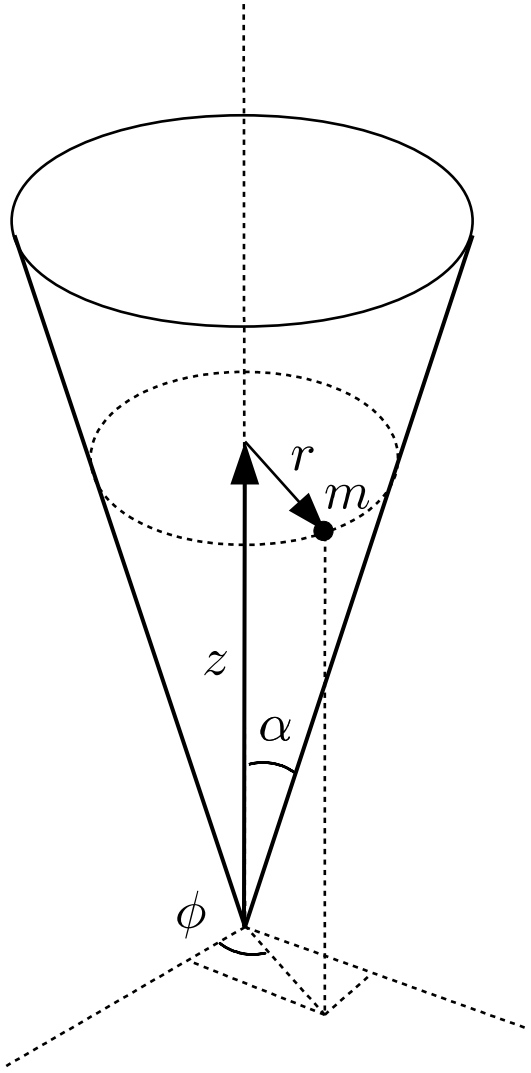
جلسه چهاردهم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

مکانیک لاگرانژی



$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \\ z = r\cot\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\phi - \dot{\phi}r\sin\phi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\phi + \dot{\phi}r\cos\phi \\ \dot{z} = \dot{r}\cot\alpha \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2(1+\cot^2\alpha) + r^2\dot{\phi}^2]$$

$$V = mgr\cot\alpha$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2(1+\cot^2\alpha) + r^2\dot{\phi}^2] - mgr\cot\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2(1+\cot^2\alpha) + r^2\dot{\phi}^2] - mgr\cot\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r},$$

$$m\ddot{r}(1+\cot^2\alpha) = mr\dot{\phi}^2 - mg\cot\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mr^2\dot{\phi}\right] = 0 \Rightarrow l = mr^2\dot{\phi} = \text{const.}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

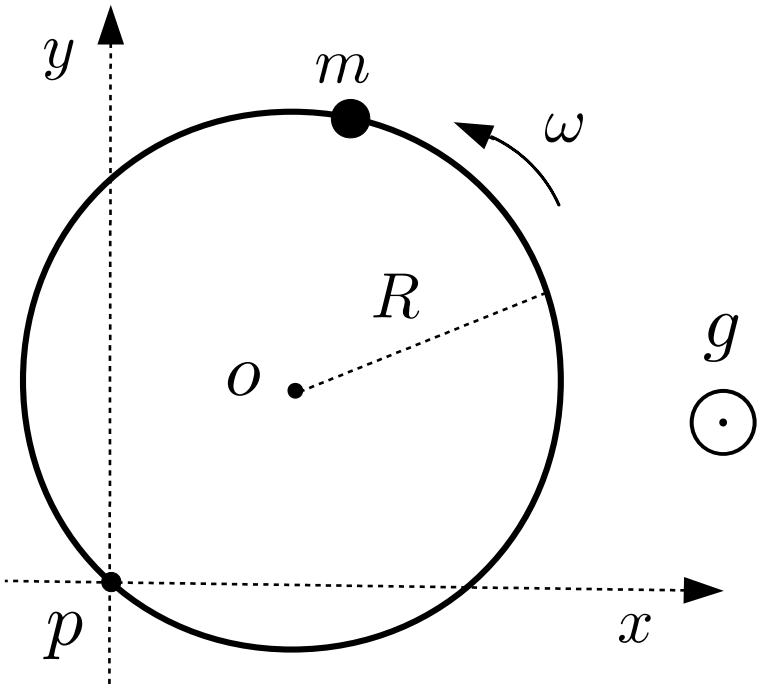
$$\begin{cases} m\ddot{r}(1+\cot^2\alpha) = mr\dot{\phi}^2 - mg\cot\alpha \\ l = mr^2\dot{\phi} \Rightarrow \dot{\phi} = \dfrac{l}{mr^2} \end{cases}$$

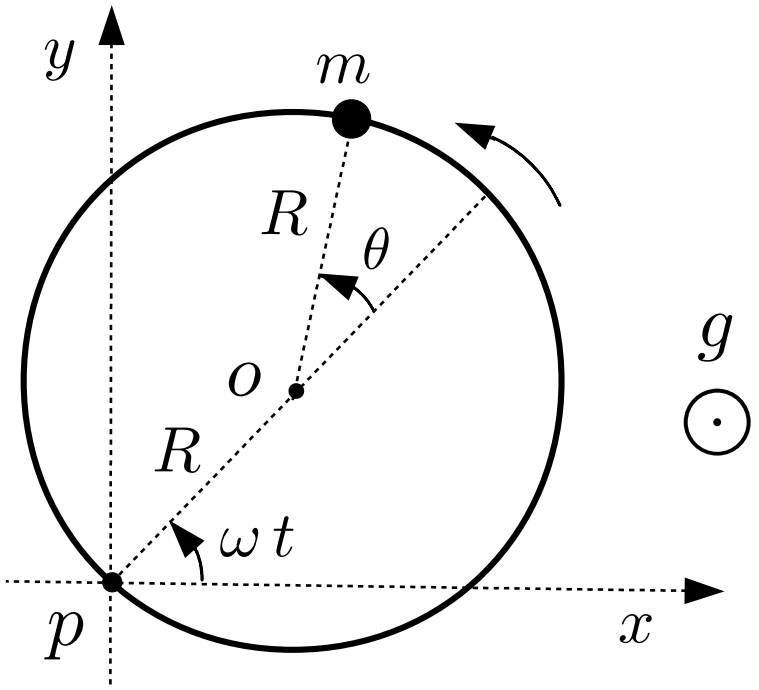
$$m\ddot{r}(1+\cot^2\alpha) = \frac{l^2}{mr^3} - mg\cot\alpha$$

$$m\ddot{r}\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{l^2}{mr^3} - mg\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$m\ddot{r} = \frac{l^2\sin^2\alpha}{mr^3} - mg\cos\alpha\sin\alpha$$

مکانیک لاگرانژی

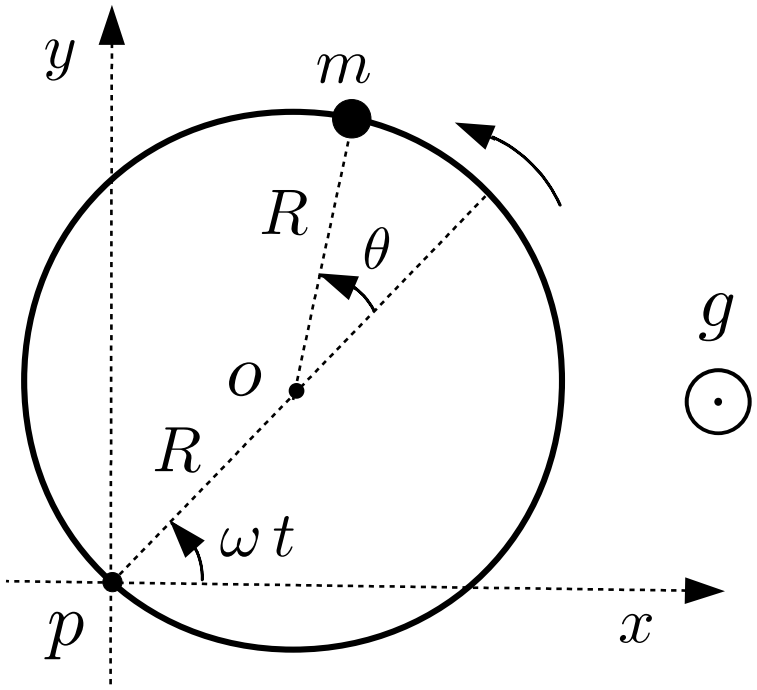


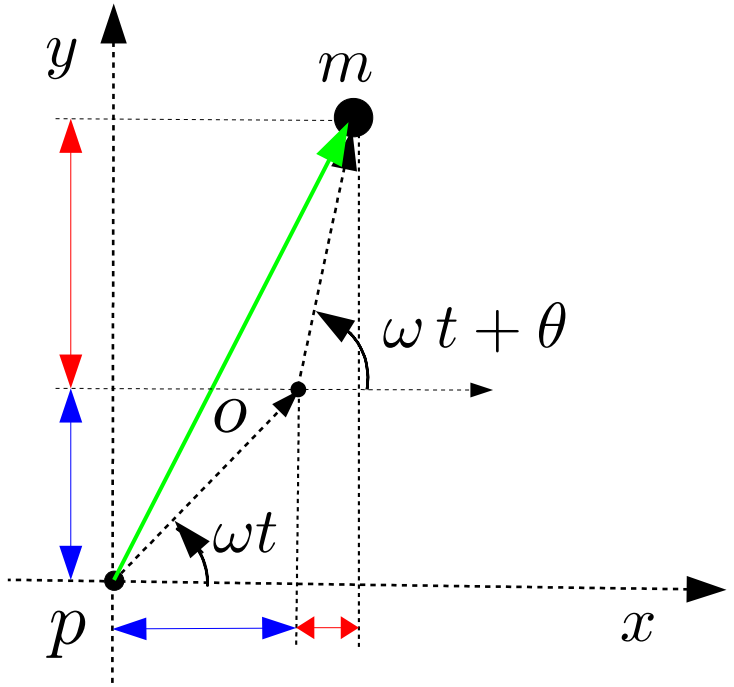


محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

کاربردها

مکانیک لاگرانژی





$$\begin{cases} x_o = R\cos(\omega t + \theta) \\ y_o = R\sin(\omega t + \theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_p = R\cos\omega t + R\cos(\omega t + \theta) \\ y_p = R\sin\omega t + R\sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

$$\begin{cases} x_p = R\cos\omega t + R\cos(\omega t + \theta) \\ y_p = R\sin\omega t + R\sin(\omega t + \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_p = -R\omega\sin\omega t - R(\omega + \dot{\theta})\sin(\omega t + \theta) \\ \dot{y}_p = R\omega\cos\omega t + R(\omega + \dot{\theta})\cos(\omega t + \theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_p^2 = R^2\omega^2\sin^2\omega t + R^2(\omega + \dot{\theta})^2\sin^2(\omega t + \theta) \\ \qquad\qquad +2R^2\omega(\omega + \dot{\theta})\sin\omega t\sin(\omega t + \theta) \\ \dot{y}_p^2 = R^2\omega^2\cos^2\omega t + R^2(\omega + \dot{\theta})^2\cos^2(\omega t + \theta) \\ \qquad\qquad +2R^2\omega(\omega + \dot{\theta})\cos\omega t\cos(\omega t + \theta) \end{cases}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\begin{cases} \dot{x}_p^2 = R^2\omega^2 \sin^2 \omega t + R^2(\omega+\dot{\theta})^2 \sin^2(\omega t+\theta) \\ \qquad\qquad +2R^2\omega(\omega+\dot{\theta}) \sin\omega t \sin(\omega t+\theta) \\ \dot{y}_p^2 = R^2\omega^2 \cos^2 \omega t + R^2(\omega+\dot{\theta})^2 \cos^2(\omega t+\theta) \\ \qquad\qquad +2R^2\omega(\omega+\dot{\theta}) \cos\omega t \cos(\omega t+\theta) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) \qquad\qquad q_1 = \theta, \quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}m[R^2\omega^2 + R^2(\omega+\dot{\theta})^2 + 2R^2\omega(\omega+\dot{\theta})\cos\theta]$$

$$T = \frac{1}{2}mR^2[\omega^2 + (\omega+\dot{\theta})^2 + 2\omega(\omega+\dot{\theta})\cos\theta]$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$T = \frac{1}{2} m R^2 [\omega^2 + (\omega + \dot{\theta})^2 + 2\omega(\omega + \dot{\theta}) \cos\theta]$$

$$V = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 [\omega^2 + (\omega + \dot{\theta})^2 + 2\omega(\omega + \dot{\theta}) \cos\theta]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m R^2(\omega + \dot{\theta}) + m R^2 \omega \cos\theta\right] = -m R^2 \omega(\omega + \dot{\theta}) \sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mR^2(\omega+\dot{\theta})+mR^2\omega\cos\theta\right]=-mR^2\omega(\omega+\dot{\theta})\sin\theta$$

$$mR^2\ddot{\theta}-mR^2\omega\dot{\theta}\sin\theta=-mR^2\omega(\omega+\dot{\theta})\sin\theta$$

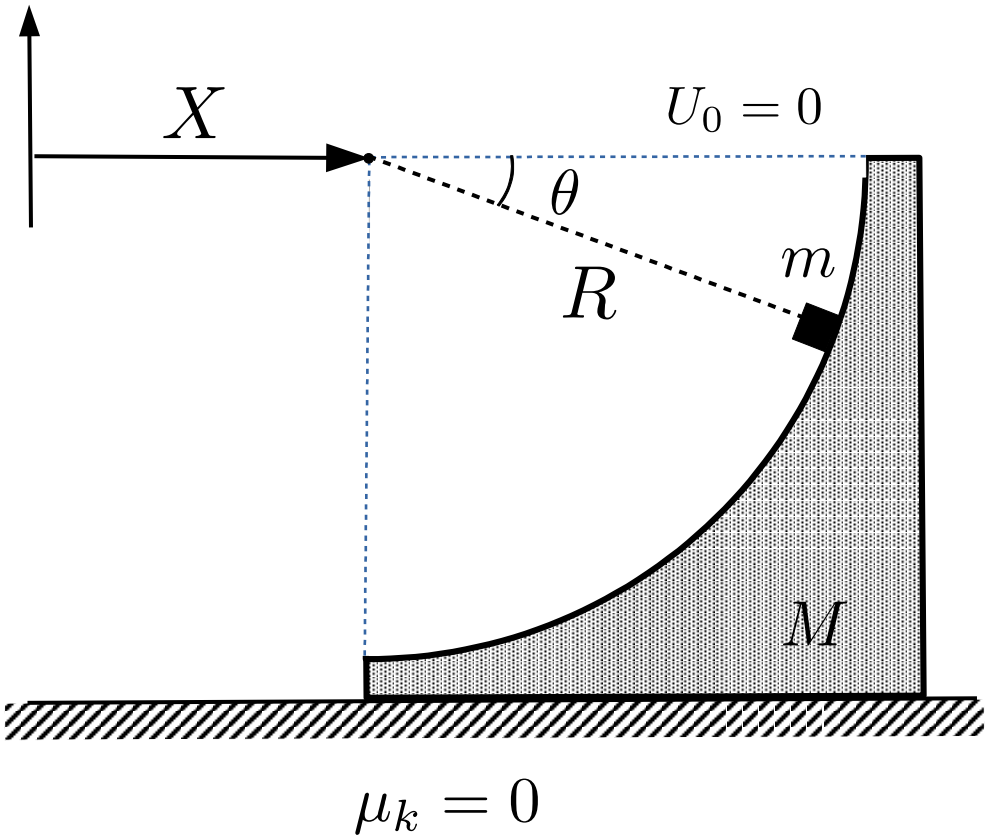
$$mR^2\ddot{\theta}+mR^2\omega^2\sin\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

کاربردها

مکانیک لاگرانژی



$$\begin{cases} m : (X + R\cos\theta, -R\sin\theta) \\ m : (\dot{X} - R\dot{\theta}\sin\theta, -R\dot{\theta}\cos\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M : (X, 0) \\ M : (\dot{X}, 0) \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\begin{cases} m : (X + R\cos\theta, -R\sin\theta) \\ m : (\dot{X} - R\dot{\theta}\sin\theta, -R\dot{\theta}\cos\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} M : (X, 0) \\ M : (\dot{X}, 0) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}\dot{X}\sin\theta), \quad V = -mgR\sin\theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}\dot{X}\sin\theta) + mgR\sin\theta$$

$$q_1 = \theta, \dot{q}_1 = \dot{\theta}, \quad q_2 = X, \dot{q}_2 = \dot{X}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}\dot{X}\sin\theta) + mgR\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mR^2\dot{\theta} - mR\dot{X}\sin\theta\right] = -mR\dot{\theta}\dot{X}\cos\theta + mgR\cos\theta$$

$$mR^2\ddot{\theta} - mR\ddot{X}\sin\theta - mR\dot{\theta}\dot{X}\cos\theta = -mR\dot{\theta}\dot{X}\cos\theta + mgR\cos\theta$$

$$mR^2\ddot{\theta} - mR\ddot{X}\sin\theta = mgR\cos\theta$$

$\div mR$

$$R\ddot{\theta} - \ddot{X}\sin\theta = g\cos\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + R^2\dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}\dot{X}\sin\theta) + mgR\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(m+M)\dot{X} - mR\dot{\theta}\sin\theta\right] = 0$$

$$(m+M)\ddot{X} - mR\ddot{\theta}\sin\theta - mR\dot{\theta}^2\cos\theta = 0$$

$$\ddot{X} = \frac{mR}{m+M}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)$$

مکانیک لاگرانژی

$$\begin{cases} R\ddot{\theta} - \ddot{X}\sin\theta = g\cos\theta \\ \ddot{X} = \dfrac{mR}{m+M}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \end{cases}$$

$$R\ddot{\theta} - \frac{mR}{m+M}(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\sin\theta = g\cos\theta$$

$\div R$

$$\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\ddot{\theta} - \frac{m\cos\theta\sin\theta}{m+M}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right] = \dot{\theta}\left[\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\ddot{\theta} - \frac{m\cos\theta\sin\theta}{m+M}\dot{\theta}^2\right]$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

کاربردها

مکانیک لاگرانژی

$$\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\ddot{\theta} - \frac{m\cos\theta\sin\theta}{m+M}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right] = \dot{\theta}\left[\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\ddot{\theta} - \frac{m\cos\theta\sin\theta}{m+M}\dot{\theta}^2\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\left(\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right] = \dot{\theta}\left[\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\ddot{\theta} - \frac{m\cos\theta\sin\theta}{m+M}\dot{\theta}^2\right]$$

$$\cancel{\dot{\theta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\left(\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right] = \cancel{\dot{\theta}}\left[\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\ddot{\theta} - \frac{m\cos\theta\sin\theta}{m+M}\dot{\theta}^2\right]$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\ddot{\theta} - \frac{m\cos\theta\sin\theta}{m+M}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R}\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\left(\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right] = \frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\ddot{\theta} - \frac{m\cos\theta\sin\theta}{m+M}\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\left(\frac{m\cos^2\theta + M}{m+M}\right)\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right] = \frac{g}{R}\cos\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\left(\frac{m\cos^2\theta+M}{m+M}\right)\frac{\dot\theta^2}{2}\right]=\frac{g}{R}\cos\theta$$

شرایط دلخواه

شرایط اولیه

$$\int_{(0,0)}^{(\theta,\dot\theta)}\mathrm{d}\left[\left(\frac{m\cos^2\theta+M}{m+M}\right)\frac{\dot\theta^2}{2}\right]=\frac{g}{R}\int_0^{\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

شرایط دلخواه

شرایط اولیه

$$\boxed{\dot\theta^2=\frac{2g}{R}\left(\frac{m+M}{m\cos^2\theta+M}\right)\sin\theta}$$

$$R\ddot\theta-\ddot X\sin\theta=g\cos\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$R\ddot{\theta} - \ddot{X}\sin\theta = g\cos\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}\left(\frac{m+M}{m\cos^2\theta + M}\right)\sin\theta$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{2g}{R}\frac{m+M}{(m\cos^2\theta+M)^2}\Big[\dot{\theta}\cos\theta(m\cos^2\theta+M) + 2m\dot{\theta}\sin^2\theta\cos\theta\Big]$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\frac{(m+M)\cos\theta}{(m\cos^2\theta+M)^2}\left[(m\cos^2\theta+M) + 2m\sin^2\theta\right]$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

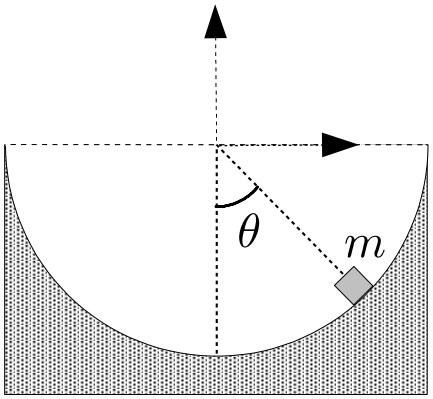
$$R\ddot{\theta} - \ddot{X}\sin\theta = g\cos\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\frac{(m+M)\cos\theta}{(m\cos^2\theta + M)^2}\left[(m\cos^2\theta + M) + 2m\sin^2\theta\right]$$

$$\ddot{X} = \frac{g}{\tan\theta}\left[-1 + \frac{(m+M)}{(m\cos^2\theta + M)^2}\left[(m\cos^2\theta + M) + 2m\sin^2\theta\right]\right]$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$\mu_k = 0$

$$\begin{cases} x = R\sin\theta \\ y = -R\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = R\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2, \qquad V = -mgR\cos\theta$$

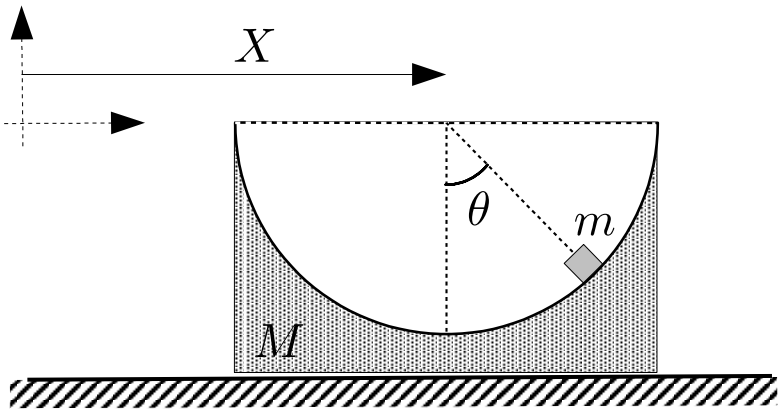
$$q_1 = \theta, \quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \Rightarrow mR^2\ddot{\theta} = -mgR\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$\mu_k = 0$

$$m : (X + R\sin\theta, -R\cos\theta)$$

$$m : (\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta, R\dot{\theta}\sin\theta)$$

$$M : (X, 0)$$

$$M : (\dot{X}, 0)$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{X}\cos\theta),$$

$$V = -mgR\cos\theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{X}\cos\theta) + mgR\cos\theta$$

مکانیک لاگرانژی

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{X}\cos\theta) + mgR\cos\theta$$

$$q_1 = \theta, \quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}, \quad q_2 = X, \quad \dot{q}_2 = \dot{X}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[mR^2\dot{\theta} + mR\dot{X}\cos\theta\right] = -mR\dot{\theta}\dot{X}\sin\theta - mgR\sin\theta$$

$$mR^2\ddot{\theta} + mR\ddot{X}\cos\theta - mR\dot{X}\dot{\theta}\sin\theta = -mR\dot{\theta}\dot{X}\sin\theta - mgR\sin\theta$$

$$mR^2\ddot{\theta} + mR\ddot{X}\cos\theta = -mgR\sin\theta \Rightarrow R\ddot{\theta} + \ddot{X}\cos\theta = -g\sin\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{X}\cos\theta) + mgR\cos\theta$$

$$q_1 = \theta, \quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}, \quad q_2 = X, \quad \dot{q}_2 = \dot{X}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(M+m)\dot{X} + mR\dot{\theta}\cos\theta\right] = 0$$

$$(M+m)\ddot{X} + mR\ddot{\theta}\cos\theta - mR\dot{\theta}^2\sin\theta = 0$$

$$\ddot{X} = -\frac{mR}{M+m}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

مکانیک لاگرانژی

$$\begin{cases} R\ddot{\theta} + \ddot{X}\cos\theta = -g\sin\theta \\ \ddot{X} = -\dfrac{mR}{M+m}\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \end{cases}$$

$$\theta \to 0$$

$$\cos\theta \to 1, \quad \sin\theta \to \theta, \quad \dot{\theta}^2\sin\theta \to \dot{\theta}^2\theta \to 0$$

$$\begin{cases} R\ddot{\theta} + \ddot{X} = -g\theta \\ \ddot{X} = -\dfrac{mR}{M+m}\ddot{\theta} \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\begin{cases} R\ddot{\theta} + \ddot{X} = -g\theta \\ \ddot{X} = -\dfrac{mR}{M+m}\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$R\ddot{\theta} - \frac{mR}{M+m}\ddot{\theta} = -g\theta \Rightarrow \frac{MR}{M+m}\ddot{\theta} = -g\theta$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{M+m}{M}\right)\frac{g}{R}\theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{M}{M+m}\right)\frac{g}{R}}$$

$$\lim_{\frac{M}{m}\to\infty} \omega_0 \to \sqrt{\frac{g}{R}}$$

مکانیک لاگرانژی

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{M+m}{M}\right)\frac{g}{R}\theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{M}{M+m}\right)\frac{g}{R}}$$

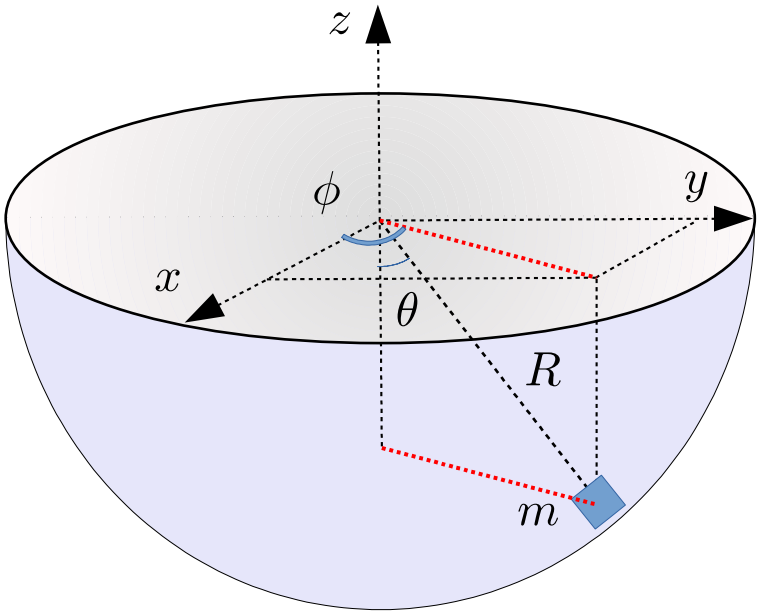
$$\theta = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t, \quad \ddot{\theta} = -\omega_0^2(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)$$

$$\ddot{X} = -\frac{mR}{M+m}\ddot{\theta} = \frac{mR}{M+m}\omega_0^2(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)$$

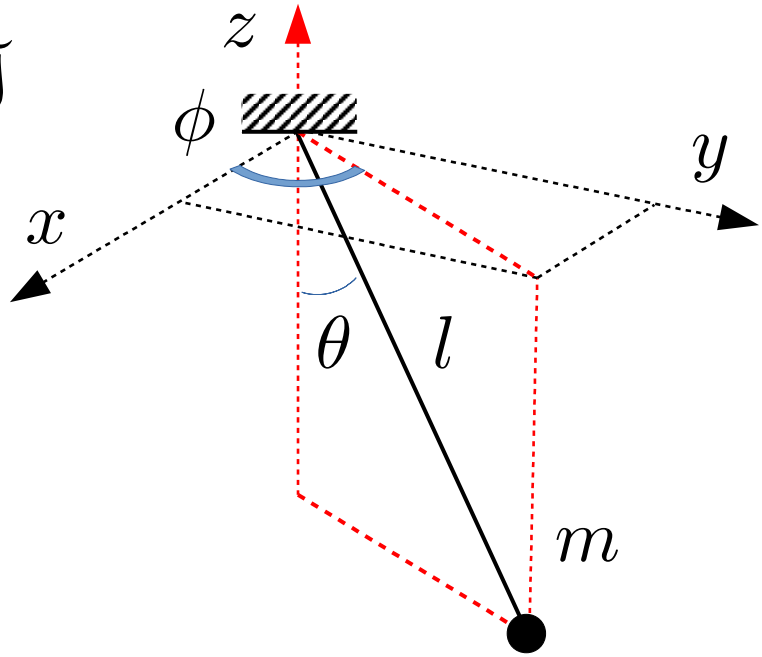
$$\ddot{X} = \frac{m}{M}g(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t)$$

$$\lim_{\frac{M}{m}\to\infty} \ddot{X} \to 0$$

مکانیک لاگرانژی



آونگ کروی



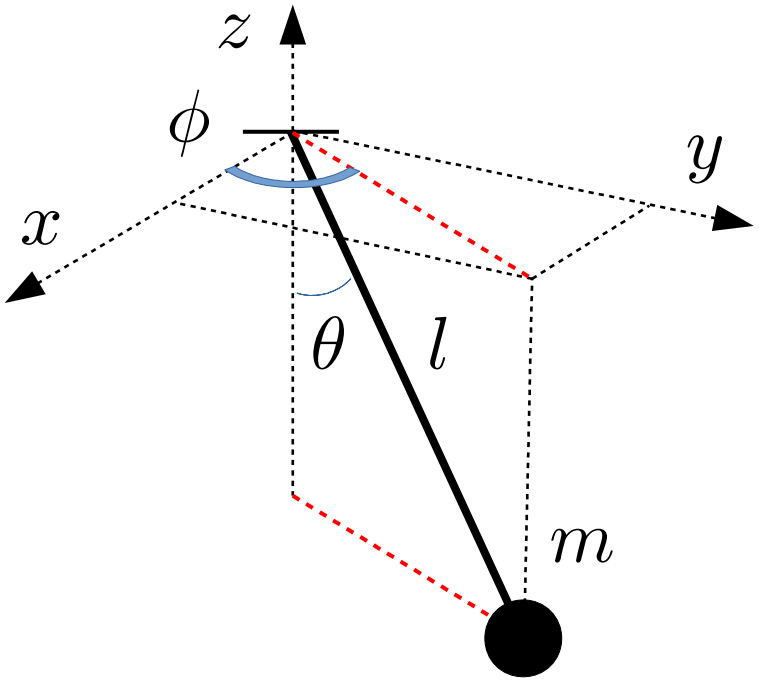
$$\begin{cases} x = R\cos\phi\sin\theta \\ y = R\sin\phi\sin\theta \\ z = -R\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = l\cos\phi\sin\theta \\ y = l\sin\phi\sin\theta \\ z = -l\cos\theta \end{cases}$$

محمدرضا مظفری — گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

کاربردها

مکانیک لاگرانژی



$$m:\begin{cases}\dot{x}=-l\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta+l\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta\\ \dot{y}=l\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta+l\dot{\theta}\sin\phi\cos\theta\\ \dot{z}=l\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}$$

$$T=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$$

$$V=-mgl\cos\theta$$

$$m:\begin{cases}x=l\cos\phi\sin\theta\\ y=l\sin\phi\sin\theta\\ z=-l\cos\theta\end{cases}$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+mgl\cos\theta$$

$$q_1=\theta,\quad \dot{q}_1=\dot{\theta},\quad q_2=\phi,\quad \dot{q}_2=\dot{\phi}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta$$

$$q_1 = \theta, \quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}, \quad q_2 = \phi, \quad \dot{q}_2 = \dot{\phi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta} = ml^2\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - mgl\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta\right] = 0 \Rightarrow ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \text{const.}$$

مکانیک لاگرانژی

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - \dfrac{g}{l}\sin\theta \\ ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \text{const.} \end{cases}$$

تعریف اندازه حرکت تعمیم‌یافته : $p_k = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - \dfrac{g}{l}\sin\theta \\ ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \text{const.} = p_\phi \end{cases}$$

مکانیک لاگرانژی

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta - \dfrac{g}{l}\sin\theta \\ \\ ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \text{const.} = p_\phi \end{cases}$$

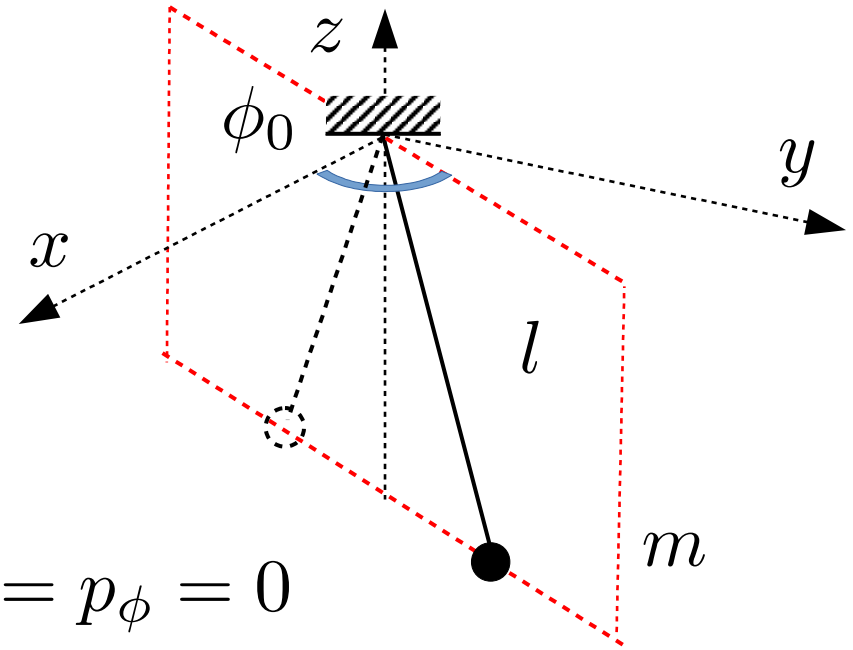
$$\boxed{\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta}} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{p_\phi^2}{m^2l^4\sin^4\theta}\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{p_\phi^2}{m^2l^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \dfrac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{p_\phi^2}{m^2 l^4} \dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \dfrac{g}{l}\sin\theta \end{cases}$$

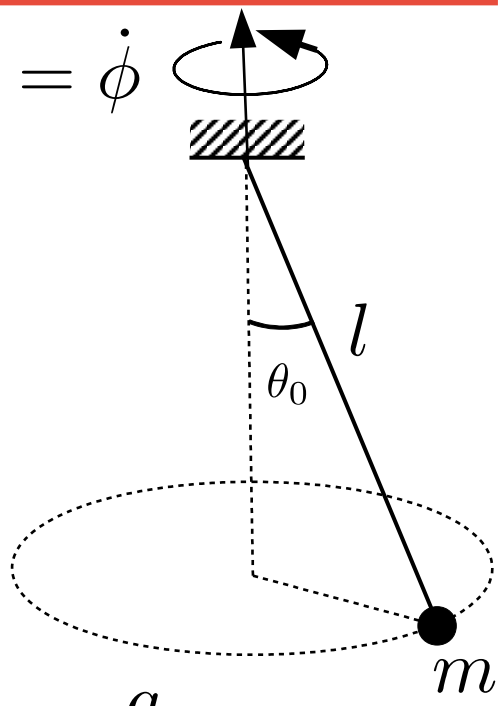


حالت خاص ۱: $\phi = \phi_0 = \text{const.} \Rightarrow \dot{\phi} = p_\phi = 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$ آونگ ساده

مکانیک لاگرانژی

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \dfrac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{p_\phi^2}{m^2 l^4} \dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \dfrac{g}{l}\sin\theta \end{cases}$$



حالت خاص ۲: $\theta = \theta_0 = \text{const.} \Rightarrow \ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{p_\phi^2}{m^2 l^4} \dfrac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} - \dfrac{g}{l}\sin\theta_0 \Rightarrow \dfrac{p_\phi^2}{m^2 l^4 \sin^4\theta_0} = \dfrac{g}{l\cos\theta_0} \\ \dot{\phi} = \dfrac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta_0} \Rightarrow \dot{\phi} = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta_0}} = \omega_\phi \end{cases}$$

سرعت زاویه‌ی چرخش حول محور z

آونگ حرکت مخروطی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \dfrac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{p_\phi^2}{m^2 l^4} \dfrac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \dfrac{g}{l}\sin\theta \end{cases}$$

حالت خاص ۳: نوسان حول θ_0

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} f(\theta) = 0, \quad f(\theta) = \sin\theta - \frac{p_\phi^2}{m^2 l^3} g \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

$$f(\theta) = f(\theta_0) + f^{(1)}(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2} f^{(2)}(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2 + \cdots$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta}, \qquad \ddot{\theta} = \frac{p_\phi^2}{m^2 l^4} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} f(\theta) = 0, \qquad f(\theta) = \sin\theta - \frac{p_\phi^2}{m^2 l^3 g} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

برای بررسی رفتار نوسانی هماهنگ از توان دوم به بعد صرفه نظر می‌کنیم.

$$f(\theta) = f(\theta_0) + f^{(1)}(\theta_0)(\theta - \theta_0)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} f^{(1)}(\theta_0)(\theta - \theta_0) = 0,$$

برای تعیین نقطه تعادلی $f(\theta_0) = 0$

مکانیک لاگرانژی

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta}, \qquad \ddot{\theta} = \frac{p_\phi^2}{m^2 l^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} f^{(1)}(\theta_0)(\theta - \theta_0) = 0, \qquad f(\theta) = \sin\theta - \frac{p_\phi^2}{m^2 l^3 g}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

$$f(\theta_0) = 0$$

$$\sin\theta_0 - \frac{p_\phi^2}{m^2 l^3 g}\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} = 0 \Rightarrow \boxed{p_\phi^2 = m^2 l^3 g \frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}}$$

$$f(\theta) = \sin\theta - \frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}, \qquad \dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\omega_\phi = \dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}, \qquad \ddot{\theta} = \frac{p_\phi^2}{m^2 l^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} f^{(1)}(\theta_0)(\theta - \theta_0) = 0, \qquad f(\theta) = \sin\theta - \frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

$$f^{(1)}(\theta_0) = \frac{1 + 3\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0} = 3\cos\theta_0 + \sec\theta_0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)(\theta - \theta_0) = 0, \quad \eta = \theta - \theta_0, \quad \dot{\eta} = \dot{\theta}, \quad \ddot{\eta} = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\eta} + \frac{g}{l}(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)\eta = 0, \qquad \omega_\theta = \sqrt{\frac{g}{l}(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\omega_\phi = \dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}, \qquad \ddot{\theta} = \frac{p_\phi^2}{m^2 l^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} f^{(1)}(\theta_0)(\theta - \theta_0) = 0, \qquad f(\theta) = \sin\theta - \frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

$$f^{(1)}(\theta_0) = \frac{1 + 3\cos^2\theta_0}{\cos\theta_0} = 3\cos\theta_0 + \sec\theta_0$$

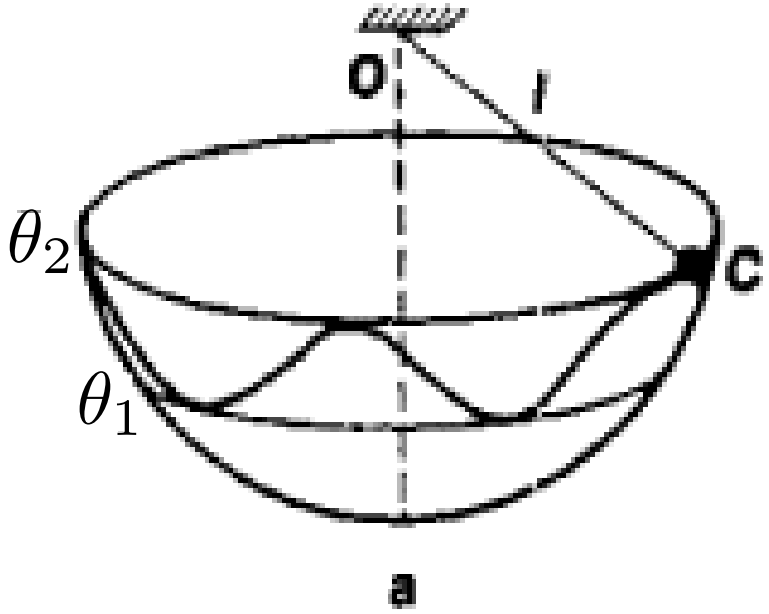
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)(\theta - \theta_0) = 0, \quad \eta = \theta - \theta_0, \quad \dot{\eta} = \dot{\theta}, \quad \ddot{\eta} = \ddot{\theta}$$

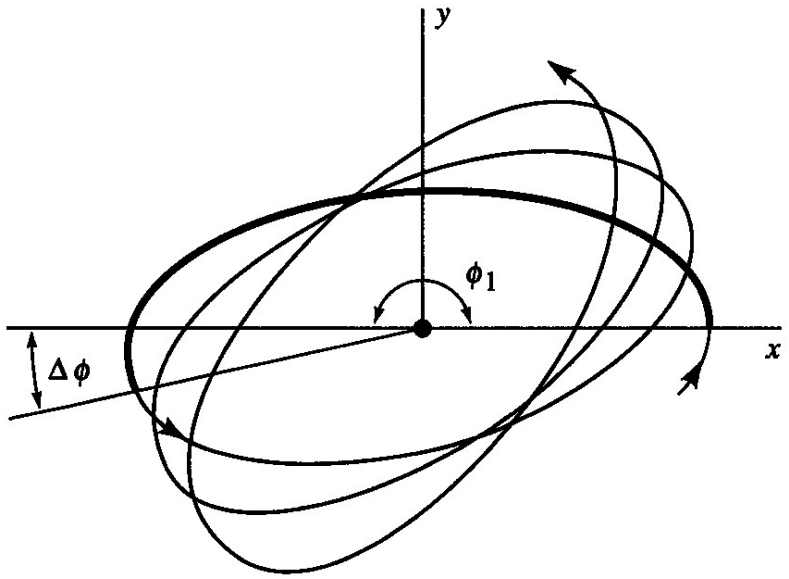
$$\ddot{\eta} + \frac{g}{l}(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)\eta = 0, \qquad \omega_\theta = \sqrt{\frac{g}{l}(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\omega_\phi = \dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}, \qquad \omega_\theta = \sqrt{\frac{g}{l}(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)}$$

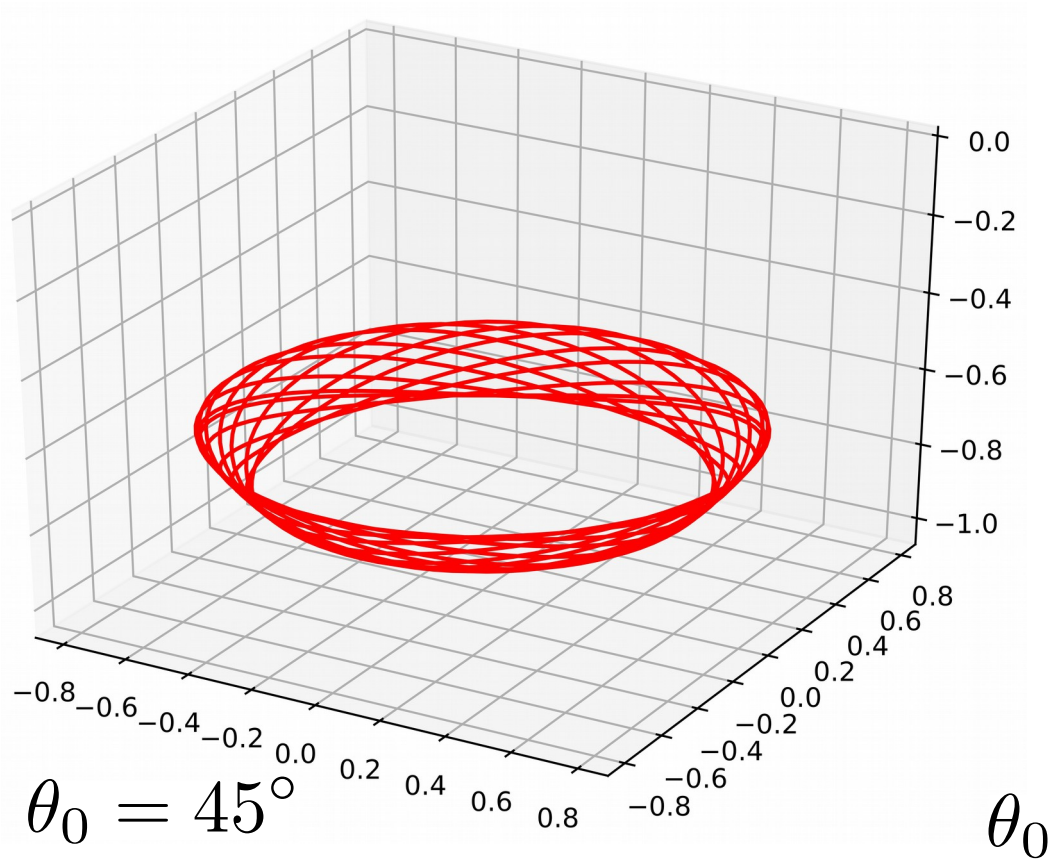




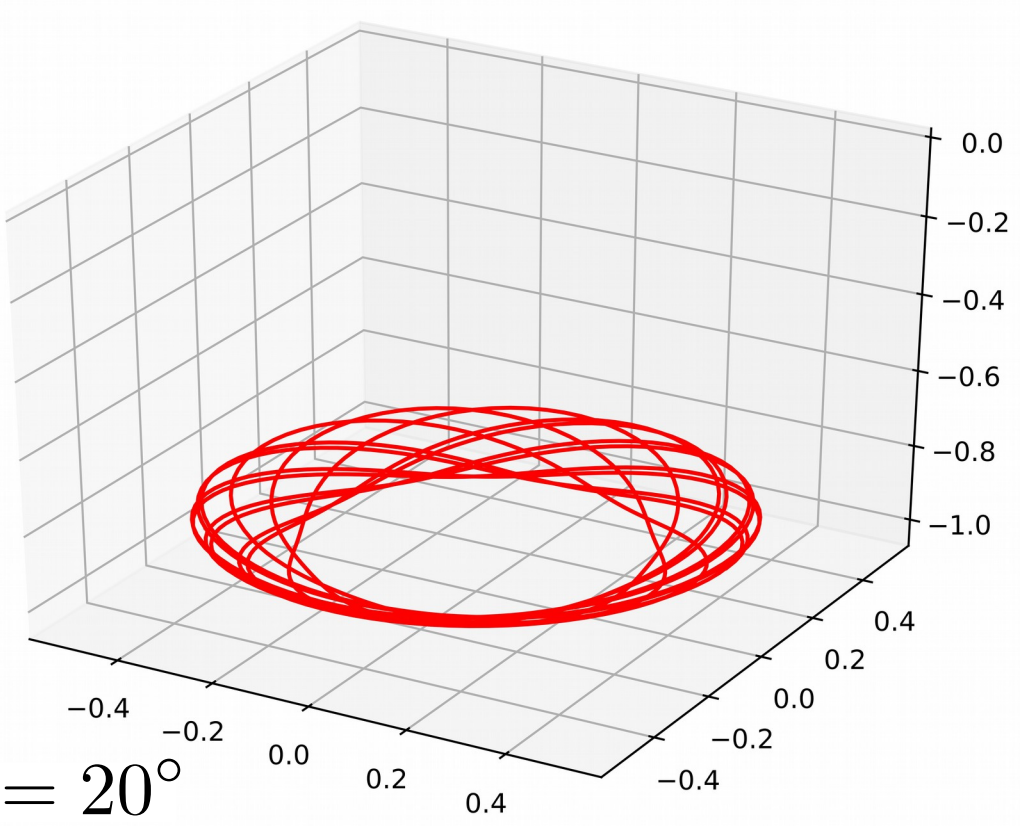
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\omega_\phi = \dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{l\cos\theta_0}}, \qquad \omega_\theta = \sqrt{\frac{g}{l}(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)}$$



$\theta_0 = 45^\circ$



$\theta_0 = 20^\circ$

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

کاربردها

مکانیک لاگرانژی

$$E = T + V = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) - mgl\cos\theta$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta},$$

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2\theta} - mgl\cos\theta$$

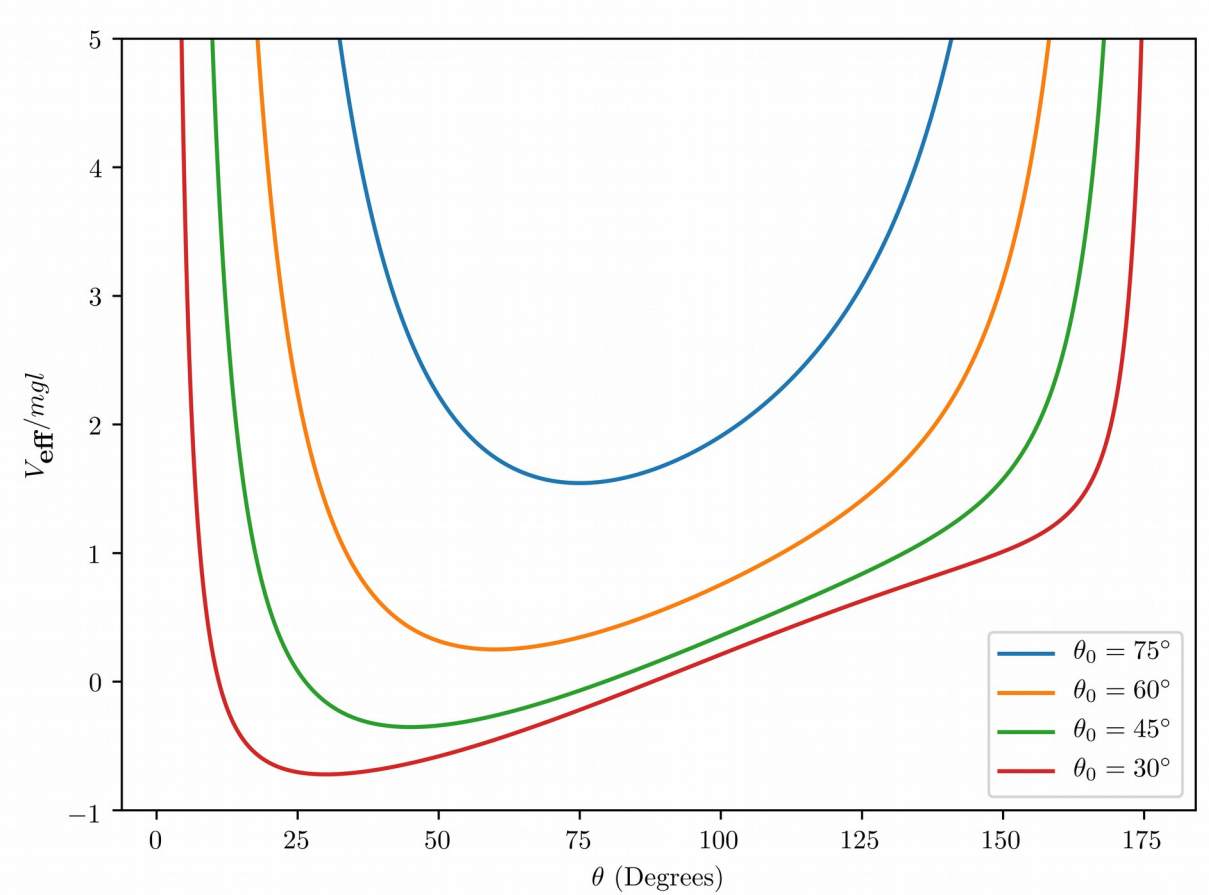
$$p_\phi^2 = m^2 l^3 g \frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0}$$

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\left(\frac{\sin^4\theta_0}{2\cos\theta_0 \sin^2\theta} - \cos\theta\right) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta)$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$V_{\text{eff}}(\theta) = mgl\left(\frac{\sin^4\theta_0}{2\cos\theta_0\sin^2\theta} - \cos\theta\right)$$



کاربردها

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم