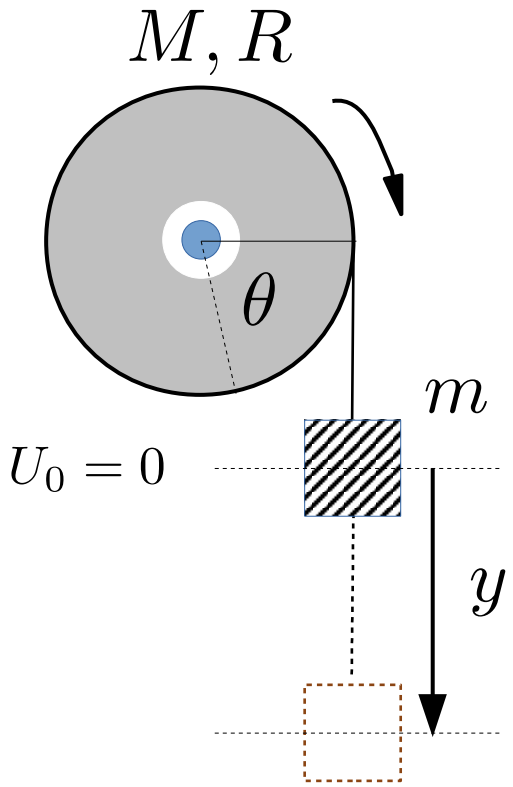
جلسه پانزدهم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

مکانیک لاگرانژی



$$q_1 = y, \quad \dot{q}_1 = \dot{y}, \quad y = R\theta, \quad \dot{y} = R\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 = \frac{1}{4}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2$$

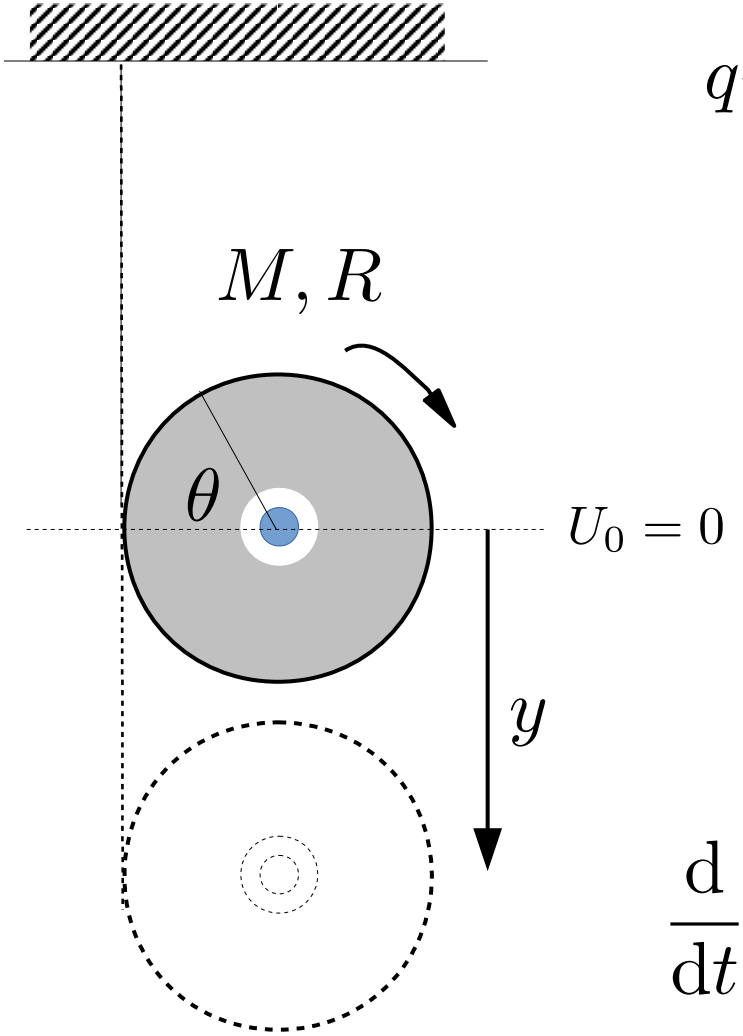
$$V = -mgy \qquad \mathbb{I} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M + m\right)\dot{y}^2 + mgy$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}M + m\right)\ddot{y} = mg \Rightarrow \ddot{y} = \frac{2m}{M + 2m}g$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$q_1 = y, \quad \dot{q}_1 = \dot{y}, \quad y = R\theta, \quad \dot{y} = R\dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 = \frac{3}{4}M\dot{y}^2$$

$$V(y) = -Mgy \qquad \mathbb{I} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M\dot{y}^2 + Mgy$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} \Rightarrow \frac{3}{2}M\ddot{y} = Mg \Rightarrow \ddot{y} = \frac{2}{3}g$$

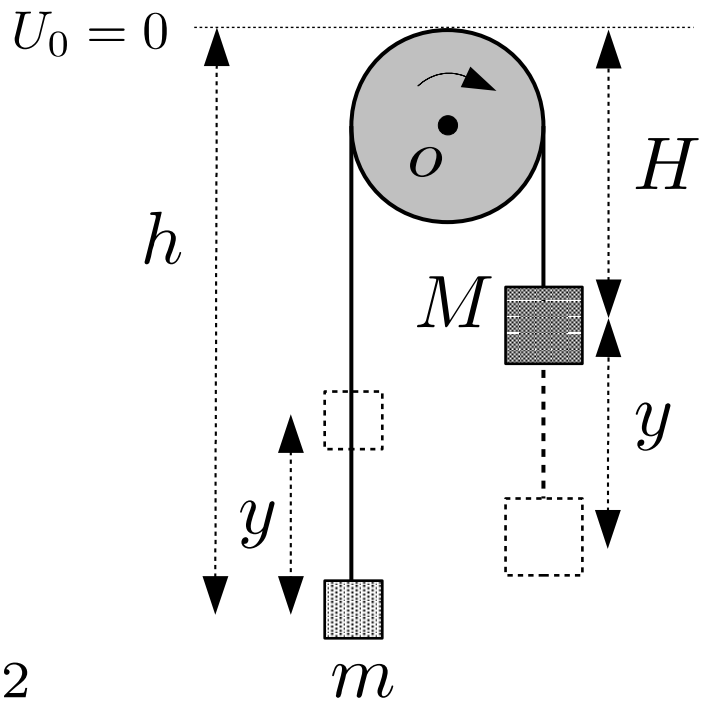
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$M: \ H+y, \quad \dot{y}$$

$$m: \ h-y, \quad -\dot{y}$$

$$h+H=l$$



$$q_1=y, \quad \dot{q}_1=\dot{y},$$

$$y=R\theta, \quad \dot{y}=R\dot{\theta}$$

$$T=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}\mathbb{I}_o\dot{\theta}^2$$

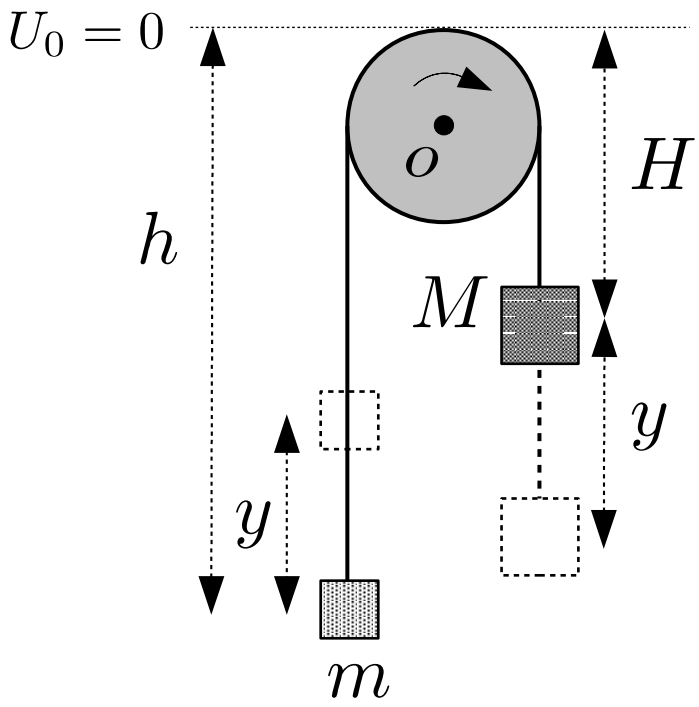
$$T=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}\frac{\mathbb{I}_o}{R^2}\dot{y}^2=\frac{1}{2}\left(M+m+\frac{\mathbb{I}_o}{R^2}\right)\dot{y}^2$$

مکانیک لاگرانژی

$$M:\ H+y,\quad \dot{y}$$

$$m:\ h-y,\quad -\dot{y}$$

$$h+H=l$$



$$q_1=y,\quad \dot{q}_1=\dot{y},$$

$$T=\frac{1}{2}\left(M+m+\frac{\mathbb{I}_o}{R^2}\right)\dot{y}^2$$

$$V=-Mg(H+y)-mg(h-y)=-Mgy+mgy+c$$

$$\mathcal{L}=T-V=\frac{1}{2}\left(M+m+\frac{\mathbb{I}_o}{R^2}\right)\dot{y}^2+Mgy-mgy+c$$

مکانیک لاگرانژی

$$q_1 = y, \quad \dot{q}_1 = \dot{y},$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\left(M + m + \frac{\mathbb{I}_o}{R^2}\right)\dot{y}^2 + Mgy - mgy + c$$

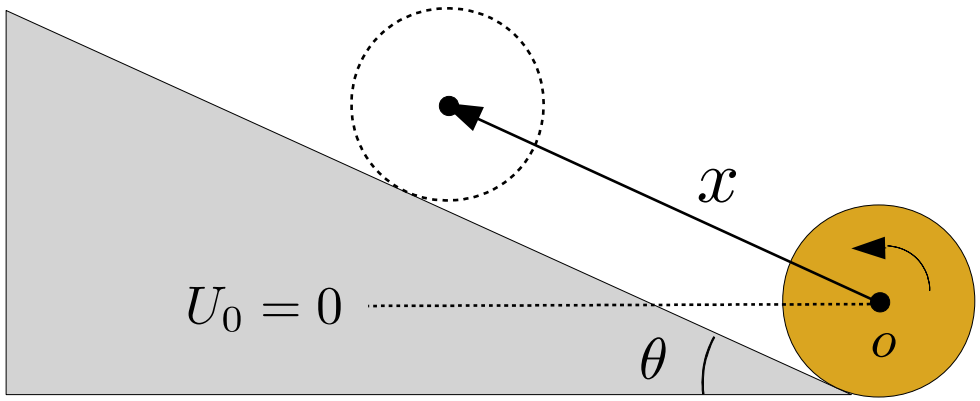
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}$$

$$\left(M + m + \frac{\mathbb{I}_o}{R^2}\right)\ddot{y} = (M - m)g$$

$$\ddot{y} = \frac{(M - m)g}{M + m + \frac{\mathbb{I}_o}{R^2}}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$M : x, \quad \dot{x}$$

$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x},$$

$$x = R\phi, \quad \dot{x} = R\dot{\phi}$$

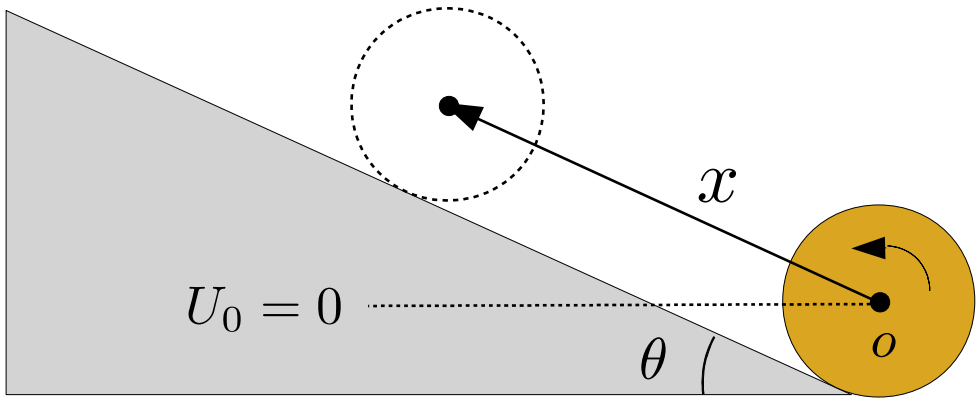
$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_o\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{2}M\dot{x}^2$$

$$V = Mgx\sin\theta$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - Mgx\sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x},$$

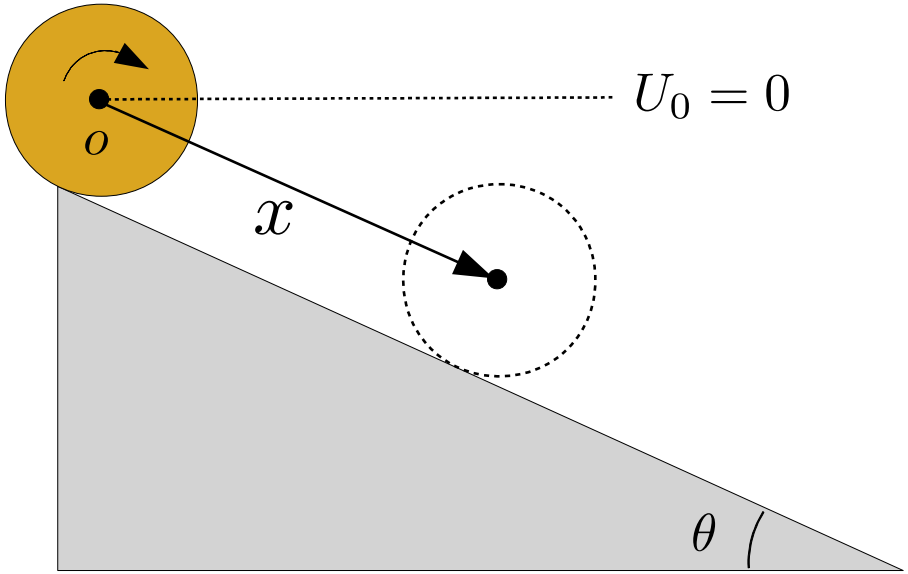
$$\mathcal{L} = \frac{3}{4} M \dot{x}^2 - M g x \sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{3}{2} M \dot{x}\right] = -M g \sin\theta \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2}{3} g \sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$M : x, \quad \dot{x}$$

$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x},$$

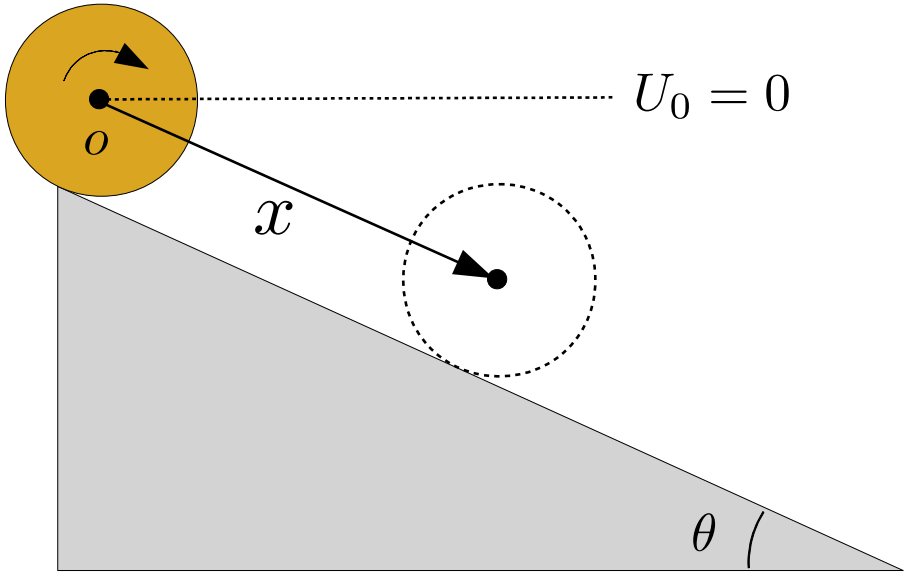
$$x = R\phi, \quad \dot{x} = R\dot{\phi}$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_o\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{2}M\dot{x}^2$$

$$V = -Mgx\sin\theta$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + Mgx\sin\theta$$

مکانیک لاگرانژی



$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x},$$

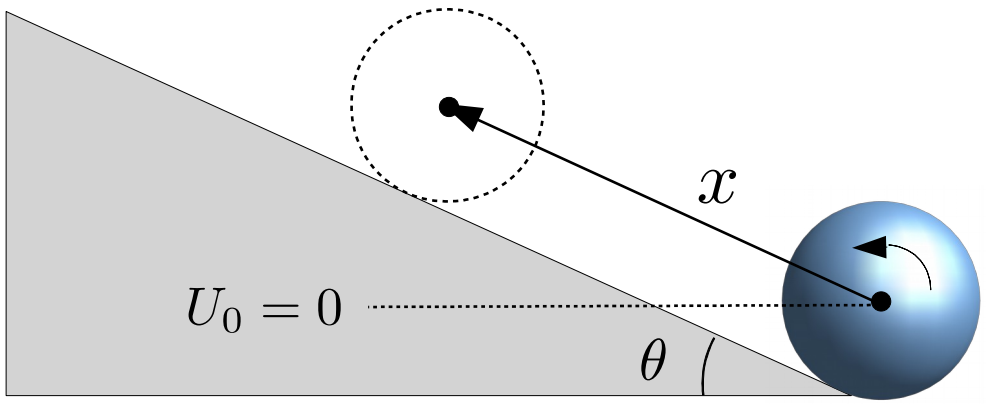
$$\mathcal{L} = \frac{3}{4} M \dot{x}^2 + M g x \sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{3}{2} M \dot{x}\right] = M g \sin\theta \Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$M : x, \quad \dot{x}$$

$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x},$$

$$x = R\phi, \quad \dot{x} = R\dot{\phi}$$

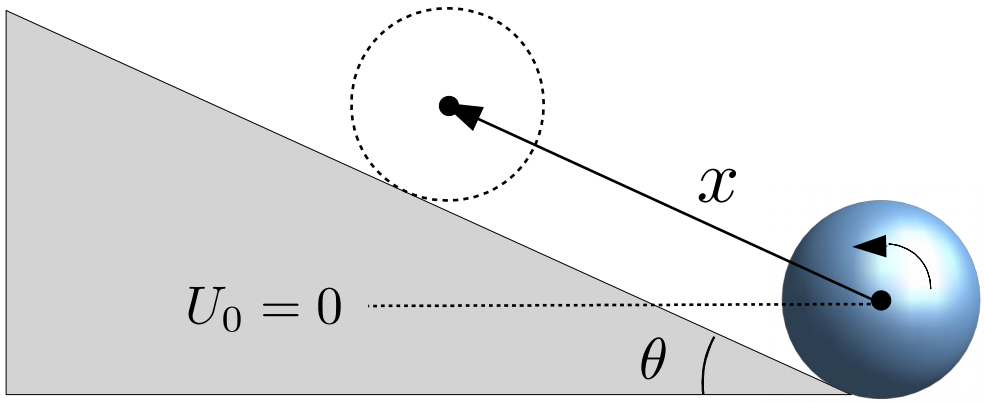
$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\mathrm{CM}}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{7}{10}M\dot{x}^2$$

$$V = Mgx\sin\theta$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{7}{10}M\dot{x}^2 - Mgx\sin\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x},$$

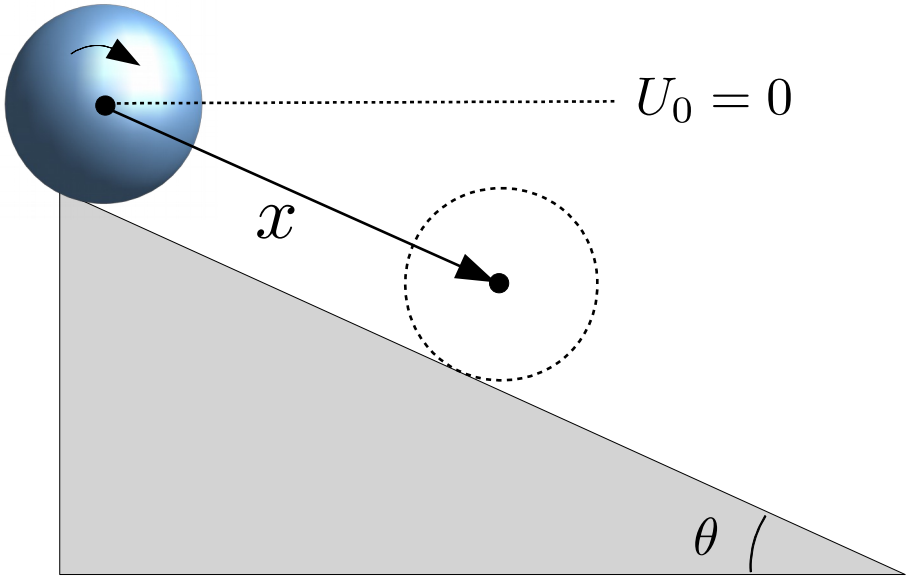
$$\mathcal{L} = \frac{7}{10} M \dot{x}^2 - M g x \sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{7}{5} M \dot{x}\right] = -M g \sin\theta \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{5}{7} g \sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$M : x, \quad \dot{x}$$

$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x},$$

$$x = R\phi, \quad \dot{x} = R\dot{\phi}$$

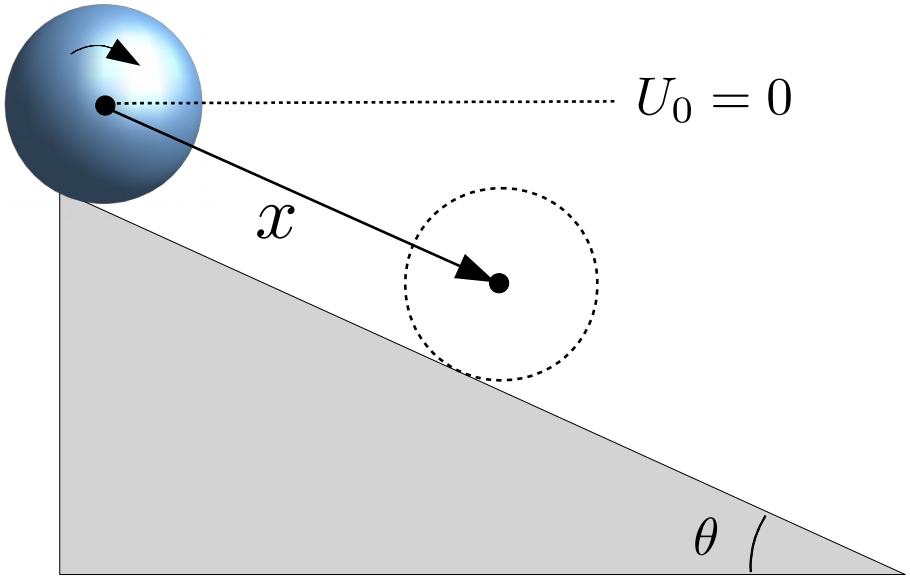
$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\mathrm{CM}}\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{7}{10}M\dot{x}^2$$

$$V = -Mgx\sin\theta$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{7}{10}M\dot{x}^2 + Mgx\sin\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$q_1 = x, \quad \dot{q}_1 = \dot{x},$$

