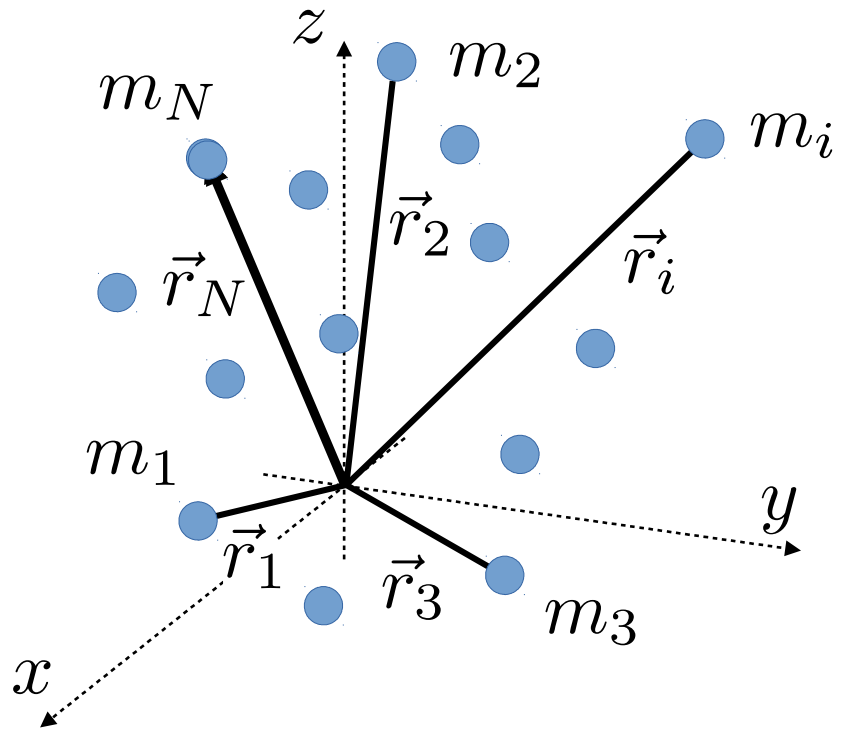
جلسه اول

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

دینامیک سیستمهای ذرات

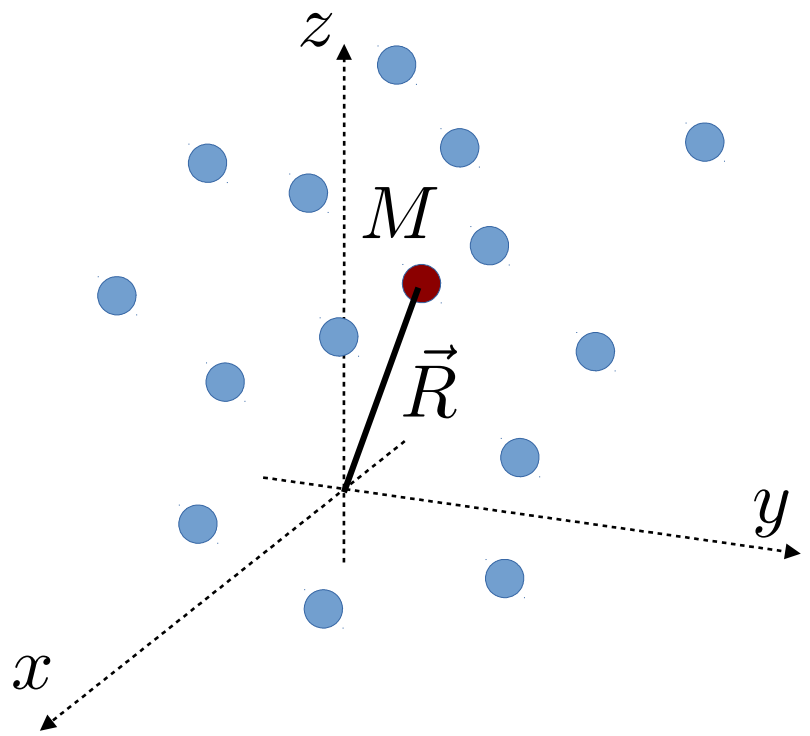
$$
\begin{aligned}
m_1 &: \vec{r}_1 \\
m_2 &: \vec{r}_2 \\
&\vdots \\
m_i &: \vec{r}_i \\
&\vdots \\
m_N &: \vec{r}_N
\end{aligned}
$$



محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

$$m_1 : \vec{r}_1$$
$$m_2 : \vec{r}_2$$
$$\vdots$$
$$m_i : \vec{r}_i$$
$$\vdots$$
$$m_N : \vec{r}_N$$



$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots + m_N$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_i\vec{r}_i + \cdots + m_N\vec{r}_N}{M}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots + m_N$$

$$m_1 : \vec{r}_1$$
$$m_2 : \vec{r}_2$$
$$\vdots$$
$$m_i : \vec{r}_i$$
$$\vdots$$
$$m_N : \vec{r}_N$$

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_i\vec{r}_i + \cdots + m_N\vec{r}_N}{M}$$

$$\boxed{\begin{aligned} M &= \sum_i^N m_i \\ \vec{R} &= \frac{1}{M}\sum_i^N m_i\vec{r}_i \end{aligned}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

$$m_1 : \vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$$
$$m_2 : \vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$$
$$\vdots$$
$$m_i : \vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$$
$$\vdots$$
$$m_N : \vec{r}_N = (x_N, y_N, z_N)$$

$$M = \sum_i^N m_i$$
$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i^N m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{R} = (X, Y, Z)$$

$$X = \frac{1}{M} \sum_i^N m_i x_i$$
$$Y = \frac{1}{M} \sum_i^N m_i y_i$$
$$Z = \frac{1}{M} \sum_i^N m_i z_i$$

دینامیک سیستمهای ذرات

مرکز جرم یک جسم صلب

$$\sum_i m_i \longrightarrow \int \mathrm{d}m$$

$$M = \int \mathrm{d}m$$

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\mathrm{d}m$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m$$

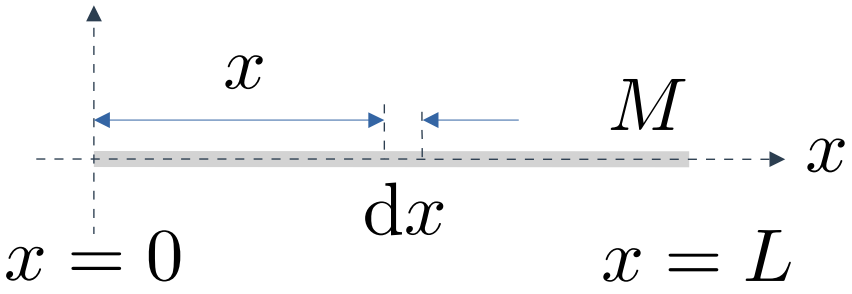
$$Z = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m$$

توزیع پیوسته یک بعدی $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l$ جرم در واحد طول λ

توزیع پیوسته دو بعدی $\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}S$ جرم در واحد سطح σ

توزیع پیوسته سه بعدی $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$ جرم در واحد حجم ρ

دینامیک سیستمهای ذرات



جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$Y = Z = 0$$

$$X = \frac{1}{M}\int_0^L x\,\mathrm{d}m$$

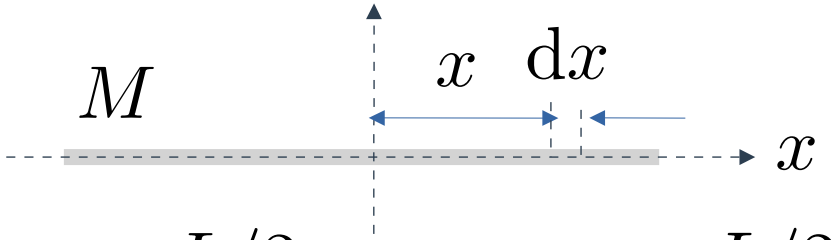
$$X = \frac{1}{M}\int_0^L x\frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$X = \frac{1}{L}\int_0^L x\,\mathrm{d}x$$

$$X = \frac{L}{2}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



$$Y = Z = 0$$

$$X = \frac{1}{M}\int_{-L/2}^{L/2} x\,\mathrm{d}m$$

جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است

$$X = \frac{1}{M}\int_{-L/2}^{L/2} x\frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}$$

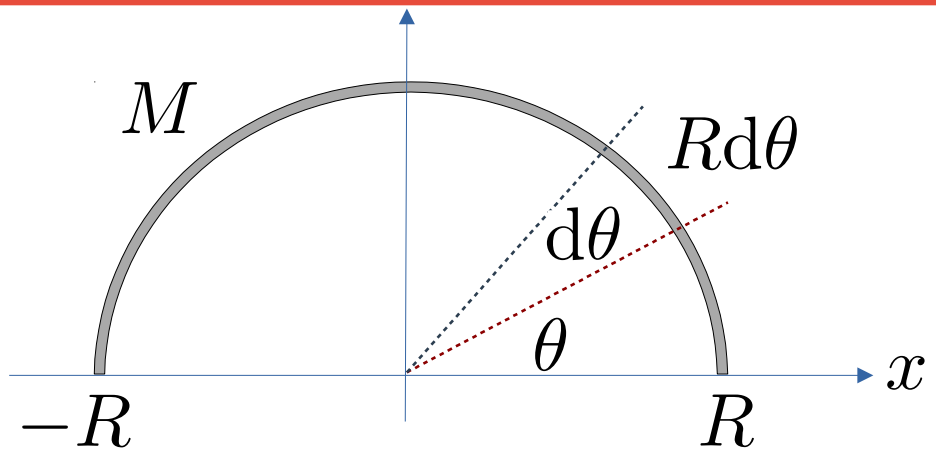
$$X = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$X = 0$$

انتخاب دستگاه مختصات مناسب که شامل **تقارن‌های** جسم است

دینامیک سیستمهای ذرات



جرم در واحد طول نیم دایره بطور یکنواخت توزیع شده است

$$\lambda = \frac{M}{\pi R} = \frac{\mathrm{d}m}{R\mathrm{d}\theta}$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

بدلیل تقارن حول محور y داریم $X = 0$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m$$

$$Y = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} (R\sin\theta)\frac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$Y = \frac{R}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$Y = \frac{2R}{\pi}$$

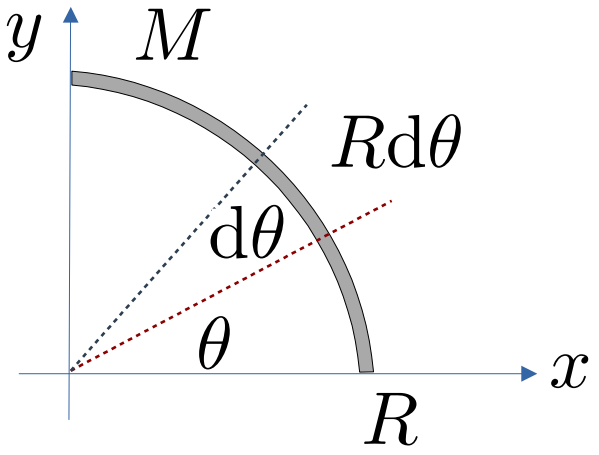
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\lambda = \frac{2M}{\pi R} = \frac{\mathrm{d}m}{R\mathrm{d}\theta}$$

جرم در واحد طول نیم دایره بطور یکنواخت توزیع شده است

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta$$



$$0 \le \theta \le \pi/2$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(R\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2R}{\pi}$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(R\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2R}{\pi}$$

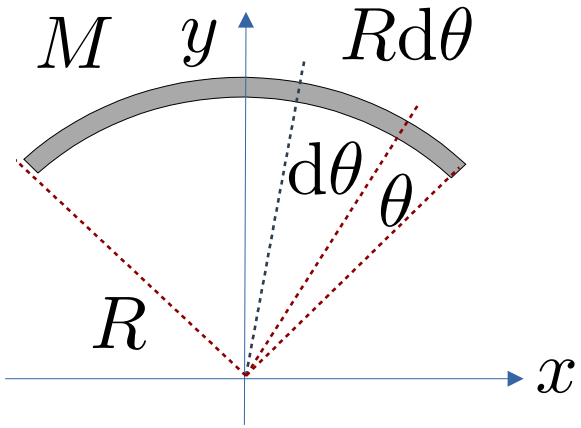
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\lambda = \frac{2M}{\pi R} = \frac{\mathrm{d}m}{R\mathrm{d}\theta}$$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

جرم در واحد طول نیم دایره بطور یکنواخت توزیع شده است



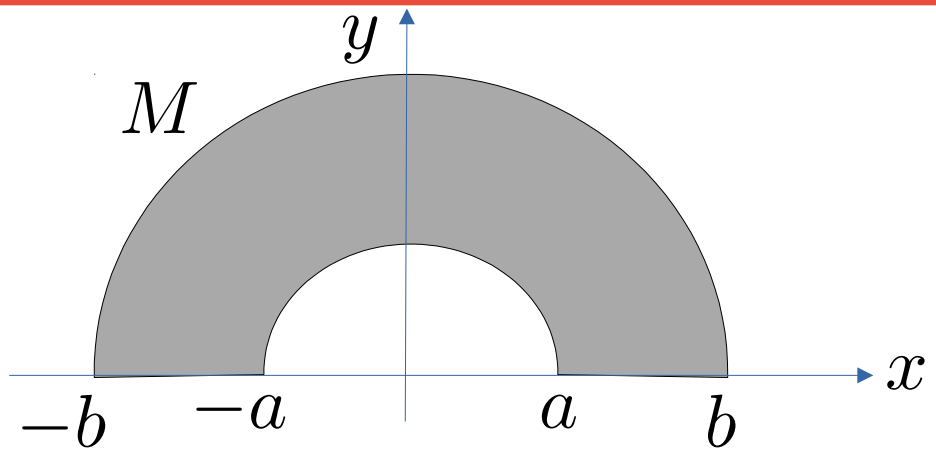
$$\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$$

بدلیل تقارن حول محور y داریم $X = 0$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(R\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



$$\sigma = \frac{2M}{\pi(b^2 - a^2)} = \frac{\mathrm{d}m}{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}$$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi(b^2 - a^2)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است

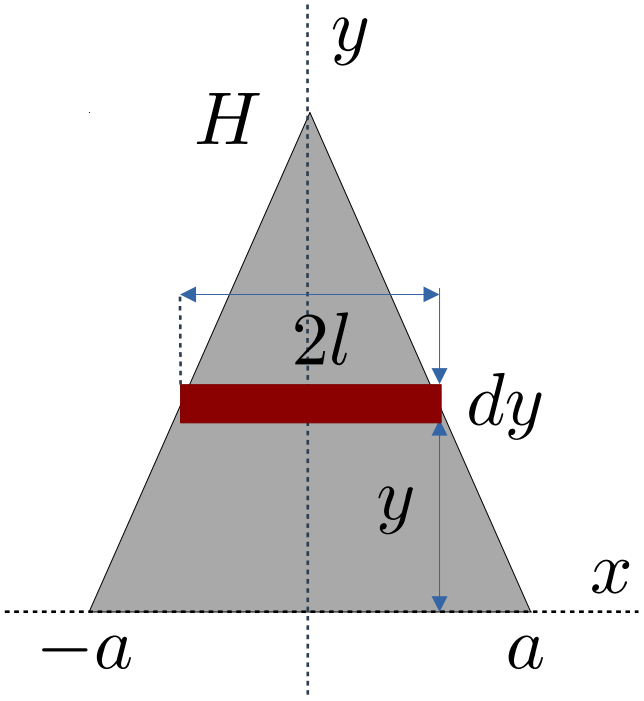
بدلیل تقارن حول محور y داریم $X = 0$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} (r\sin\theta)\frac{2M}{\pi(b^2 - a^2)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$Y = \frac{2}{\pi(b^2 - a^2)}\left(\int_a^b r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right) = \frac{4(b^3 - a^3)}{3\pi(b^2 - a^2)}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است

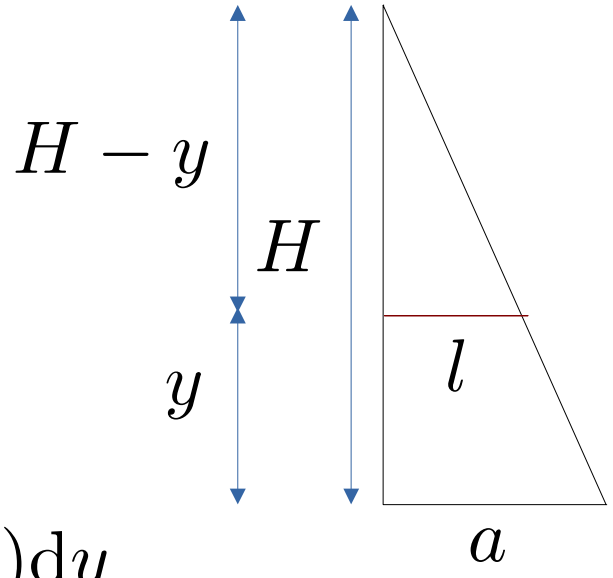
بدلیل تقارن حول محور y داریم $X = 0$

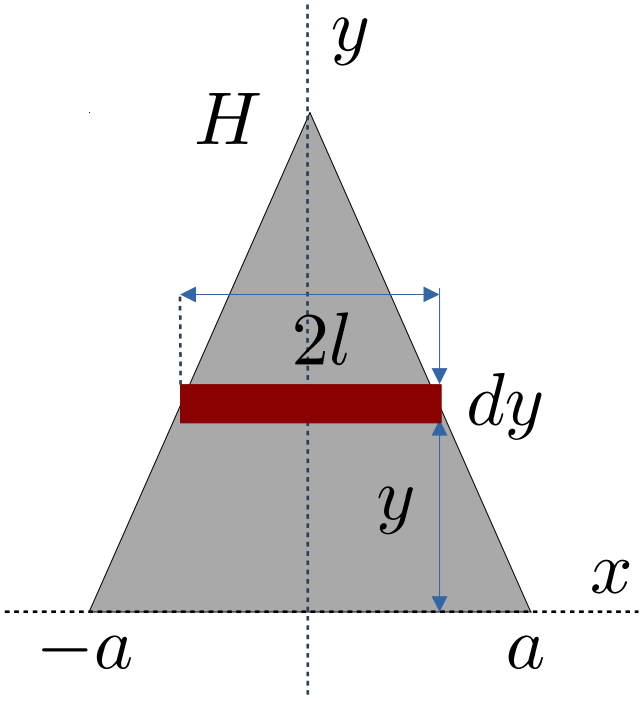
$$\mathrm{d}m = \frac{M}{aH}\mathrm{d}A = \frac{M}{aH}2l\mathrm{d}y, \quad l = l(y) = ?$$

$$\frac{l}{a} = \frac{H-y}{H}$$

$$l(y) = a\frac{H-y}{H}$$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{H^2}(H-y)\mathrm{d}y$$





جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است

بدلیل تقارن حول محور y داریم $X = 0$

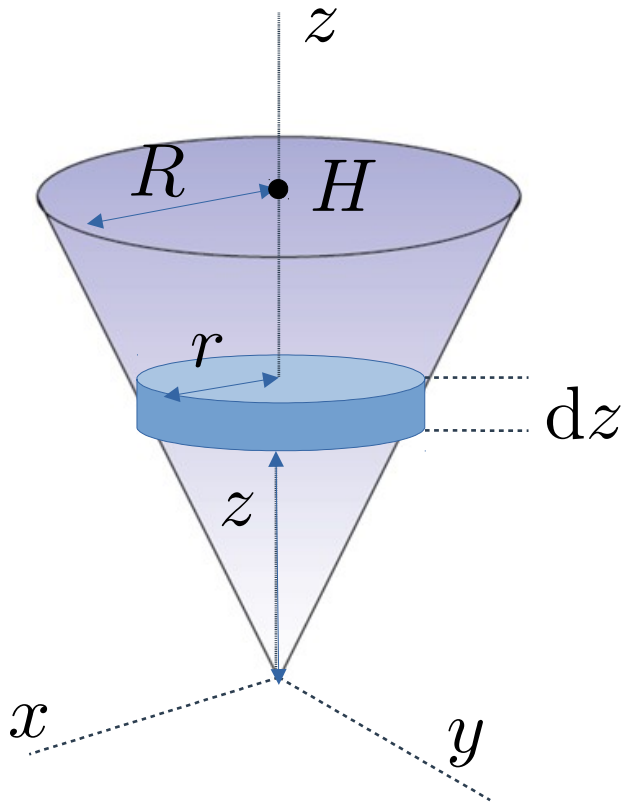
$$Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{H^2}(H-y)\mathrm{d}y$$

$$Y = \frac{2}{H^2}\int_0^H y(H-y)\mathrm{d}y$$

$$Y = \frac{H}{3}$$

دینامیک سیستمهای ذرات



جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است

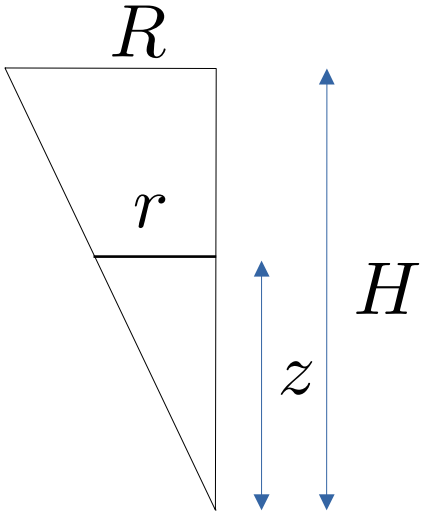
بدلیل تقارن $X = Y = 0$

$$Z = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{\pi R^2 H}\pi r^2 \mathrm{d}z, \quad r = r(z)$$

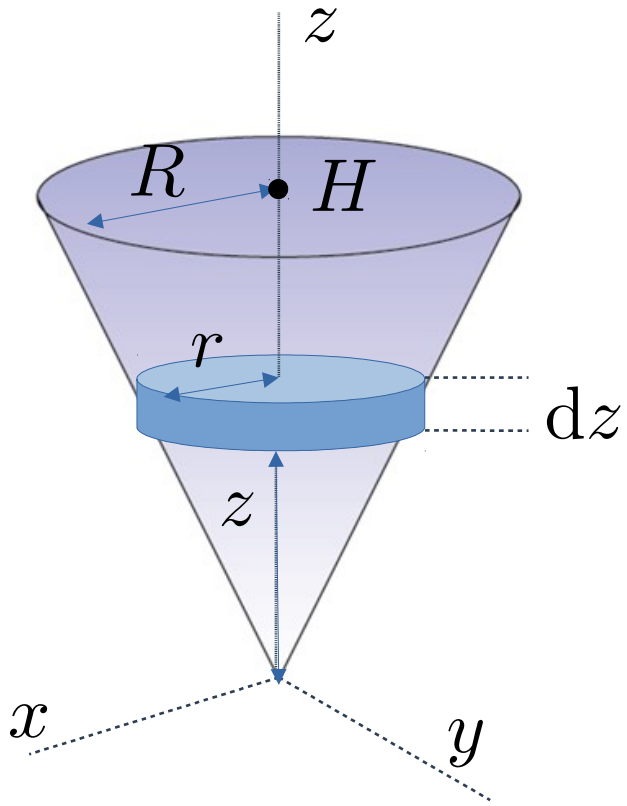
$$\frac{r}{R} = \frac{z}{H} \Rightarrow r = \frac{R}{H}z$$

$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{H^3}z^2\mathrm{d}z$$



محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است

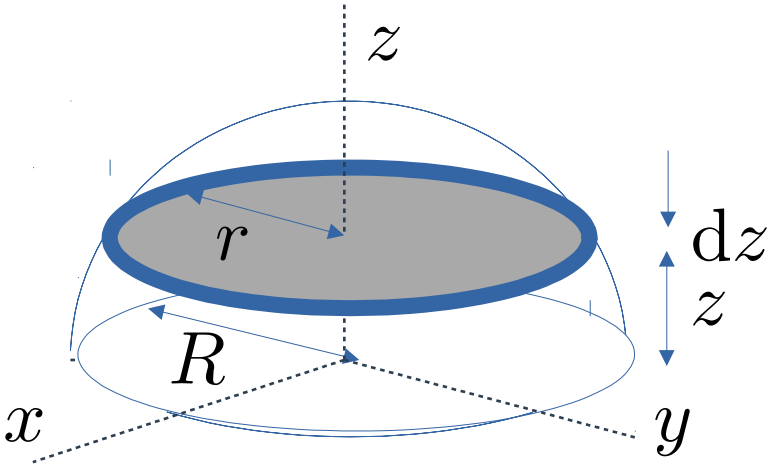
بدلیل تقارن $X = Y = 0$

$$Z = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m$$

$$Z = \frac{3}{H^3}\int_0^H z^3\,\mathrm{d}z$$

$$Z = \frac{3H}{4}$$

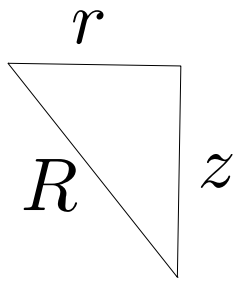
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم



بدلیل تقارن $X = Y = 0$

$$Z = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{2\pi R^3}\pi r^2 \mathrm{d}z, \quad r = r(z)$$



$$r^2 = R^2 - z^2$$

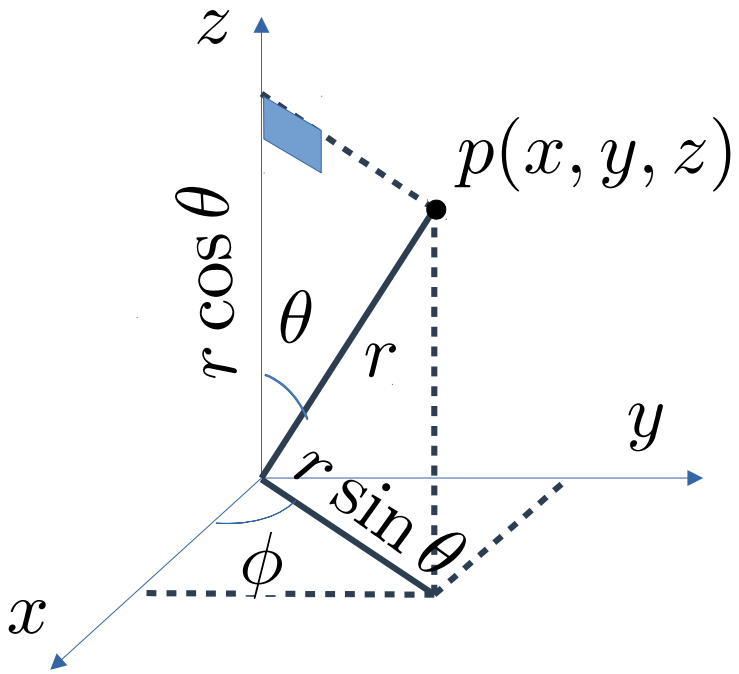
جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است

$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{2R^3}(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$$

$$Z = \frac{3}{2R^3}\int_0^R z(R^2 - z^2)\mathrm{d}z = \frac{3R}{8}$$

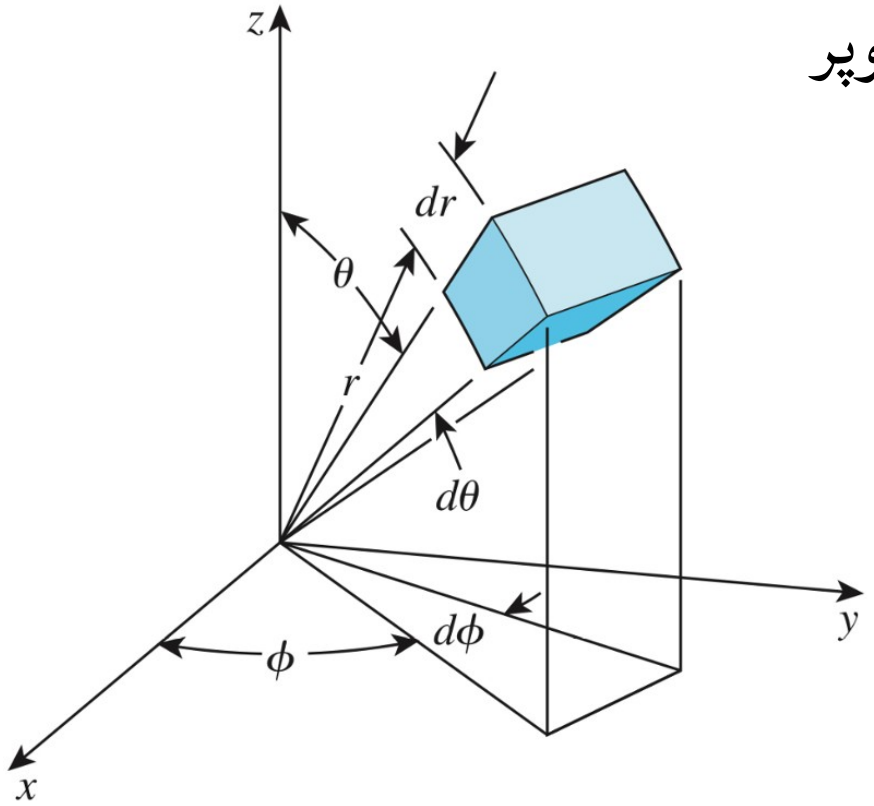
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

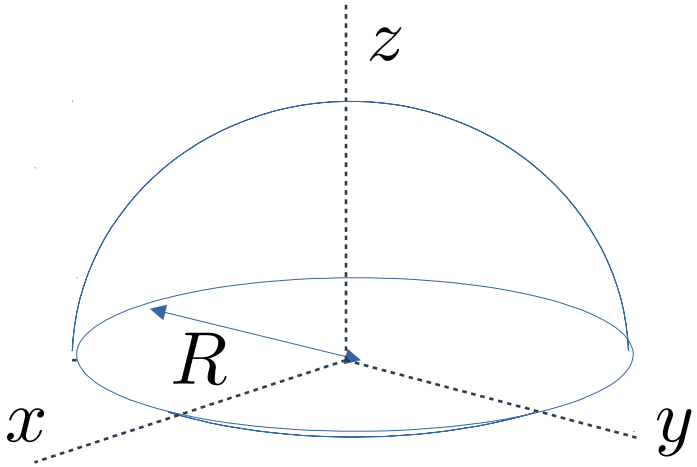
کره توپر



$$\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



بدلیل تقارن $X = Y = 0$

جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است

$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{2\pi R^3}\mathrm{d}V$$

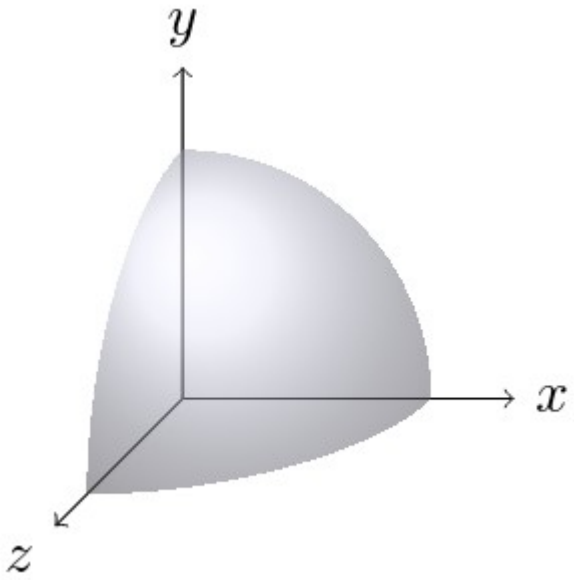
$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{2\pi R^3} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$Z = \frac{3}{2\pi R^3}\int (r\cos\theta) r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$Z = \frac{3}{2\pi R^3}\left(\int_0^R r^3\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right) = \frac{3R}{8}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است

انتظار داریم که $X = Y = Z$

$$\mathrm{d}m = \frac{6M}{\pi R^3}\mathrm{d}V$$

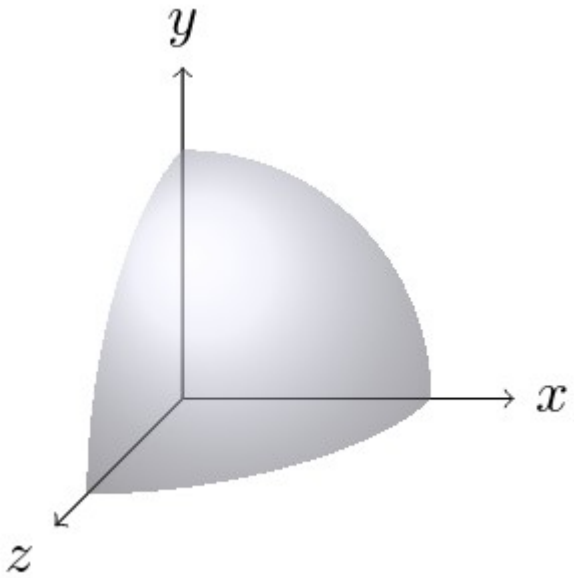
$$\mathrm{d}m = \frac{6M}{\pi R^3} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$Z = \frac{6}{\pi R^3}\int (r\cos\theta) r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$Z = \frac{6}{\pi R^3}\left(\int_0^R r^3\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\right) = \frac{3R}{8}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



$$X = \frac{6}{\pi R^3}\int (r\sin\theta\cos\phi) r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$Y = \frac{6}{\pi R^3}\int (r\sin\theta\sin\phi) r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

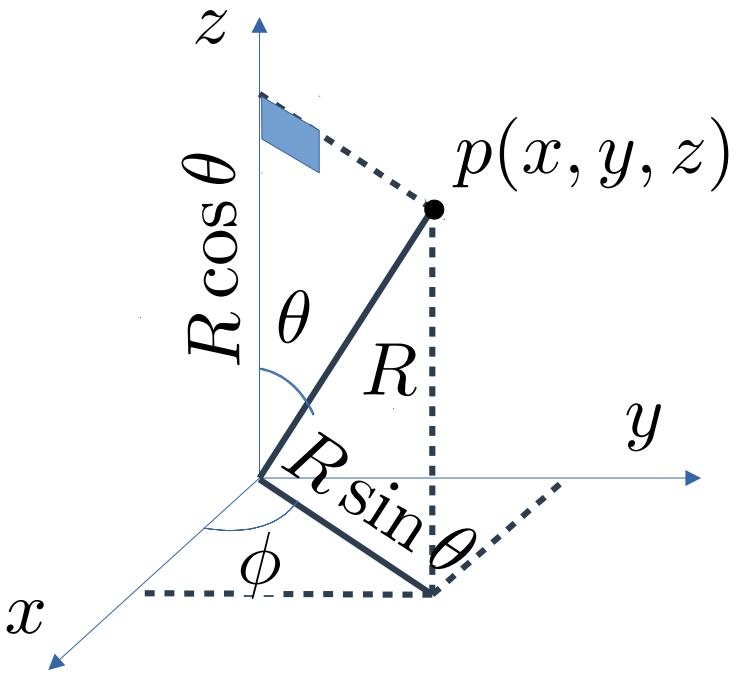
$$X = \frac{6}{\pi R^3}\left(\int_0^R r^3\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\phi\mathrm{d}\phi\right) = \frac{3R}{8}$$

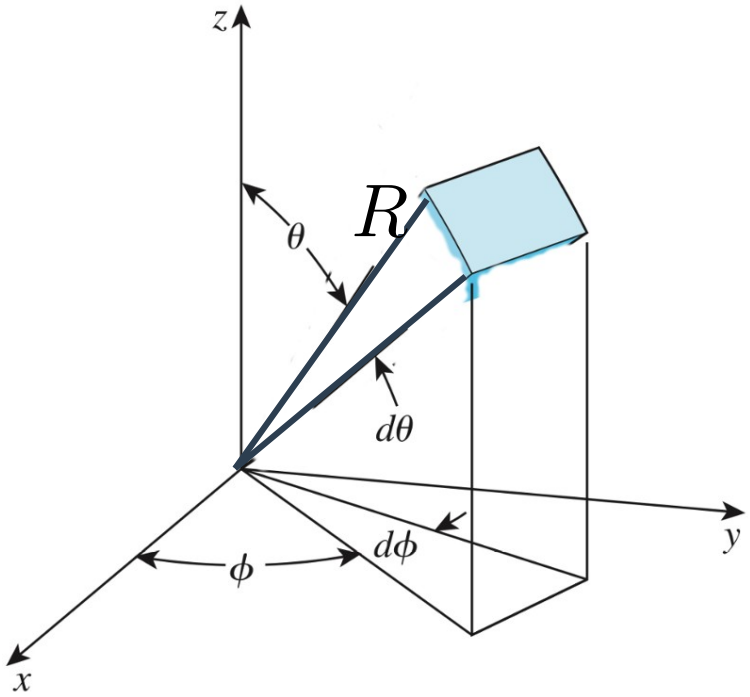
$$Y = \frac{6}{\pi R^3}\left(\int_0^R r^3\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\phi\mathrm{d}\phi\right) = \frac{3R}{8}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

کره توخالی



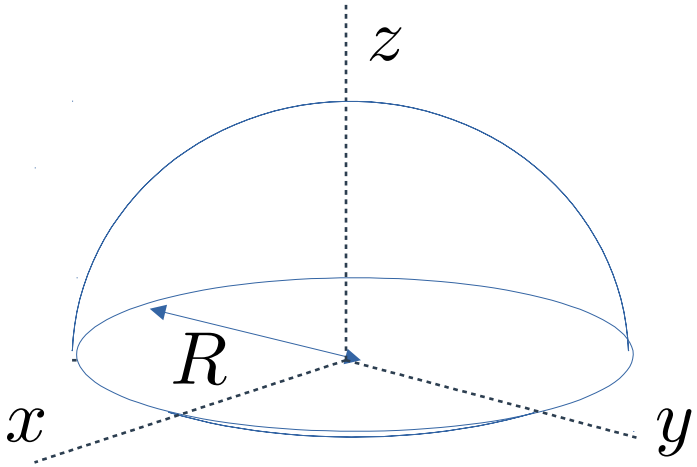


$$x = R\sin\theta\cos\phi$$
$$y = R\sin\theta\sin\phi$$
$$z = R\cos\theta$$

$$\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



بدلیل تقارن $X = Y = 0$

جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است

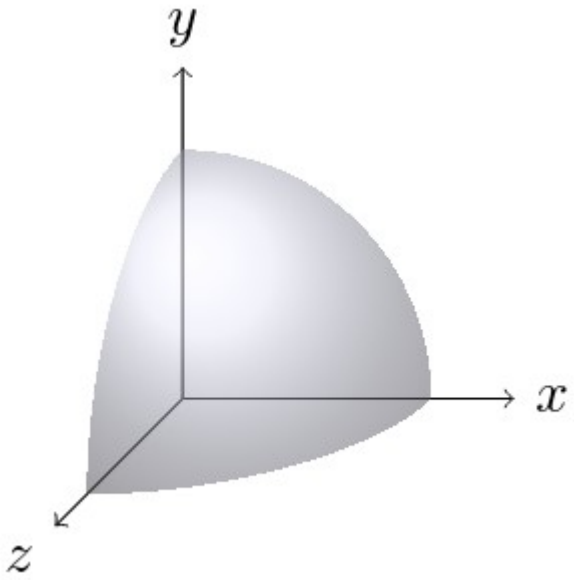
$$\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi R^2}\mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi}\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

$$Z = \frac{1}{2\pi}\int (R\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

$$Z = \frac{R}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right) = \frac{R}{2}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم



جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است

انتظار داریم که $X = Y = Z$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi R^2}\mathrm{d}S$$

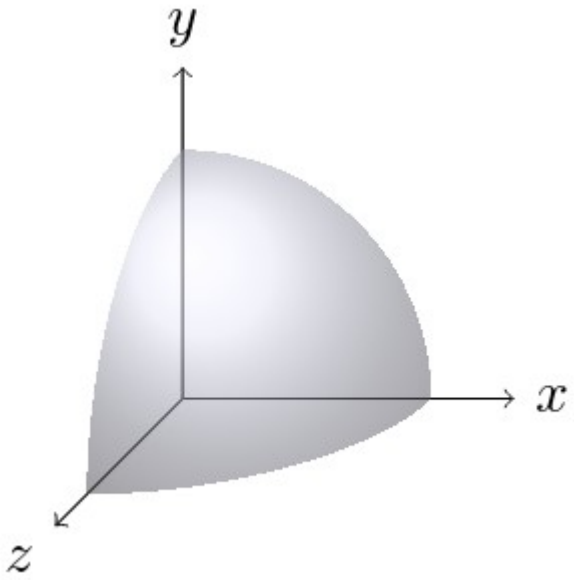
$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi}\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

$$Z = \frac{2}{\pi}\int (R\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi$$

$$Z = \frac{2R}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi\right) = \frac{R}{2}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



$$X = \frac{2}{\pi}\int (R\cos\phi\sin\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

$$Y = \frac{2}{\pi}\int (R\sin\phi\sin\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

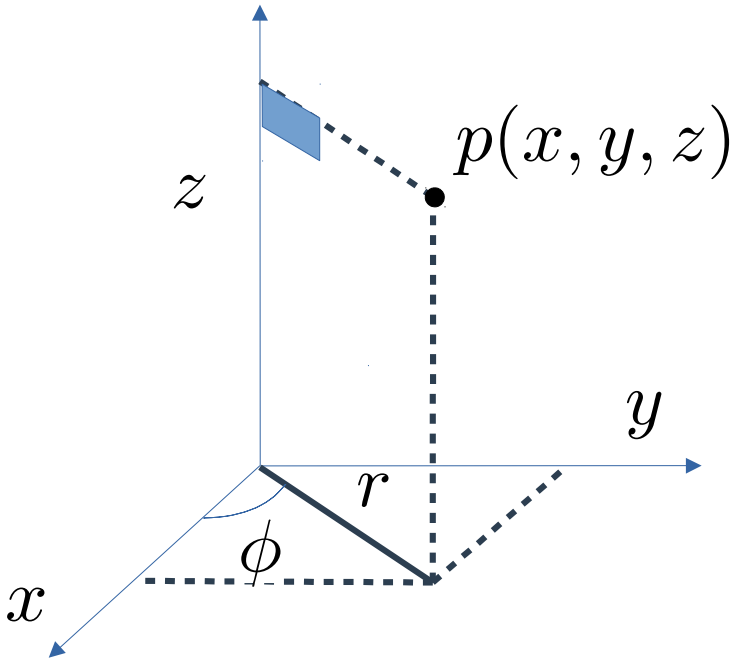
$$X = \frac{2R}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\phi \mathrm{d}\phi\right) = \frac{R}{2}$$

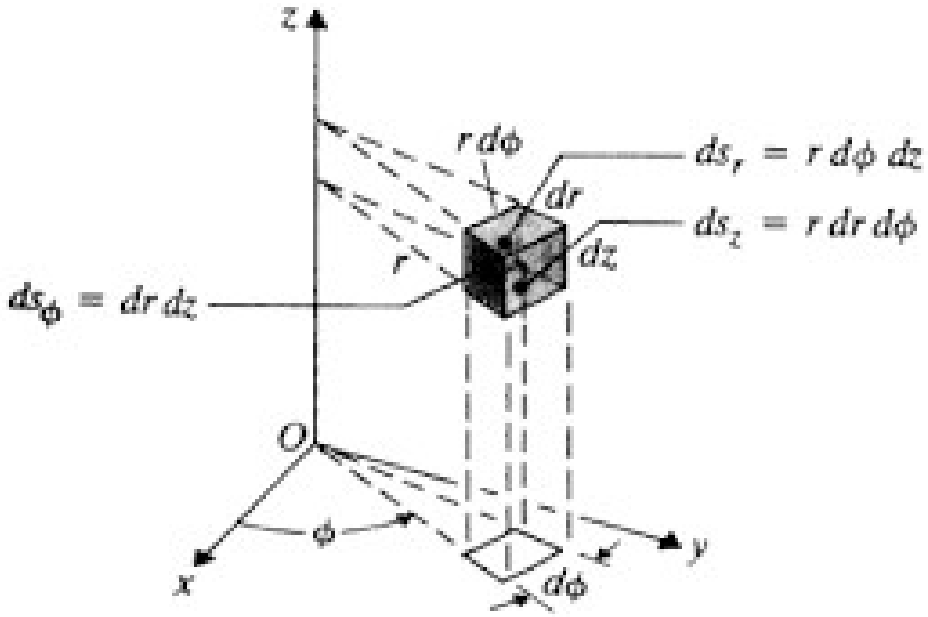
$$Y = \frac{2R}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta \mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\phi \mathrm{d}\phi\right) = \frac{R}{2}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

استوانه توپر



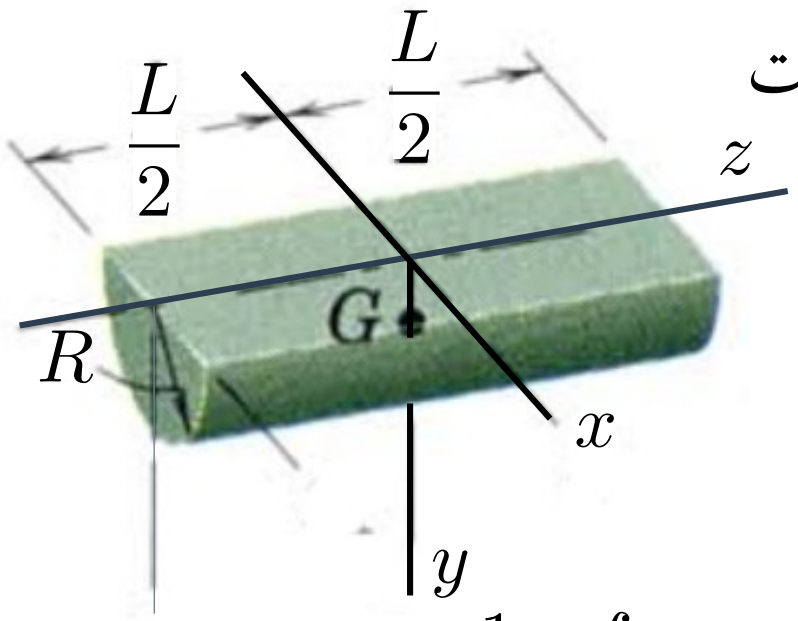


$$x = r\cos\phi$$
$$y = r\sin\phi$$
$$z = z$$

$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است

بدلیل تقارن $X = Z = 0$

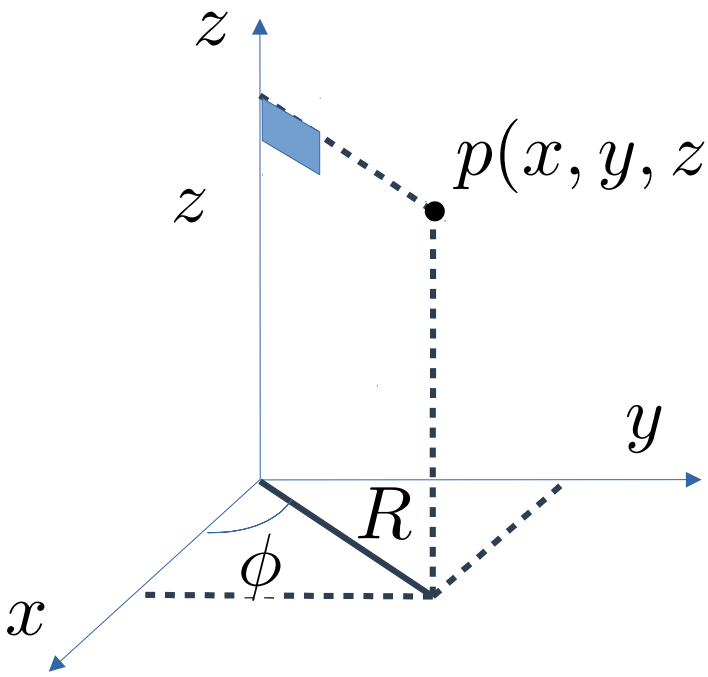
$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi R^2 L} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y \mathrm{d}m = \frac{2}{\pi R^2 L}\int (r\sin\phi) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

$$Y = \frac{2}{\pi R^2 L}\left(\int_0^R r^2 \mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^\pi \sin\phi \mathrm{d}\phi\right)\left(\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}z\right) = \frac{4R}{3\pi}$$

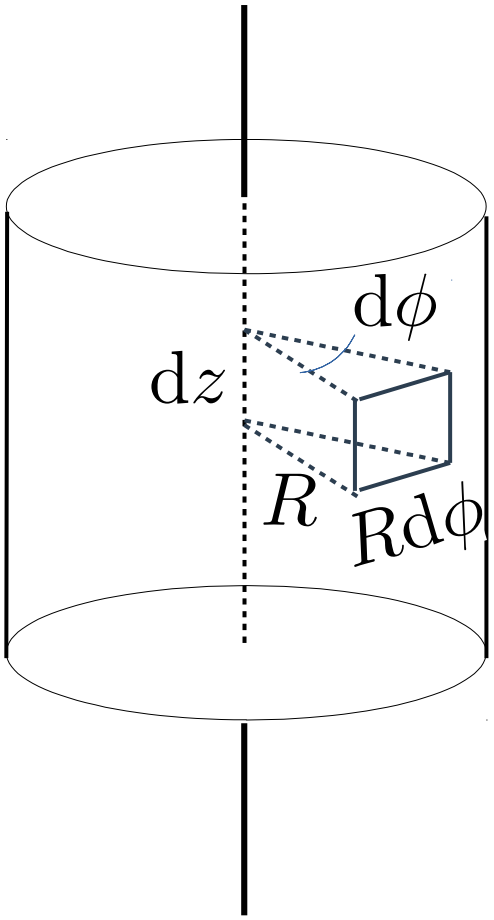
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات



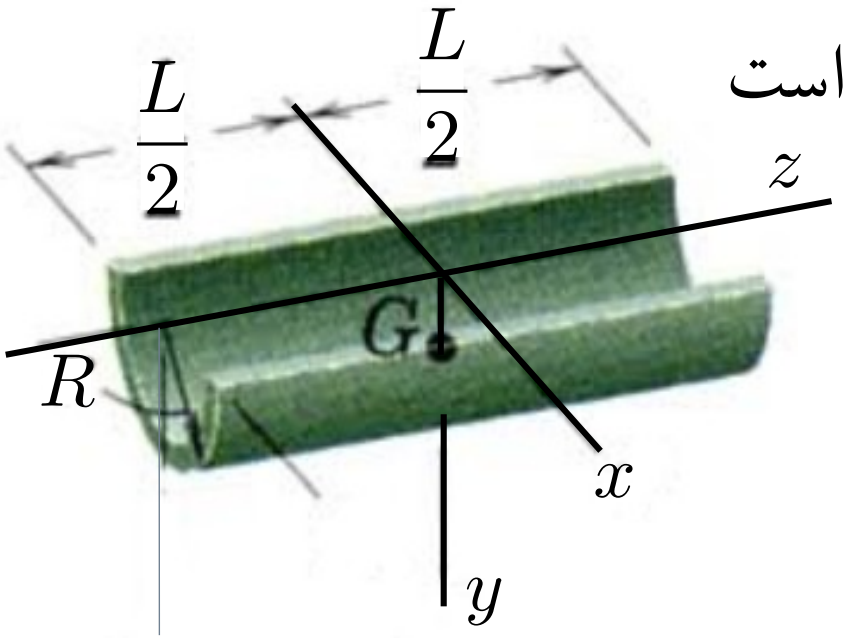
$$x = R\cos\phi$$
$$y = R\sin\phi$$
$$z = z$$

استوانه توخالی



$$\mathrm{d}S = R\mathrm{d}\phi\mathrm{d}z$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم



جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است

بدلیل تقارن $X = Z = 0$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi R L} R \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z = \frac{M}{\pi L} \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

$$Y = \frac{1}{M} \int y \mathrm{d}m = \frac{1}{\pi L} \int (R \sin\phi) \mathrm{d}\phi \mathrm{d}z$$

$$Y = \frac{R}{\pi L} \left(\int_0^{\pi} \sin\phi \mathrm{d}\phi \right) \left(\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}z \right) = \frac{2R}{\pi}$$