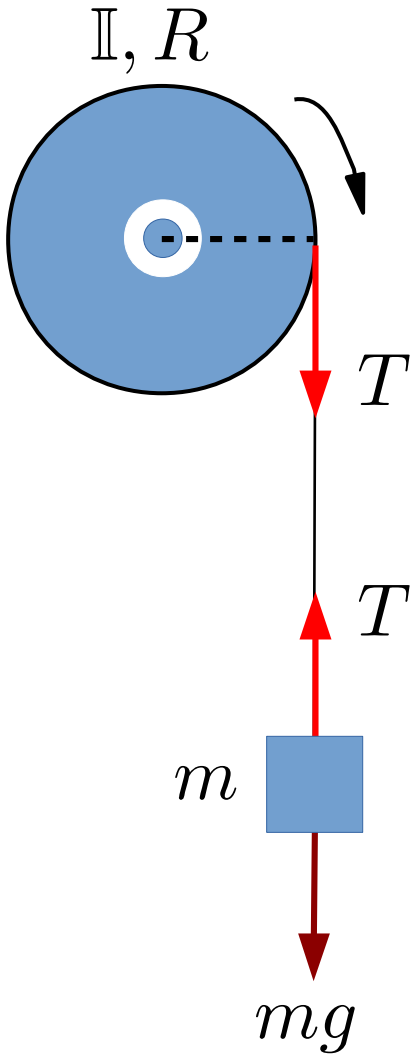
جلسه هشتم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$M: \quad \sum \tau = \mathbb{I}\alpha \Rightarrow TR = \mathbb{I}\alpha$$

$$m: \quad \sum F = ma \Rightarrow mg - T = ma$$

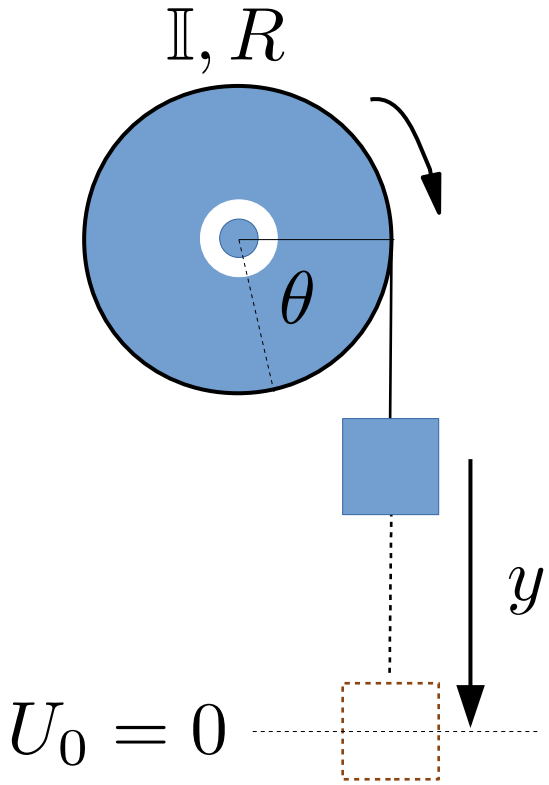
$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} T = \frac{\mathbb{I}}{R^2} a \\ mg - T = ma \end{cases} \Rightarrow a = \frac{m}{m + \frac{\mathbb{I}}{R^2}} g$$

$$a = \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{I}}{mR^2}} g \Rightarrow T = \frac{mg}{1 + \frac{mR^2}{\mathbb{I}}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$E_1 = mgy$$

$$E_2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2$$

$$y = R\theta, \quad \dot{y} = R\dot{\theta}$$

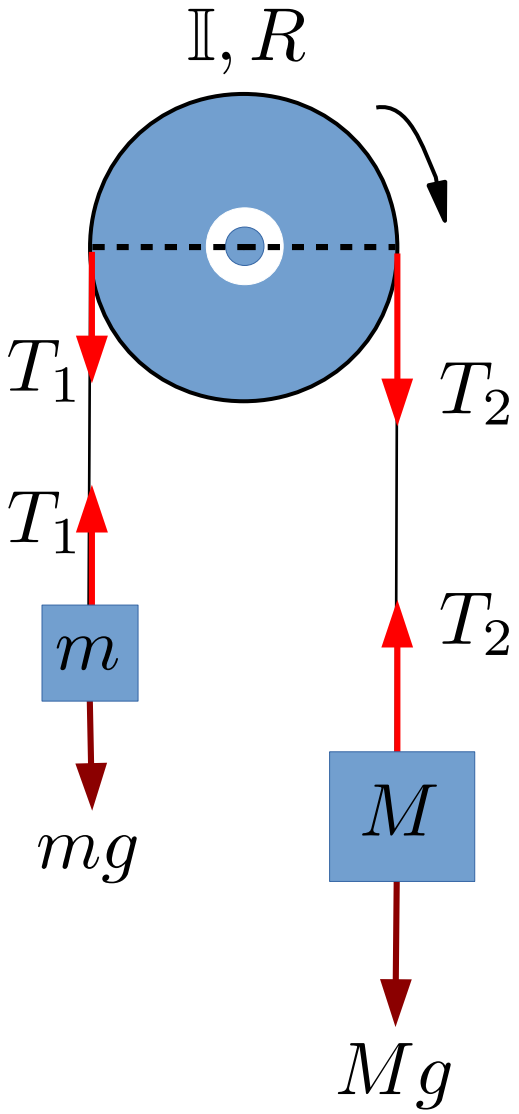
$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{I}}{R^2}\dot{y}^2 = mgy \Rightarrow \dot{y} = \sqrt{\frac{2mgy}{m + \frac{\mathbb{I}}{R^2}}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\left(m + \frac{\mathbb{I}}{R^2}\right)\dot{y}^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}mgy$$

$$\left(m + \frac{\mathbb{I}}{R^2}\right)\dot{y}\ddot{y} = mg\dot{y} \Rightarrow a = \ddot{y} = \frac{m}{m + \frac{\mathbb{I}}{R^2}}g$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$m: \quad \sum F = ma \Rightarrow T_1 - mg = ma$$

قرقره: $$\sum \tau = \mathbb{I}\alpha \Rightarrow (T_2 - T_1)R = \mathbb{I}\alpha$$

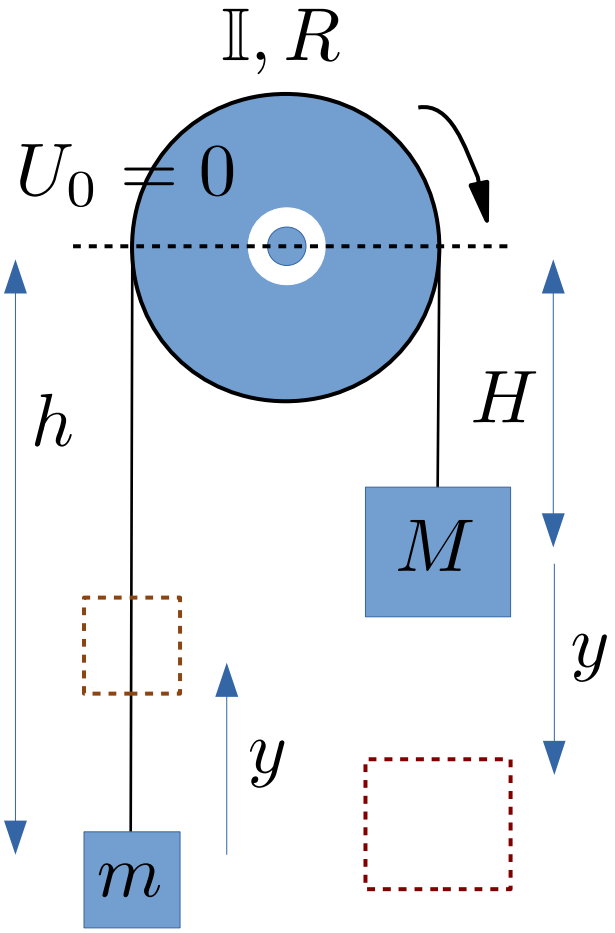
$$M: \quad \sum F = ma \Rightarrow Mg - T_2 = Ma$$

$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} T_1 - mg = ma \\ T_2 - T_1 = \frac{\mathbb{I}}{R^2}a \\ Mg - T_2 = Ma \end{cases} \Rightarrow a = \left(\frac{M-m}{M+m+\frac{\mathbb{I}}{R^2}}\right)g$$

$$\vdots$$

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$y = R\theta, \quad \dot{y} = R\dot{\theta}$$

$$E_1 = -mgh - MgH$$

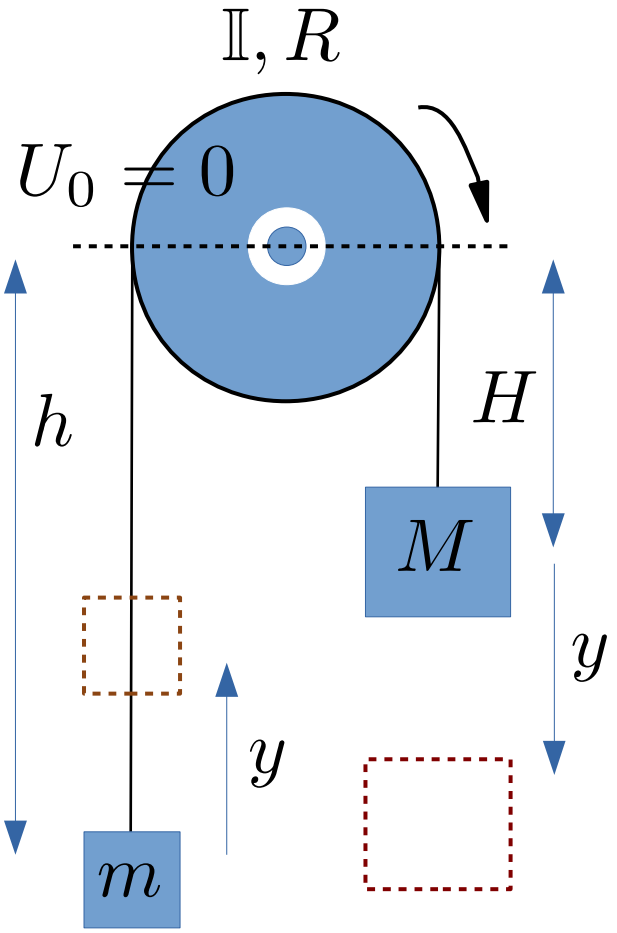
$$E_2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2$$
$$-mg(h-y) - Mg(H+y)$$

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{I}}{R^2}\dot{y}^2 = (M-m)gy$$

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{2(M-m)g}{m+M+\frac{\mathbb{I}}{R^2}}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$y = R\theta, \quad \dot{y} = R\dot{\theta}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathbb{I}}{R^2}\dot{y}^2 = (M-m)gy$$

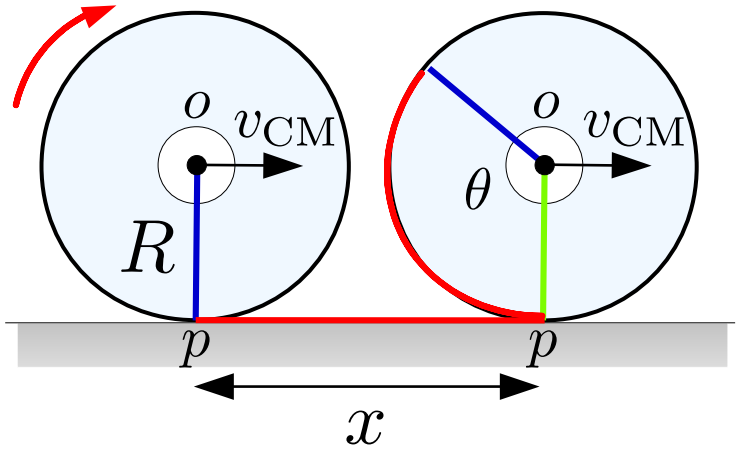
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\left(m + M + \frac{\mathbb{I}}{R^2}\right)\dot{y}^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(M-m)gy$$

$$\left(m + M + \frac{\mathbb{I}}{R^2}\right)\dot{y}\ddot{y} = (M-m)g\dot{y}$$

$$a = \ddot{y} = \frac{(M-m)g}{\left(m + M + \frac{\mathbb{I}}{R^2}\right)}$$

حرکت اجسام صلب در صفحه

غلتش



$$x = R\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R\theta$$

$$v_{\mathrm{CM}} = R\dot{\theta} = R\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R\omega$$

$$a_{\mathrm{CM}} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha$$

قرار داد:

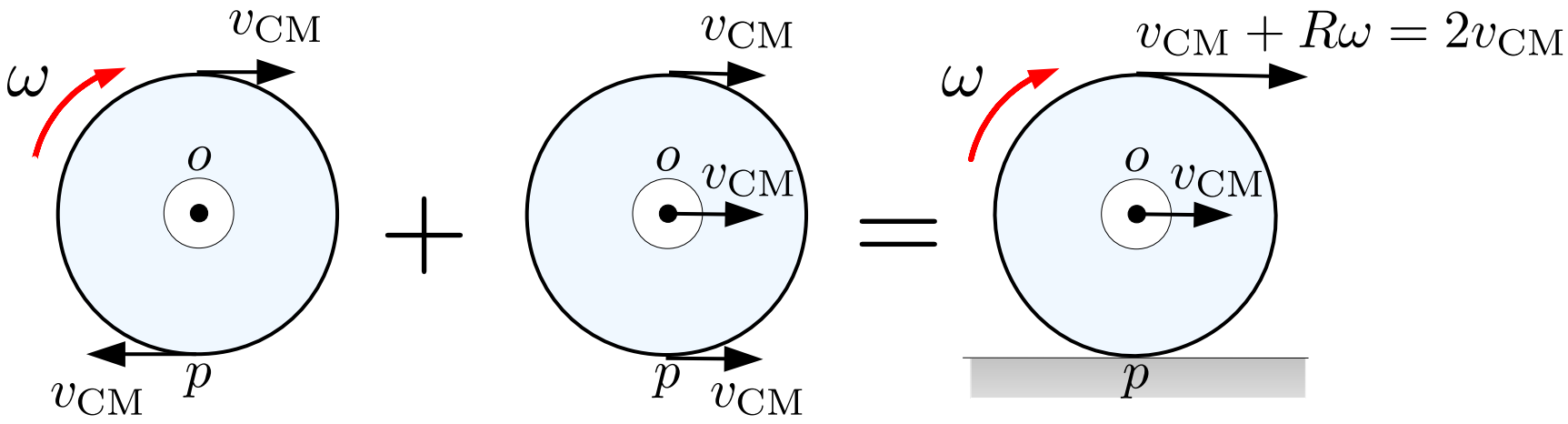
$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

غلتش

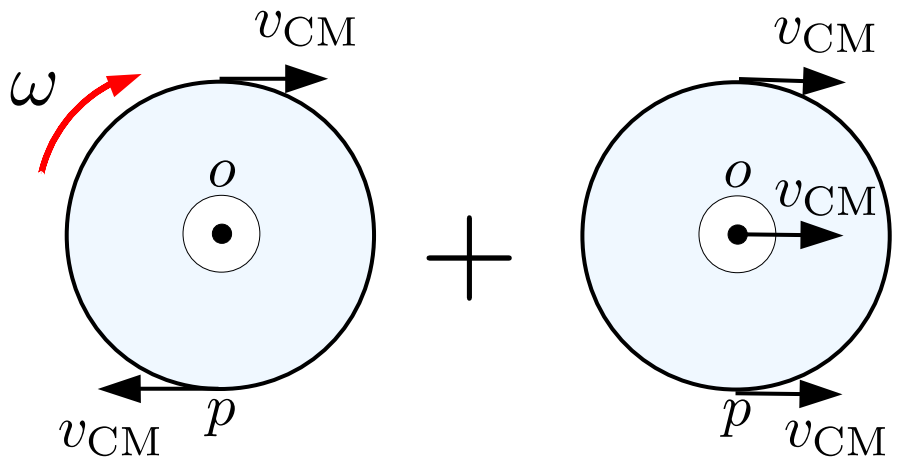


فقط دوران حول o | فقط انتقال | انتقال و دوران

$\mathbb{I}_o$ | | $\mathbb{I}_p = \mathbb{I}_o + MR^2$

حرکت اجسام صلب در صفحه

غلتش



فقط دوران حول o فقط انتقال

$$\frac{1}{2}\mathbb{I}_o\omega^2+\frac{1}{2}Mv_{\rm CM}^2$$

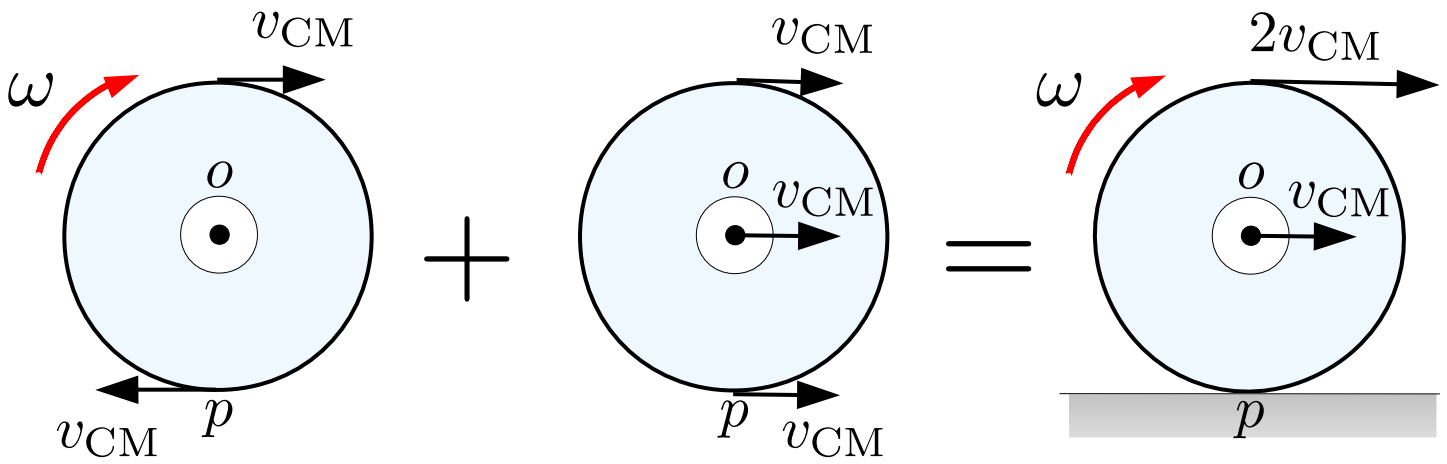
$v_{\rm CM}=R\omega$

$$\frac{1}{2}\mathbb{I}_o\omega^2+\frac{1}{2}MR^2\omega^2=\frac{1}{2}(\mathbb{I}_o+MR^2)\omega^2$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

غلتش



فقط دوران حول o | فقط انتقال | انتقال و دوران

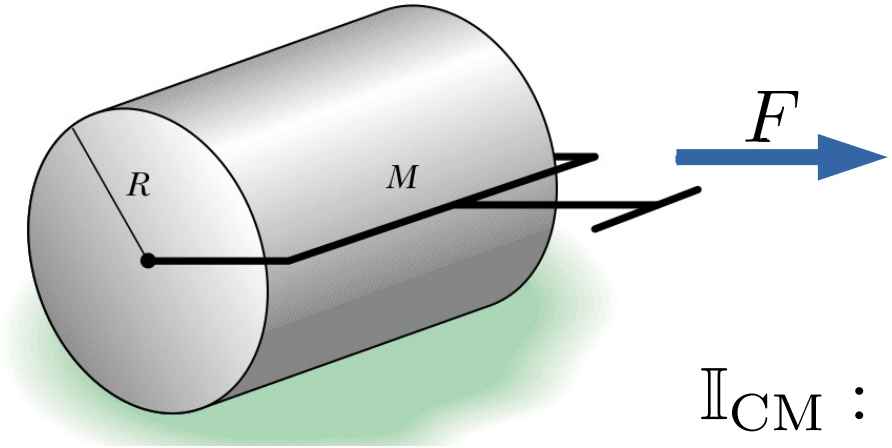
$$\frac{1}{2}\mathbb{I}_o\omega^2+\frac{1}{2}Mv_{\rm CM}^2=\frac{1}{2}\mathbb{I}_o\omega^2+\frac{1}{2}MR^2\omega^2=\frac{1}{2}(\mathbb{I}_o+MR^2)\omega^2$$

$$\mathbb{I}_p=\mathbb{I}_o+MR^2$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{I}_o\omega^2+\frac{1}{2}MR^2\omega^2=\frac{1}{2}\mathbb{I}_p\omega^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

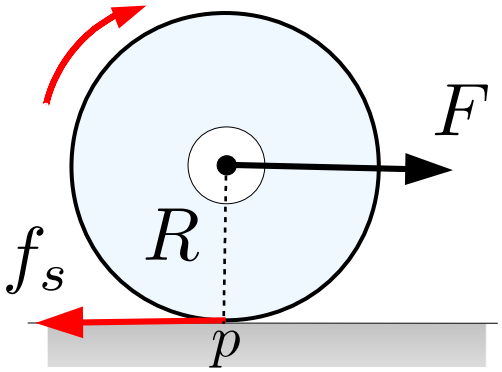
حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\sum F_x = Ma \Rightarrow F - f_s = Ma$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - Mg = 0$$

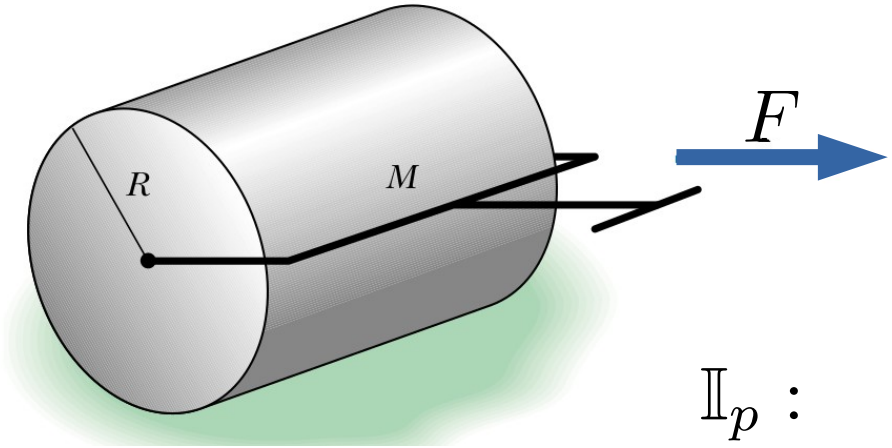
$$\mathbb{I}_{\mathrm{CM}}: \quad \sum \tau = \mathbb{I}_{\mathrm{CM}}\alpha$$



$$f_s R = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} \Rightarrow f_s = \frac{1}{2}Ma$$

$$\begin{cases} F - f_s = Ma \\ f_s = \frac{1}{2}Ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2F}{3M} \\ f_s = \frac{F}{3} \end{cases}$$

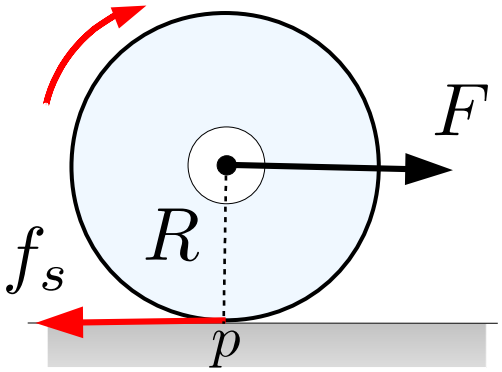
حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\sum F_x = Ma \Rightarrow F - f_s = Ma$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - Mg = 0$$

$$\mathbb{I}_p : \quad \sum \tau = \mathbb{I}_p \alpha$$

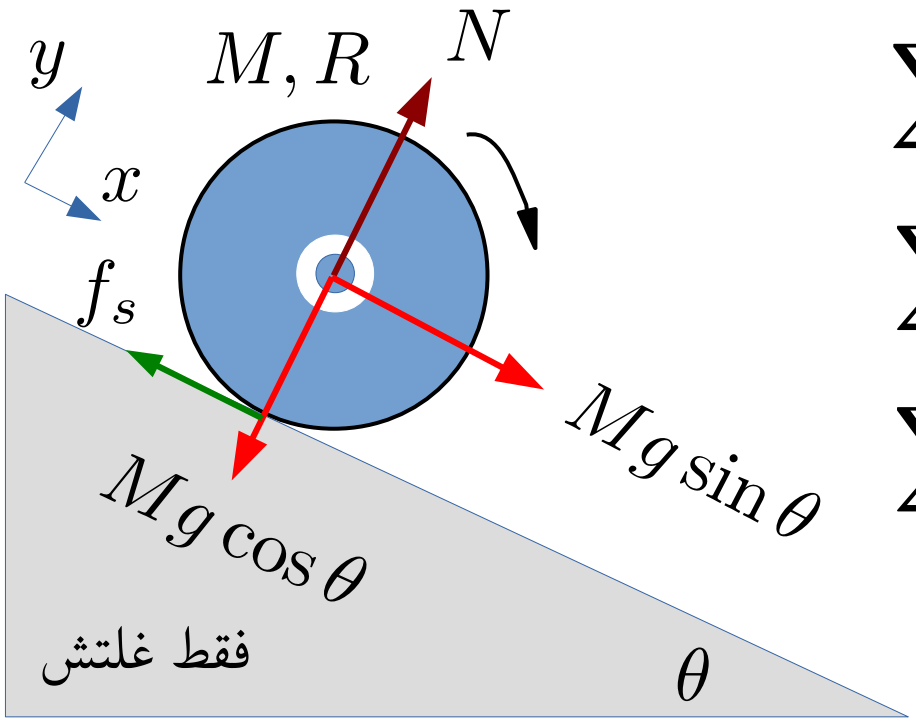


$$FR = \frac{3}{2} MR^2 \frac{a}{R} \Rightarrow F = \frac{3}{2} Ma$$

$$\begin{cases} F - f_s = Ma \\ F = \frac{3}{2} Ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2F}{3M} \\ f_s = \frac{F}{3} \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\sum \tau = \mathbb{I}_{\rm CM}\alpha \Rightarrow f_s R = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow Mg\sin\theta - f_s = Ma$$

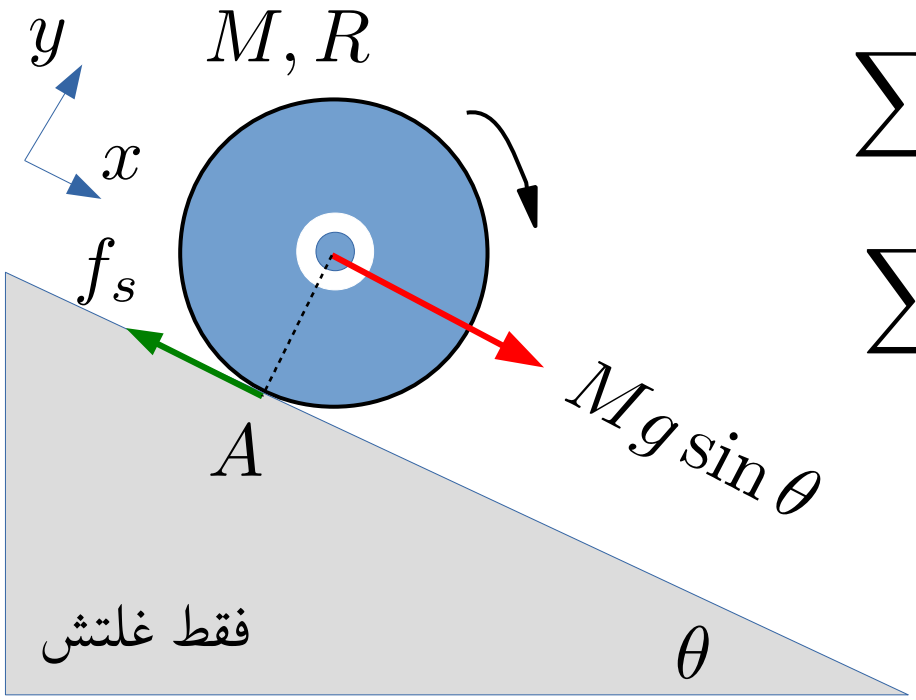
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - Mg\cos\theta = 0$$

$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} f_s = \frac{1}{2}Ma \\ Mg\sin\theta - f_s = Ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}g\sin\theta \\ f_s = \frac{1}{3}Mg\sin\theta \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\sum \tau = \mathbb{I}_A \alpha \Rightarrow Mg\sin\theta R = \frac{3}{2}MR^2\alpha$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow Mg\sin\theta - f_s = Ma$$

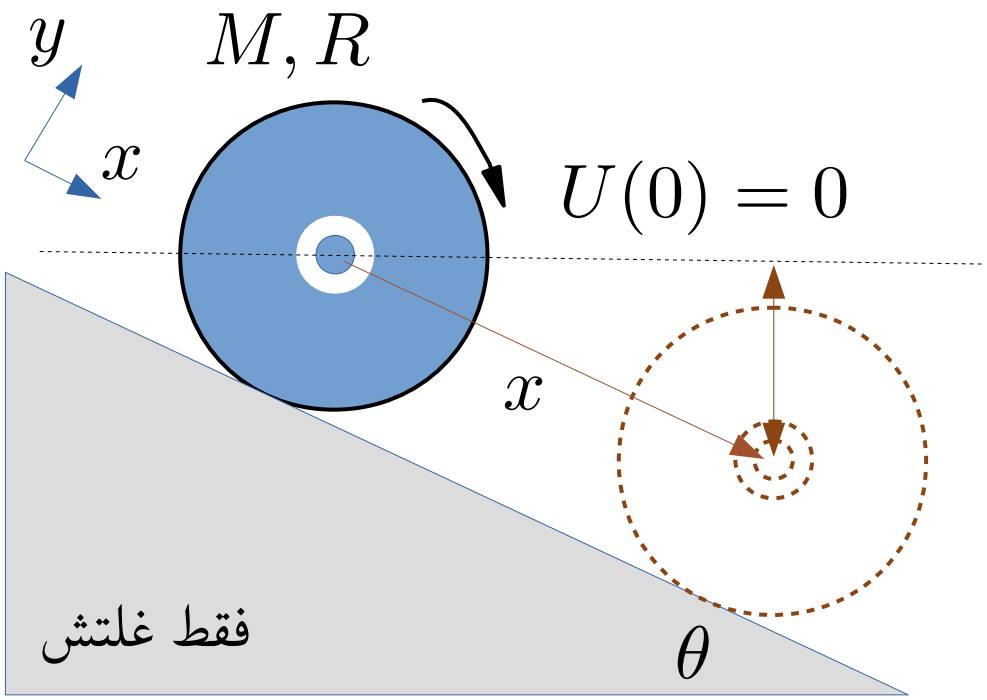
$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3}g\sin\theta \\ f_s = \frac{1}{3}Mg\sin\theta \end{cases}$$

$$f_s \le \mu_s N \Rightarrow \frac{1}{3}Mg\sin\theta \le \mu_s Mg\cos\theta \Rightarrow \mu_s \ge \frac{1}{3}\tan\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\boxed{x = R\theta, \quad \dot{x} = R\dot{\theta}}$$

$$E_1 = 0$$

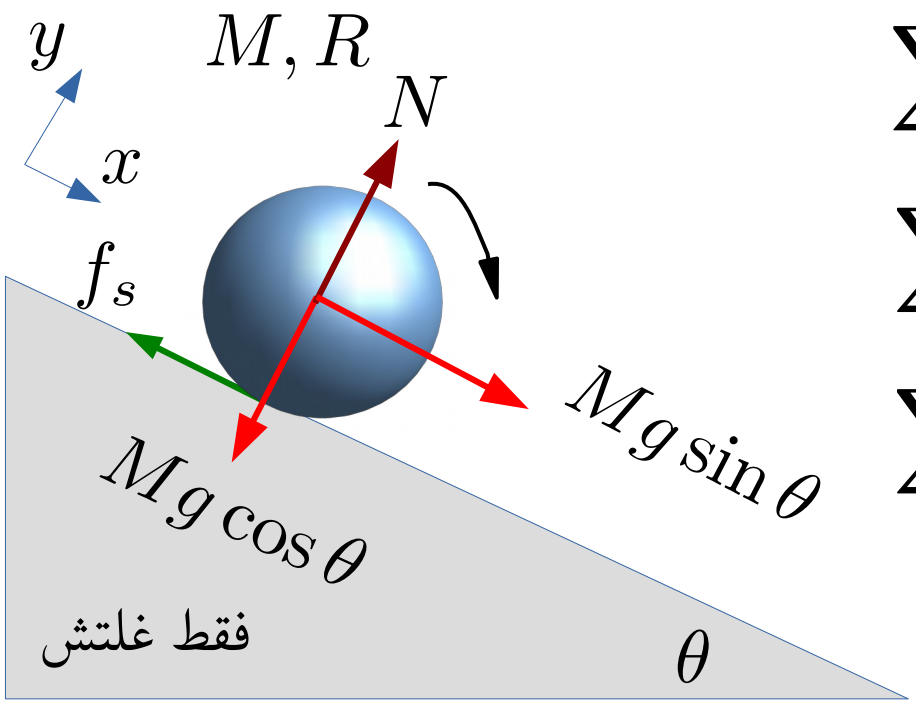
$$E_2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 - Mgx\sin\theta$$

$$\dot{x}^2 = \frac{4}{3}gx\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{4}{3}gx\sin\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x}^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{4}{3}gx\sin\theta \Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\sum \tau = \mathbb{I}_{\mathrm{CM}}\alpha \Rightarrow f_s R = \frac{2}{5}MR^2\alpha$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow Mg\sin\theta - f_s = Ma$$

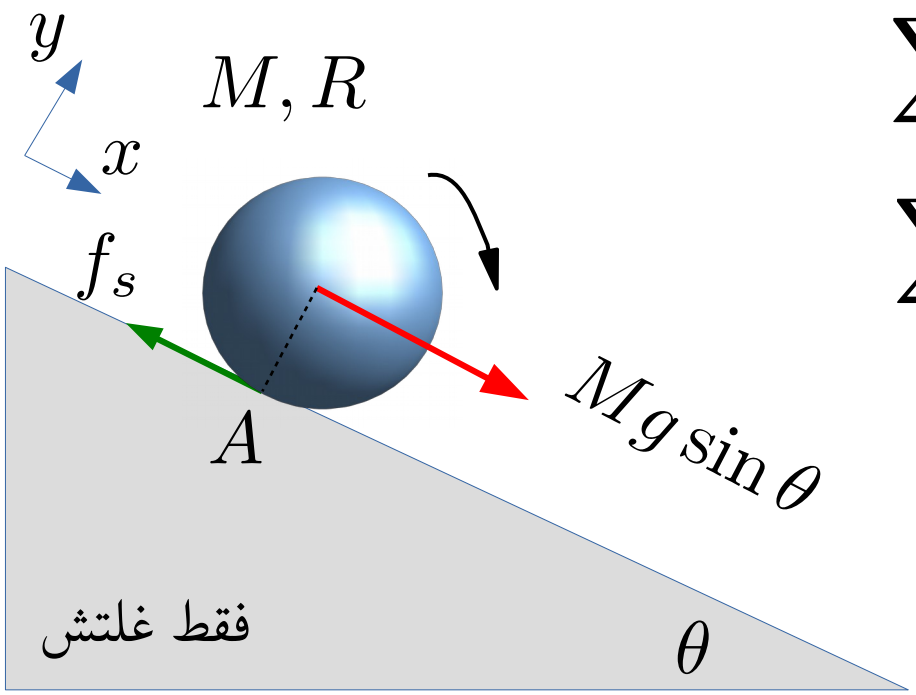
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - Mg\cos\theta = 0$$

$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} f_s = \frac{2}{5}Ma \\ Mg\sin\theta - f_s = Ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{7}g\sin\theta \\ f_s = \frac{2}{7}Mg\sin\theta \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\sum \tau = \mathbb{I}_{\mathrm{A}} \alpha \Rightarrow Mg \sin\theta R = \frac{7}{5} MR^2 \alpha$$

$$\sum F_x = ma \Rightarrow Mg \sin\theta - f_s = Ma$$

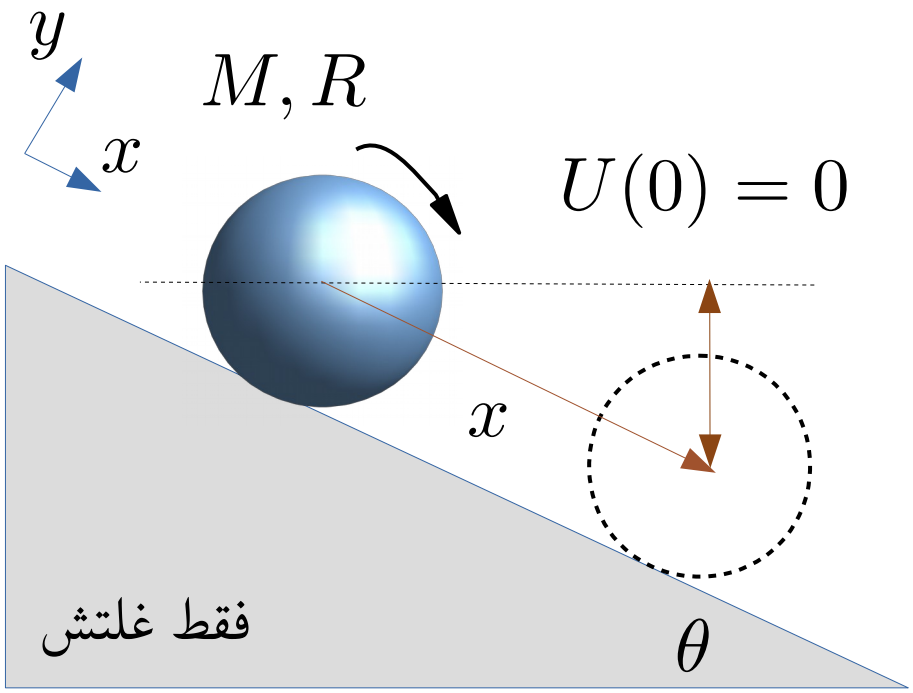
$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} a = \frac{5}{7} g \sin\theta \\ f_s = \frac{2}{7} Mg \sin\theta \end{cases}$$

$$f_s \leq \mu_s N \Rightarrow \frac{2}{7} Mg \sin\theta \leq \mu_s Mg \cos\theta \Rightarrow \mu_s \geq \frac{2}{7} \tan\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\boxed{x = R\theta, \quad \dot{x} = R\dot{\theta}}$$

$$E_1 = 0$$

$$E_2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\dot{\theta}^2 - Mgx\sin\theta$$

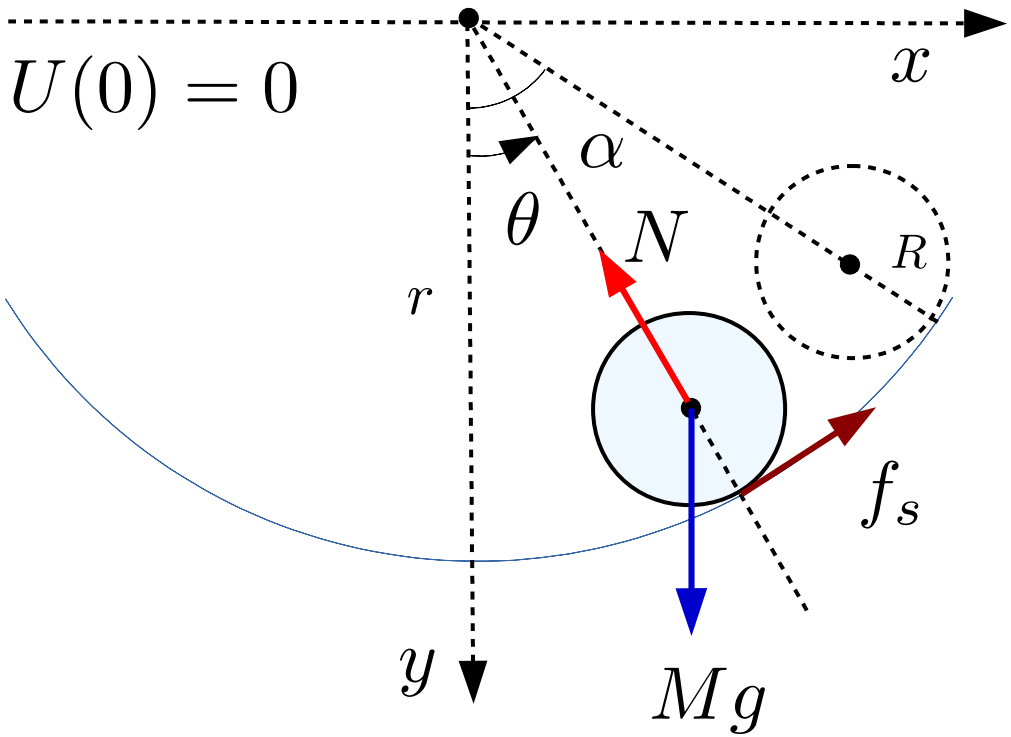
$$\dot{x}^2 = \frac{10}{7}gx\sin\theta \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{\frac{10}{7}gx\sin\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x}^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{10}{7}gx\sin\theta \Rightarrow \ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

$$\begin{cases} x = (r-R)\sin\theta \\ y = (r-R)\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r} = (r-R)(\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{i}) \\ \vec{r} = (r-R)\hat{r} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \vec{v} = (r-R)\dot{\theta}\hat{\theta} \\ \hat{\theta} = \cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{a} = (r-R)\ddot{\theta}\hat{\theta} - (r-R)\dot{\theta}^2\hat{r}$$

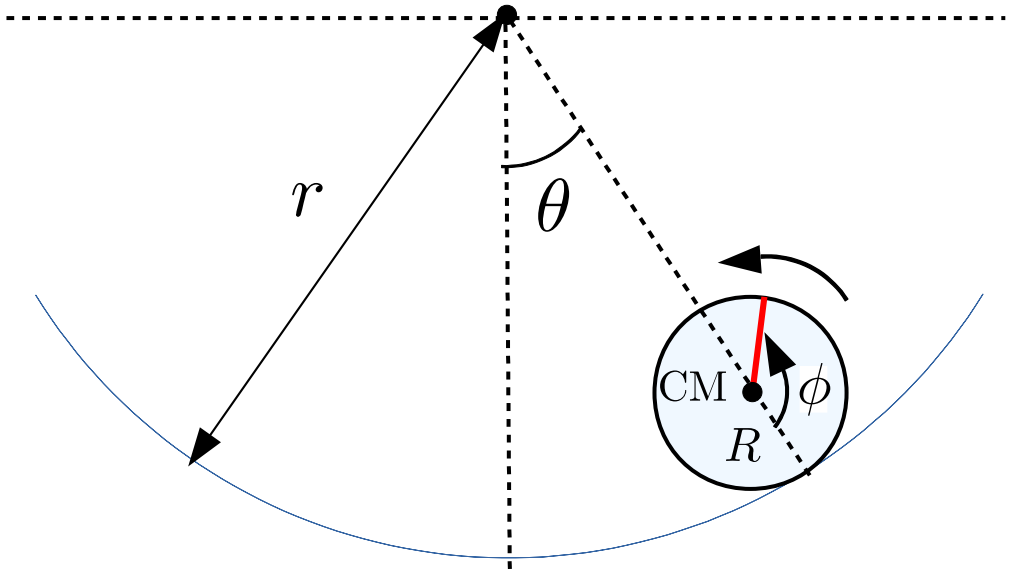
$$N - Mg\cos\theta = M(r-R)\dot{\theta}^2$$

$$f_s - Mg\sin\theta = M(r-R)\ddot{\theta}$$

حرکت اجسام صلب در صفحه

$$E_0 = -Mg(r-R)\cos\alpha \qquad E = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\rm CM}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(M(r-R)^2)\dot{\theta}^2$$

$$U(0) = 0 \qquad -Mg(r-R)\cos\theta$$



$$E_0 = E$$

$$(r-R)\theta = R\phi$$

$$\frac{1}{2}\mathbb{I}_{\rm CM}\frac{(r-R)^2}{R^2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(M(r-R)^2)\dot{\theta}^2 - Mg(r-R)\cos\theta$$

$$(r-R)\dot{\theta} = R\dot{\phi}$$

$$= -Mg(r-R)\cos\alpha$$

حرکت اجسام صلب در صفحه

$$\frac{1}{2}M\left[\frac{\mathbb{I}_{\rm CM}}{MR^2}+1\right](r-R)^2\dot{\theta}^2-Mg(r-R)(\cos\theta-\cos\alpha)=0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[\frac{\mathbb{I}_{\rm CM}}{MR^2}+1\right](r-R)\dot{\theta}^2-g(\cos\theta-\cos\alpha)=0}$$

$$N-Mg\cos\theta=M(r-R)\dot{\theta}^2$$

$$N-Mg\cos\theta=\frac{2Mg(\cos\theta-\cos\alpha)}{\left[\frac{\mathbb{I}_{\rm CM}}{MR^2}+1\right]}$$

$$N=Mg\cos\theta+\frac{2Mg(\cos\theta-\cos\alpha)}{\left[\frac{\mathbb{I}_{\rm CM}}{MR^2}+1\right]}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

$$\boxed{\frac{1}{2}\left[\frac{\mathbb{I}_{\text{CM}}}{MR^2}+1\right](r-R)\dot{\theta}^2-g(\cos\theta-\cos\alpha)=0}$$

$$f_s-Mg\sin\theta=M(r-R)\ddot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{\mathbb{I}_{\text{CM}}}{MR^2}+1\right](r-R)\dot{\theta}^2-g(\cos\theta-\cos\alpha)\right)=0$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathbb{I}_{\text{CM}}}{MR^2}+1\right](r-R)2\dot{\theta}\ddot{\theta}+g\sin\theta\dot{\theta}=0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

$$f_s - Mg\sin\theta = M(r-R)\ddot{\theta}$$

$$\dot{\theta}\left(\left[\frac{\mathbb{I}_{\rm CM}}{MR^2}+1\right](r-R)\ddot{\theta}+g\sin\theta\right)=0$$

$$\boxed{\left[\frac{\mathbb{I}_{\rm CM}}{MR^2}+1\right](r-R)\ddot{\theta}+g\sin\theta=0}$$

$$f_s = Mg\sin\theta - \frac{Mg\sin\theta}{\left[\frac{\mathbb{I}_{\rm CM}}{MR^2}+1\right]} = \left(\frac{\mathbb{I}_{\rm CM}}{\mathbb{I}_{\rm CM}+MR^2}\right)Mg\sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه

$$\left[\frac{\mathbb{I}_{\text{CM}}}{MR^2}+1\right](r-R)\ddot{\theta}+g\sin\theta=0$$

$$\sin\theta\approx\theta \longrightarrow \left[\frac{\mathbb{I}_{\text{CM}}}{MR^2}+1\right](r-R)\ddot{\theta}+g\theta=0$$

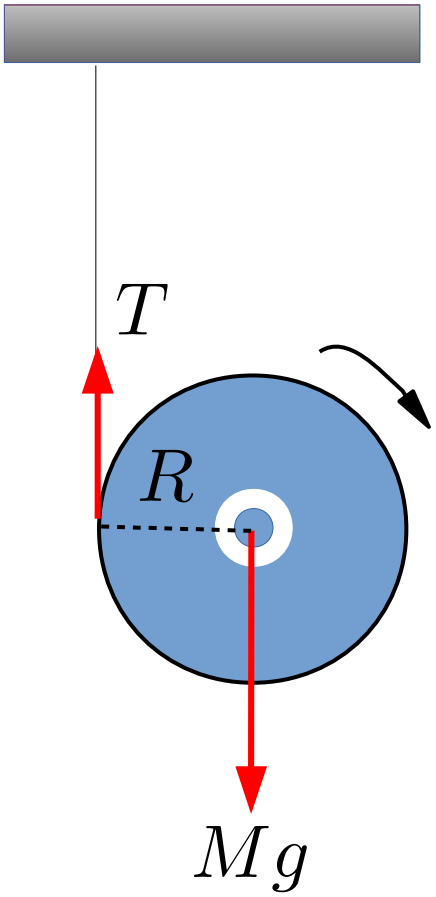
$$\ddot{\theta}+\frac{MR^2}{\mathbb{I}_{\text{CM}}+MR^2}\frac{g}{r-R}\theta=0,$$

$$\ddot{\theta}+\omega^2\theta=0,$$

$$\omega=\sqrt{\frac{MR^2}{\mathbb{I}_{\text{CM}}+MR^2}\frac{g}{r-R}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\sum \tau = \mathbb{I}\alpha \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

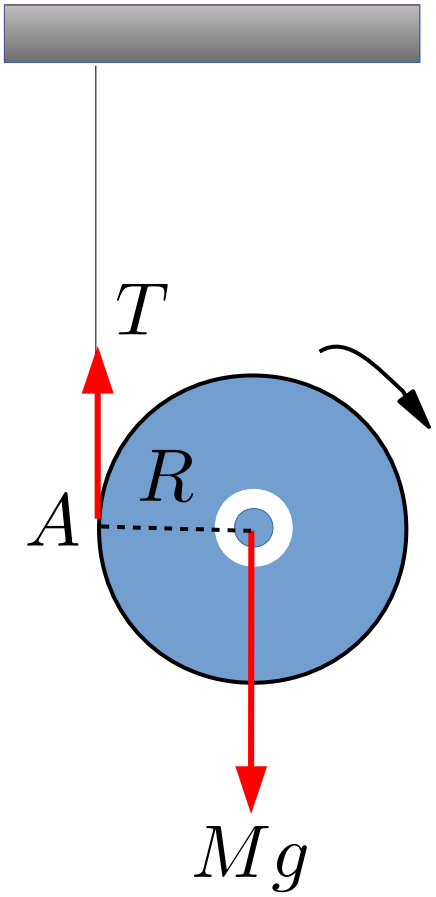
$$\sum F = ma \Rightarrow Mg - T = Ma$$

$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}Ma \\ Mg - T = Ma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}g \\ T = \frac{1}{3}Mg \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\sum \tau = \mathbb{I}_A \alpha \Rightarrow MgR = \frac{3}{2} MR^2 \alpha$$

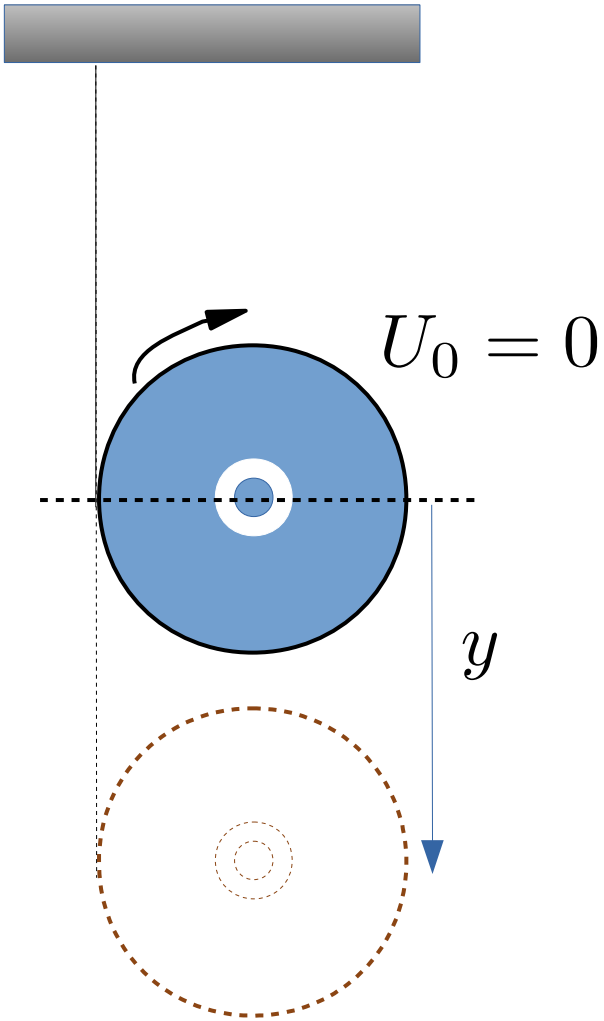
$$\sum F = ma \Rightarrow Mg - T = Ma$$

$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} a = \frac{2}{3} g \\ T = \frac{1}{3} Mg \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در صفحه



$$\boxed{y = R\theta, \quad \dot{y} = R\dot{\theta}}$$

$$E_1 = 0$$

$$E_2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 - Mgy$$

$$\frac{3}{4}\dot{y}^2 - gy = 0 \Rightarrow \dot{y} = \sqrt{\frac{4}{3}gy}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{3}{4}\dot{y}^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}gy \Rightarrow \ddot{y} = \frac{2}{3}g$$