جلسه چهارم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

دینامیک سیستمهای ذرات

حالت $m > M$

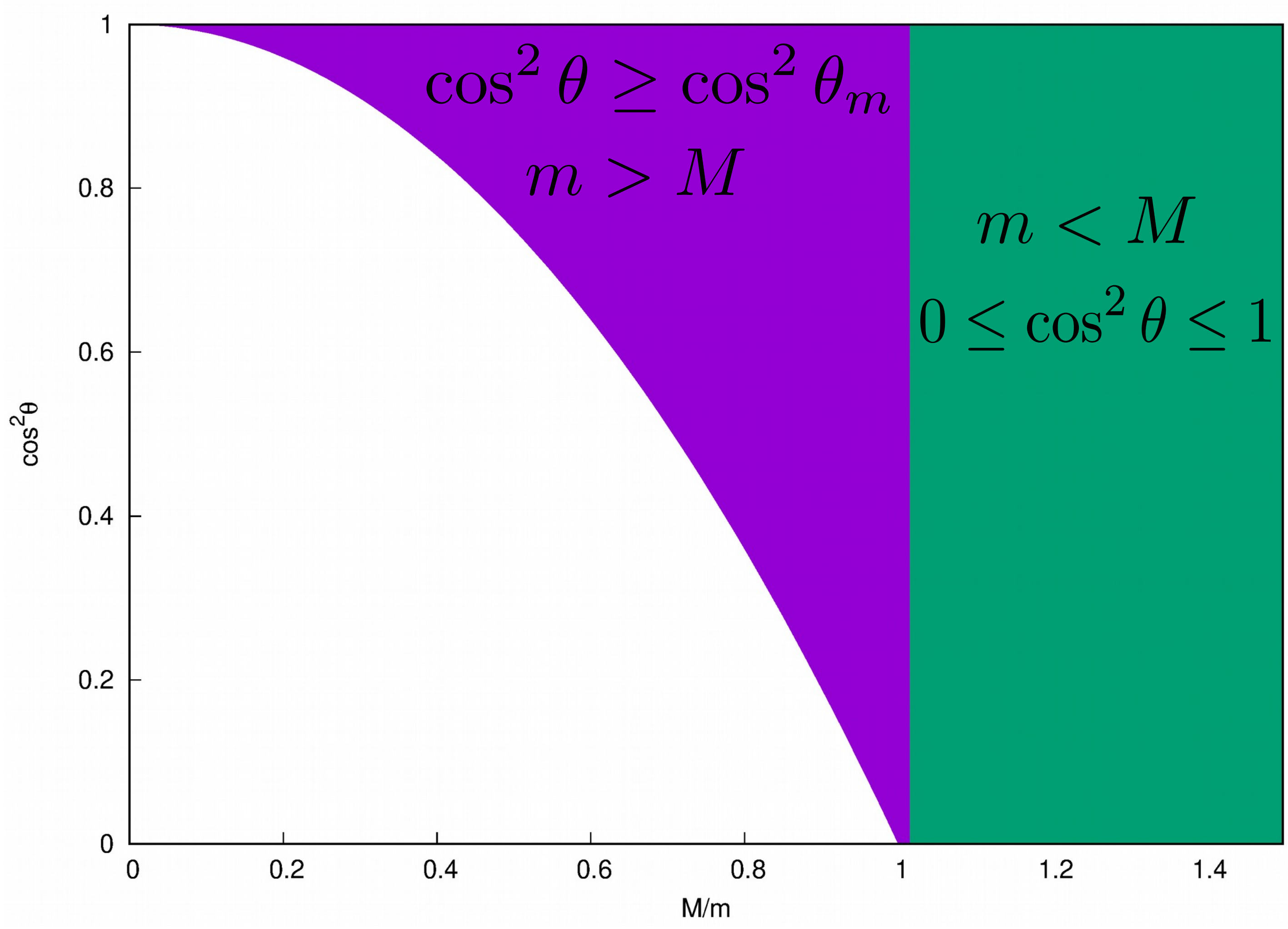
$$v_{\pm} = v_0 \left(\frac{m}{m+M}\right) \left[\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + \left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1}\right]$$

$$\cos^2\theta_m = 1 - \left(\frac{M}{m}\right)^2, \quad 0 \leq \theta_m \leq \frac{\pi}{2}$$

$$v_{\pm} = v_0 \left(\frac{m}{m+M}\right) \left[\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\theta_m}\right]$$

$$\cos^2\theta - \cos^2\theta_m \geq 0 \Rightarrow \theta \leq \theta_m$$

دینامیک سیستمهای ذرات



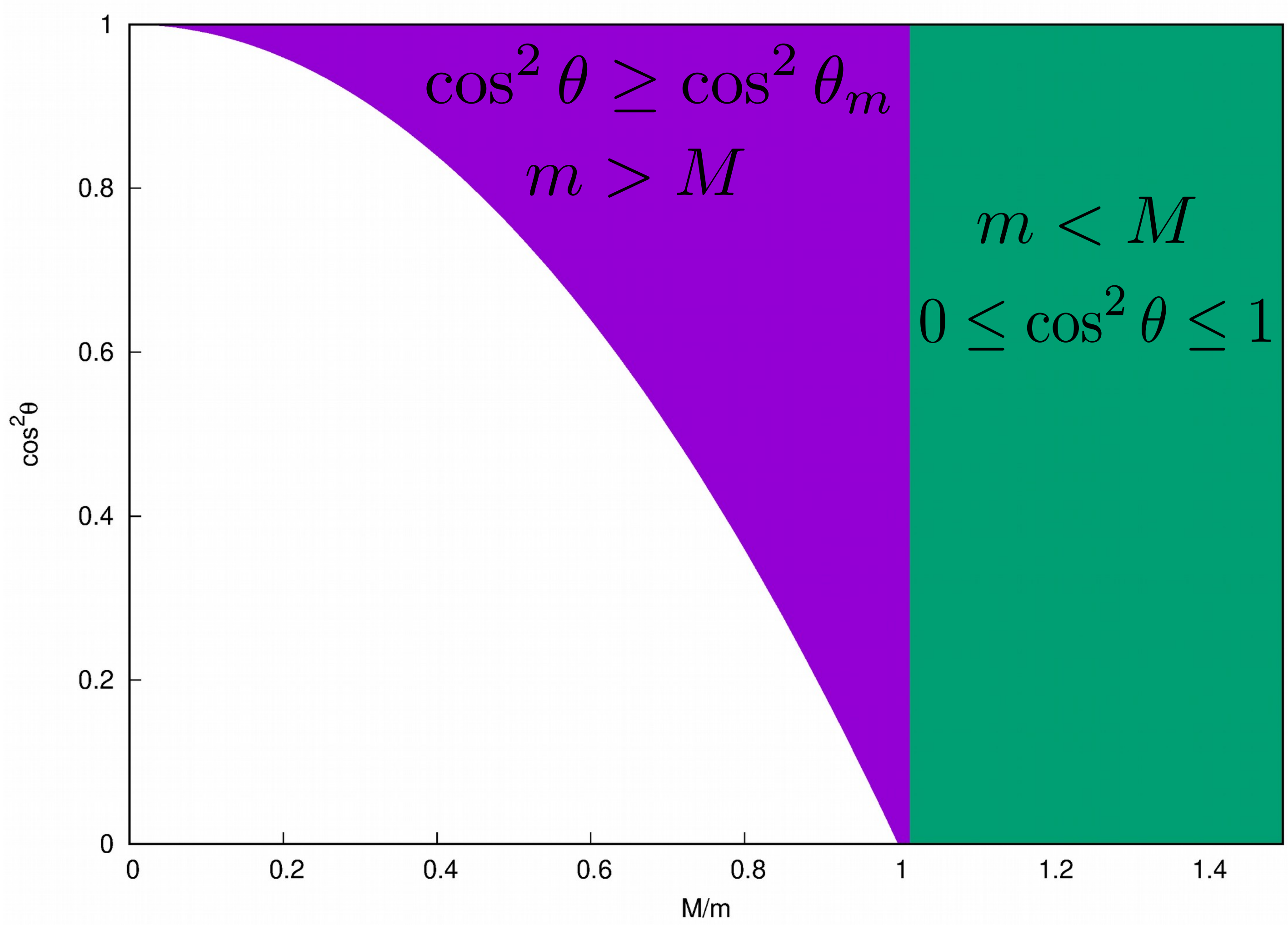
حالت $m < M$

$$v_{\pm} = v_0 \left(\frac{m}{m+M}\right) \left[\cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta + \left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1}\right]$$

$$\cos^2\theta + \left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1 > 0$$

$$0 \leq \cos^2\theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

دینامیک سیستمهای ذرات



دینامیک سیستمهای ذرات

حالت $m = M$

$$\begin{aligned} v_0 &= v\cos\theta + V\cos\phi \\ 0 &= v\sin\theta - V\sin\phi \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} v_0^2 &= (v\cos\theta + V\cos\phi)^2 \\ 0 &= (v\sin\theta - V\sin\phi)^2 \quad + \end{aligned}$$

$$v_0^2 = v^2 + V^2 + 2vV\cos(\theta+\phi)$$

$$\begin{aligned} v_0^2 &= v^2 + V^2 + 2vV\cos(\theta+\phi) \\ v_0^2 &= v^2 + V^2 \end{aligned} \Rightarrow cos(\theta+\phi) = 0$$

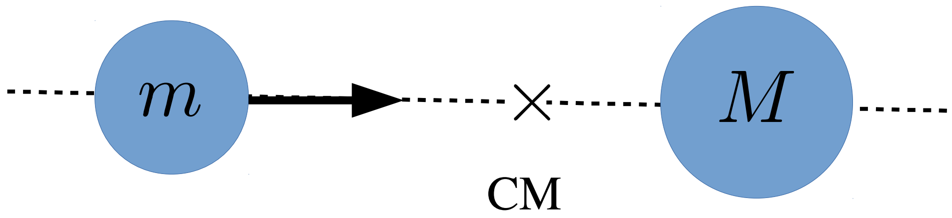
$$\Downarrow$$

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$$

برخورد در دستگاه مرکز جرم

دستگاه آزمایشگاه (Lab)

$v_{1i} = v_0 \qquad v_{2i} = 0$



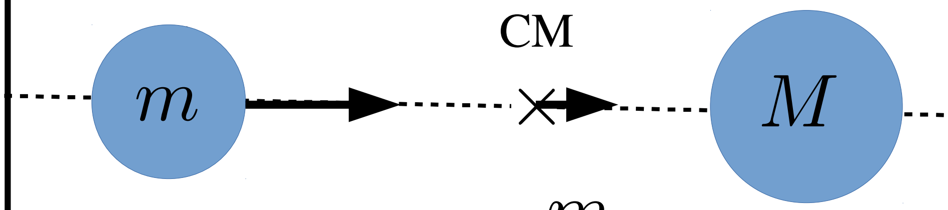
$$(m+M)v_{\mathrm{CM}} = mv_0$$

$$v_{\mathrm{CM}} = v_0 \frac{m}{m+M}$$

دینامیک سیستمهای ذرات

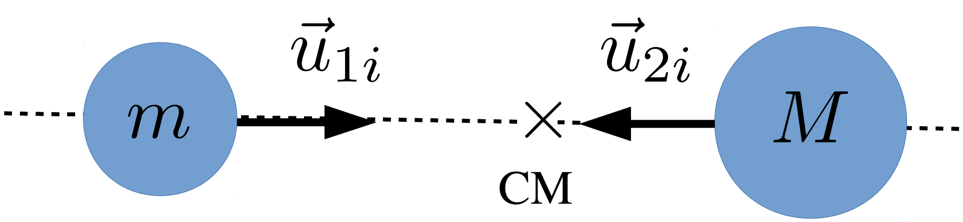
دستگاه آزمایشگاه (Lab)

$\vec{v}_{1i} = \hat{i} v_0 \qquad v_{2i} = 0$



$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \hat{i} v_0 \frac{m}{m+M} = \hat{i} v_c$$

دستگاه مرکز جرم (CM)



برخورد در دستگاه مرکز جرم

ذره‌ی اول

$$\begin{aligned} \vec{u}_{1i} &= \vec{v}_{1i} - \vec{v}_{\mathrm{CM}} \\ &= \hat{i} v_0 - \hat{i} v_0 \frac{m}{m+M} \\ &= \hat{i} v_0 \frac{M}{m+M} \end{aligned}$$

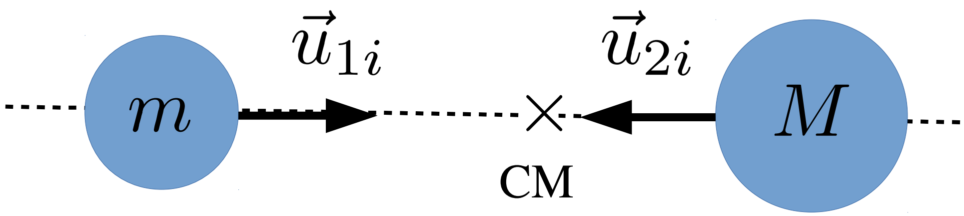
ذره‌ی دوم

$$\begin{aligned} \vec{u}_{2i} &= \vec{v}_{2i} - \vec{v}_{\mathrm{CM}} \\ &= 0 - \hat{i} v_0 \frac{m}{m+M} \\ &= -\hat{i} v_0 \frac{m}{m+M} \end{aligned}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

دستگاه مرکز جرم (CM)



$$\vec{u}_{1i} = \hat{i} v_0 \frac{M}{m+M}$$

$$\vec{u}_{2i} = -\hat{i} v_0 \frac{m}{m+M}$$

$$m\vec{u}_{1i} + M\vec{u}_{2i} = 0$$

تکانه خطی دستگاه مرکز جرم قبل از برخورد برابر صفر است.

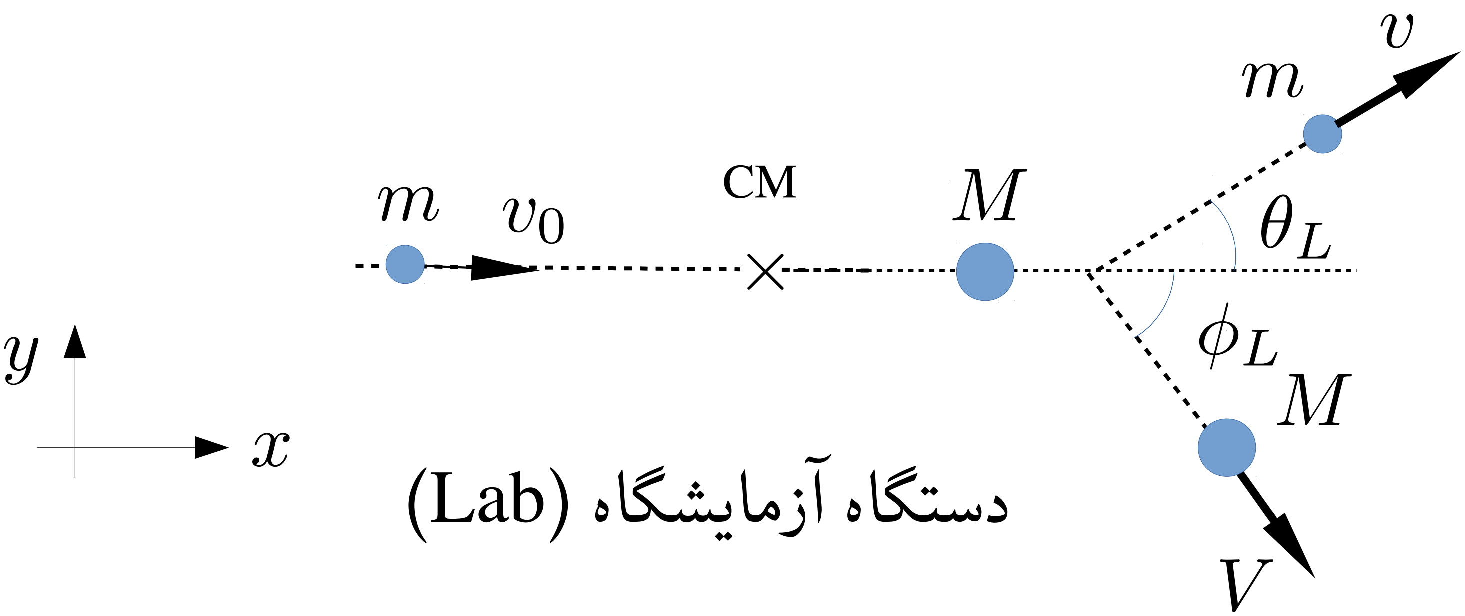
بدلیل پایستگی تکانه

تکانه خطی دستگاه مرکز جرم بعد از برخورد هم برابر صفر است.

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستمهای ذرات

برخورد در دستگاه مرکز جرم

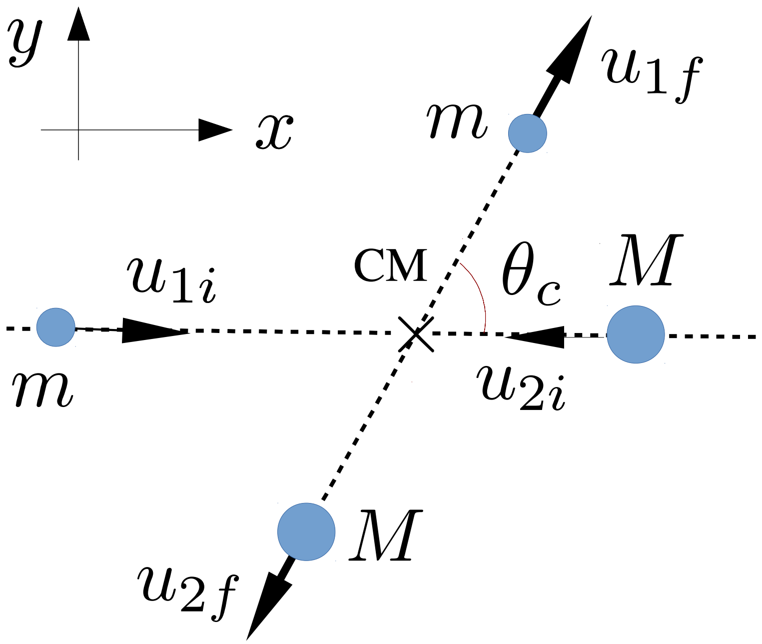


دستگاه آزمایشگاه (Lab)

$$\vec{v}_{1i} = \hat{i} v_0 \qquad \vec{v}_{1f} = v(\hat{i}\cos\theta_L + \hat{j}\sin\theta_L)$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{v}_{2i} = 0 \qquad \vec{v}_{2f} = V(\hat{i}\cos\phi_L - \hat{j}\sin\phi_L)$$



برخورد در دستگاه مرکز جرم

دستگاه مرکز جرم (CM)

$$\vec{u}_{1f} = \vec{v}_{1f} - \vec{v}_{\rm CM}$$

$$\vec{u}_{2f} = \vec{v}_{2f} - \vec{v}_{\rm CM}$$

هدف: (θ_c, θ_L)

$$u_{1f}(\hat{i}\cos\theta_c + \hat{j}\sin\theta_c) = v(\hat{i}\cos\theta_L + \hat{j}\sin\theta_L) - \hat{i}v_c$$

$$\begin{cases} u_{1f}\cos\theta_c + v_c = v\cos\theta_L \\ u_{1f}\sin\theta_c = v\sin\theta_L \end{cases} \Rightarrow \tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{(v_c/u_{1f}) + \cos\theta_c}$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{(v_c/u_{1f}) + \cos\theta_c}, \qquad \frac{v_c}{u_{1f}} =?, \qquad v_c = \frac{m}{m+M}v_0$$

تکانه خطی دستگاه مرکز جرم قبل از برخورد برابر صفر است:

$$m\vec{u}_{1i} + M\vec{u}_{2i} = 0$$

تکانه خطی دستگاه مرکز جرم بعد از برخورد برابر صفر است:

$$m\vec{u}_{1f} + M\vec{u}_{2f} = 0$$

پایستگی انرژی در دستگاه مرکز جرم وقتی برخورد کشسان باشد:

$$\frac{1}{2}mu_{1i}^2 + \frac{1}{2}Mu_{2i}^2 = \frac{1}{2}mu_{1f}^2 + \frac{1}{2}Mu_{2f}^2$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{(v_c/u_{1f}) + \cos\theta_c}, \qquad \frac{v_c}{u_{1f}} = ?, \qquad v_c = \frac{m}{m+M} v_0$$

تکانه خطی دستگاه مرکز جرم قبل از برخورد برابر صفر است:

$$m\vec{u}_{1i} + M\vec{u}_{2i} = 0 \Rightarrow u_{2i}^2 = \vec{u}_{2i}\cdot\vec{u}_{2i} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \vec{u}_{1i}\cdot\vec{u}_{1i} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 u_{1i}^2$$

تکانه خطی دستگاه مرکز جرم بعد از برخورد برابر صفر است:

$$m\vec{u}_{1f} + M\vec{u}_{2f} = 0 \Rightarrow u_{2f}^2 = \vec{u}_{2f}\cdot\vec{u}_{2f} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 \vec{u}_{1f}\cdot\vec{u}_{1f} = \left(\frac{m}{M}\right)^2 u_{1f}^2$$

پایستگی انرژی در دستگاه مرکز جرم وقتی برخورد کشسان باشد:

$$\frac{1}{2}mu_{1i}^2 + \frac{1}{2}Mu_{2i}^2 = \frac{1}{2}mu_{1f}^2 + \frac{1}{2}Mu_{2f}^2$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{(v_c/u_{1f}) + \cos\theta_c}, \qquad \frac{v_c}{u_{1f}} = ?, \qquad v_c = \frac{m}{m+M} v_0$$

$$\frac{1}{2} m u_{1i}^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M}\right)^2 u_{1i}^2 = \frac{1}{2} m u_{1f}^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M}\right)^2 u_{1f}^2$$

$$\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M}\right)\right] 2u_{1i}^2 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M}\right)^2\right] u_{1f}^2$$

$$\boxed{u_{1i} = u_{1f}}$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{(v_c/u_{1f}) + \cos\theta_c}, \qquad \frac{v_c}{u_{1f}} = ?, \qquad v_c = \frac{m}{m+M}v_0$$

$$\boxed{u_{1i} = u_{1f}}$$

$$u_{1i} = v_0\frac{M}{m+M} \Rightarrow u_{1f} = v_0\frac{M}{m+M}$$

$$v_c = \frac{m}{m+M}v_0$$

$$\frac{v_c}{u_{1f}} = \frac{m}{M} \Rightarrow \tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{(m/M) + \cos\theta_c}$$

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{(m/M) + \cos\theta_c}$$

حالتهای خاص:

۱-حالت $M \gg m$

$$\tan\theta_L = \tan\theta_c$$

زاویه‌ی پراکندگی در دستگاه مرکز جرم و دستگاه آزمایشگاه تقریباً با هم مساوی‌اند.

۲-حالت $M = m$

$$\tan\theta_L = \tan\frac{\theta_c}{2}$$

زاویه‌ی پراکندگی در دستگاه مرکز جرم دو برابر آن در دستگاه آزمایشگاه است.

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{(v_c/u_{1f}) + \cos\theta_c}, \qquad \frac{v_c}{u_{1f}} = ?, \qquad v_c = \frac{m}{m+M} v_0$$

تکانه خطی دستگاه مرکز جرم قبل از برخورد برابر صفر است:

$$m\vec{u}_{1i} + M\vec{u}_{2i} = 0$$

تکانه خطی دستگاه مرکز جرم بعد از برخورد برابر صفر است:

$$m\vec{u}_{1f} + M\vec{u}_{2f} = 0$$

عدم پایستگی انرژی در دستگاه مرکز جرم وقتی برخورد **ناکشسان** باشد:

$$\frac{1}{2}mu_{1i}^2 + \frac{1}{2}Mu_{2i}^2 = \frac{1}{2}mu_{1f}^2 + \frac{1}{2}Mu_{2f}^2 + Q$$

دینامیک سیستمهای ذرات

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_c}{\gamma + \cos\theta_c}$$

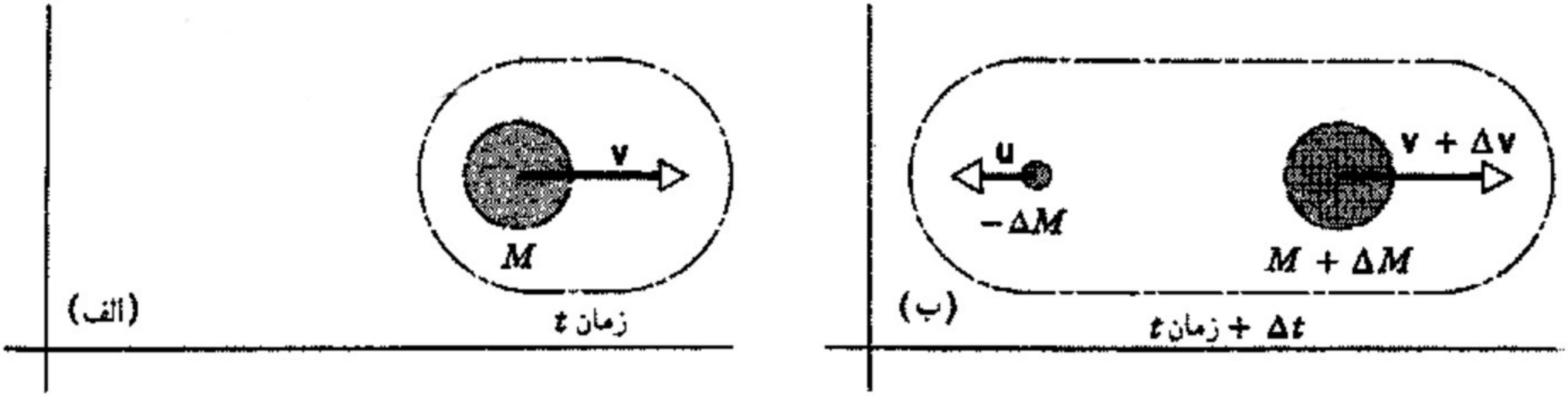
درستی رابطه زیر را بررسی کنید،

$$\gamma = \frac{m}{M}\left[1 - \frac{Q}{T}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\right]^{-1/2}$$

که در آن

$$T = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

دینامیک سیستمهای ذرات

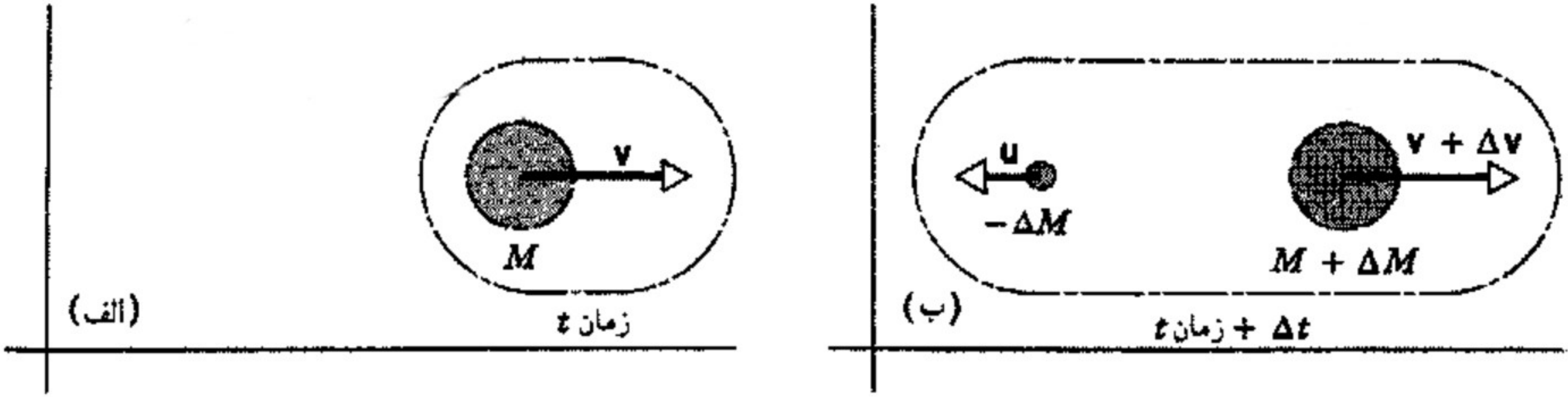


$$\vec{p}(t) = M\vec{V}$$

$$\vec{p}(t+\Delta t) = (M+\Delta M)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) + (-\Delta M)\vec{u}$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t) = M\Delta\vec{v} - (\vec{u}-\vec{v})\Delta M$$

دینامیک سیستمهای ذرات

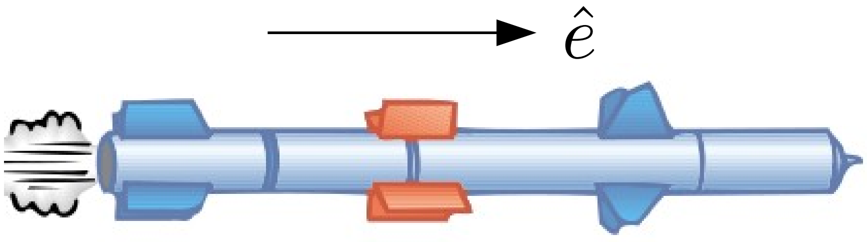


$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t+\Delta t) - \vec{p}(t) = M\Delta\vec{v} - (\vec{u}-\vec{v})\Delta M$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - (\vec{u}-\vec{v})\frac{\Delta M}{\Delta t}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - (\vec{u}-\vec{v})\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \qquad \boxed{M\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}} + (\vec{u}-\vec{v})\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}}$$

دینامیک سیستمهای ذرات



$$M\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{ext}} + (\vec{u} - \vec{v})\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

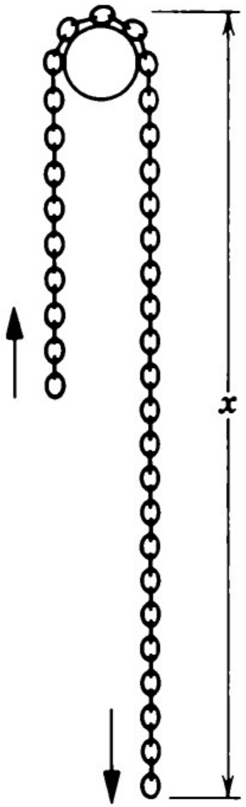
$$\vec{F}_{\mathrm{ext}} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} < 0, \qquad \vec{v}_{\mathrm{rel}} = \vec{u} - \vec{v} = -v_{\mathrm{rel}}\hat{e}$$

$$M\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -v_{\mathrm{rel}}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \text{نیروی پیشران}$$

$$M\mathrm{d}v = -v_{\mathrm{rel}}\mathrm{d}M \Rightarrow \mathrm{d}v = -v_{\mathrm{rel}}\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v = -v_{\mathrm{rel}}\int_{M_0}^{M}\frac{\mathrm{d}M}{M} \Rightarrow M = M_0 e^{-v/v_{\mathrm{rel}}}$$

دینامیک سیستمهای ذرات



$$a \leq x \leq L$$

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt}$$

سمت چپ $\lambda(L-x)\ddot{x} = T(x) - \lambda(L-x)g$

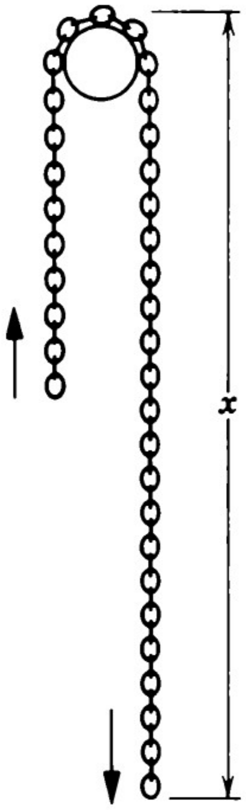
سمت راست $\lambda x\ddot{x} = \lambda xg - T(x)$ $\quad +$

$$L\lambda\ddot{x} = -\lambda Lg + 2\lambda xg$$

$$\ddot{x} = -g + \frac{2g}{L}x,$$

$$T(x) = \lambda x(g - \ddot{x}) = 2\lambda g(x - \frac{x^2}{L})$$

دینامیک سیستمهای ذرات



$$a \le x \le L$$

$$\ddot{x} = -g + \frac{2g}{L}x$$

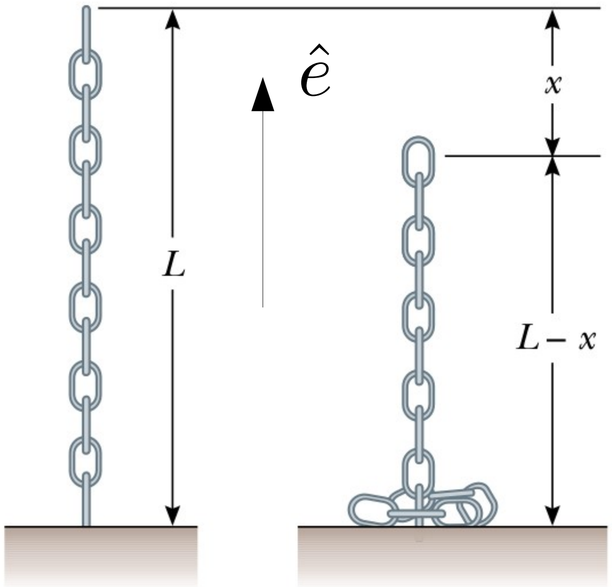
$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}$$

$$\dot{x}\mathrm{d}\dot{x} = \left(-g + \frac{2g}{L}x\right)\mathrm{d}x$$

$$\int_0^v \dot{x}\mathrm{d}\dot{x} = \int_a^L \left(-g + \frac{2g}{L}x\right)\mathrm{d}x$$

$$v = \sqrt{2ga\left(1 - \frac{a}{L}\right)}$$

دینامیک سیستمهای ذرات



قسمت
انباشته شده

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + (\vec{u}-\vec{v})\frac{dm}{dt}$$

$$\vec{v}=0, \quad \vec{u} = -\dot{x}\hat{e}$$

$$M=\lambda x, \quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \lambda\dot{x}$$

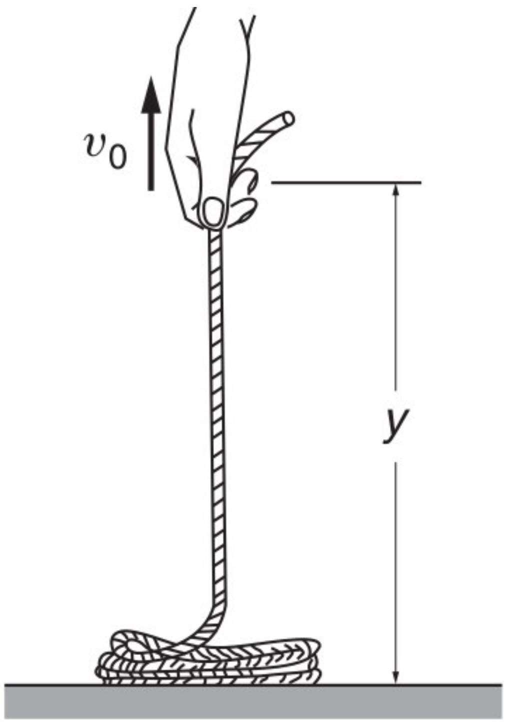
$$\vec{F}_{\text{ext}} = (N-\lambda x g)\hat{e}$$

$$0 = (N-\lambda x g)\hat{e} + (-\dot{x}\hat{e}-0)\lambda\dot{x}$$

$$N = \lambda x g + \lambda \dot{x}^2$$

$$\dot{x}^2 = 2gx \quad \longrightarrow \quad N = 3\lambda x g$$

دینامیک سیستمهای ذرات



قسمت جدا
شده از سطح

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt}$$

$$\vec{v} = v_0\hat{e}, \quad \vec{u} = 0$$

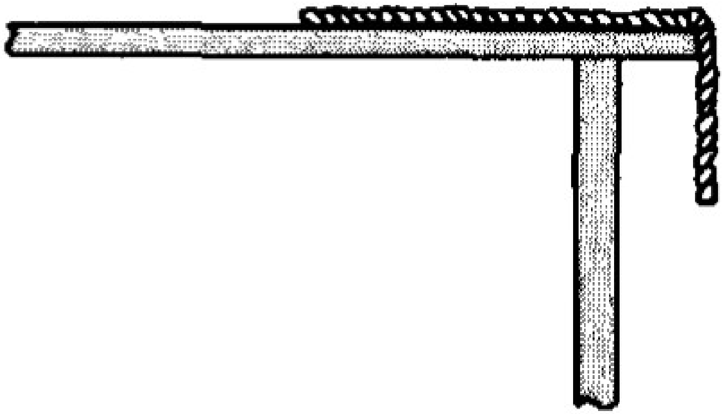
$$M = \lambda y, \quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \lambda v_0$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = (F - \lambda y g)\hat{e}$$

$$0 = (F - \lambda y g)\hat{e} + (0 - v_0\hat{e})\lambda v_0$$

$$F = \lambda g\left(y + \frac{v_0^2}{g}\right)$$

دینامیک سیستمهای ذرات



$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt}$$

قسمت افقی $\quad \lambda(L - x)\ddot{x} = T(x)$

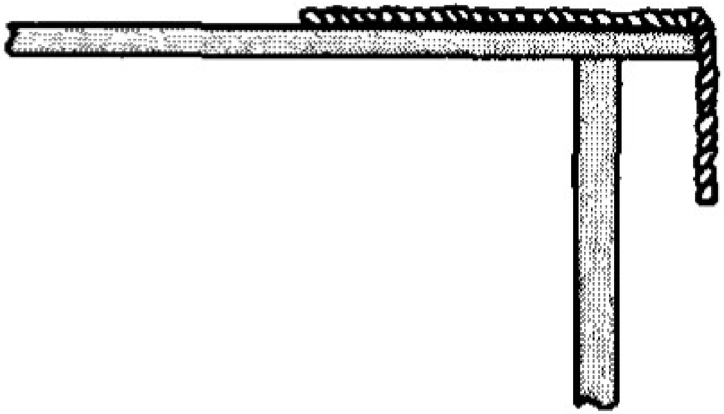
قسمت قائم $\quad \lambda x\ddot{x} = -T(x) + \lambda x g \quad +$

$$\lambda L\ddot{x} = \lambda x g$$

$$\ddot{x} - \frac{g}{L}x = 0, \quad x(t) = Ae^{\alpha t} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{g}{L}} = \frac{1}{\tau}$$

$$x(t) = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}, \quad x(t=0) = b, \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

دینامیک سیستمهای ذرات



$$x(t) = Ae^{t/\tau} + Be^{-t/\tau}$$

$$x(t=0) = b, \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

$$x(t) = b\cosh(t/\tau)$$

$$x(t_f) = L$$

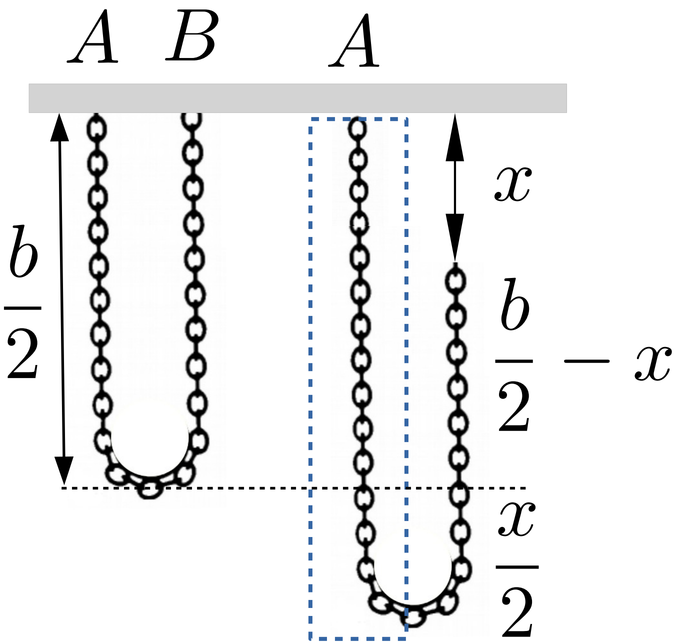
$$L = b\cosh\left(\frac{t_f}{\tau}\right) \Rightarrow t_f = \tau\cosh^{-1}\left(\frac{L}{b}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

از مباحث ریاضی عمومی و ریاضی فیزیک داریم

$$t_f = \tau\ln(L + \sqrt{L^2 - b^2})/b$$

دینامیک سیستمهای ذرات



$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + (\vec{u}-\vec{v})\frac{dm}{dt}$$

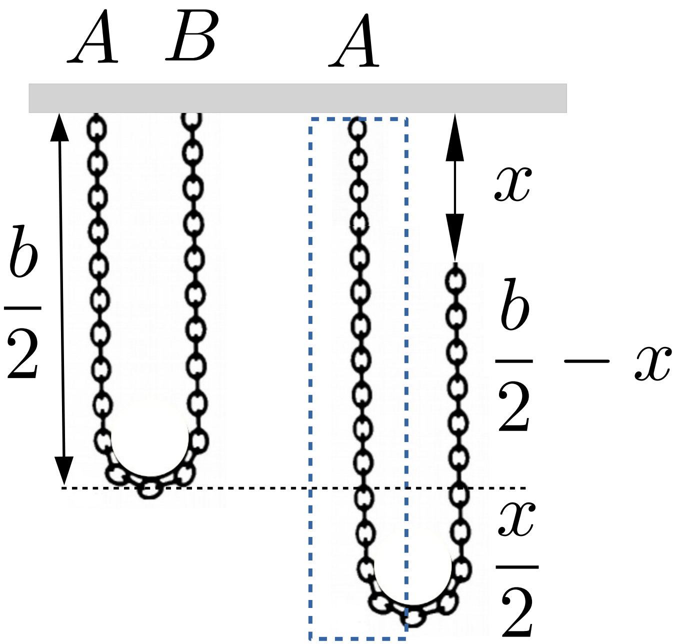
$$M_L = \frac{1}{2}\lambda(b+x), \;\; M_R = \frac{1}{2}\lambda(b-x)$$

$$\vec{v} = 0, \quad \vec{u} = -\hat{e}\dot{x}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \left[T_A - \frac{1}{2}\lambda(b+x)g\right]\hat{e}$$

$$0 = \left[T_A - \frac{1}{2}\lambda(b+x)g\right]\hat{e} + (-\dot{x}\hat{e} - 0)\frac{1}{2}\lambda\dot{x}$$

دینامیک سیستمهای ذرات



$$0=\left[T_A-\frac{1}{2}\lambda(b+x)g\right]\hat{e}+(-\dot{x}\hat{e}-0)\frac{1}{2}\lambda\dot{x}$$

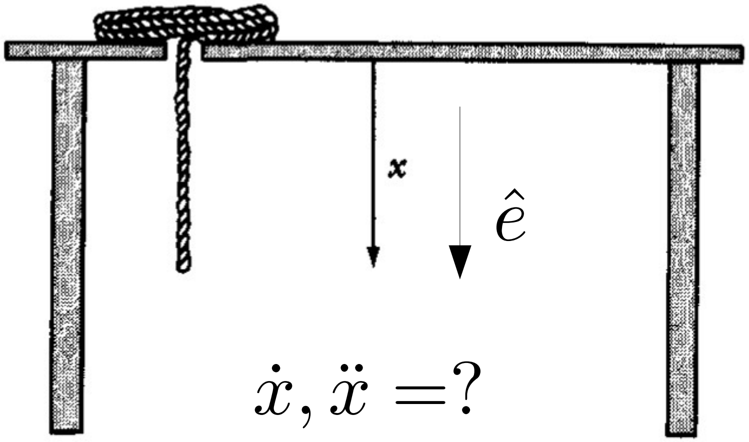
$$T_A=\frac{1}{2}\lambda(b+x)g+\frac{1}{2}\lambda\dot{x}^2$$

$$\dot{x}^2=2gx$$

$$T_A=\frac{1}{2}\lambda(b+x)g+\lambda xg\Rightarrow T_A=\frac{1}{2}\lambda bg+\frac{3}{2}\lambda xg$$

$$T_A=\frac{Mg}{2}\left(\frac{3x}{b}+1\right)$$

دینامیک سیستمهای ذرات



$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt}$$

$$M = \lambda x, \quad \vec{v} = \dot{x}\hat{e}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \lambda x g\hat{e}, \quad \vec{u} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \lambda\dot{x}$$

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + (\vec{u} - \vec{v})\frac{dm}{dt} \Rightarrow \lambda\, x\ddot{x}\hat{e} = \lambda x g\hat{e} + (0 - \dot{x}\hat{e})\lambda\dot{x}$$

$$x\ddot{x} = gx - \dot{x}^2 \qquad \boxed{x\ddot{x} + \dot{x}^2 = gx}$$