جلسه پنجم

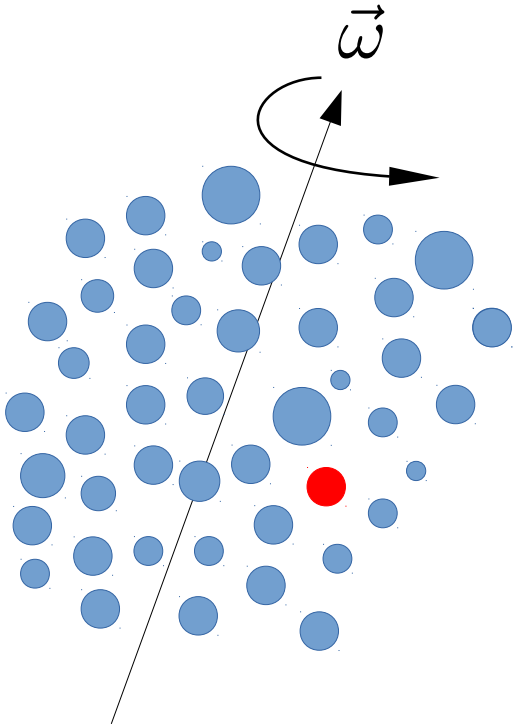
مکانیک تحلیلی

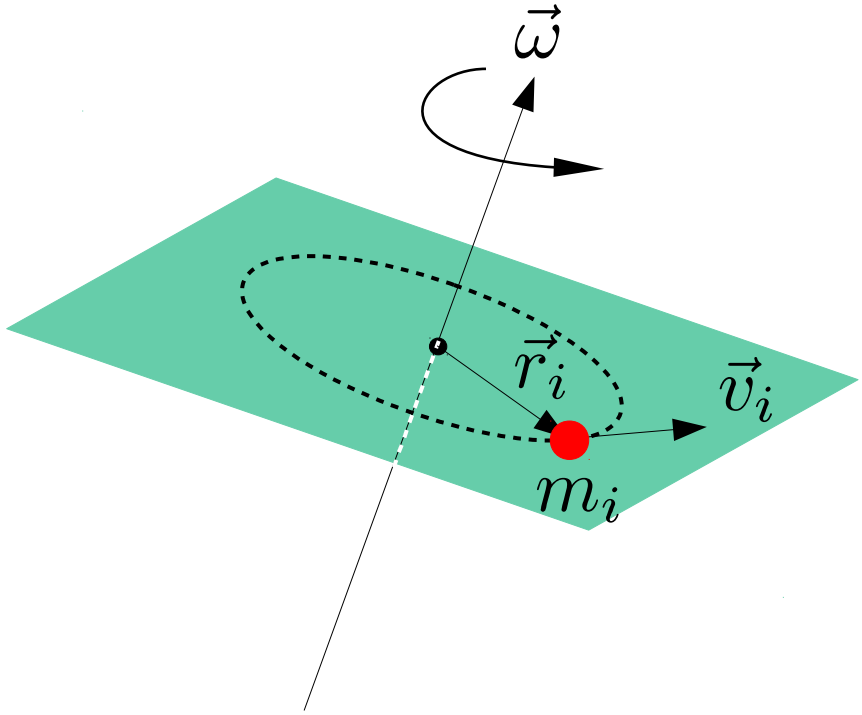
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

حرکت اجسام صلب در صفحه

تکانه زاویه‌ای

$$\vec{L} = \sum_{i}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

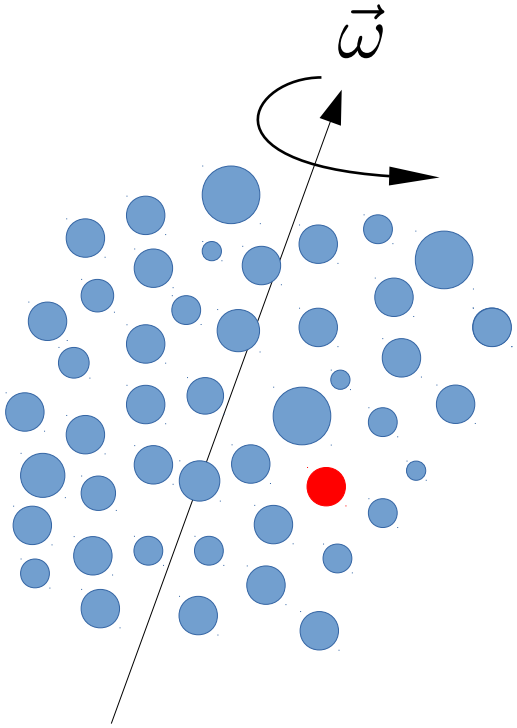




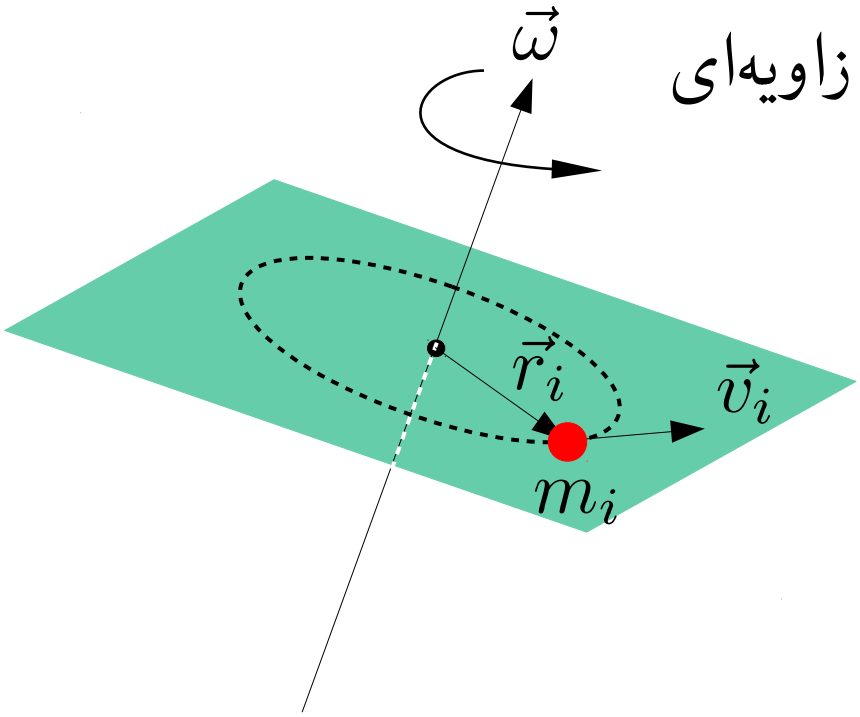
$$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i, \quad \vec{r}_i \perp \vec{\omega}, \quad \vec{v}_i \perp \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



تکانه زاویه‌ای



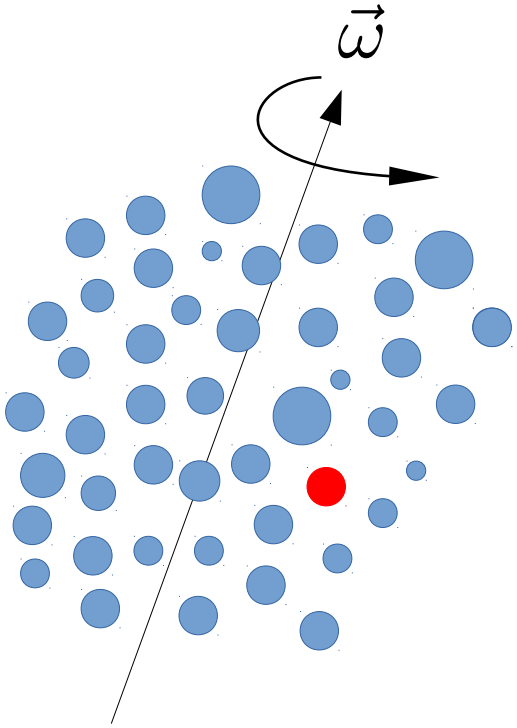
$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