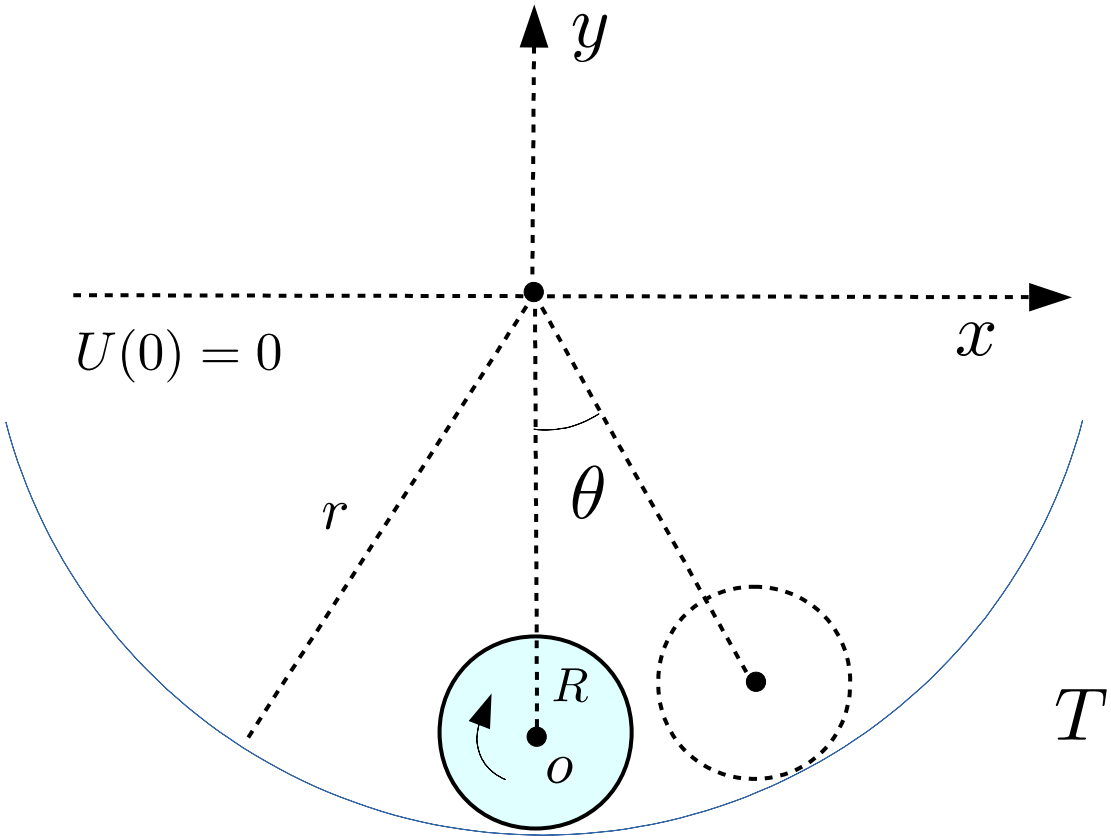
$$\mathcal{L} = \frac{7}{10} M \dot{x}^2 + M g x \sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{7}{5} M \dot{x}\right] = M g \sin\theta \Rightarrow \ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$\begin{cases} x = (r-R)\sin\theta \\ y = -(r-R)\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (r-R)\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = (r-R)\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}M(r-R)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_o\dot{\phi}^2$$

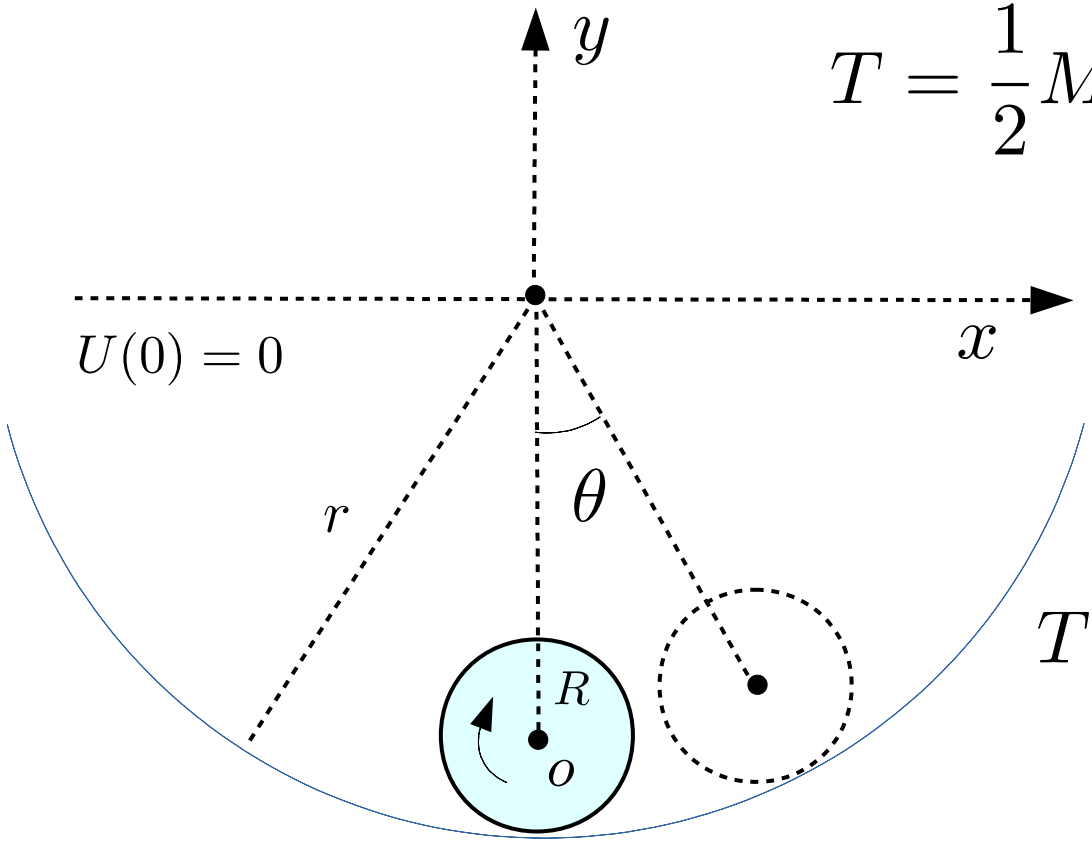
$$(r-R)\theta = R\phi$$

$$(r-R)\dot{\theta} = R\dot{\phi}$$

$$T = \frac{1}{2}M(r-R)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_o\frac{(r-R)^2}{R^2}\dot{\theta}^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$T=\frac{1}{2}M(r-R)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\mathbb{I}_o\frac{(r-R)^2}{R^2}\dot{\theta}^2$$

$$T=\frac{1}{2}M(r-R)^2\dot{\theta}^2$$

$$+\frac{1}{2}M(r-R)^2\frac{\mathbb{I}_o}{MR^2}\dot{\theta}^2$$

$$T=\frac{1}{2}M(r-R)^2\left[1+\frac{\mathbb{I}_o}{MR^2}\right]\dot{\theta}^2$$

$$V=-Mg(r-R)\cos\theta$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}M(r-R)^2\left[1+\frac{\mathbb{I}_o}{MR^2}\right]\dot{\theta}^2+Mg(r-R)\cos\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M (r - R)^2 \left[1 + \frac{\mathbb{I}_o}{M R^2} \right] \dot{\theta}^2 + M g (r - R) \cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

$$M (r - R)^2 \left[1 + \frac{\mathbb{I}_o}{M R^2} \right] \ddot{\theta} = -M g (r - R) \sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r - R} \left[\frac{M R^2}{M R^2 + \mathbb{I}_o} \right] \sin\theta = 0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

کاربردها

مکانیک لاگرانژی

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r-R}\left[\frac{MR^2}{MR^2+\mathbb{I}_o}\right]\sin\theta = 0$$

$\sin\theta \approx \theta$ →

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{r-R}\left[\frac{MR^2}{MR^2+\mathbb{I}_o}\right]\theta = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{MR^2}{\mathbb{I}_{\text{CM}}+MR^2}\frac{g}{r-R}}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{r-R}\left[\frac{MR^2}{MR^2+\mathbb{I}_o}\right]\sin\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{r-R}\left[\frac{MR^2}{MR^2+\mathbb{I}_o}\right]\sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{r-R}\left[\frac{MR^2}{MR^2+\mathbb{I}_o}\right]\sin\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{g}{r-R}\left[\frac{MR^2}{MR^2+\mathbb{I}_o}\right]\sin\theta$$

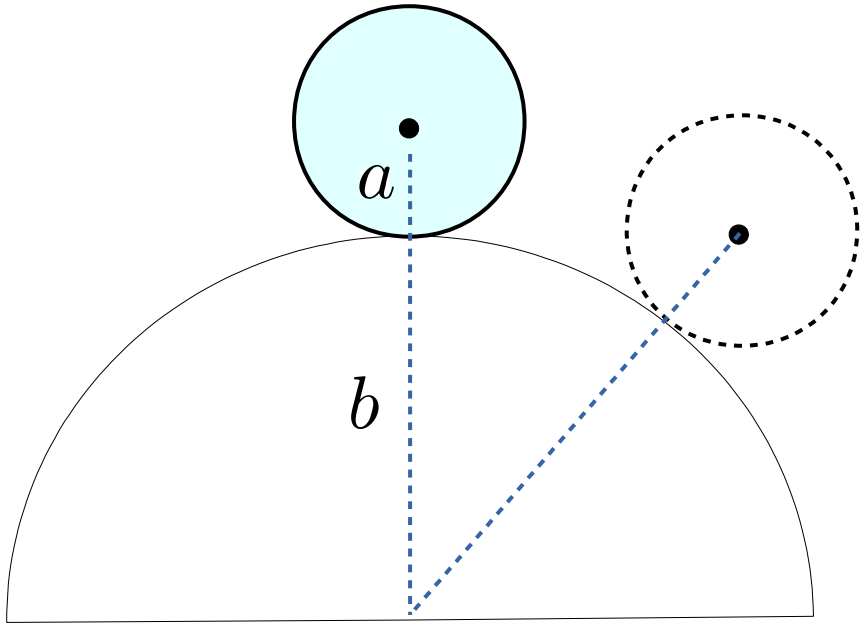
$$\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{g}{r-R}\left[\frac{MR^2}{MR^2+\mathbb{I}_o}\right]\sin\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta} = -\frac{g}{r-R}\left[\frac{MR^2}{MR^2+\mathbb{I}_o}\right]\int_\alpha^\theta \sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{r-R}\left[\frac{MR^2}{MR^2+\mathbb{I}_o}\right](\cos\theta - cos\alpha)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$\begin{cases} x = (a+b)\sin\theta \\ y = (a+b)\cos\theta \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (a+b)\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y} = -(a+b)\dot{\theta}\sin\theta \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}M(a+b)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_o\dot{\phi}^2$$

$$(a+b)\theta = a\phi$$

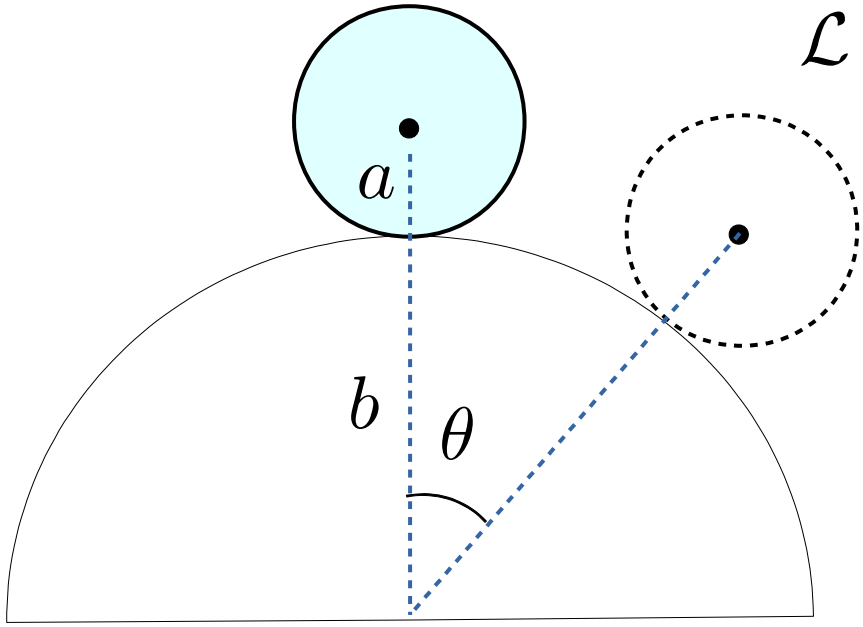
$$(a+b)\dot{\theta} = a\dot{\phi}$$

$$T = \frac{1}{2}M(a+b)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\frac{(a+b)^2}{a^2}\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{3}{4}M(a+b)^2\dot{\theta}^2, \quad V = Mg(a+b)\cos\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$\mathcal{L} = \frac{3}{4}M(a+b)^2\dot{\theta}^2 - Mg(a+b)\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right] = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

$$\frac{3}{2}M(a+b)^2\ddot{\theta} = Mg(a+b)\sin\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3(a+b)}\sin\theta$$

$$(a+b)\theta = a\phi$$

$$(a+b)\dot{\theta} = a\dot{\phi}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

کاربردها

مکانیک لاگرانژی

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3(a+b)} \sin\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{2g}{3(a+b)} \sin\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{2g}{3(a+b)} \sin\theta$$

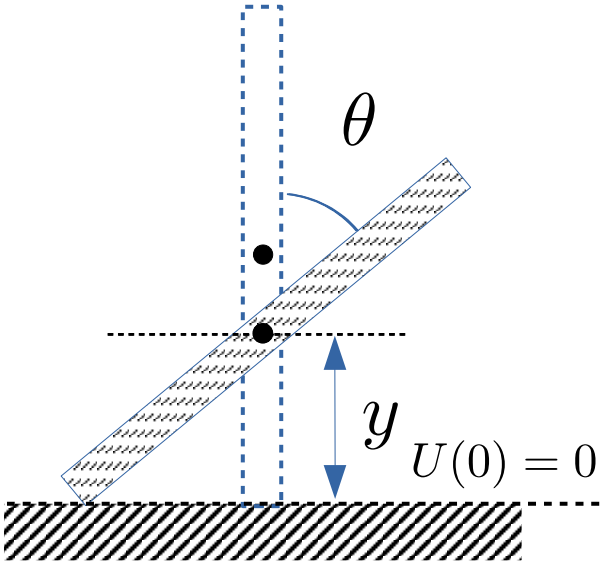
$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta} = \frac{2g}{3(a+b)} \int_0^{\theta} \sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{3(a+b)}(1-\cos\theta)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3(a+b)}(1-\cos\theta)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$y = \frac{L}{2}\cos\theta, \qquad \dot{y} = -\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\mathrm{CM}}\dot{\theta}^2$$

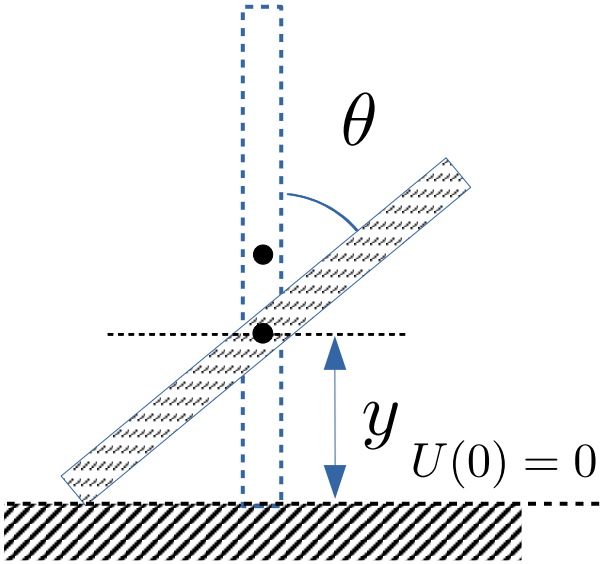
$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}ML^2\right)\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{24}ML^2(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2, \quad V = Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{24}ML^2(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$y=\frac{L}{2}\cos\theta, \qquad \dot{y}=-\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{24}ML^2(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2-Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right]=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{12}ML^2(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}\right]=\frac{1}{4}ML^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta+Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$\frac{1}{12}ML^2(1+3\sin^2\theta)\ddot{\theta}+\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta=$$

$$\frac{1}{4}ML^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta+Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\frac{1}{12}ML^2(1+3\sin^2\theta)\ddot{\theta}+\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta=$$
$$\frac{1}{4}ML^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta+Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$\frac{1}{12}ML^2(1+3\sin^2\theta)\ddot{\theta}+\frac{1}{4}ML^2\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta=Mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

$\div\frac{1}{12}ML^2$

$$(1+3\sin^2\theta)\ddot{\theta}+3\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta=6\frac{g}{L}\sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

کاربردها

مکانیک لاگرانژی

$$(1+3\sin^2\theta)\ddot{\theta}+3\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta=6\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$(1+3\sin^2\theta)\ddot{\theta}+3\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta=6\frac{g}{L}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2\right]=\dot{\theta}\left[(1+3\sin^2\theta)\ddot{\theta}+3\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{1}{2}(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2\right]=\dot{\theta}\left[(1+3\sin^2\theta)\ddot{\theta}+3\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$\cancel{\dot{\theta}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{1}{2}(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2\right]=\cancel{\dot{\theta}}\left[(1+3\sin^2\theta)\ddot{\theta}+3\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{1}{2}(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2\right]=6\frac{g}{L}\sin\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\frac{1}{2}(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2\right]=6\frac{g}{L}\sin\theta$$

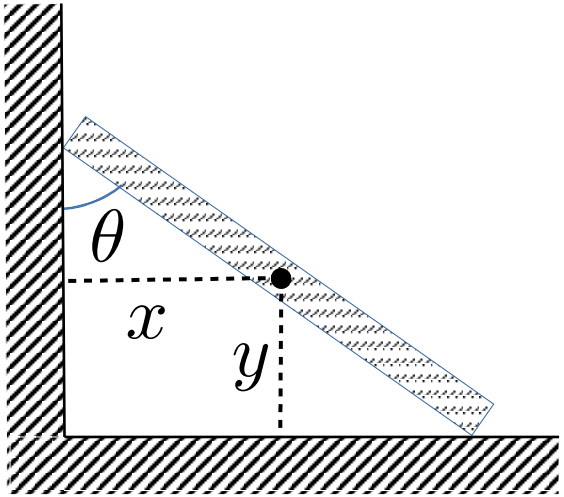
$$\int_{(0,0)}^{(\theta,\dot{\theta})}\mathrm{d}\left[\frac{1}{2}(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2\right]=6\frac{g}{L}\int_0^{\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$(1+3\sin^2\theta)\dot{\theta}^2=12\frac{g}{L}(1-\cos\theta)\Rightarrow\boxed{\dot{\theta}=\sqrt{12\frac{g}{L}\frac{1-\cos\theta}{1+3\sin^2\theta}}}$$

$$\dot{y}=-\frac{L}{2}\dot{\theta}\sin\theta=-\sqrt{3gL\frac{(1-\cos\theta)\sin^2\theta}{1+3\sin^2\theta}}=-\sqrt{\frac{3g(L-2y)\sin^2\theta}{1+3\sin^2\theta}}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$U(0) = 0$

$$\begin{cases} x = \frac{L}{2}\sin\theta \\ y = \frac{L}{2}\cos\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{\theta}\frac{L}{2}\cos\theta \\ \dot{y} = -\dot{\theta}\frac{L}{2}\sin\theta \end{cases}$$

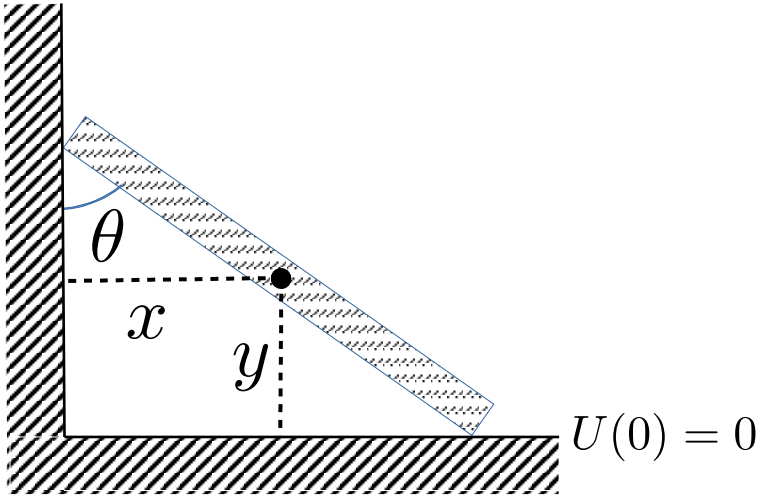
$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\mathrm{CM}}\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}M\frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ML^2\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2, \quad V = Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 - Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$\mathcal{L}=\frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2-Mg\frac{L}{2}\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right]=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}$$

$$\ddot{\theta}=\frac{3g}{2L}\sin\theta$$

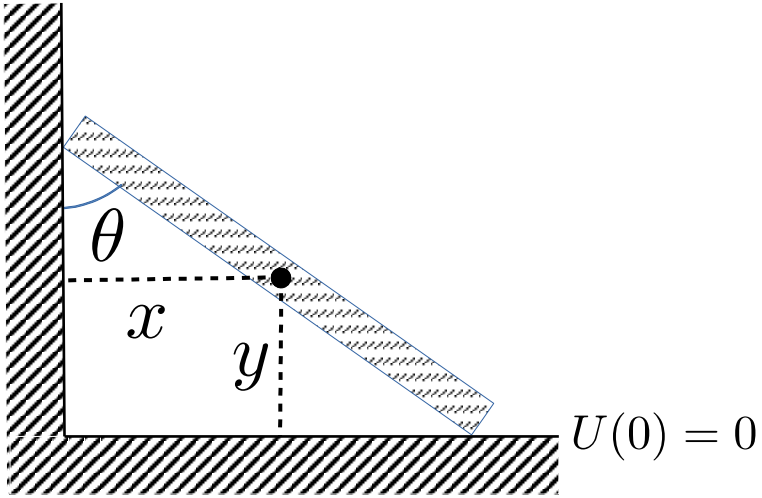
$$\ddot{\theta}=\frac{3g}{2L}\sin\theta\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}=\frac{3g}{2L}\sin\theta\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{3g}{2L}\sin\theta$$

$$\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{3g}{2L}\sin\theta\Rightarrow\dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta}=\frac{3g}{2L}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

کاربردها

مکانیک لاگرانژی



$$\dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta} = \frac{3g}{2L}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\mathrm{d}\dot{\theta} = \frac{3g}{2L}\int_\alpha^{\theta} \sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2L}(\cos\alpha - \cos\theta)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(\cos\alpha - \cos\theta)$$