow v_x=v_0\cos\theta$$
$$z=-b\cos\theta \Rightarrow v_z=b\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow v_x=v_0\sin\theta$$

مختصات نقطه p از نقطه‌ی O' یا زمین بصورت زیر داده می‌شود

$$x=b\sin\theta$$
$$z=b(1-\cos\theta)$$

معادله حرکت پرتابه‌ی در امتداد محور z، گل و لایی که از نقطه‌ی p جدا می‌شود بصورت

$$z(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta+b(1-\cos\theta)$$

داده می‌شود. در نقطه اوج (یعنی $\frac{dz}{dt}=0$) زمان اوج برابر $t_s=\frac{v_0\sin\theta}{g}$ است و ارتفاع اوج h_s در این زمان برابر

$$h_s(\theta)=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}+b(1-\cos\theta) \qquad (1)$$

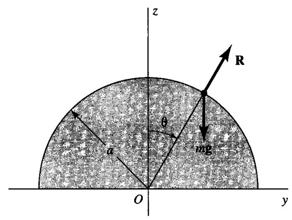
ماکزیمم ارتفاع اوج نسبت به θ با محاسبه $\frac{dh_s}{d\theta}=0$ بدست می‌آید، بنابراین

$$\frac{dh_s}{d\theta}=0 \Rightarrow \sin\theta\left(\frac{v_0^2\cos\theta}{g}+b\right)=0 \Rightarrow \cos\theta=-\frac{bg}{v_0^2}$$

و با قرار دادن $\cos\theta=-\frac{bg}{v_0^2}$ در معادله (1) داریم

$$(h_s)_{max}=b+\frac{v_0^2}{2g}+\frac{gb^2}{2v_0^2}$$

۳) ذره در بالای کره‌ی صافی به شعاع a قرار داده شده است.اگر ذره کمی مختل شود مطابق شکل در روی سطح کره شروع به لغزیدن می‌کند، در چه زاویه‌ای ذره سطح کره را ترک می‌کند(از مسائل فیزیک ۱)؟



با مقایسه انرژیهای دو وضعیت $E_{\theta=۰}$ و E_θ با یکدیگر داریم

$$E_{\theta=۰}=E_\theta \Rightarrow mga = mga\cos\theta + \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow mv^۲ = mga(۱-\cos\theta)$$

که در آن مرجع پتانسیل زمین قرار داده شده است. قانون دوم نیوتن در امتداد شعاعی بصورت

$$-R + mg\cos\theta = \frac{mv^۲}{a}$$

که R نیروی عکس‌العمل از سطح است. با قرار دادن $mv^۲ = mga(۱-\cos\theta)$ در عبارت بالا داریم

$$-R + mg\cos\theta = mg(۱-\cos\theta)$$

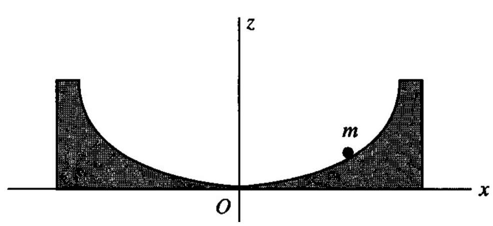
وقتی $R=۰$ جسم از سطح جدا می‌شود و زاویه جدا شدن از سطح برابر است با

$$mg\cos\theta = mg(۱-\cos\theta) \Rightarrow \cos\theta = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \theta = \cos^{-۱}\left(\frac{۲}{۳}\right)$$

٤) ذره به جرم m در داخل سیکلوئیدی مطابق شکل می‌لغزد.سیکلوئید با معادله پارامتری

$$\begin{aligned} x =& A(۲\phi + \sin ۲\phi) \\ z =& A(۱-\cos ۲\phi) \end{aligned}$$

مشخص می‌شود. فرکانس نوسانات ذره را در داخل سیکلوئید بدست آورید.



در اینجا قصد داریم از مقایسه انرژی ذره با یک نوسانگر ساده، فرکانس نوسانات ذره را بدست آوریم. برای این منظور ابتدا از معادله پارامتری بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و سرعت ذره را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} v_x =& ۲A\dot{\phi}(۱+\cos ۲\phi) \\ v_z =& ۲A\dot{\phi}\sin ۲\phi \end{aligned}$$

و انرژی جنبشی بصورت زیر داده می‌شود

$$\frac{1}{2}mv^2 = 2mA^2\dot{\phi}^2[(1+\cos 2\phi)^2 + \sin^2 2\phi] = 4mA^2\dot{\phi}^2[1+\cos 2\phi]$$

انرژی ذره برابر خواهد شد با

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + V(z) = 4mA^2\dot{\phi}^2[1+\cos 2\phi] + mgA(1-\cos 2\phi) \\ &= 8mA^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi + 2mgA\sin^2\phi \end{aligned}$$

اگر $u = 4A\sin\phi$ بنابراین $\dot{u} = 4A\dot{\phi}\cos\phi$ داریم

$$E = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{4A}\right)u^2$$

در مقایسه با انرژی یک نوسانگر ساده، $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$، ثابت فنر برابر

$$k = \frac{mg}{4A}$$

و در نتیجه فرکانس برابر

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{4A}}$$

۵) در یک نوسانگر دوبعدی با ثوابت فنر یکسان $k_x = k_y = k$ در صورتیکه نیرو نیروی بازگرداننده متناسب با فاصله باشد داریم

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow x = A\cos(\omega t + \phi_A) \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \Rightarrow y = B\cos(\omega t + \phi_B) \end{cases}$$

هر دو نوسانگر یک فرکانس دارند ولی دامنه و فاز آنها متفاوت است. برای بدست آوردن مسیر حرکت ذره t را باید از معادلات بالا حذف کرد. نشان دهید

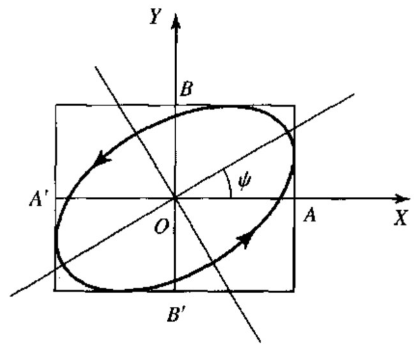
$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\phi_B - \phi_A) = \sin^2(\phi_B - \phi_A) \qquad (2)$$

این معادله معادله یک بیضی است که در شکل نشان داده شده است. قطر بزرگ این بیضی با محور X زاویه ψ می‌سازد، نشان دهید

$$\tan 2\psi = \frac{2AB\cos(\phi_B - \phi_A)}{A^2 - B^2}$$

(نکته: معادله (۳) یک شکل عمومی مقاطع مخروطی بصورت $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$ دارد که اگر $b^2 - 4ac$ منفی باشد بیضی، اگر مثبت باشد هزلولی و اگر صفر باشد سهمی است)

برای بدست آوردن معادله مستقل از زمان در معادله $y(t)$ تغییرات را $\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \phi_A + (\phi_B - \phi_A))$ اعمال می‌کنیم و سپس آنرا بسط می‌دهیم



$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \phi_A + (\phi_B - \phi_A)) = \cos(\omega t + \phi_A)\cos(\phi_B - \phi_A) - \sin(\omega t + \phi_A)\sin(\phi_B - \phi_A)$$
$$= \frac{x}{A}\cos(\phi_B - \phi_A) - \sqrt{۱ - \frac{x^۲}{A^۲}}\sin(\phi_B - \phi_A)$$

و

$$\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos(\phi_B - \phi_A) = -\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{A^۲}}\sin(\phi_B - \phi_A)$$

اگر طرفین را به توان ۲ برسانیم داریم

$$\frac{y^۲}{B^۲} + \frac{x^۲}{A^۲} - \frac{۲xy}{AB}\cos(\phi_B - \phi_A) = \sin^۲(\phi_B - \phi_A) \qquad (۳)$$

اگر دستگاه به اندازه ψ چرخیده شود انتظار داریم معادله بالا در دستگاه پریمدار به معادله $۱ = \left(\frac{x'}{A'}\right)^۲ + \left(\frac{y'}{B'}\right)^۲$ منجر شود که معادله یک بیضی است. یعنی

$$x' = x\cos\psi + y\sin\psi$$
$$y' = -x\sin\psi + y\cos\psi$$

و

$$x = x'\cos\psi - y'\sin\psi$$
$$y = x'\sin\psi + y'\cos\psi$$

با قرار دادن معادله بالا در داخل معادله (۳) داریم

$$\frac{(x'\sin\psi + y'\cos\psi)^۲}{B^۲} + \frac{(x'\cos\psi - y'\sin\psi)^۲}{A^۲}$$
$$- \frac{۲(x'\cos\psi - y'\sin\psi)(x'\sin\psi + y'\cos\psi)}{AB}\cos(\phi_B - \phi_A)$$
$$= \sin^۲(\phi_B - \phi_A)$$

و

$$\left(\frac{\sin^۲\psi}{B^۲}+\frac{\cos^۲\psi}{A^۲}-\frac{\sin ۲\psi}{AB}\right)x'^۲+\left(\frac{\cos^۲\psi}{B^۲}+\frac{\sin^۲\psi}{A^۲}+\frac{\sin ۲\psi}{AB}\right)y'^۲$$
$$+\left(\frac{\sin ۲\psi}{B^۲}-\frac{\sin ۲\psi}{A^۲}-۲\cos(\phi_B-\phi_A)\frac{\cos ۲\psi}{AB}\right)x'y'=\sin^۲(\phi_B-\phi_A)$$

در دستگاه پریمدار ضریب $x'y'$ باید برابر صفر قرار گیرد

$$\frac{\sin ۲\psi}{B^۲}-\frac{\sin ۲\psi}{A^۲}-۲\cos(\phi_B-\phi_A)\frac{\cos ۲\psi}{AB}=۰$$

یا

$$\tan ۲\psi=\frac{۲AB\cos(\phi_B-\phi_A)}{A^۲-B^۲}$$

٦) بنابر نظریه یوکاوا در مورد نیروهای هسته ای، نیروی جاذب بین یک ذره نوترون و یک پروتون در داخل هسته با تابع پتانسیل

$$V(r)=\frac{ke^{-ar}}{r}$$

نمایش داده می‌شود که kو a ثابتند و $k<۰$.
الف) نیروی $F(r)=-\frac{dV}{dr}$ را پیدا کنید.
ب) پتانسیل موثر $V_{eff}=\frac{L^۲}{۲\mu r^۲}+V(r)$ را بطور کیفی رسم کرد و روی نقاط مختلف آن برحسب انرژی بحث کنید.
ج) E و L را اگر ذره روی دایره‌ای به شعاع r، حرکت می‌کند محاسبه کنید
د) پریود نوسانات دایره‌ای ω_θ را بدست آورید.
ی) پریود نوسانات شعاعی ω_r را برای مدار دایره‌ای پریشیده بدست آورید.

الف)

$$F(r)=-\frac{d}{dr}V(r)=k\left(\frac{۱}{r^۲}+\frac{a}{r}\right)e^{-ar}$$

ب)

$$V_{eff}(r)=\frac{L^۲}{۲\mu r^۲}+\frac{ke^{-ar}}{r}$$

ج) اگر نقطه‌ی مینیمم منحنی پتانسیل موثر را r_0 درنظر بگیریم،داریم

$$\frac{d}{dr}V_{eff}|_{r_0} = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{\mu r_0^3} - k\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{a}{r_0}\right)e^{-ar_0} = 0$$
$$\Rightarrow L^2 = -k\mu r_0^3\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{a}{r_0}\right)e^{-ar_0}$$

با توجه به اینکه در آن سهم شعاعی انرژی جنبشی برابر صفراست($\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$) و ذره روی یک دایره به شعاع ثابت r_0 حرکت می‌کند، بنابراین

$$E|_{r_0} = \frac{L^2}{2\mu r_0^2} + \frac{ke^{-ar_0}}{r_0}$$

با قرار داد $L^2 = -k\mu r_0^3\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{a}{r_0}\right)e^{-ar_0}$ در رابطه بالا داریم

$$E|_{r_0} = k\left(\frac{1}{2r_0}-\frac{a}{2}\right)e^{-ar_0}$$

د) فرکانس نوسانات زاویه‌ای بصورت $\dot{\theta} = \omega = \frac{L}{\mu r_0^2}$ داده می‌شود. بنابراین

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{L}{\mu r_0^2} = \frac{\sqrt{-k\mu r_0^3\left(\frac{1}{r_0^2}+\frac{a}{r_0}\right)e^{-ar_0}}}{\mu r_0^2} = \sqrt{\frac{-k}{\mu}}\sqrt{\left(\frac{1}{r_0^3}+\frac{a}{r_0^2}\right)e^{-ar_0}}$$

ی) فرکانس نوسانات شعاعی ω_r برای مدار دایره‌ای پریشیده برابر

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{\mu}\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}|_{r_0}} = \sqrt{-\frac{k}{\mu}\left(\frac{1}{r_0^3}+\frac{a}{r_0^2}-\frac{a^2}{r_0}\right)e^{-ar_0}}$$

۷) ذره‌ای در میدان نیرویی که پتانسیل آن بصورت $V(r) = kr^4$ با $k > 0$ حرکت می‌کند
الف) نیروی $F(r) = -\frac{dV}{dr}$ را پیدا کنید.
ب) پتانسیل موثر $V_{eff} = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$ را بطور کیفی رسم کرد و روی نقاط مختلف آن برحسب انرژی بحث کنید.
ج) E و L را اگر ذره روی دایره‌ای به شعاع r_0 حرکت می‌کند محاسبه کنید
د) پریود نوسانات دایره‌ای ω_θ را بدست آورید.
ی) پریود نوسانات شعاعی ω_r را برای مدار دایره‌ای پریشیده بدست آورید.

الف)

$$F(r) = -\frac{d}{dr}V(r) = -4kr^3$$

ب)

$$V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + kr^4$$

ج) اگر نقطه‌ی مینیمم منحنی پتانسیل موثر را $r_۰$ درنظر بگیریم،داریم

$$\frac{d}{dr}V_{eff}|_{r_۰}=۰\Rightarrow -\frac{L^۲}{\mu r_۰^۳}+۴kr_۰^۳=۰\Rightarrow L^۲=۴k\mu r_۰^۶$$

با توجه به اینکه در آن سهم شعاعی انرژی جنبشی برابر صفراست($\frac{۱}{۲}\mu\dot{r}^۲$) و ذره روی یک دایره به شعاع ثابت $r_۰$ حرکت می‌کند، بنابراین

$$E|_{r_۰}=\frac{L^۲}{۲\mu r_۰^۲}+kr_۰^۴$$

با قرار داد $L^۲=۴k\mu r_۰^۶$ در رابطه بالا داریم

$$E|_{r_۰}=۳kr_۰^۴$$

د) فرکانس نوسانات زاویه‌ای بصورت $\dot{\theta}=\omega=\frac{L}{\mu r_۰^۲}$ داده می‌شود. بنابراین

$$\dot{\theta}=\omega=\frac{L}{\mu r_۰^۲}=۲\sqrt{\frac{kr_۰^۲}{\mu}}$$

ی) فرکانس نوسانات شعاعی ω_r برای مدار دایره‌ای پریشیده برابر

$$\omega_r=\sqrt{\frac{۱}{\mu}\frac{d^۲V_{eff}}{dr^۲}|_{r_۰}}=۲\sqrt{\frac{۶kr_۰^۲}{\mu}}$$

۸) ذره‌ای در میدان نیرویی بصورت $\vec{F}(r)=\frac{k}{r^۳}\hat{e}_r$ با $k<۰$ حرکت می‌کند
الف) پتانسیل $V(r)=-\int_\infty^r F(r)dr$ را پیدا کنید.
ب) پتانسیل موثر $V_{eff}=\frac{L^۲}{۲\mu r^۲}+V(r)$ را بطور کیفی رسم کرد و روی نقاط مختلف آن برحسب انرژی بحث کنید.
ج) E و L را اگر ذره روی دایره‌ای به شعاع $r_۰$ حرکت می‌کند محاسبه کنید
د) پریود نوسانات دایره‌ای ω_θ را بدست آورید.
ی) پریود نوسانات شعاعی ω_r را برای مدار دایره‌ای پریشیده بدست آورید.

الف)

$$V(r)-(V(\infty)=۰)=-\int_\infty^r F(r)dr=\frac{k}{۲r^۲}\Rightarrow V(r)=\frac{k}{۲r^۲}$$

ب)

$$V_{eff}(r)=\frac{L^۲}{۲\mu r^۲}+\frac{k}{۲r^۲}$$

ج) اگر نقطه‌ی مینیمم منحنی پتانسیل موثر را r_0 درنظر بگیریم،داریم

$$\frac{d}{dr}V_{eff}|_{r_0} = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{\mu r_0^3} - \frac{k}{2r_0^2} = 0 \Rightarrow L^2 = -k\mu$$

با توجه به اینکه در آن سهم شعاعی انرژی جنبشی برابر صفراست($\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$) و ذره روی یک دایره به شعاع ثابت r_0 حرکت می‌کند، بنابراین

$$E|_{r_0} = \frac{L^2}{2\mu r_0^2} + \frac{k}{2r_0^2}$$

با قرار داد $L^2 = -k\mu$ در رابطه بالا داریم

$$E|_{r_0} = 0$$

د) فرکانس نوسانات زاویه‌ای بصورت $\dot{\theta} = \omega = \frac{L}{\mu r_0^2}$ داده می‌شود. بنابراین

$$\dot{\theta} = \omega = \frac{L}{\mu r_0^2} = \sqrt{\frac{k}{\mu r_0^4}}$$

ی) فرکانس نوسانات شعاعی ω_r برای مدار دایره‌ای پریشیده برابر

$$\omega_r = \sqrt{\frac{1}{\mu}\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}|_{r_0}} = \sqrt{\frac{9k}{2\mu r_0^4}}$$

۹) ذره‌ای در میدان نیروی مرکزی روی دایره‌ای که از مرکز نیرو می‌گذرد حرکت می‌کند. در نتیجه مدار بصورت $r = r_0 \cos\theta$ نوشته می‌شود. نشان دهید که این نیرو با توان پنجم فاصله‌ی شعاعی نسبت معکوس دارد.
معادله مسیر حرکت نیروی مرکزی $F = F(r)$ با تغییر متغییر $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 \cos\theta}$ بصورت

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{L^2u^2}F(\frac{1}{u})$$

داده می‌شود. که

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{r_0}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

و

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{1}{r_0}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{2\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\right) = \frac{1}{r_0}\left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{2}{\cos^3\theta} - \frac{2}{\cos\theta}\right) = -\frac{1}{r_0\cos\theta} + \frac{2r_0^2}{r_0^3\cos^3\theta}\\ &= -u + 2r_0^2u^3\end{aligned}$$

با جایگذاری آن در معادله مسیر حرکت بالا داریم

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{L^2u^2}F(\frac{1}{u}) \Rightarrow -u + 2r_0^2u^3 + u = -\frac{\mu}{L^2u^2}F(\frac{1}{u}) \Rightarrow F(\frac{1}{u}) = -\frac{2r_0^2L^2}{\mu}u^5$$

و در نتیجه داریم

$$F(\frac{۱}{u}) = -\frac{۲r_۰^۲ L^۲}{\mu} u^۵ \Rightarrow F(r) = -\frac{۲r_۰^۲ L^۲}{\mu} \frac{۱}{r^۵}$$

۱۰) ذره‌ای تحت تاثیر یک نیروی مرکزی که همیشه متوجه مبدا است، مداری با معادله $r = a(۱ + \cos\theta)$ را طی می‌کند. نیرو را پیدا کنید.
معادله مسیر حرکت نیروی مرکزی $F = F(r)$ با تغییر متغییر $u = \frac{۱}{r} = \frac{۱}{a(۱+\cos\theta)}$ بصورت

$$\frac{d^۲u}{d\theta^۲} + u = -\frac{\mu}{L^۲u^۲} F(\frac{۱}{u})$$

داده می‌شود. که

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{۱}{a} \frac{\sin\theta}{(۱ + \cos\theta)^۲}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{d^۲u}{d\theta^۲} &= \frac{۱}{a}\left(\frac{\cos\theta}{(۱+\cos\theta)^۲} + \frac{۲\sin^۲\theta}{(۱+\cos\theta)^۳}\right) = \frac{۱}{a}\left(\frac{\cos\theta}{(۱+\cos\theta)^۲} + \frac{۲(۱+\cos\theta)(۱-\cos\theta)}{(۱+\cos\theta)^۳}\right) \\ &= \frac{۱}{a}\left(\frac{۲-\cos\theta}{(۱+\cos\theta)^۲}\right) = \frac{۱}{a}\left(\frac{۳-(۱+\cos\theta)}{(۱+\cos\theta)^۲}\right) = \frac{۱}{a}\left(۳\frac{۱}{(۱+\cos\theta)^۲} - \frac{۱}{(۱+\cos\theta)}\right) \\ &= -u + ۳au^۲ \end{aligned}$$

با جایگذاری آن در معادله مسیر حرکت بالا داریم

$$\frac{d^۲u}{d\theta^۲} + u = -\frac{\mu}{L^۲u^۲} F(\frac{۱}{u}) \Rightarrow -u + ۳au^۲ + u = -\frac{\mu}{L^۲u^۲} F(\frac{۱}{u}) \Rightarrow F(\frac{۱}{u}) = -\frac{۳aL^۲}{\mu} u^٤$$

و در نتیجه داریم

$$F(\frac{۱}{u}) = -\frac{۳aL^۲}{\mu} u^٤ \Rightarrow F(r) = -\frac{۳aL^۲}{\mu} \frac{۱}{r^٤}$$

۱۱) ذره‌ای در میدان نیروی مرکزی به شکل

$$\vec{F}(r) = \frac{k}{r^۳}, \qquad k > ۰$$

حرکت می‌کند. نشان دهید که مسیر $r(\theta)$ی جسم با معادله

$$\frac{۱}{r} = A\cos[\beta(\theta - \theta_۰)]$$

داده می‌شود. مقادیر A و β را برحسب L، مکان و سرعت اولیه پیدا کنید.

معادله دیفرانسیل حرکت در حضور نیروی مرکزی $F(r) = \frac{k}{r^۳} = ku^۳$ بصورت

$$\frac{d^۲u}{d\theta^۲} + u = -\frac{k\mu}{L^۲}u \Rightarrow \frac{d^۲u}{d\theta^۲} + \left(۱ + \frac{k\mu}{L^۲}\right)u = ۰ \Rightarrow \frac{d^۲u}{d\theta^۲} + \beta^۲u = ۰$$

داده می‌شود. که $\beta = \sqrt{۱ + \frac{k\mu}{L^۲}}$. جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دو بالا برابر

$$u(\theta) = A\cos(\beta\theta - \phi)$$

که A و ϕ بوسیله ثوابت حرکت و شرایط اولیه مسئله بدست می‌آید. در اینجا می‌توان ϕ را با $\theta_۰$ بصورت $\phi = \beta\theta_۰$ عوض کرد.

$$\frac{۱}{r} = A\cos\beta(\theta - \theta_۰)$$

در ادامه قصد داریم ثابت A را بوسیله نقاط بازگشت در پتانسیل موثر بدست آوریم. سرعت شعاعی ذره به انرژی E در نقاط بازگشت برابر صفر است که در اینصورت داریم

$$E = \frac{L^۲}{۲\mu r^۲} + V(r)$$

که پتانسیل $V(r)$ بصورت

$$V(r) - V(r = \infty) = -\int_\infty^r \frac{k}{r^۳}dr \Rightarrow V(r) = \frac{k}{۲r^۲}$$

بدست می‌آید. با ادامه دادن $E = \frac{L^۲}{۲\mu r^۲} + V(r)$ با توجه به اینکه انرژی E و دیگر ثوابت مشخص هستند قصد داریم $\frac{۱}{r}$ را بدست آوریم

$$E = \frac{L^۲}{۲\mu r^۲} + \frac{k}{۲r^۲} \Rightarrow \frac{۱}{r} = \pm\sqrt{\frac{۲\mu E}{L^۲ + \mu k}}$$

از طرفی در عبارت $\frac{۱}{r} = A\cos\beta(\theta - \theta_۰)$ مقدار $\cos\beta(\theta - \theta_۰)$ بین ±۱ قرار دارد و بنابراین $\frac{۱}{r} = \pm A$. با مقایسه آن با عبارت بالا داریم

$$A = \sqrt{\frac{۲\mu E}{L^۲ + \mu k}}$$

بنابراین معادله مسیر حرکت برابر

$$\frac{۱}{r} = \sqrt{\frac{۲\mu E}{L^۲ + \mu k}}\cos\beta(\theta - \theta_۰)$$

که $\theta_۰$ با توجه به شرایط اولیه بدست می‌آید.

۱۲) ذره‌ای در میدان نیروی مرکزی به شکل

$$\vec{F}(r) = \frac{k}{r^۲}, \qquad k < ۰$$

حرکت می‌کند. نشان دهید که مسیر $r(\theta)$ی جسم با معادله

$$\frac{1}{r} = B + A\cos(\theta - \theta_0)$$

داده می‌شود. مقادیر A و B را برحسب L ونقاط بازگشت نمودار پتانسیل موثر پیدا کنید.

معادله دیفرانسیل حرکت در حضور نیروی مرکزی $F(r) = \frac{k}{r^2} = ku^2$ بصورت

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{k\mu}{L^2}$$

داده می‌شود. جواب قسمت همگن و ناهمگن معادله دیفرانسیل مرتبه دو بالا برابر

$$u(\theta) = -\frac{k\mu}{L^2} + A\cos(\theta - \theta_0)$$

در ادامه قصد داریم ثابت A را بوسیله نقاط بازگشت در پتانسیل موثر بدست آوریم. سرعت شعاعی ذره به انرژی E در نقاط بازگشت برابر صفر است که در اینصورت داریم

$$E = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

که پتانسیل $V(r)$ بصورت

$$V(r) - (V(r=\infty) = 0) = -\int_{\infty}^{r} \frac{k}{r^2} dr \Rightarrow V(r) = \frac{k}{r}$$

بدست می‌آید. با ادامه دادن $E = \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r)$ با توجه به اینکه انرژی E و دیگر ثوابت مشخص هستند قصد داریم $\frac{1}{r}$ را بدست آوریم

$$E = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{2\mu k}{L^2}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{2\mu E}{L^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} = -\frac{\mu k}{L^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu k}{L^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{L^2}}$$

از طرفی در عبارت $\frac{1}{r} = -\frac{k\mu}{L^2} + A\cos(\theta - \theta_0)$ مقدار $\cos(\theta - \theta_0)$ بین ± 1 قرار دارد و بنابراین $\frac{1}{r} = -\frac{k\mu}{L^2} \pm A$. با مقایسه آن با عبارت بالا داریم

$$A = \sqrt{\left(\frac{\mu k}{L^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{L^2}}$$

بنابراین معادله مسیر حرکت برابر

$$\frac{1}{r} = -\frac{k\mu}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{\mu k}{L^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{L^2}}\cos(\theta - \theta_0)$$

که θ_0 با توجه به شرایط اولیه بدست می‌آید.

مظفّری