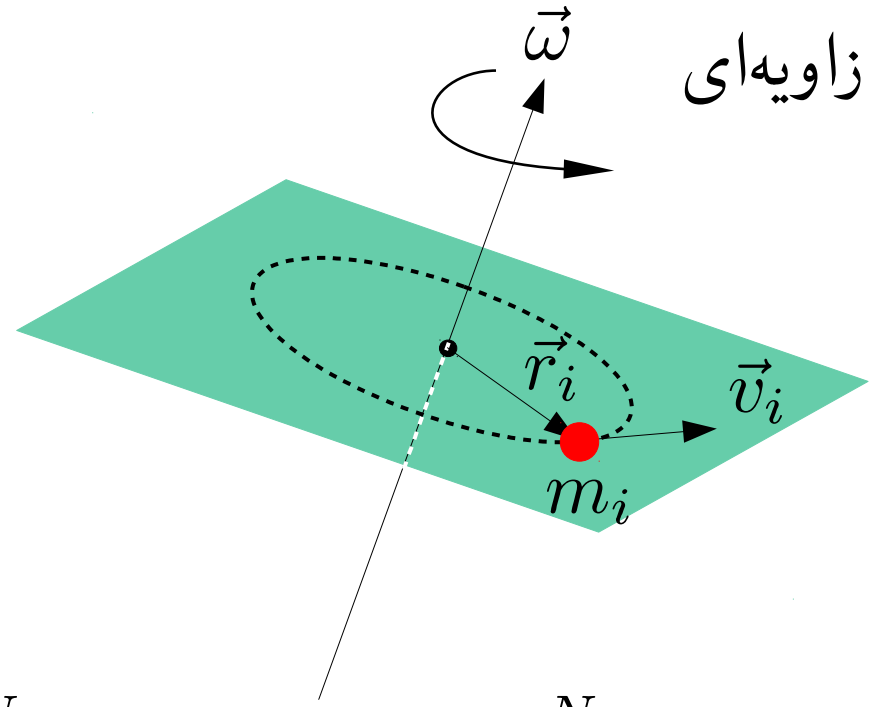
$$\Rightarrow \vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



تکانه زاویه‌ای

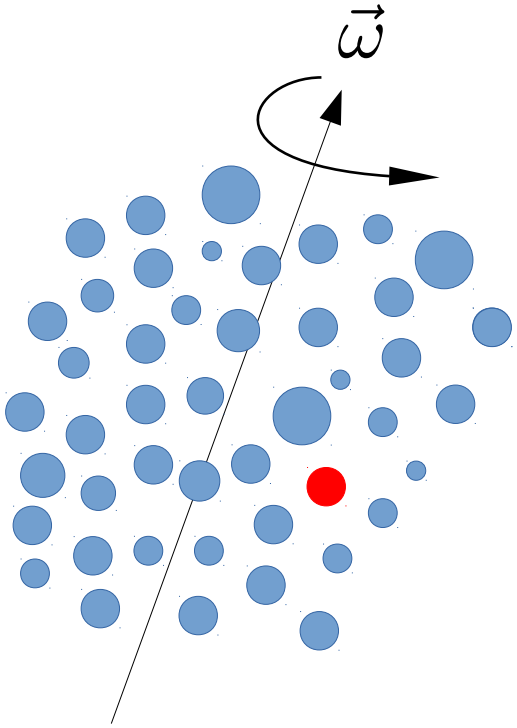


$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i^N m_i(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\omega} - \sum_i^N m_i(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)\vec{r}_i$$

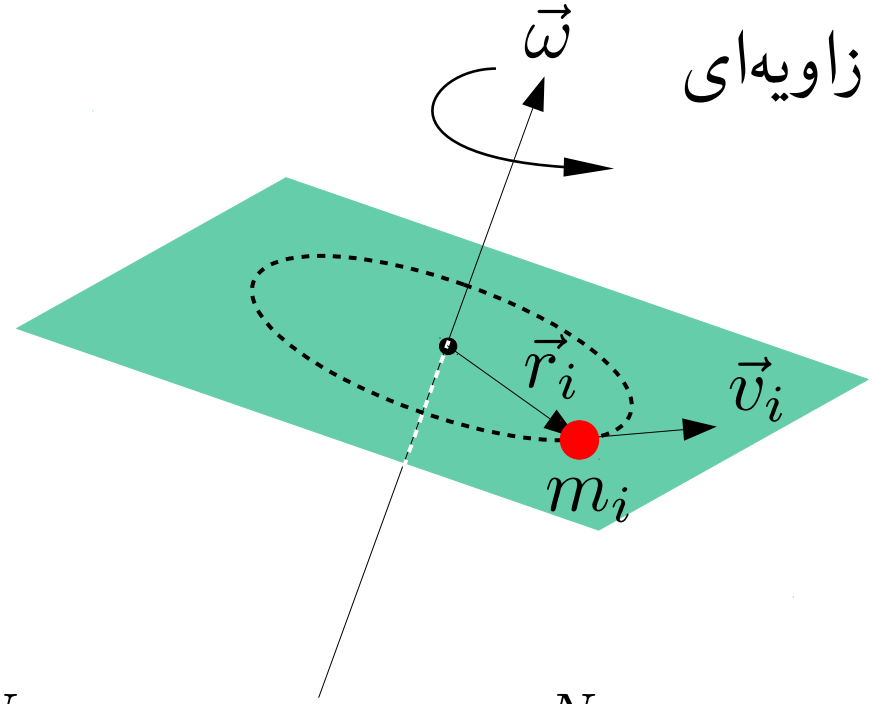
$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



تکانه زاویه‌ای

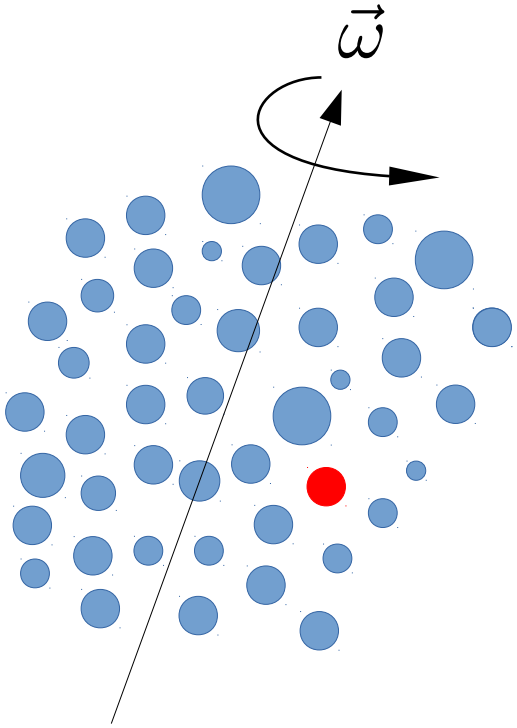


$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i^N m_i(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\omega} - \sum_i^N m_i(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)\vec{r}_i$$

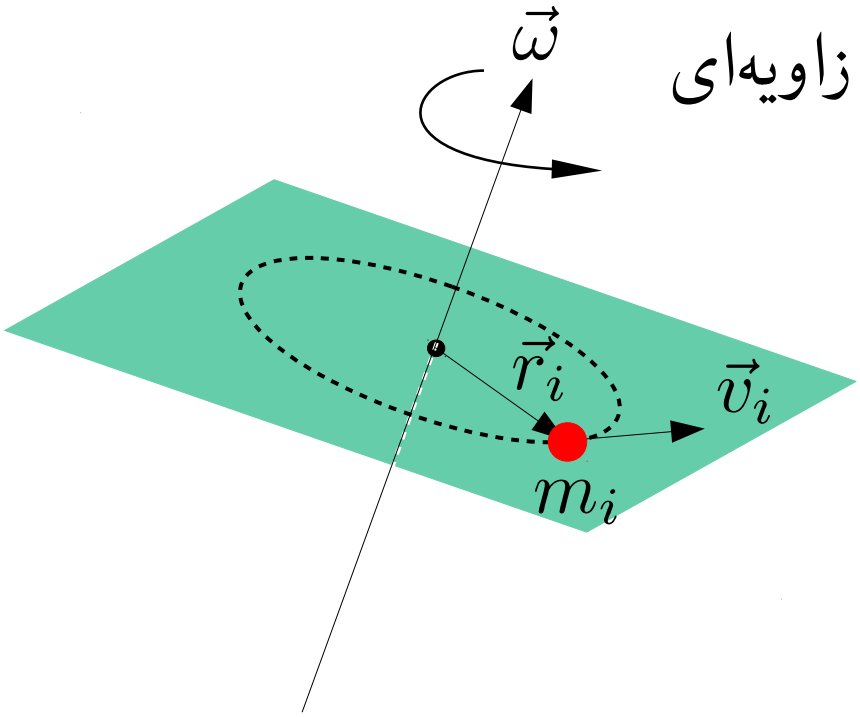
$$\vec{\omega} \perp \vec{r}_i \Rightarrow \vec{\omega} \cdot \vec{r}_i = 0, \quad \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i = r_i^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



تکانه زاویه‌ای



$$\vec{L} = \left(\sum_i^N m_i r_i^2\right)\vec{\omega} = \mathbb{I}\vec{\omega}, \quad \mathbb{I} = \sum_i^N m_i r_i^2$$

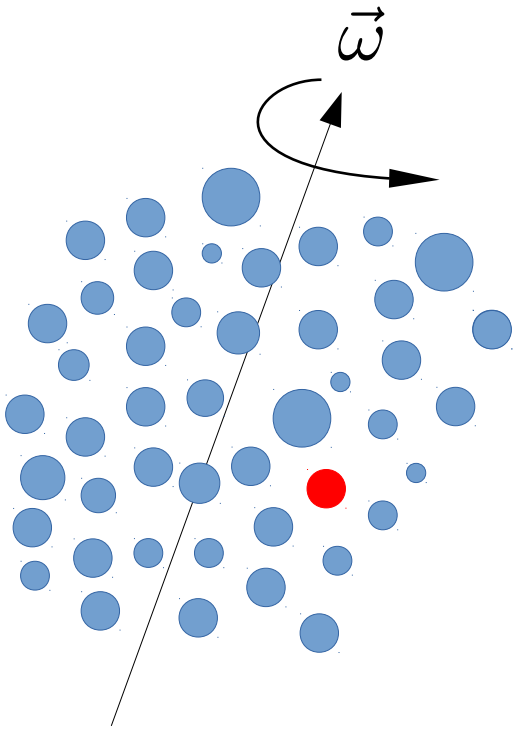
لختی دورانی:

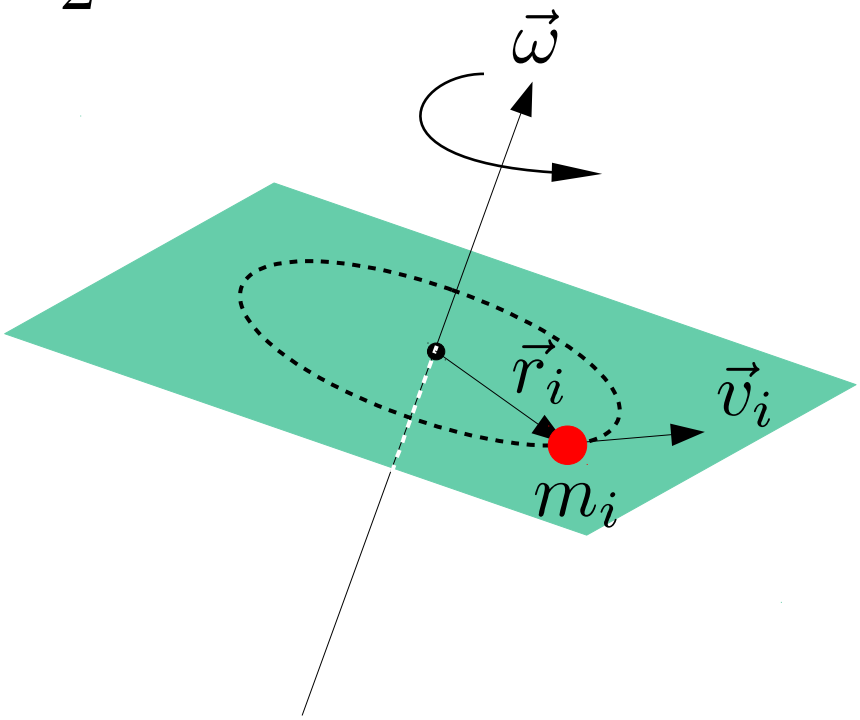
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

انرژی جنبشی دورانی

$$T = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

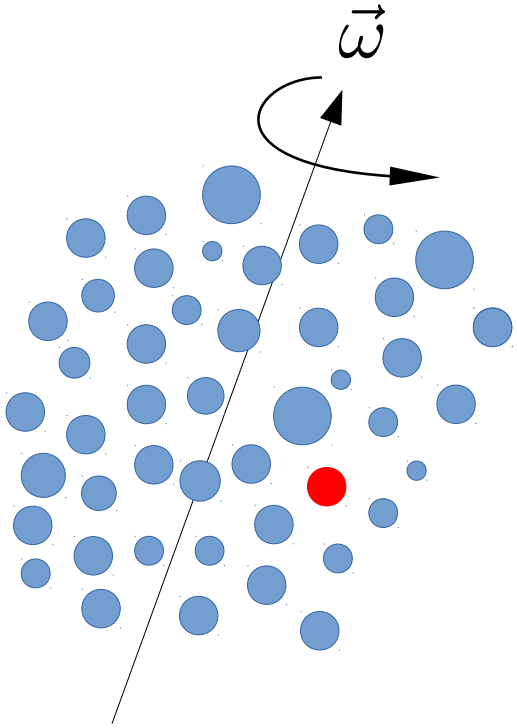




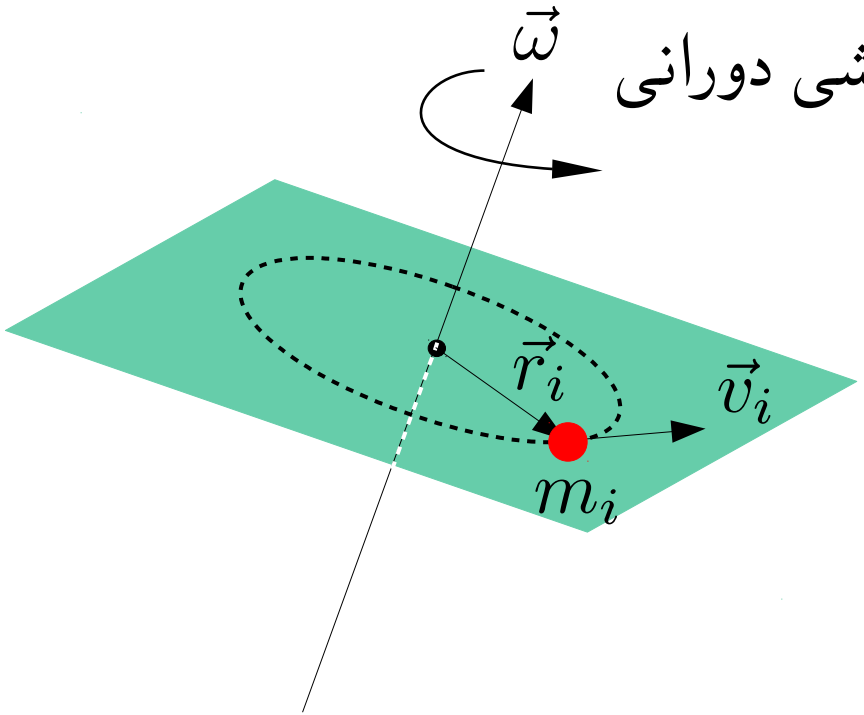
$$\vec{r}_i \perp \vec{v}_i, \quad \vec{r}_i \perp \vec{\omega}, \quad \vec{v}_i \perp \vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



انرژی جنبشی دورانی

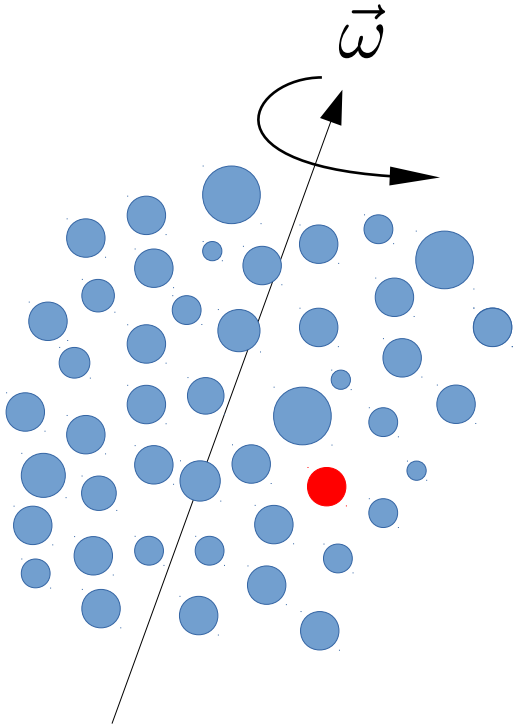


$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \Rightarrow \quad T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i \cdot v_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

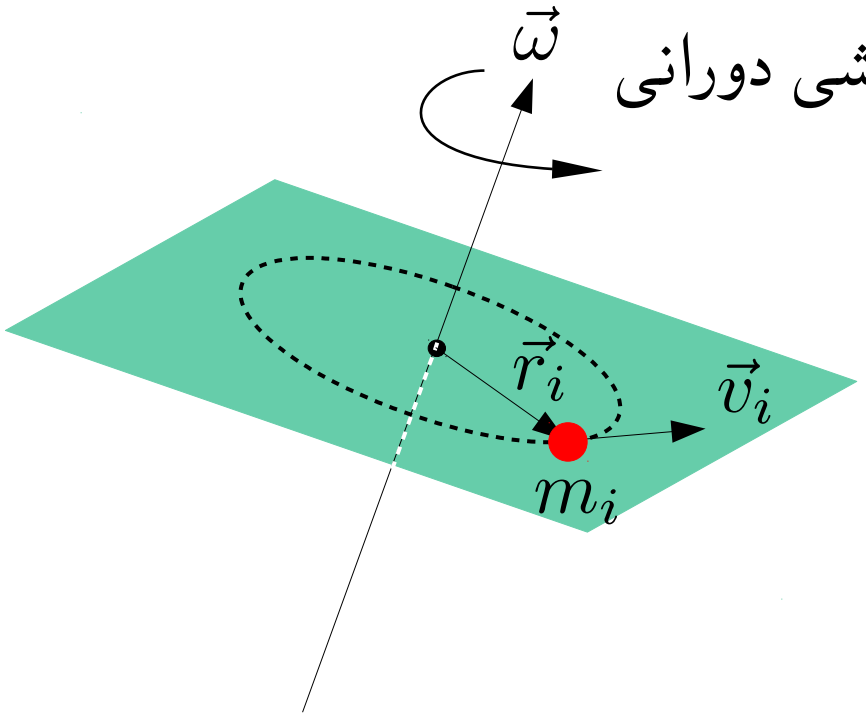
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



انرژی جنبشی دورانی

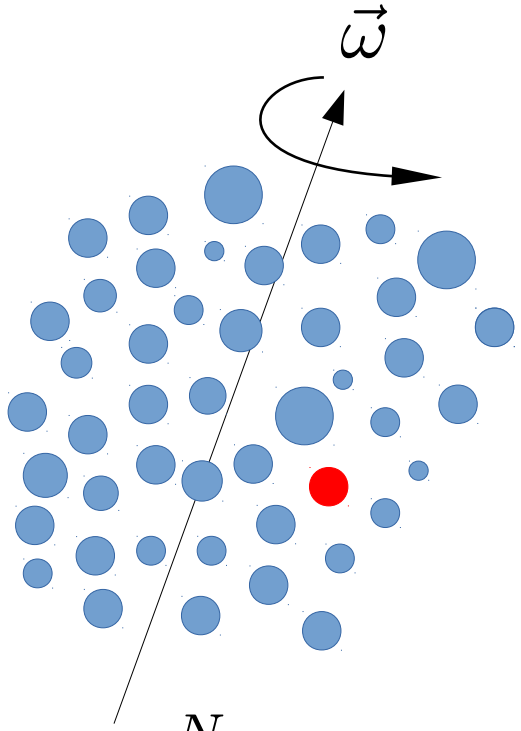


$$T = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r_i})$$

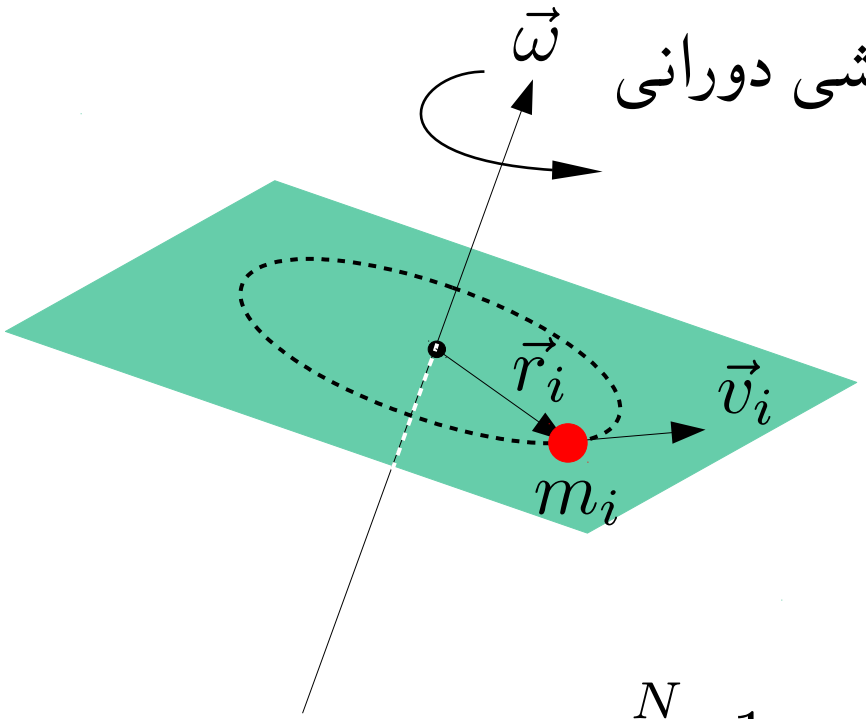
$$(\vec{\omega} \times \vec{r_i}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) = \vec{r_i} \cdot [(\vec{\omega} \times \vec{r_i}) \times \vec{\omega}] = (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\vec{r_i} \cdot \vec{r_i}) - (\vec{\omega} \cdot \vec{r_i})^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



انرژی جنبشی دورانی

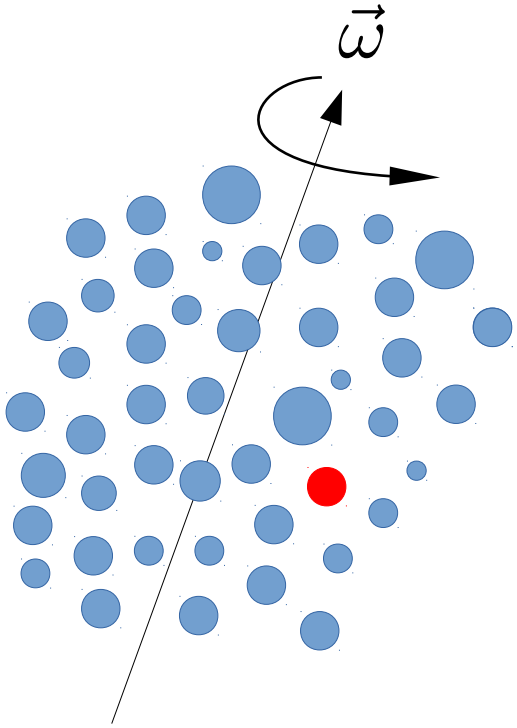


$$T = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i [(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2] = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

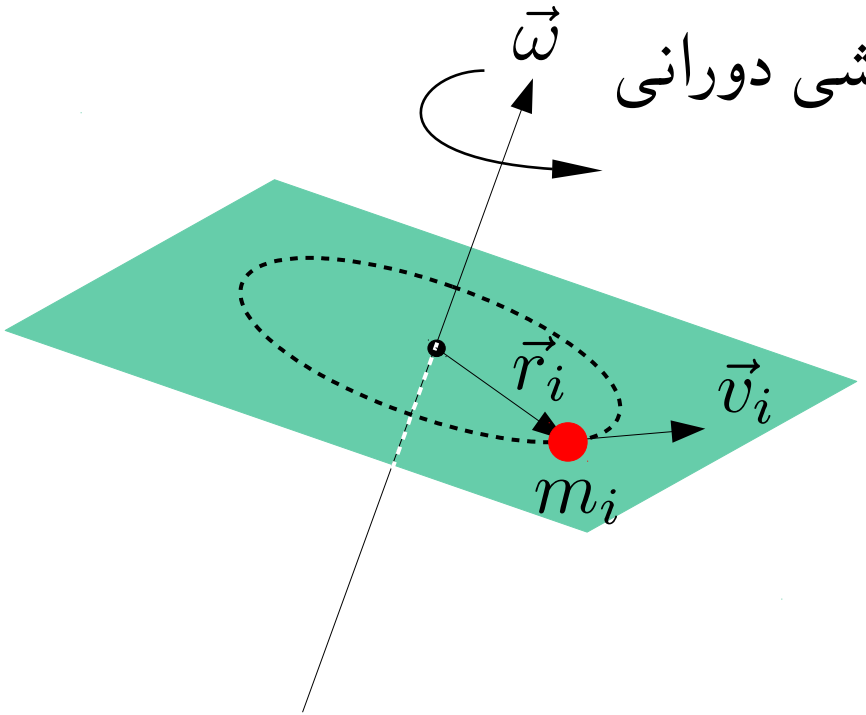
$$\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i = 0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



انرژی جنبشی دورانی

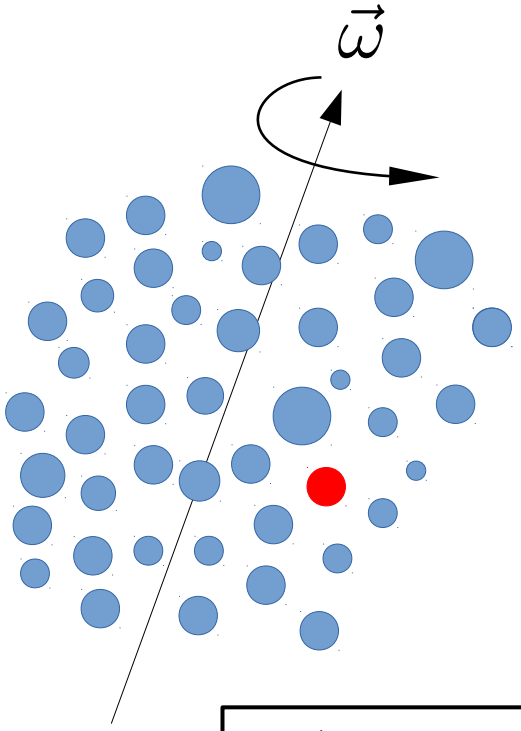


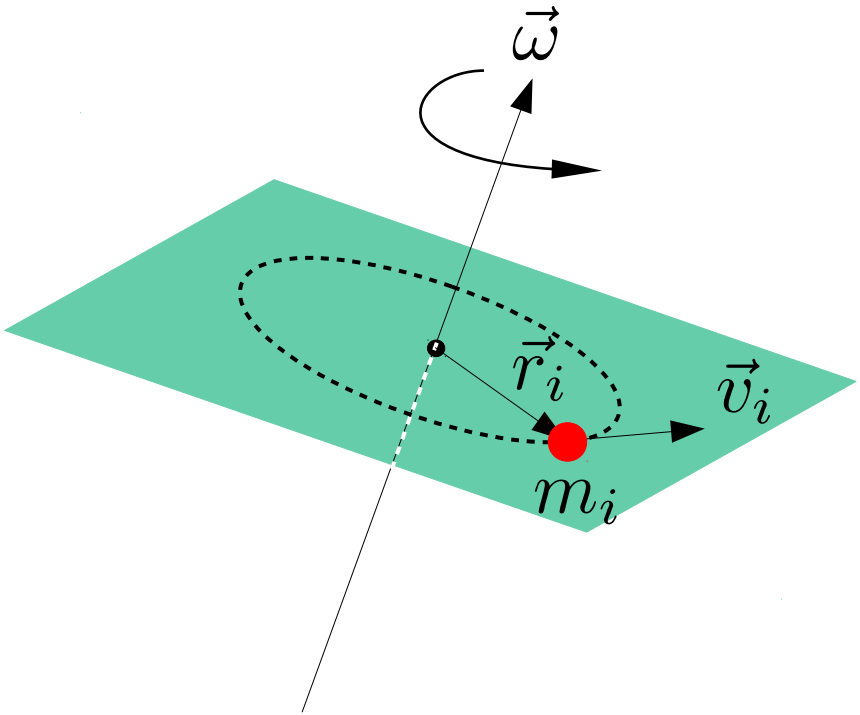
$$T = \frac{1}{2}\left(\sum_i^N m_i r_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\mathbb{I}\omega^2, \qquad \mathbb{I} = \sum_i^N m_i r_i^2$$

محمدرضا مظفری — گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

چرخش حول محور ثابت

حرکت اجسام صلب در صفحه





$$\vec{L} = \mathbb{I}\vec{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}\mathbb{I}\omega^2$$

$$\mathbb{I} = \sum_i^N m_i r_i^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{I}\vec{\omega}$$

با فرض اینکه آهنگ تغییر لختی دورانی برابر صفر است. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{I} = 0$

$$\sum \vec{\tau} = \mathbb{I}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}$$

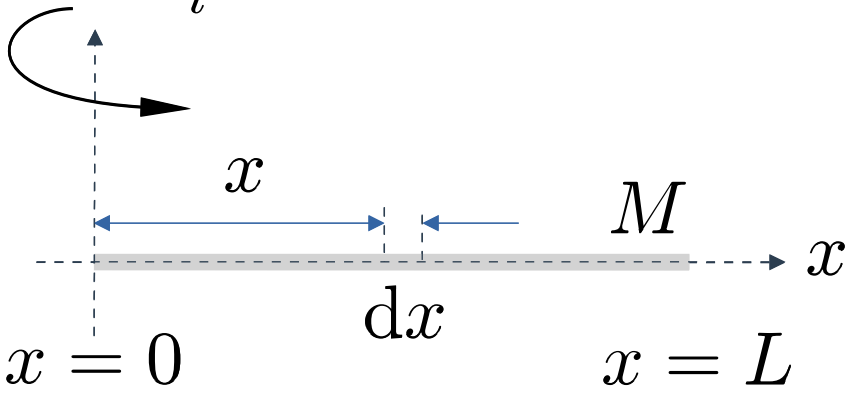
مادامی که راستای محور دوران تغییر نکند (یعنی $\hat{e} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \text{const.}$). می‌توان معادله‌ی بالا را به یک معادله‌ی یک بعدی تقلیل داد.

شتاب زاویه‌ای $\sum \tau = \mathbb{I}\alpha, \quad \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

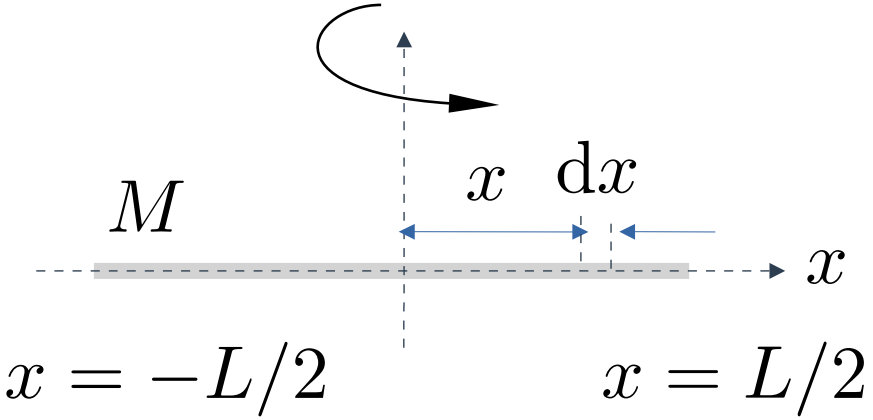
حرکت اجسام صلب در صفحه

$$\sum_i m_i \to \int \mathrm{d}m \qquad \mathbb{I} = \sum_i m_i r_i^2 \to \mathbb{I} = \int r^2 \mathrm{d}m$$



$$\mathbb{I}_y = \int r^2 \mathrm{d}m, \qquad \begin{matrix} r = x \\ \mathrm{d}m = \dfrac{M}{L}\mathrm{d}x \end{matrix}$$

$$\mathbb{I}_y = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}ML^2$$

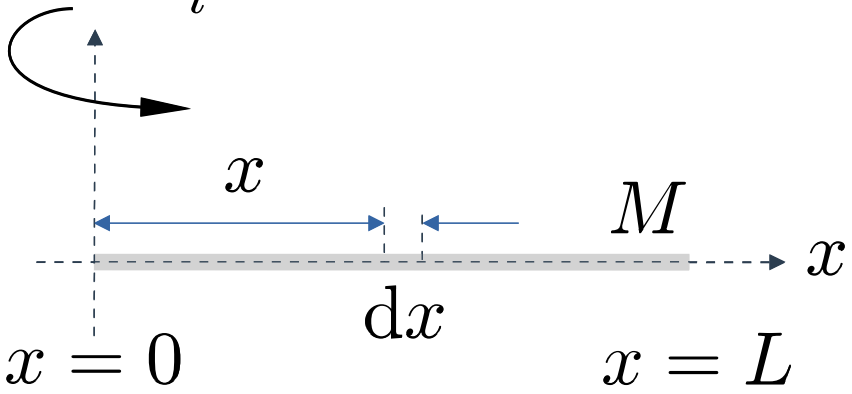


$$\mathbb{I}_y = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12}ML^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

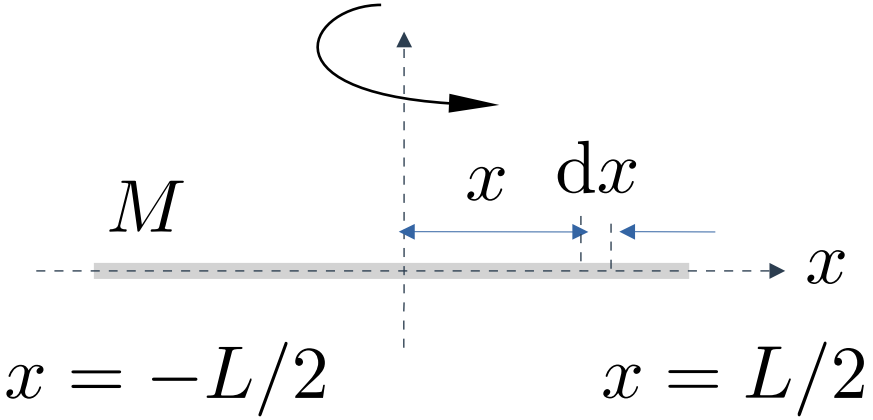
حرکت اجسام صلب در صفحه

$$\sum_i m_i \to \int \mathrm{d}m \qquad \mathbb{I} = \sum_i m_i r_i^2 \to \mathbb{I} = \int r^2 \mathrm{d}m$$



$$\mathbb{I}_y = \int r^2 \mathrm{d}m, \qquad \begin{matrix} r = x \\ \mathrm{d}m = \dfrac{M}{L}\mathrm{d}x \end{matrix}$$

$$\mathbb{I}_y = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}ML^2$$

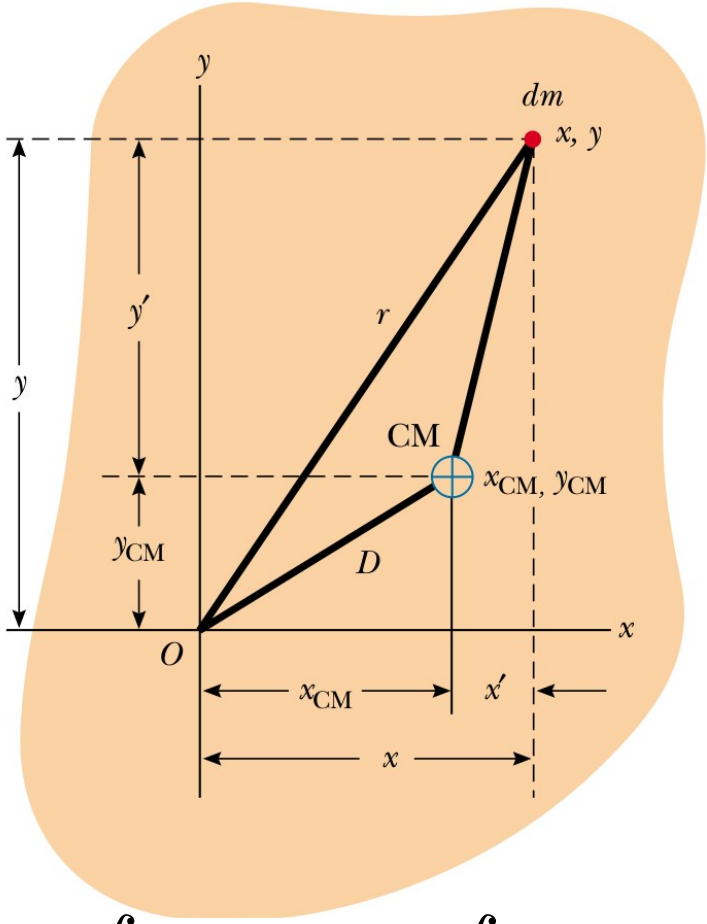


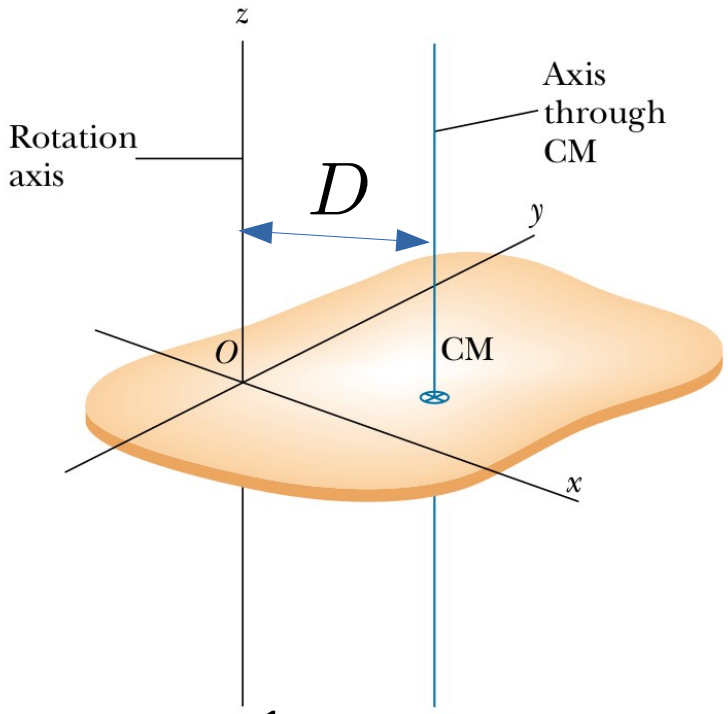
$$\mathbb{I}_y = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{12}ML^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

قضیه محورهای موازی





$$\mathbb{I}_z = \int r^2 \mathrm{d}m = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m, \quad \begin{cases} x = x_{\mathrm{CM}} + x' \\ y = y_{\mathrm{CM}} + y' \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

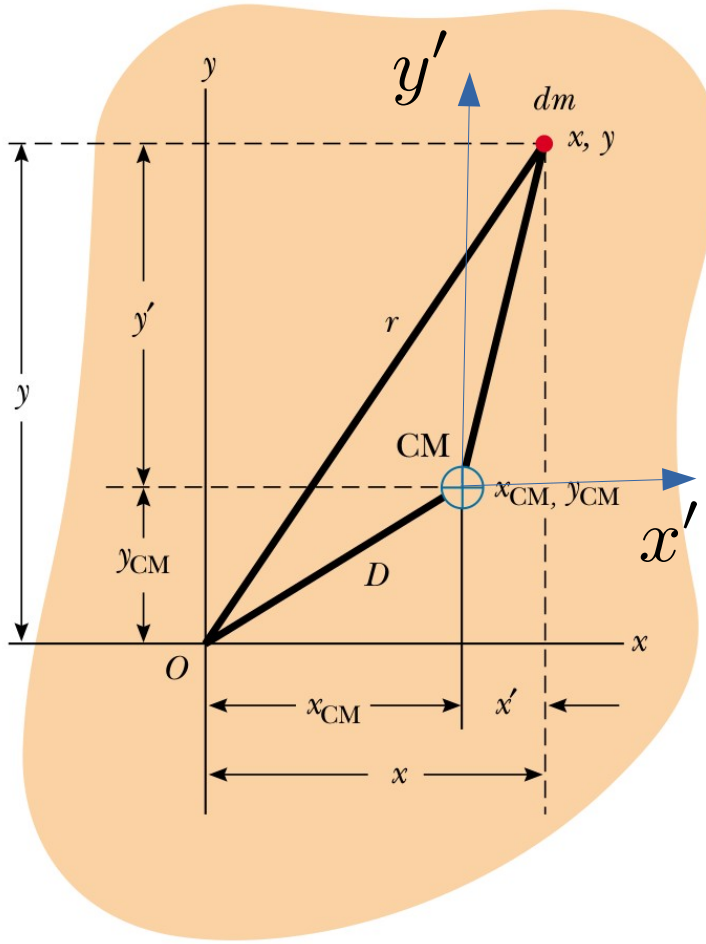
قضیه محورهای موازی

$$\mathbb{I}_z = \int [(x_{\rm CM} + x')^2 + (y_{\rm CM} + y')^2] \mathrm{d}m$$

$$\begin{aligned}
&(x_{\rm CM} + x')^2 + (y_{\rm CM} + y')^2 = \\
&= (x_{\rm CM}^2 + y_{\rm CM}^2) + 2x_{\rm CM}x' + \\
&\quad + 2y_{\rm CM}y' + (x'^2 + y'^2) = \\
&= D^2 + 2x_{\rm CM}x' + 2y_{\rm CM}y' + r'^2
\end{aligned}$$

$$\mathbb{I}_z = D^2 \int \mathrm{d}m + 2x_{\rm CM} \int x' \mathrm{d}m$$

$$+2y_{\rm CM} \int y' \mathrm{d}m + \int r'^2 \mathrm{d}m$$



محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

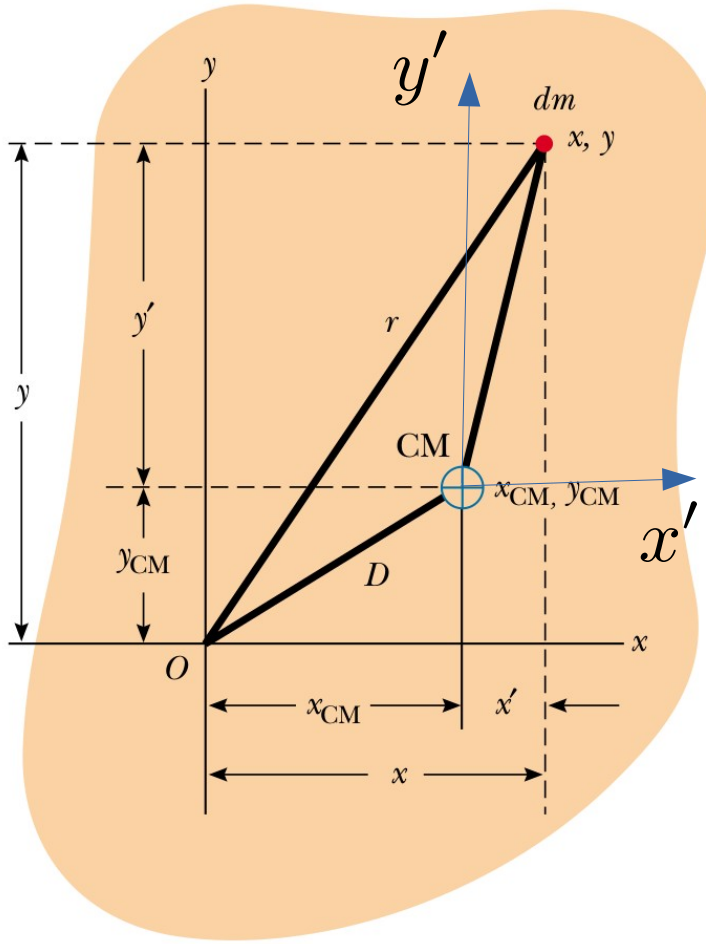
حرکت اجسام صلب در صفحه

قضیه محورهای موازی

$$\mathbb{I}_z = D^2 \int \mathrm{d}m + 2x_{\mathrm{CM}} \int x' \mathrm{d}m$$
$$+2y_{\mathrm{CM}} \int y' \mathrm{d}m + \int r'^2 \mathrm{d}m$$

$$\int \mathrm{d}m = M, \quad \int (x'^2 + y'^2)\mathrm{d}m = \mathbb{I}_{\mathrm{CM}}$$

$$\mathbb{I}_z = MD^2 + 2x_{\mathrm{CM}} \int x' \mathrm{d}m$$
$$+2y_{\mathrm{CM}} \int y' \mathrm{d}m + \mathbb{I}_{\mathrm{CM}}$$



محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

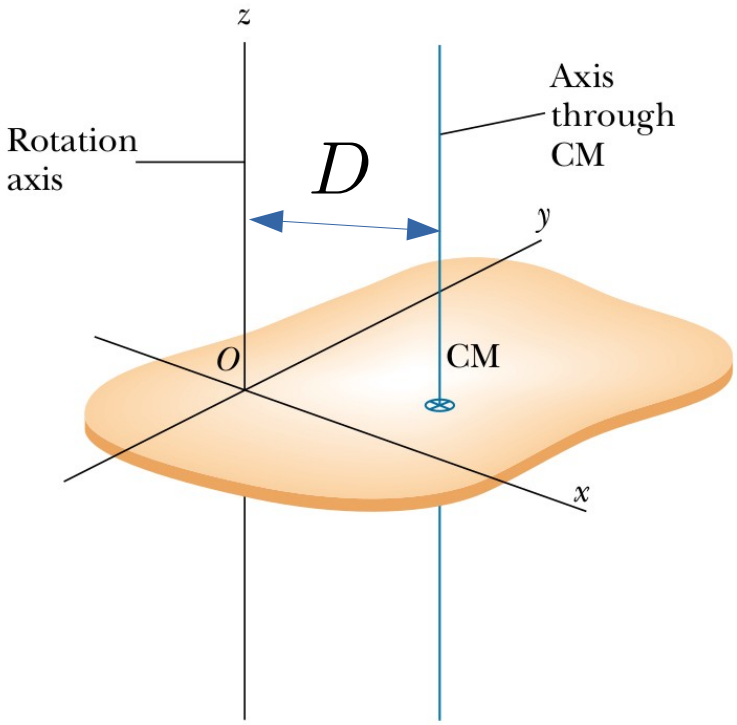
قضیه محورهای موازی

$$\mathbb{I}_z = MD^2 + 2x_{\mathrm{CM}} \int x' \mathrm{d}m$$

$$+2y_{\mathrm{CM}} \int y' \mathrm{d}m + \mathbb{I}_{\mathrm{CM}}$$

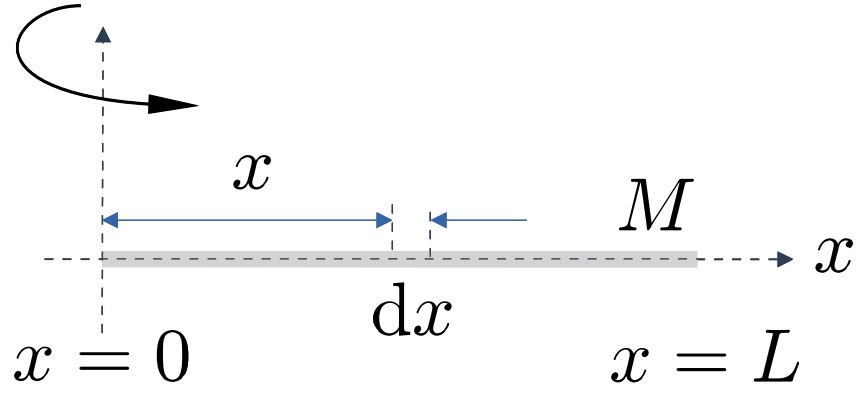
$$\int x' \mathrm{d}m = \int y' \mathrm{d}m = 0$$

$$\boxed{\mathbb{I}_z = MD^2 + \mathbb{I}_{\mathrm{CM}}}$$



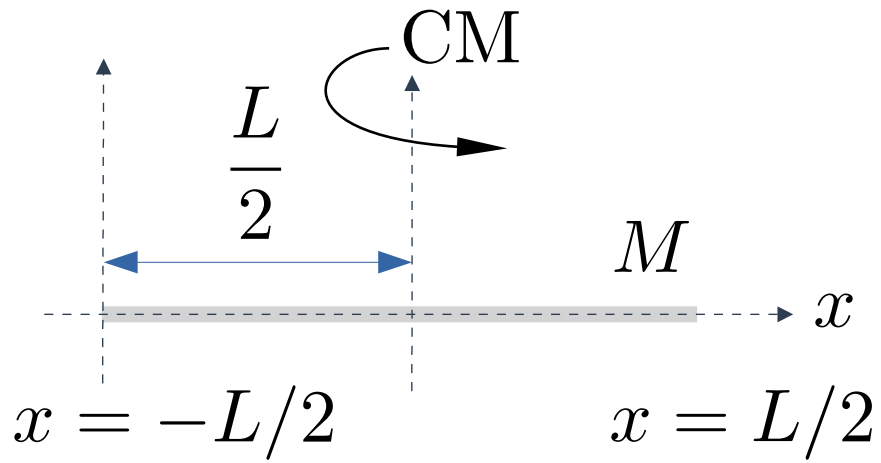
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\mathbb{I}_y = \int r^2 \mathrm{d}m, \qquad \begin{matrix} r = x \\ \mathrm{d}m = \dfrac{M}{L}\mathrm{d}x \end{matrix}$$

$$\mathbb{I}_y = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}ML^2$$

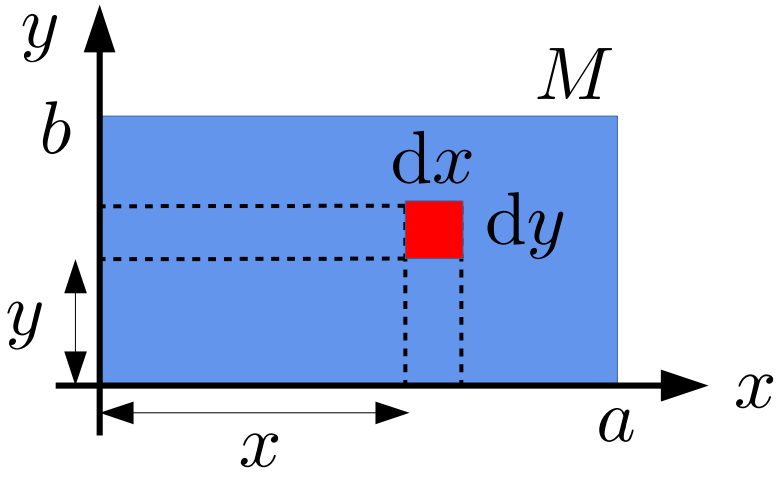


$$\mathbb{I}_y = \mathbb{I}_{\mathrm{CM}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$\mathbb{I}_{\mathrm{CM}} = \mathbb{I}_y - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



قضیه محورهای عمودی

$$\mathbb{I}_x = \int y^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{ab} \int y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

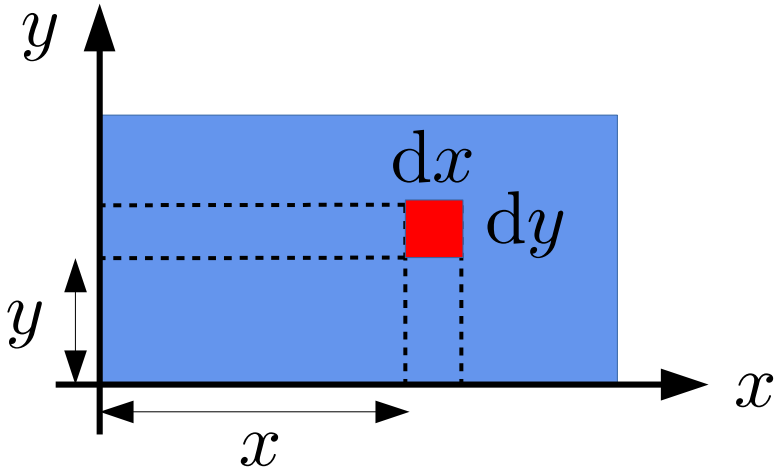
$$= \frac{M}{ab} \left(\int_0^a \mathrm{d}x \right) \left(\int_0^b y^2 \mathrm{d}y \right) = \frac{1}{3} M b^2$$

$$\mathbb{I}_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{ab} \int x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{M}{ab} \left(\int_0^a x^2 \mathrm{d}x \right) \left(\int_0^b \mathrm{d}y \right) = \frac{1}{3} M a^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



قضیه محورهای عمودی

$$\mathbb{I}_z = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m$$

$$= \frac{M}{ab}\int (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

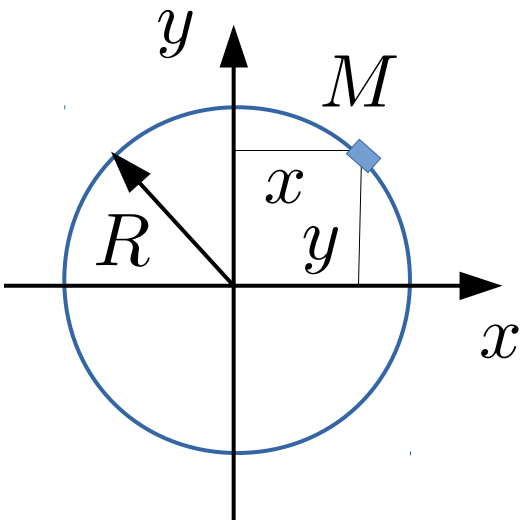
$$= \frac{M}{ab}\left[\left(\int_0^a x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b \mathrm{d}y\right) + \left(\int_0^a \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b y^2\mathrm{d}y\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$$

$$\mathbb{I}_z = \mathbb{I}_y + \mathbb{I}_x$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



قضیه محورهای عمودی

$$\mathbb{I}_x = \int y^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi R}\int y^2 \mathrm{d}l$$

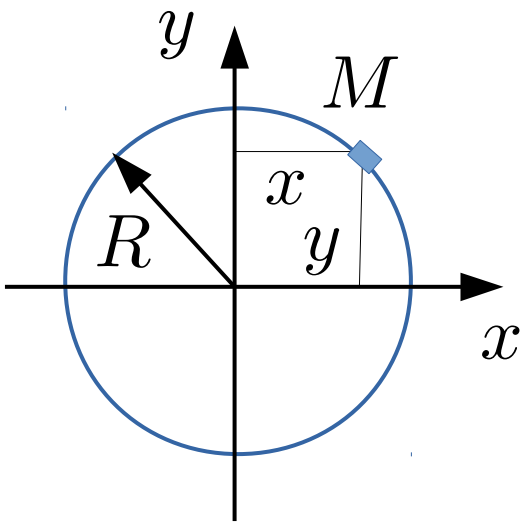
$$= \frac{M}{2\pi R}\int R^2 \sin^2\theta R \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{MR^2}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta\right) = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\mathbb{I}_x = \frac{1}{2}MR^2 \quad \xrightarrow{\text{انتظار داریم}} \quad \mathbb{I}_x = \mathbb{I}_y = \frac{1}{2}MR^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



قضیه محورهای عمودی

$$\mathbb{I}_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi R} \int x^2 \mathrm{d}l$$

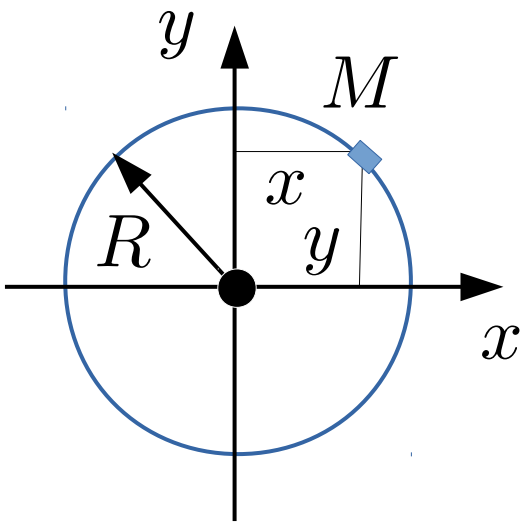
$$= \frac{M}{2\pi R} \int R^2 \cos^2\theta R \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{MR^2}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta \right) = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\mathbb{I}_y = \frac{1}{2} MR^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$x^2 + y^2 = R^2$$

قضیه محورهای عمودی

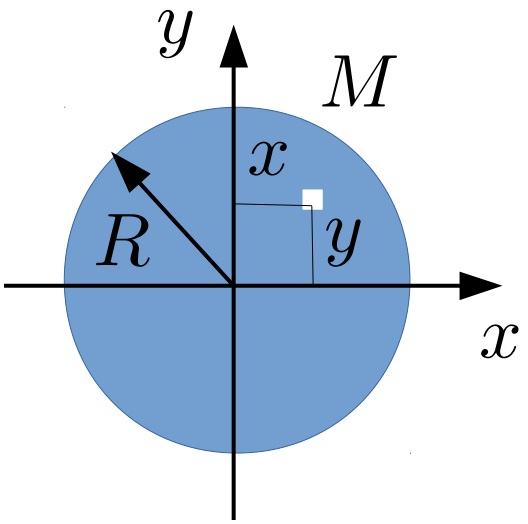
$$\mathbb{I}_z = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi R}\int R^2 \mathrm{d}l$$

$$\mathbb{I}_z = \frac{M}{2\pi R}\int R^2 \mathrm{d}l = MR^2$$

$$\mathbb{I}_z = \mathbb{I}_y + \mathbb{I}_x$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



قضیه محورهای عمودی

$$\mathbb{I}_x = \int y^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{\pi R^2} \int y^2 \mathrm{d}S$$

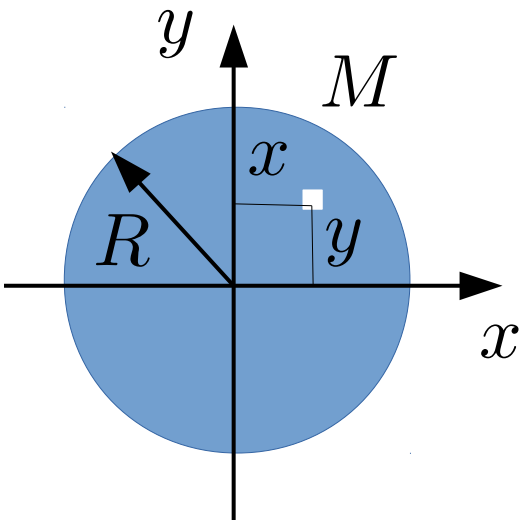
$$= \frac{M}{\pi R^2} \int r^2 \sin^2\theta r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \left(\int_0^R r^3 \mathrm{d}r \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta \right) = \frac{1}{4} M R^2$$

$$\mathbb{I}_x = \frac{1}{4} M R^2 \quad \xrightarrow{\text{انتظار داریم}} \quad \mathbb{I}_x = \mathbb{I}_y = \frac{1}{4} M R^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



قضیه محورهای عمودی

$$\mathbb{I}_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{\pi R^2} \int x^2 \mathrm{d}S$$

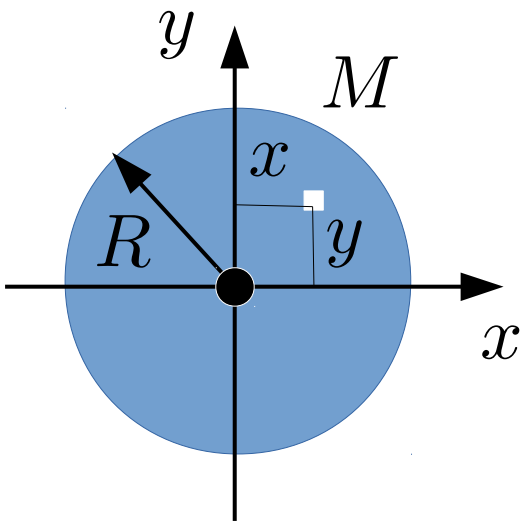
$$= \frac{M}{\pi R^2} \int r^2 \cos^2\theta r \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \left(\int_0^R r^3 \mathrm{d}r \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta \right) = \frac{1}{4} M R^2$$

$$\mathbb{I}_y = \frac{1}{4} M R^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$x^2 + y^2 = r^2$$

قضیه محورهای عمودی

$$\mathbb{I}_z = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi R^2}\int r^2 \mathrm{d}S$$

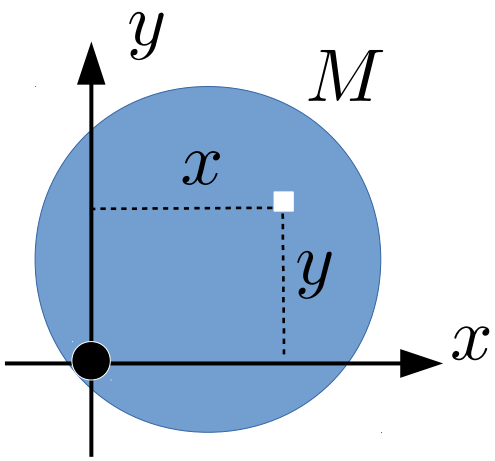
$$= \frac{M}{\pi R^2}\left(\int_0^R r^3 \mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\right) = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\mathbb{I}_z = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\mathbb{I}_z = \mathbb{I}_y + \mathbb{I}_x$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$x^2 + y^2 = r^2$$

قضیه محورهای عمودی

$$\mathbb{I}_z = \int r^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathbb{I}_z = \int (x^2 + y^2) \mathrm{d}m$$

$$\mathbb{I}_z = \int x^2 \mathrm{d}m + \int y^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathbb{I}_y = \int x^2 \mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_x = \int y^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathbb{I}_z = \mathbb{I}_y + \mathbb{I}_x$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم