

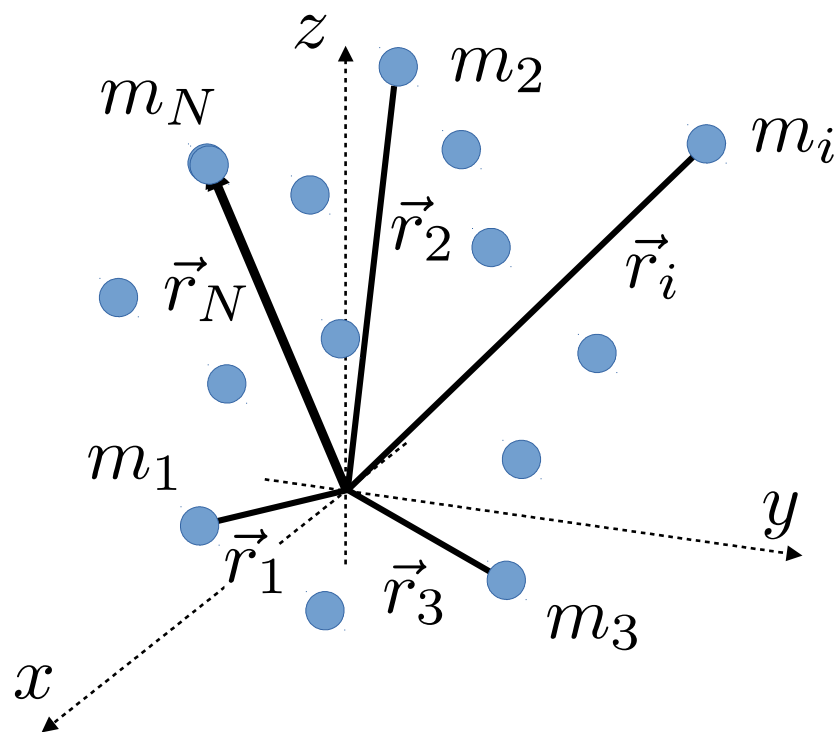
جلسه دوم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

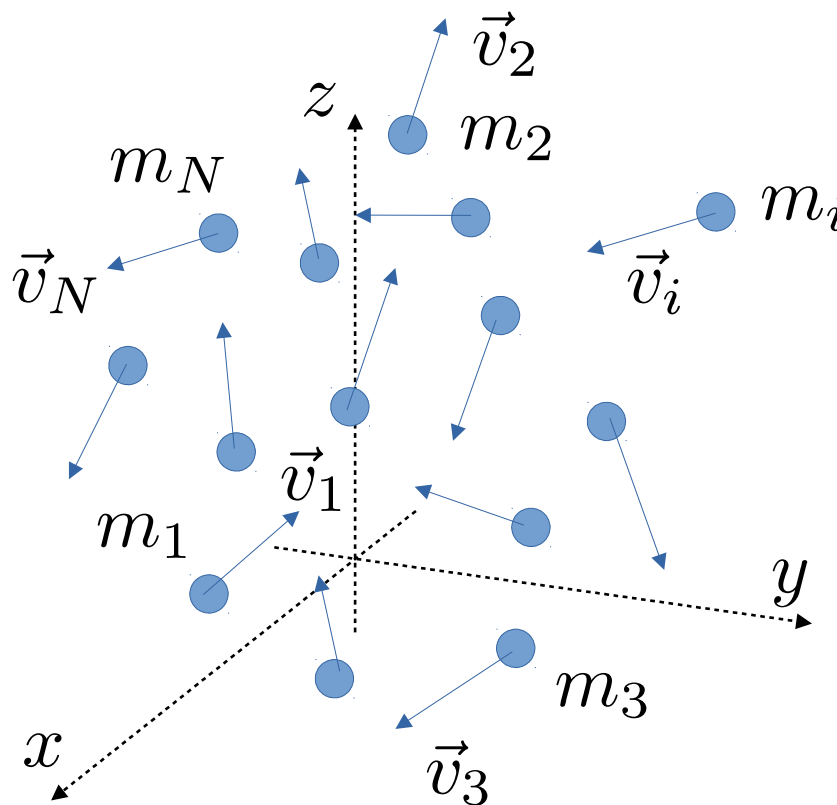
دینامیک سیستمهای ذرات

$m_1 : \vec{r}_1$
 $m_2 : \vec{r}_2$
 \vdots
 $m_i : \vec{r}_i$
 \vdots
 $m_N : \vec{r}_N$



دینامیک سیستمهای ذرات

$$\begin{aligned} m_1 &: \vec{r}_1, \vec{v}_1 \\ m_2 &: \vec{r}_2, \vec{v}_2 \\ &\vdots \\ m_i &: \vec{r}_i, \vec{v}_i \\ &\vdots \\ m_N &: \vec{r}_N, \vec{v}_N \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= d\vec{r}_1/dt \\ \vec{v}_2 &= d\vec{r}_2/dt \\ &\vdots \\ \vec{v}_i &= d\vec{r}_i/dt \\ &\vdots \\ \vec{v}_N &= d\vec{r}_N/dt \end{aligned}$$

دینامیک سیستمهای ذرات

مرکز جرم ذرات در لحظه t

$$M\vec{R}(t) = m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t) + \cdots + m_i\vec{r}_i(t) + \cdots + m_N\vec{r}_N(t)$$

با فرض ثابت ماندن جرمها از دو طرف رابطه $\frac{d}{dt}$ می‌گیریم

$$M\frac{d\vec{R}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \cdots + m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} + \cdots + m_N\frac{d\vec{r}_N}{dt}$$

$$M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_i\vec{v}_i + \cdots + m_N\vec{v}_N = \sum_i^N m_i\vec{v}_i$$

$$\vec{P} = M\vec{V}, \quad \vec{p}_i = m_i\vec{v}_i \quad \text{تعریف تکانه خطی}$$

دینامیک سیستمهای ذرات

اندازه حرکت مرکز جرم ذرات در هر لحظه

$$M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_i\vec{v}_i + \cdots + m_N\vec{v}_N = \sum_i^N m_i\vec{v}_i$$

با فرض ثابت ماندن جرمها دوباره از دو طرف رابطه بالا $\frac{d}{dt}$ می‌گیریم

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \cdots + m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} + \cdots + m_N \frac{d\vec{v}_N}{dt}$$

نیروی وارد بر هر ذره طبق قانون دوم نیوتن $m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i$

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_i + \cdots + \vec{F}_N = \sum_i^N \vec{F}_i$$

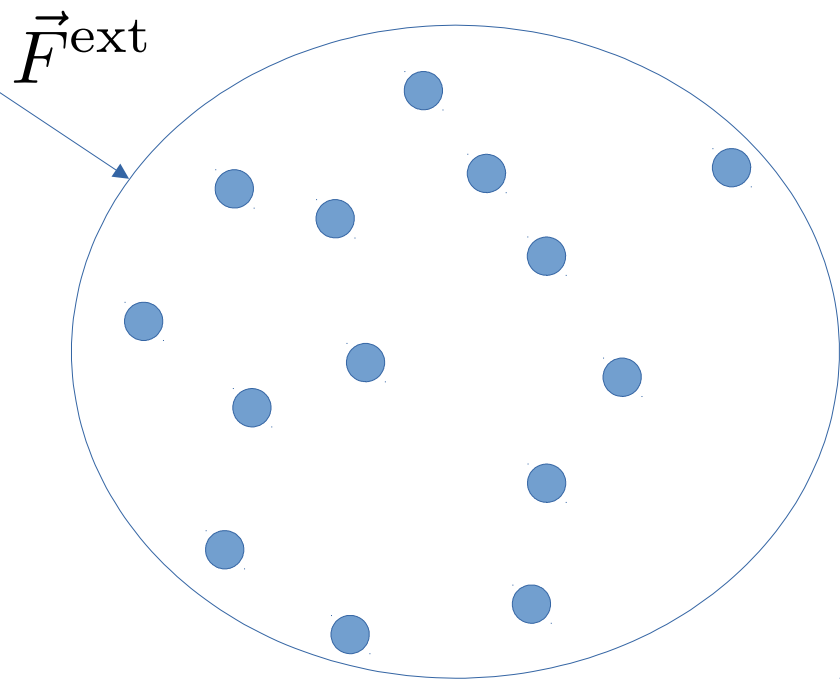
دینامیک سیستمهای ذرات

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_i^N \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}}$$

قانون دوم نیوتون برای مرکز جرم ذرات

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i^N \vec{F}_i^{\text{ext}}$$



نمونه‌ای از نیروهای خارجی:

- ۱- میدان الکتریکی اعمالی از خارج سیستم به مجموعه‌ی ذرات باردار یک سیستم
- ۲- میدان مغناطیسی اعمالی از خارج سیستم به مجموعه‌ی ذرات باردار یک سیستم
- ۳- اثر گرانش زمین روی ذرات یک سیستم

دینامیک سیستمهای ذرات

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_i^N \vec{F}_i$$

قانون دوم نیوتون برای مرکز جرم ذرات

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}}$$

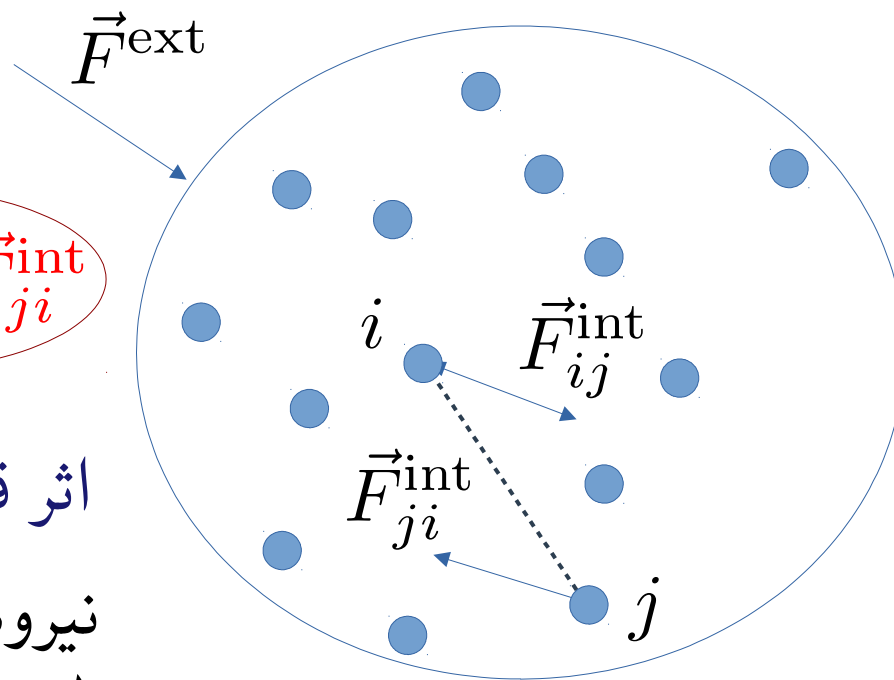
$$\vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_{ij}^{\text{int}},$$

$$\vec{F}_{ij}^{\text{int}} = -\vec{F}_{ji}^{\text{int}}$$

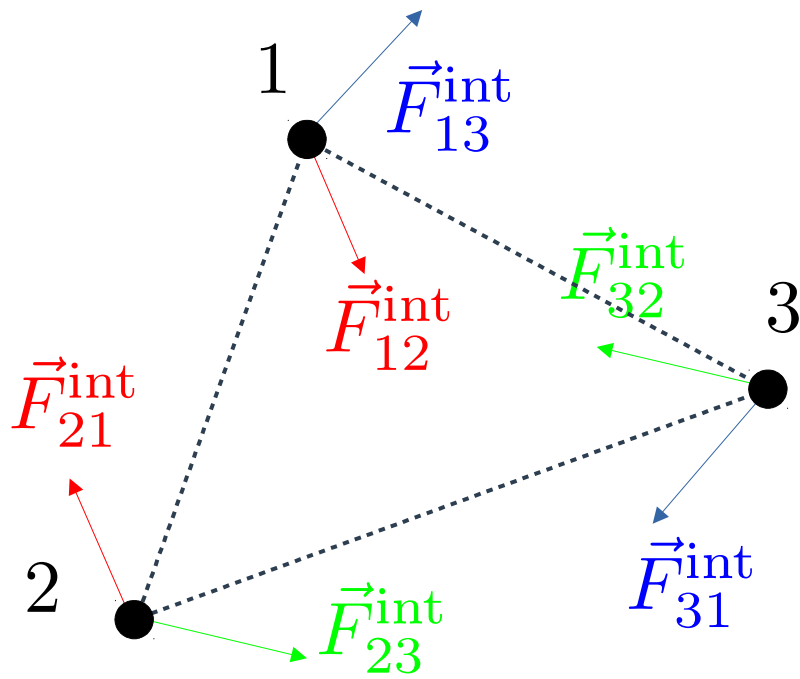
اثر قانون سوم نیوتون وارد بر ذره i ام و ذره j ام

نیروهای داخلی:

- ۱- نیروهای کولنی (مرکزی)
- ۲- نیروهای گرانشی (مرکزی)

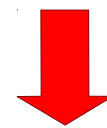


دینامیک سیستمهای ذرات



$$\vec{F}^{\text{int}} = \sum_i^N \vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_i^N \sum_{i \neq j}^N \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12}^{\text{int}} &= -\vec{F}_{21}^{\text{int}} & \vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{F}_{21}^{\text{int}} &= 0 \\ \vec{F}_{23}^{\text{int}} &= -\vec{F}_{32}^{\text{int}} & \vec{F}_{23}^{\text{int}} + \vec{F}_{32}^{\text{int}} &= 0 \\ \vec{F}_{31}^{\text{int}} &= -\vec{F}_{13}^{\text{int}} & \vec{F}_{31}^{\text{int}} + \vec{F}_{13}^{\text{int}} &= 0 \end{aligned}$$



$$(\vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{F}_{21}^{\text{int}}) + (\vec{F}_{23}^{\text{int}} + \vec{F}_{32}^{\text{int}}) + (\vec{F}_{31}^{\text{int}} + \vec{F}_{13}^{\text{int}}) = 0$$

$$(\vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{F}_{13}^{\text{int}}) + (\vec{F}_{21}^{\text{int}} + \vec{F}_{23}^{\text{int}}) + (\vec{F}_{31}^{\text{int}} + \vec{F}_{32}^{\text{int}}) = \sum_i^3 \sum_{i \neq j}^3 \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = 0$$

دینامیک سیستمهای ذرات

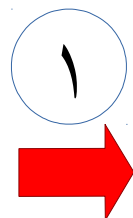
$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum_i^N \vec{F}_i$$

قانون دوم نیوتون برای مرکز جرم ذرات

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i^N F_i^{\text{ext}}$$

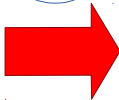
$$\vec{F}^{\text{int}} = \sum_i^N \vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_i^N \sum_{i \neq j}^N \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = 0$$

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

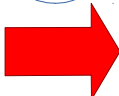



مرکز جرم ذرات فقط تحت تأثیر نیروهای خارجی دینامیک دارد و نیروهای داخلی بین ذرات تأثیری روی حرکت مرکز جرم ندارند.

دینامیک سیستمهای ذرات

اگر $\vec{F}^{\text{ext}} = 0$  ۲


مرکز جرم ذرات یا ثابت است و یا با سرعت ثابت در حال حرکت انتقالی است.

اگر $\vec{F}^{\text{ext}} = 0$  ۳ $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{P}^{(I)} = \vec{P}^{(II)}$ 

بقای تکانه خطی

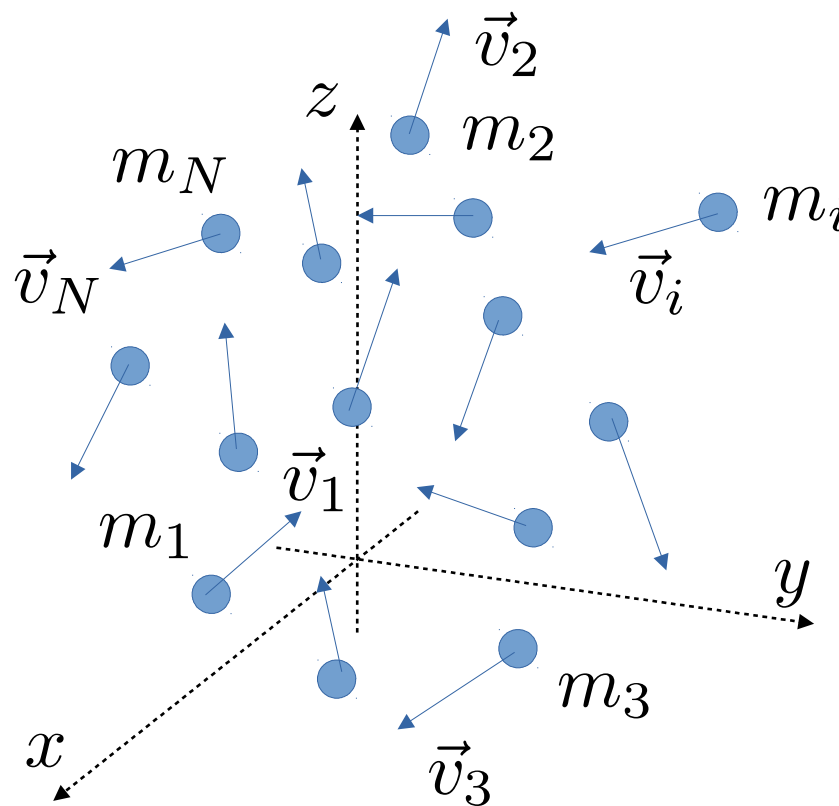
یادآوری $\vec{P} = M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_i\vec{v}_i + \dots + m_N\vec{v}_N$

حالت خاص

اگر $F_x^{\text{ext}} = 0$  $\frac{dP_x}{dt} = 0 \Rightarrow \Delta P_x = 0 \Rightarrow P_x^{(I)} = P_x^{(II)}$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\begin{aligned} m_1 &: \vec{r}_1, \vec{v}_1 \\ m_2 &: \vec{r}_2, \vec{v}_2 \\ &\vdots \\ m_i &: \vec{r}_i, \vec{v}_i \\ &\vdots \\ m_N &: \vec{r}_N, \vec{v}_N \end{aligned}$$



$$L = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 + \cdots + \vec{r}_N \times m_N \vec{v}_N = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

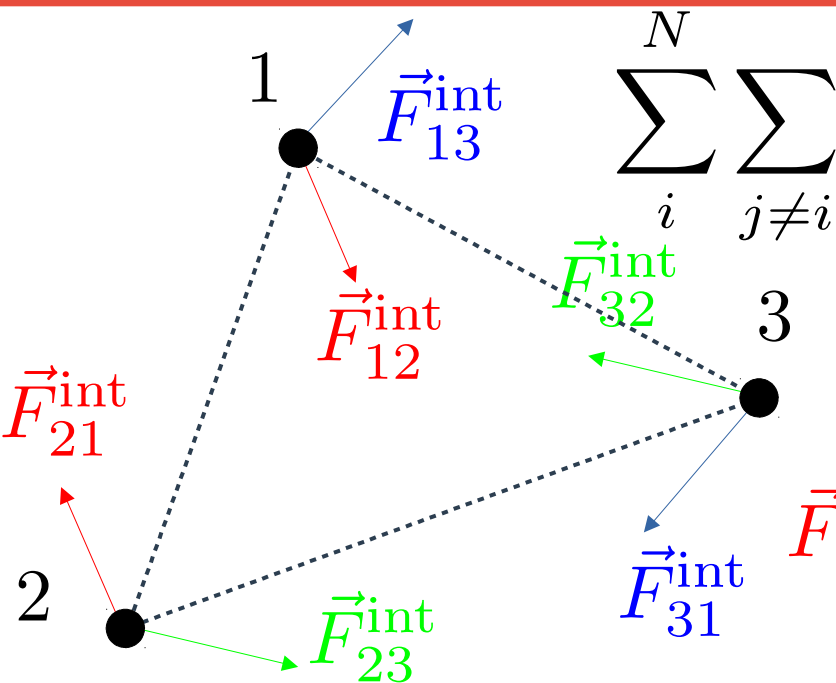
$$\vec{\tau} = \sum_i^N \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i$$

$$\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0, \quad m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}} = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}^{\text{int}}$$

$$\vec{\tau} = \sum_i^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}}$$

دینامیک سیستمهای ذرات



$$\sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{13}^{\text{int}}) + (\vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}^{\text{int}} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{23}^{\text{int}}) + (\vec{r}_3 \times \vec{F}_{31}^{\text{int}} + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{32}^{\text{int}}) =$$

$$\vec{F}_{12}^{\text{int}} = -\vec{F}_{21}^{\text{int}}, \vec{F}_{23}^{\text{int}} = -\vec{F}_{32}^{\text{int}}, \vec{F}_{13}^{\text{int}} = -\vec{F}_{31}^{\text{int}}$$

$$\sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} - \vec{r}_1 \times \vec{F}_{31}^{\text{int}}) + (-\vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{23}^{\text{int}}) + (\vec{r}_3 \times \vec{F}_{31}^{\text{int}} - \vec{r}_3 \times \vec{F}_{23}^{\text{int}}) =$$

دینامیک سیستمهای ذرات

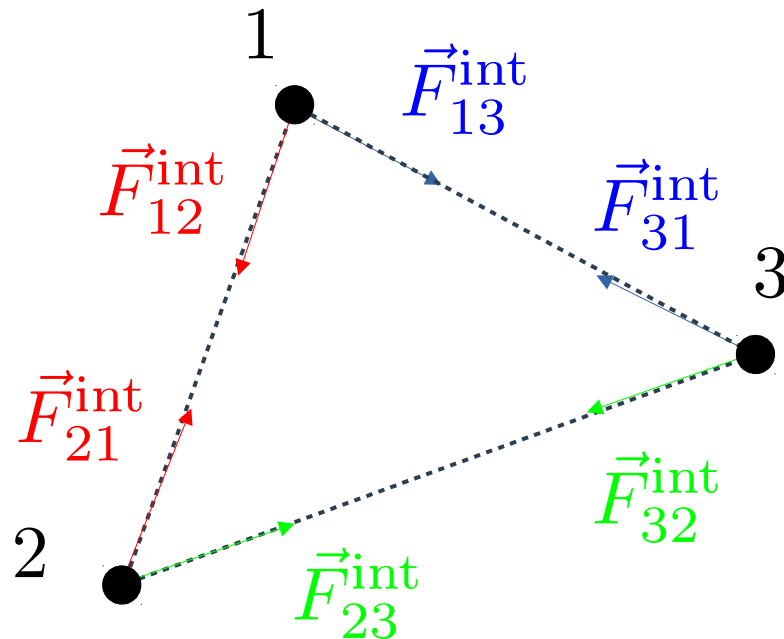
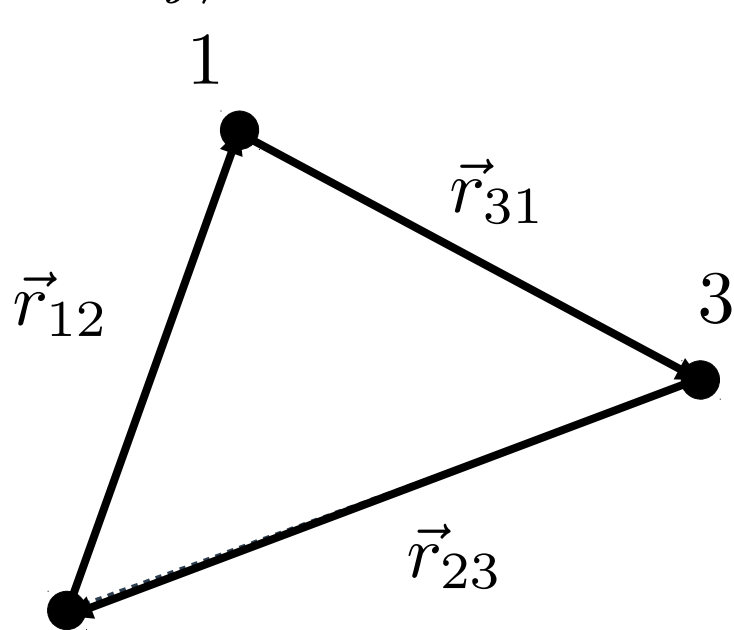
$$\sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = (\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} - \vec{r}_1 \times \vec{F}_{31}^{\text{int}}) +$$
$$(-\vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{23}^{\text{int}}) +$$
$$(\vec{r}_3 \times \vec{F}_{31}^{\text{int}} - \vec{r}_3 \times \vec{F}_{23}^{\text{int}}) =$$

$$\sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} +$$
$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_{23}^{\text{int}} +$$
$$(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{31}^{\text{int}}$$

$$\sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{r}_{23} \times \vec{F}_{23}^{\text{int}} + \vec{r}_{31} \times \vec{F}_{31}^{\text{int}}$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_{12}^{\text{int}} + \vec{r}_{23} \times \vec{F}_{23}^{\text{int}} + \vec{r}_{31} \times \vec{F}_{31}^{\text{int}}$$



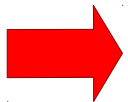
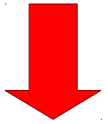
اگر نیروی‌ها در امتداد خط واصل بین ذره باشد، $\sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = 0$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\vec{\tau} = \sum_i^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}}$$

$$\sum_i^N \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = 0$$

$$\vec{\tau} = \sum_i^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

اگر $\vec{F}^{\text{ext}} = 0$  $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L}^I = \vec{L}^{II}$ 

بقای تکانه زوایه‌ای