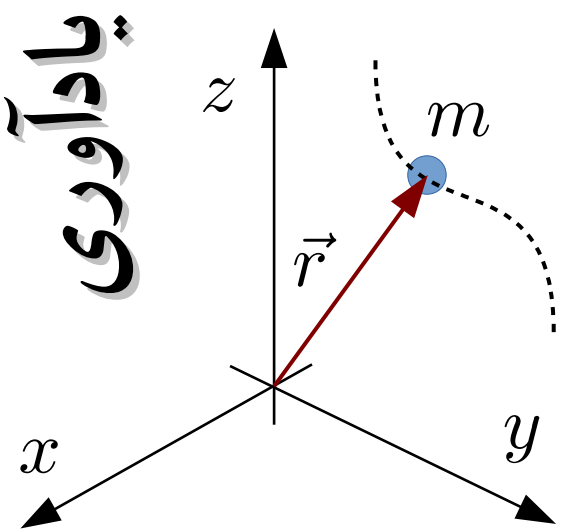
جلسه دهم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

مکانیک لاگرانژی



$$m:\ (x,y,z)$$

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)$$

$$F_x=m\ddot{x},\quad F_y=m\ddot{y},\quad F_z=m\ddot{z}$$

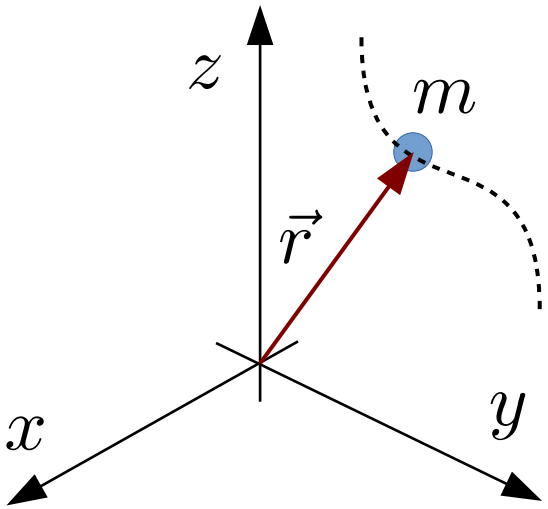
$$\mathrm{d}W=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\times\vec{F}=0\\ \oint\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0\end{cases}\Rightarrow\ V=V(x,y,z)\Rightarrow\ \vec{F}=-\vec{\nabla}V\Rightarrow\begin{cases}F_x=-\partial_xV\\ F_y=-\partial_yV\\ F_z=-\partial_zV\end{cases}$$

محمدرضا مظفری — گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مختصات تعمیم یافته

مکانیک لاگرانژی



$m : (x, y, z)$ سه درجه آزادی

مختصات کروی: (r, θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \phi)$

سه درجه آزادی سه درجه آزادی

$$x = x(r, \theta, \phi) \quad y = y(r, \theta, \phi) \quad z = z(r, \theta)$$

اگر $\mathbf{q} = (r, \theta, \phi) = (q_1, q_2, q_3)$

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات کروی: (r, θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

$$\mathrm{d}x = \sum_k^3 \frac{\partial x}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}y = \sum_k^3 \frac{\partial y}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}z = \sum_k^3 \frac{\partial z}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\phi\sin\theta\mathrm{d}r + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - r\sin\phi\sin\theta\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}y = \sin\phi\sin\theta\mathrm{d}r + r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + r\cos\phi\sin\theta\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}z = \cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات کروی: (r,θ,ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

$$\mathrm{d}x = \sum_k^3 \frac{\partial x}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}y = \sum_k^3 \frac{\partial y}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}z = \sum_k^3 \frac{\partial z}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k$$

$$\mathrm{d}W = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}W = \sum_k \left(F_x\frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_k} \right)\mathrm{d}q_k = \sum_k Q_k\mathrm{d}q_k$$

تعریف نیروی تعمیم یافته

$$\boxed{Q_k = F_x\frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_k}}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

مختصات کروی: (r, θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

نیروی تعمیم یافته : $$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

اگر q_k یک مختصه‌ی تعمیم‌یافته **طولی** باشد $\Rightarrow$ $[Q_k] =$ **نیرو**

اگر q_k یک مختصه‌ی تعمیم‌یافته **زاویه‌ای** باشد $\Rightarrow$ $[Q_k] =$ **گشتاور نیرو**

مکانیک لاگرانژی

مختصات کروی: (r, θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

نیروی تعمیم یافته : $$Q_k = F_x \frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

اگر $$\vec{F} = -\vec{\nabla} V, \quad F_x = -\partial_x V, \quad F_y = -\partial_y V, \quad F_z = -\partial_z V$$

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_k}$$

نیروی تعمیم یافته برای نیروهای پایستار : $$\boxed{Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}}$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات کروی: (r, θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} + F_z \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}W = Q_r \mathrm{d}r + Q_\theta \mathrm{d}\theta + Q_\phi \mathrm{d}\phi$$

$$Q_\phi = F_x \frac{\partial x}{\partial \phi} + F_y \frac{\partial y}{\partial \phi} + F_z \frac{\partial z}{\partial \phi}$$

$$\begin{cases} Q_r = F_x \cos\phi \sin\theta + F_y \sin\phi \sin\theta + F_z \cos\theta \\ Q_\theta = r(F_x \cos\phi \cos\theta + F_y \sin\phi \cos\theta - F_z \sin\theta) \\ Q_\phi = r \sin\theta(-F_x \sin\phi + F_y \cos\phi) \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات کروی: (r,θ,ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$x=x(\mathbf{q}),\qquad y=y(\mathbf{q}),\qquad z=z(\mathbf{q})$$

$$\mathrm{d}x=\sum_k^3\frac{\partial x}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k,\qquad \mathrm{d}y=\sum_k^3\frac{\partial y}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k,\qquad \mathrm{d}z=\sum_k^3\frac{\partial z}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sum_k^3\frac{\partial x}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sum_k^3\frac{\partial y}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t},\qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\sum_k^3\frac{\partial z}{\partial q_k}\frac{\mathrm{d}q_k}{\mathrm{d}t}$$

$$\dot{x}=\sum_k^3\frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k,\qquad \dot{y}=\sum_k^3\frac{\partial y}{\partial q_k}\dot{q}_k,\qquad \dot{z}=\sum_k^3\frac{\partial z}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات کروی: (r, θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

$$\dot{x} = \sum_k^3 \frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{y} = \sum_k^3 \frac{\partial y}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{z} = \sum_k^3 \frac{\partial z}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\dot{x} = \dot{x}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \qquad \dot{y} = \dot{y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \qquad \dot{z} = \dot{z}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\phi\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta - r\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\phi\sin\theta + r\dot{\theta}\sin\phi\cos\theta + r\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta \\ \dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ سرعت‌های تعمیم یافته

مکانیک لاگرانژی

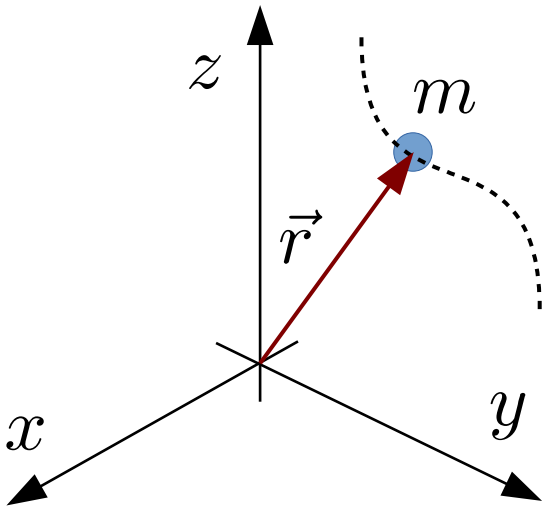
مختصات کروی: (r, θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ سرعت‌های تعمیم یافته

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\phi\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta - r\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\phi\sin\theta + r\dot{\theta}\sin\phi\cos\theta + r\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta \\ \dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

مکانیک لاگرانژی



$m : (x, y, z)$ سه درجه آزادی

مختصات پوسته کروی: (θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$\begin{cases} x = R\cos\phi\sin\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

$(x, y, z) \longrightarrow (\theta, \phi)$

سه درجه آزادی **دو درجه آزادی**

$$x = x(\theta, \phi) \qquad y = y(\theta, \phi) \qquad z = z(\theta)$$

اگر $\mathbf{q} = (\theta, \phi) = (q_1, q_2)$

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

مختصات پوسته کروی: (θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

$$\mathrm{d}x = \sum_k^2 \frac{\partial x}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}y = \sum_k^2 \frac{\partial y}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}z = \sum_k^2 \frac{\partial z}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = R\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta - R\sin\phi\sin\theta\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}y = R\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta + R\cos\phi\sin\theta\mathrm{d}\phi \\ \mathrm{d}z = -R\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات پوسته کروی: (θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$Q_\phi = F_x \frac{\partial x}{\partial \phi} + F_y \frac{\partial y}{\partial \phi} + F_z \frac{\partial z}{\partial \phi}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}W = Q_\theta \mathrm{d}\theta + Q_\phi \mathrm{d}\phi$$

$$\begin{cases} Q_\theta = R(F_x \cos\phi \cos\theta + F_y \sin\phi \cos\theta - F_z \sin\theta) \\ Q_\phi = R \sin\theta(-F_x \sin\phi + F_y \cos\phi) \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات پوسته کروی: (θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$\dot{x} = \sum_{k}^{2} \frac{\partial x}{\partial q_k} \dot{q}_k, \qquad \dot{y} = \sum_{k}^{2} \frac{\partial y}{\partial q_k} \dot{q}_k, \qquad \dot{z} = \sum_{k}^{2} \frac{\partial z}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\begin{cases} \dot{x} = R\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta - R\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\sin\phi\cos\theta + R\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta \\ \dot{z} = -R\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$(\dot{\theta}, \dot{\phi})$ سرعت‌های تعمیم یافته

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

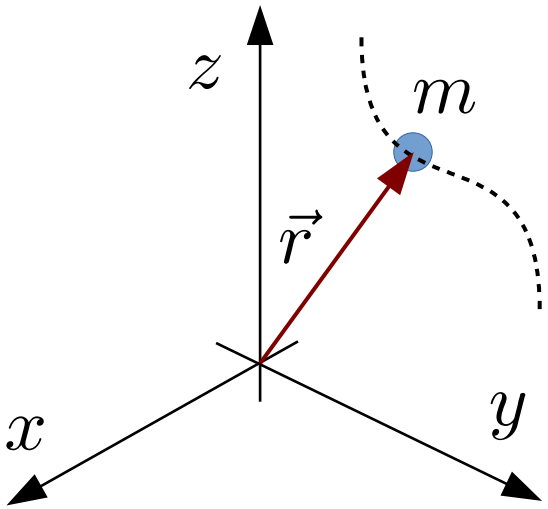
مختصات پوسته کروی: (θ, ϕ) مختصه‌های تعمیم یافته $(\dot{\theta}, \dot{\phi})$ سرعت‌های تعمیم یافته

$$\begin{cases} \dot{x} = R\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta - R\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\sin\phi\cos\theta + R\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta \\ \dot{z} = -R\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

مکانیک لاگرانژی



سه درجه آزادی $m : (x, y, z)$

مختصات استوانه‌ای: (r, θ, z) مختصه‌های تعمیم یافته

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, z)$

سه درجه آزادی سه درجه آزادی

$$x = x(r, \theta) \qquad y = y(r, \theta) \qquad z = z$$

اگر $\mathbf{q} = (r, \theta, z) = (q_1, q_2, q_3)$

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

مختصات استوانه‌ای: مختصه‌های تعمیم یافته (r, θ, z)

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

$$\mathrm{d}x = \sum_k^3 \frac{\partial x}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}y = \sum_k^3 \frac{\partial y}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}z = \sum_k^3 \frac{\partial z}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\theta \mathrm{d}r - r\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \sin\theta \mathrm{d}r + r\cos\theta \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

مختصات استوانه‌ای: (r, θ, z) مختصه‌های تعمیم یافته

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r} + F_z \frac{\partial z}{\partial r}$$

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \theta} \Rightarrow \mathrm{d}W = Q_r \mathrm{d}r + Q_\theta \mathrm{d}\theta + Q_z \mathrm{d}z$$

$$Q_z = F_x \frac{\partial x}{\partial z} + F_y \frac{\partial y}{\partial z} + F_z \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\begin{cases} Q_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta \\ Q_\theta = r(-F_x \sin\theta + F_y \cos\theta) \\ Q_z = F_z \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات استوانه‌ای: (r, θ, z) مختصه‌های تعمیم یافته

$$\dot{x} = \sum_k^3 \frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{y} = \sum_k^3 \frac{\partial y}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{z} = \sum_k^3 \frac{\partial z}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$ سرعت‌های تعمیم یافته

مکانیک لاگرانژی

مختصات استوانه‌ای: (r, θ, z) مختصه‌های تعمیم یافته $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$ سرعت‌های تعمیم یافته

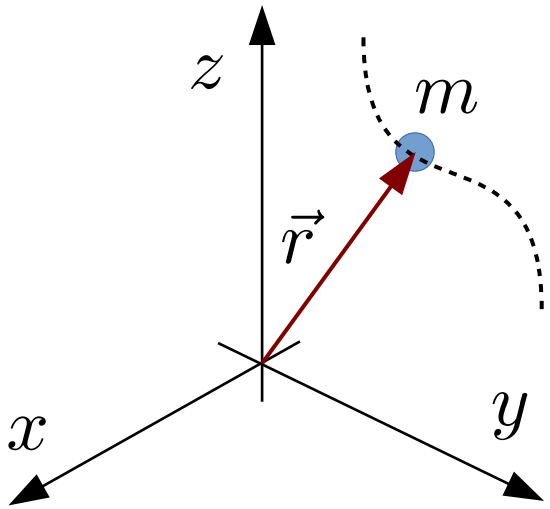
$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

مکانیک لاگرانژی

سه درجه آزادی $m : (x, y, z)$



مختصات سطح جانبی استوانه‌ای: مختصه‌های تعمیم یافته (θ, z)

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$(x, y, z) \longrightarrow (\theta, z)$$

دو درجه آزادی سه درجه آزادی

$$x = x(\theta) \qquad y = y(\theta) \qquad z = z$$

اگر $\mathbf{q} = (\theta, z) = (q_1, q_2)$

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات سطح جانبی استوانه‌ای: (θ, z) مختصه‌های تعمیم یافته

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q}), \qquad z = z(\mathbf{q})$$

$$\mathrm{d}x = \sum_k^2 \frac{\partial x}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}y = \sum_k^2 \frac{\partial y}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}z = \sum_k^2 \frac{\partial z}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = -R\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = R\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z = \mathrm{d}z \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات سطح جانبی استوانه‌ای: (θ, z) مختصه‌های تعمیم یافته

$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$Q_z = F_x \frac{\partial x}{\partial z} + F_y \frac{\partial y}{\partial z} + F_z \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}W = Q_\theta \mathrm{d}\theta + Q_z \mathrm{d}z$$

$$\begin{cases} Q_\theta = R(-F_x \sin\theta + F_y \cos\theta) \\ Q_z = F_z \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات سطح جانبی استوانه‌ای: (θ, z) مختصه‌های تعمیم یافته

$$\dot{x} = \sum_{k}^{2} \frac{\partial x}{\partial q_k} \dot{q}_k, \qquad \dot{y} = \sum_{k}^{2} \frac{\partial y}{\partial q_k} \dot{q}_k, \qquad \dot{z} = \sum_{k}^{2} \frac{\partial z}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$(\dot{\theta}, \dot{z})$ سرعت‌های تعمیم یافته

مکانیک لاگرانژی

مختصات سطح جانبی استوانه‌ای: (θ, z) مختصه‌های تعمیم یافته $(\dot{\theta}, \dot{z})$ سرعت‌های تعمیم یافته

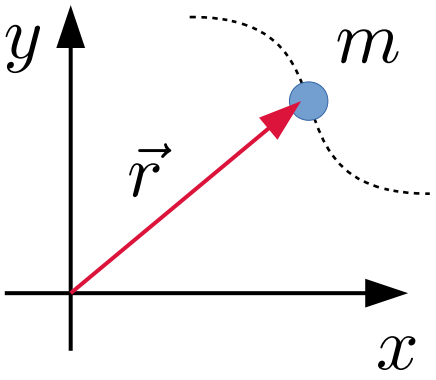
$$\begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$m : (x, y)$ دو درجه آزادی

مختصات قطبی: (r, θ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$(x, y) \longrightarrow (r, \theta)$

دو درجه آزادی دو درجه آزادی

$$x = x(r, \theta) \qquad y = y(r, \theta)$$

اگر $\mathbf{q} = (r, \theta) = (q_1, q_2)$

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q})$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

مختصات قطبی: (r,θ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$x = x(\mathbf{q}), \qquad y = y(\mathbf{q})$$

$$\mathrm{d}x = \sum_k^2 \frac{\partial x}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}y = \sum_k^2 \frac{\partial y}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k,$$

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\theta \mathrm{d}r - r\sin\theta \mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}y = \sin\theta \mathrm{d}r + r\cos\theta \mathrm{d}\theta \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات قطبی: (r, θ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$Q_r = F_x \frac{\partial x}{\partial r} + F_y \frac{\partial y}{\partial r}$$
$$Q_\theta = F_x \frac{\partial x}{\partial \theta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \theta}$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}W = Q_r \mathrm{d}r + Q_\theta \mathrm{d}\theta$$

$$\begin{cases} Q_r = F_x \cos\theta + F_y \sin\theta \\ Q_\theta = r(-F_x \sin\theta + F_y \cos\theta) \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات قطبی: (r, θ) مختصه‌های تعمیم یافته

$$\dot{x} = \sum_{k}^{2} \frac{\partial x}{\partial q_k} \dot{q}_k, \qquad \dot{y} = \sum_{k}^{2} \frac{\partial y}{\partial q_k} \dot{q}_k$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

$(\dot{r}, \dot{\theta})$ سرعت‌های تعمیم یافته

مکانیک لاگرانژی

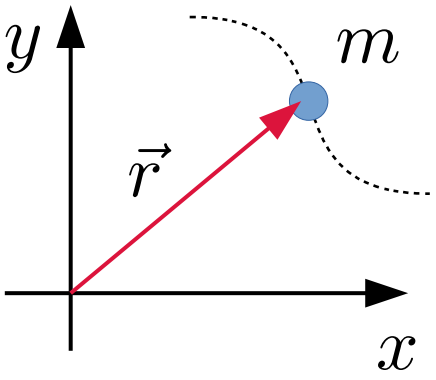
مختصات قطبی: (r, θ) مختصه‌های تعمیم یافته $(\dot{r}, \dot{\theta})$ سرعت‌های تعمیم یافته

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

مکانیک لاگرانژی



دو درجه آزادی $m : (x, y)$

مختصات دایره‌ای: θ مختصه تعمیم یافته

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

$$(x, y) \longrightarrow \theta$$

یک درجه آزادی دو درجه آزادی

$$x = x(\theta) \qquad y = y(\theta)$$

اگر $q = \theta$

$$x = x(q), \qquad y = y(q)$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات دایره‌ای: θ مختصه تعمیم یافته

$$x = x(q), \qquad y = y(q)$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta = -R\sin\theta\mathrm{d}\theta, \qquad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta = R\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$Q_\theta = F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \quad \Rightarrow \mathrm{d}W = Q_\theta\mathrm{d}\theta$$

$$Q_\theta = R(-F_x\sin\theta + F_y\cos\theta)$$

مکانیک لاگرانژی

مختصات دایره‌ای: θ مختصه تعمیم یافته $\dot{\theta}$ سرعت تعمیم یافته

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -R\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = R\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

$\dot{\theta}$ سرعت تعمیم یافته

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

مکانیک لاگرانژی

خلاصه بحث:

$$x = x(\mathbf{q}),\ y = y(\mathbf{q}),\ z = z(\mathbf{q})$$

$$\mathrm{d}x = \sum_k \frac{\partial x}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}y = \sum_k \frac{\partial y}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k, \qquad \mathrm{d}z = \sum_k \frac{\partial z}{\partial q_k}\mathrm{d}q_k$$

$$\mathrm{d}W = \sum_k Q_k \mathrm{d}q_k, \qquad \boxed{Q_k = F_x\frac{\partial x}{\partial q_k} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_k} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_k}}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_k} \Rightarrow \boxed{Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

خلاصه بحث:

$$\dot{x} = \sum_k \frac{\partial x}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{y} = \sum_k \frac{\partial y}{\partial q_k}\dot{q}_k, \qquad \dot{z} = \sum_k \frac{\partial z}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\dot{x} = \dot{x}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \;\; \dot{y} = \dot{y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \;\; \dot{z} = \dot{z}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

درستی روابط زیر را بررسی کنید،

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x}{\partial q_k}, \qquad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial y}{\partial q_k}, \qquad \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial z}{\partial q_k}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم