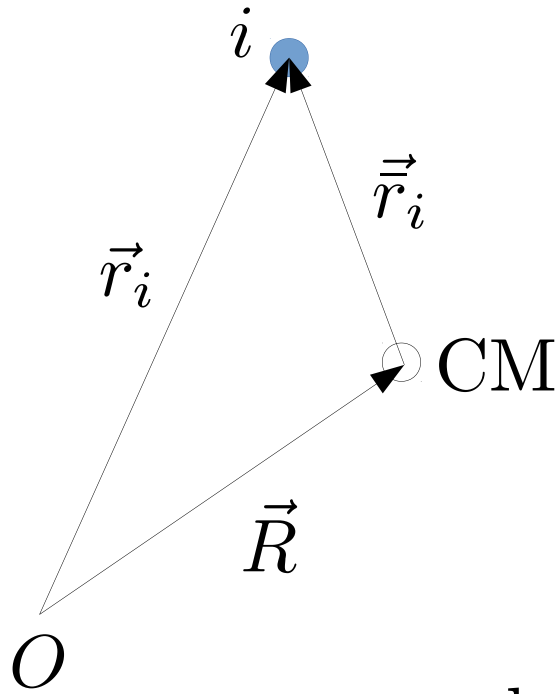
جلسه سوم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

دینامیک سیستمهای ذرات



تکانه زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم

$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

تغییر مبدأ مختصات از مبدا دلخواه O به مرکز جرم CM

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{\vec{r}}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{R} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\vec{r}}_i \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{V} + \vec{\vec{v}}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i^N (\vec{R} + \vec{\vec{r}}_i) \times m_i (\vec{V} + \vec{\vec{v}}_i)$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\vec{L} = \sum_{i}^{N} (\vec{R} + \vec{r}_i) \times m_i (\vec{V} + \vec{v}_i)$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \left(\sum_{i}^{N} m_i \right) \vec{V} + \left(\sum_{i}^{N} m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{V}$$

$$+ \vec{R} \times \left(\sum_{i}^{N} m_i \vec{v}_i \right) + \sum_{i}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\sum_{i}^{N} m_i \vec{r}_i = \sum_{i}^{N} m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) = \sum_{i}^{N} m_i \vec{r}_i - \left(\sum_{i}^{N} m_i \right) \vec{R}$$

$$= M\vec{R} - M\vec{R} = 0$$

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\vec{L} = \sum_i^N (\vec{R} + \vec{\bar{r}}_i) \times m_i(\vec{V} + \vec{\bar{v}}_i)$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times \left(\sum_i^N m_i\right) \vec{V} + \left(\sum_i^N m_i \vec{\bar{r}}_i\right) \times \vec{V}$$

$$+\vec{R} \times \left(\sum_i^N m_i \vec{\bar{v}}_i\right) + \sum_i^N \vec{\bar{r}}_i \times m_i \vec{\bar{v}}_i$$

$$\sum_i^N m_i \vec{\bar{v}}_i = \sum_i^N m_i(\vec{v}_i - \vec{V}) = \sum_i^N m_i \vec{v}_i - \left(\sum_i^N m_i\right) \vec{V}$$

$$= M\vec{V} - M\vec{V} = 0$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\sum_i^N m_i \vec{\bar{r}}_i = 0, \qquad \sum_i^N m_i \vec{\bar{v}}_i = 0$$

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i^N \vec{\bar{r}}_i \times m_i \vec{\bar{v}}_i$$

دینامیک سیستمهای ذرات

انرژی جنبشی نسبت به مرکز جرم

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i v_i^2, \qquad \vec{v}_i = \vec{V} + \vec{\bar{v}}_i$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i^N m_i (\vec{V} + \vec{\bar{v}}_i) \cdot (\vec{V} + \vec{\bar{v}}_i)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_i^N m_i\right) V^2 + \left(\sum_i^N m_i \vec{\bar{v}}\right) \cdot \vec{V} + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \bar{v}_i^2$$

$$T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2}\sum_i^N m_i \bar{v}_i^2$$

برای ذره‌ی iام:

$$m_i \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_i, \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\mathrm{int}} + \vec{F}_i^{\mathrm{ext}}$$

طرفین را در سرعت ذره‌ی i ام ضرب داخلی می‌کنیم:

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\mathrm{int}} + \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\mathrm{ext}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i\right) = \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\mathrm{int}} + \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\mathrm{ext}}$$

نیروهای داخلی مستقل از زمان بطور صریح و تابعی از فواصل بین ذرات‌اند. به این ترتیب می‌توان نیروهای داخلی را بصورت تابع اسکالری بنام **پتانسیل** نوشت،

$$\vec{F}_i^{\mathrm{int}} = -\vec{\nabla}_i V$$

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N), \vec{\nabla}_i V = \hat{i}\frac{\partial V}{\partial x_i} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y_i} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z_i}$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i\right)=\vec{v}_i\cdot\vec{F}_i^{\text{int}}+\vec{v}_i\cdot\vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$$\vec{F}_i^{\text{int}}=-\vec{\nabla}_i V$$

برای ذره‌ی iام:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i\right)=-\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_i V+\vec{v}_i\cdot\vec{F}_i^{\text{ext}}$$

عبارت بالا را روی تمامی ذرات سیستم جمع می‌زنیم،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i\right)=-\sum_i\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_i V+\sum_i\vec{v}_i\cdot\vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$$T=\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i\cdot\vec{v}_i\right)=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_i V + \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\mathrm{ext}}$$

از مبحث ریاضی فیزیک (۱) داریم: $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\phi \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\phi$

$$\mathrm{d}V = \sum_i \mathrm{d}\vec{r}_i \cdot \vec{\nabla}_i V \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}_i V$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} + \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\mathrm{ext}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = \sum_i \vec{v}_i \cdot \vec{F}_i^{\mathrm{ext}}$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V)=\sum_i \vec{v}_i\cdot\vec{F}_i^{\mathrm{ext}}}$$

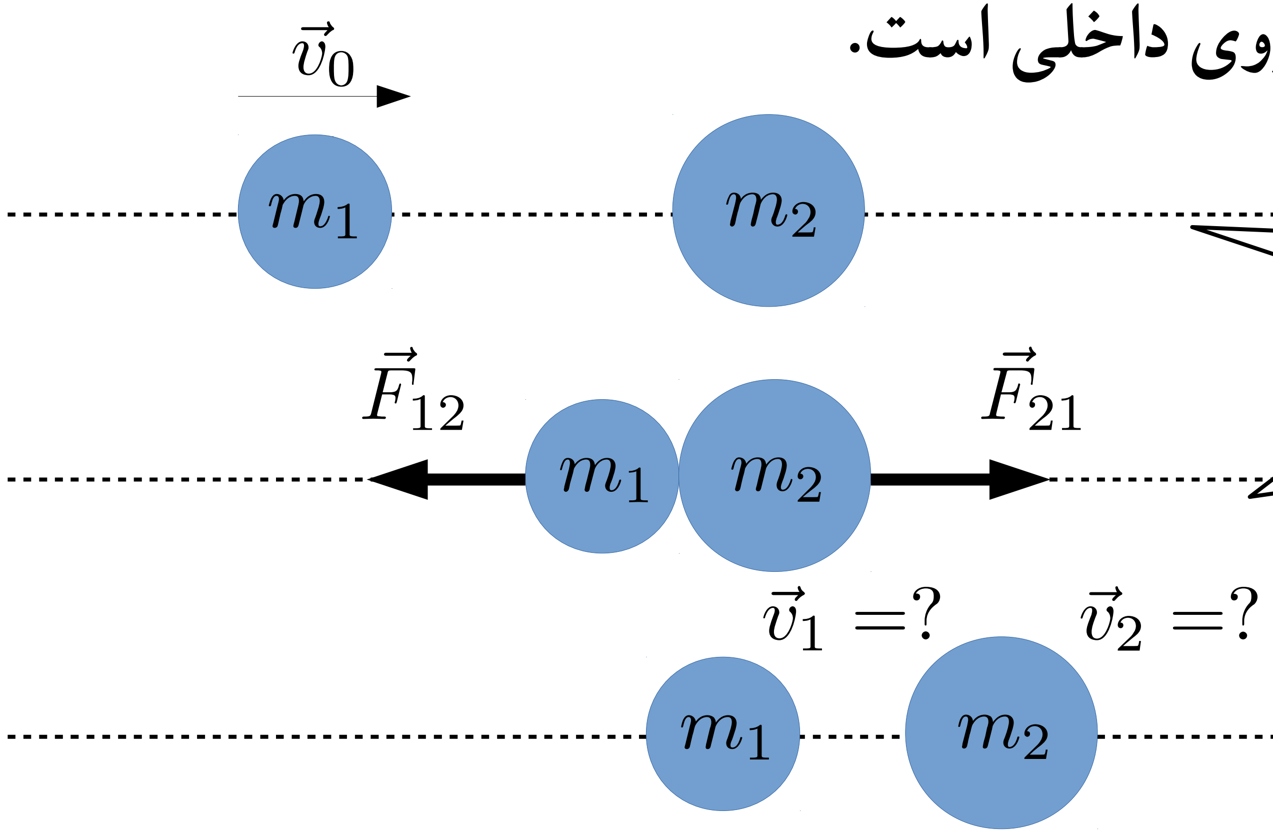
اگر $\vec{F}^{\mathrm{ext}}=0$ $\Rightarrow$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V)=0 \Rightarrow T^i+V^i=T^f+V^f$ $\Downarrow$

پایستگی انرژی

دینامیک سیستمهای ذرات

اولین نکته کلیدی در هر برخورد:

وقتی دو جسم با یکدیگر برخورد می‌کنند، نیروی که در هنگام برخورد به یکدیگر وارد می‌کنند، نیروی داخلی است.



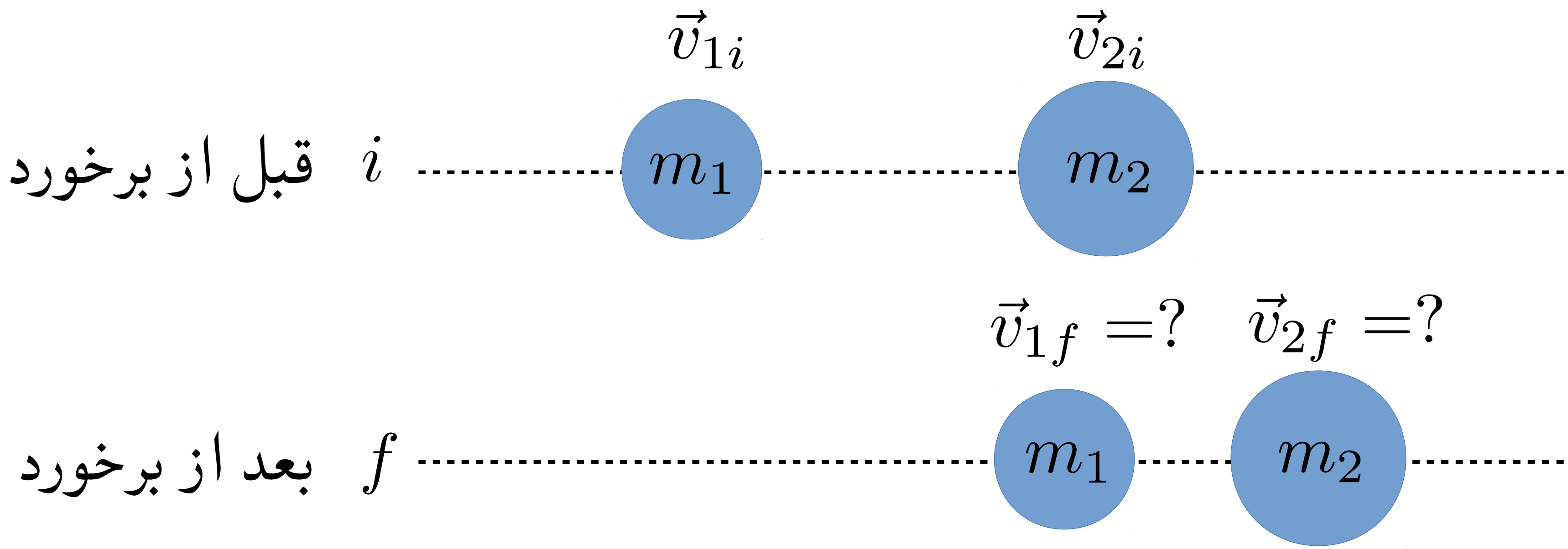
اثر نیروهای خارجی صفر است.

۱- نیروها لحظه‌ای هستند.

۲- نیروها داخلی هستند.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

دینامیک سیستمهای ذرات



پایستگی تکانه

$$\vec{F}^{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \Delta P = 0 \Rightarrow \vec{P}^i = \vec{P}^f$$

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

دینامیک سیستمهای ذرات

پایستگی تکانه $\vec{P}^i = \vec{P}^f$

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

دومین نکته کلیدی در هر برخورد:

برخوردها را می‌توان به دو گروه تقسیم کرد:

۱- برخورد کشسان (پایستگی انرژي داریم) $T^i = T^f$

۲- برخورد ناکشسان (پایستگی انرژي نداریم) $T^i \neq T^f \Rightarrow T^i = T^f + Q$

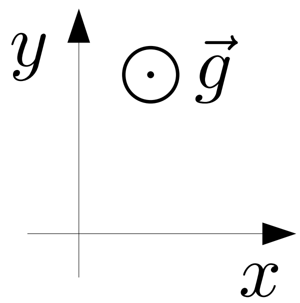
انرژی‌زا: $Q > 0$

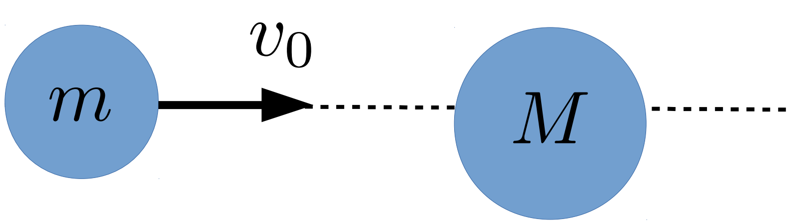
انرژی خواه: $Q < 0$

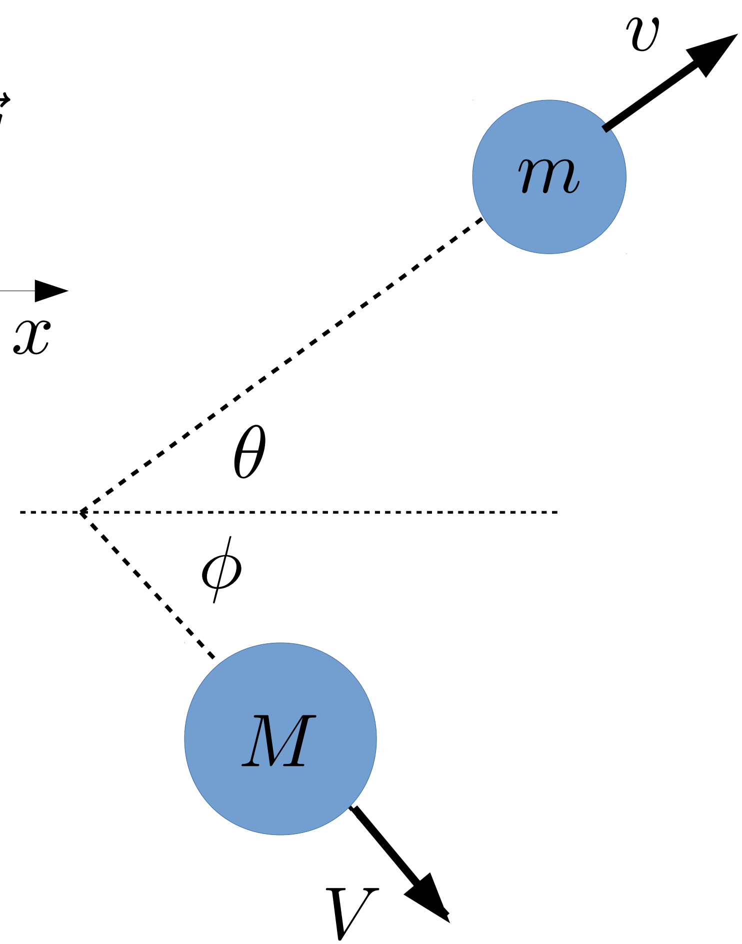
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

برخورد دو ذره بطور کشسان در سطح افق

$$\vec{v}_{1i} = v_0 \hat{i}$$
$$\vec{v}_{2i} = 0$$







$$\vec{v}_{1f} = v(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$
$$\vec{v}_{2f} = V(\hat{i}\cos\phi - \hat{j}\sin\phi)$$

دینامیک سیستمهای ذرات

برخورد دو ذره بطور کشسان در سطح افق

پایستگی تکانه در امتداد محور x :

$$\sum P_x^i = \sum P_x^f \Rightarrow mv_0 = mv\cos\theta + MV\cos\phi$$

پایستگی تکانه در امتداد محور y :

$$\sum P_y^i = \sum P_y^f \Rightarrow 0 = mv\sin\theta - MV\sin\phi$$

پایستگی انرژی:

$$\sum T^i = \sum T^f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

متغیرهای مسئله: $v,\ V,\ \theta,\ \phi$

دینامیک سیستمهای ذرات

برخورد دو ذره بطور کشسان در سطح افق

$$mv_0 = mv\cos\theta + MV\cos\phi \Rightarrow mv_0 - mv\cos\theta = MV\cos\phi$$

$$0 = mv\sin\theta - MV\sin\phi \Rightarrow mv\sin\theta = MV\sin\phi$$

$$(mv_0 - mv\cos\theta)^2 = (MV\cos\phi)^2$$

$$(mv\sin\theta)^2 = (MV\sin\phi)^2 \qquad +$$

$$m^2v_0^2 - 2m^2v_0v\cos\theta + m^2v^2 = M^2V^2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \Rightarrow mv_0^2 - mv^2 = MV^2$$

دینامیک سیستمهای ذرات

برخورد دو ذره بطور کشسان در سطح افق

$$\begin{cases} \frac{m^2}{M}\left(v_0^2 - 2v_0 v\cos\theta + v^2\right) = MV^2 \\ mv_0^2 - mv^2 = MV^2 \end{cases}$$

$$\frac{m^2}{M}\left(v_0^2 - 2v_0 v\cos\theta + v^2\right) = m(v_0^2 - v^2)$$

$$v_0^2 - 2v_0 v\cos\theta + v^2 = \frac{M}{m}(v_0^2 - v^2)$$

$$\left(1 + \frac{M}{m}\right) v^2 - 2v_0\cos\theta v + \left(1 - \frac{M}{m}\right) v_0^2 = 0$$

دینامیک سیستمهای ذرات

برخورد دو ذره بطور کشسان در سطح افق

$$\left(1+\frac{M}{m}\right)v^2-2v_0\cos\theta v+\left(1-\frac{M}{m}\right)v_0^2=0$$

$$v_\pm(\theta)=v_0\left(\frac{m}{m+M}\right)\left[\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-\left(\frac{m^2-M^2}{m^2}\right)}\right]$$

$$mv_0^2-mv_\pm^2(\theta)=MV_\pm^2(\theta)$$

$$\tan\phi(\theta)=\frac{mv_\pm(\theta)\sin\theta}{mv_0-mv_\pm(\theta)\cos\theta}$$

دینامیک سیستمهای ذرات

برخورد دو ذره بطور کشسان در سطح افق

$$v_{\pm}(\theta) = v_0 \left(\frac{m}{m+M}\right)\left[\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \left(\frac{m^2 - M^2}{m^2}\right)}\right]$$

حالتهای خاص:

ت	پ	ب	الف
$m = M$	$m < M$	$m > M$	$\theta = 0$

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

حالت سر به سر $\theta = 0$

$$\begin{cases} v_+ = v_0 \\ v_- = v_0 \frac{m-M}{m+M} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_+ = 0 \\ V_- = v_0 \frac{2m}{m+M} \end{cases}$$

$$v = v_0 \frac{m-M}{m+M}, \quad V = v_0 \frac{2m}{m+M}$$

حالتهای خاص‌تر:

$$m = M: \; v = 0, \quad V = v_0$$

$$m \ll M: v = v_0 \lim_{\frac{M}{m} \to \infty} \frac{1 - \frac{M}{m}}{1 + \frac{M}{m}} = -v_0, \quad V = v_0 \lim_{\frac{M}{m} \to \infty} \frac{2}{1 + \frac{M}{m}} = 0$$

$$m \gg M: v = v_0 \lim_{\frac{M}{m} \to 0} \frac{1 - \frac{M}{m}}{1 + \frac{M}{m}} = v_0, \quad V = v_0 \lim_{\frac{M}{m} \to 0} \frac{2}{1 + \frac{M}{m}} = 2v_0$$