جلسه هجدهم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

مکانیک لاگرانژی

تعریف تابع هامیلتونی

$$\mathcal{H} = \sum_k \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}$$

می‌دانیم،

$$\mathcal{L} = T(q_k, \dot{q}_k) - V(q_k)$$

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

قصد داریم،

$$\sum_k \dot{q}_k p_k = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$$

$$T = \sum_l f_l \dot{q}_l^2, \quad f_l = f(q_l)$$

مکانیک لاگرانژی

$$T = \sum_l f_l \dot{q}_l^2, \quad f_l = f_l(\{q\})$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dot{r}(m\dot{r}) + \dot{\theta}(mr^2\dot{\theta}) = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 = 2T$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \sin^2\theta \dot{\phi}^2$$

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \dot{r}(m\dot{r}) + \dot{\theta}(mr^2\dot{\theta}) + \dot{\phi}(mr^2 \sin^2\theta\dot{\phi})$$

$$= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2 \sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 2T$$

$$\sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

تعریف تابع هامیلتونی

$$\mathcal{H} = \sum_k \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}$$

می‌دانیم،

$$\mathcal{L} = T(\{q\}, \{\dot{q}\}) - V(\{q\})$$

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

قصد داریم،

$$\sum_k \dot{q}_k p_k = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = 2T$$

$$\mathcal{H} = \sum_k \dot{q}_k p_k - \mathcal{L} = 2T - (T - V) \Rightarrow \boxed{\mathcal{H} = T + V}$$

مکانیک لاگرانژی

$$\mathcal{H} = \sum_k \dot{q}_k p_k - \mathcal{L}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \sum_k (p_k \mathrm{d}\dot{q}_k + \dot{q}_k \mathrm{d}p_k) - \mathrm{d}\mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q\}, \{\dot{q}\})$$

$$\mathrm{d}\mathcal{L} = \sum_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \mathrm{d}q_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \mathrm{d}\dot{q}_k, \qquad p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \sum_k \left(p_k \mathrm{d}\dot{q}_k + \dot{q}_k \mathrm{d}p_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \mathrm{d}q_k - p_k \mathrm{d}\dot{q}_k \right)$$

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \sum_k \left(\dot{q}_k \mathrm{d}p_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \mathrm{d}q_k \right)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \sum_k \left(\dot{q}_k \mathrm{d}p_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \mathrm{d}q_k \right)$$

$$p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \Rightarrow \dot{p}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = \sum_k \left(\dot{q}_k \mathrm{d}p_k - \dot{p}_k \mathrm{d}q_k \right)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{q\}, \{p\}) \Rightarrow \mathrm{d}\mathcal{H} = \sum_k \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right) \mathrm{d}p_k + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right) \mathrm{d}q_k \right]$$

$$\boxed{\dot{q}_k = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} \right), \quad \dot{p}_k = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} \right)}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

لاگرانژی

$$\mathcal{L}(\{\dot{q}\},\{q\}) = T - V$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}$$

$$p_k = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right), \quad \dot{p}_k = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\right)$$

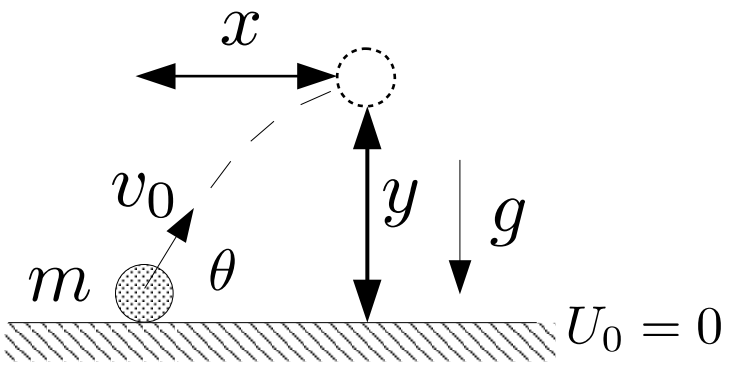
هامیلتونی

$$\mathcal{H}(\{p\},\{q\}) = T + V$$

$$\dot{q}_k = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}\right), \quad \dot{p}_k = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}\right)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad V = mgy$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

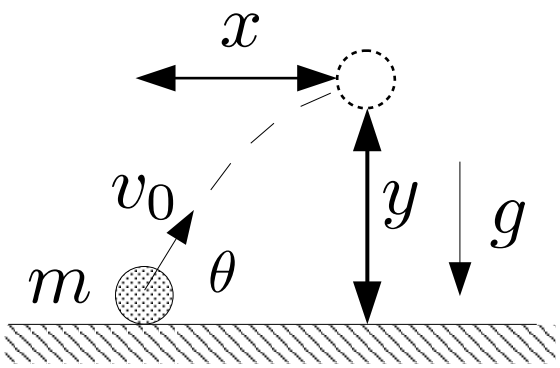
$$p_x = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$p_y = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{m}$$

$$T = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}, \quad V = mgy \Rightarrow \mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + mgy$$

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}\right) : \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m} \Rightarrow p_x = m\dot{x}$$

$$\dot{p}_x = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right) : \quad \dot{p}_x = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{x} = v_x = v_0 \cos\theta}$$

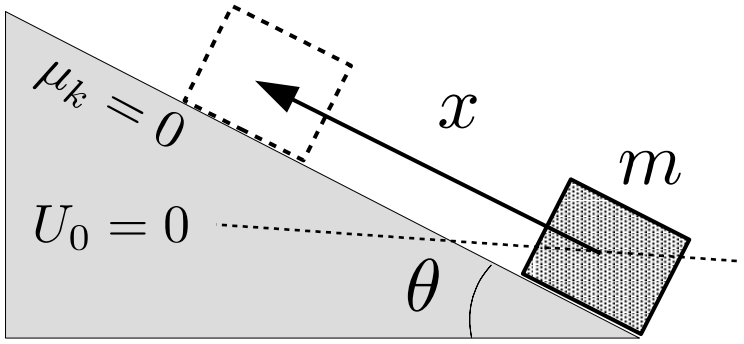
$$\dot{y} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}\right) : \quad \dot{y} = \frac{p_y}{m} \Rightarrow p_y = m\dot{y}$$

$$\dot{p}_y = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right) : \quad \dot{p}_y = -mg \Rightarrow \boxed{\ddot{y} = a_y = -g}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad V(x) = mgx\sin\theta$$



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx\sin\theta$$

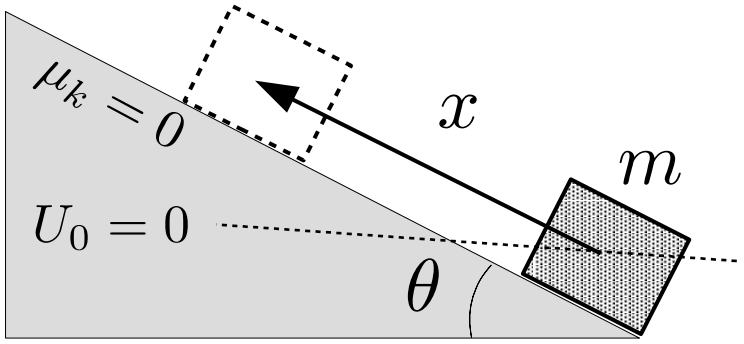
$$p_x = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$T = \frac{p_x^2}{2m}, \quad V = mgx\sin\theta$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + mgx\sin\theta$$

مکانیک لاگرانژی

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + mgx\sin\theta$$



$$\dot{x} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}\right) : \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m} \Rightarrow p_x = m\dot{x}$$

$$\dot{p}_x = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right) : \quad \dot{p}_x = -mg\sin\theta \Rightarrow m\ddot{x} = -mg\sin\theta$$

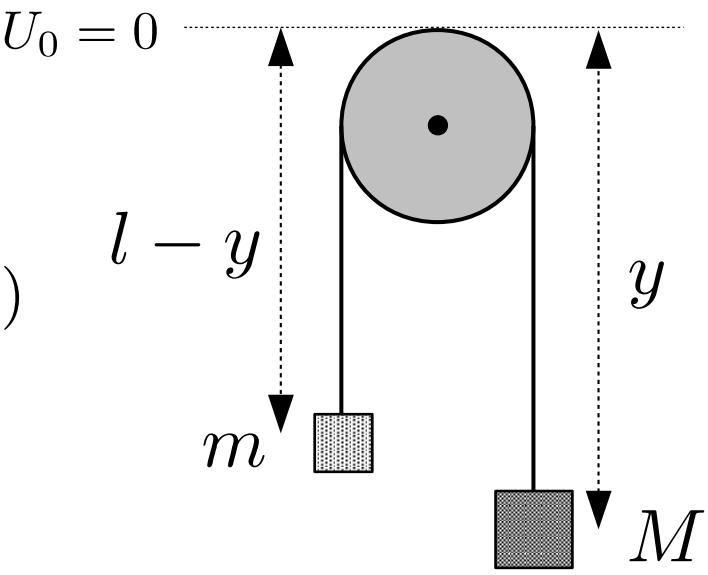
$$\boxed{\ddot{x} = -g\sin\theta}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$M: y, \quad \dot{y}$$

$$m: l-y, \quad -\dot{y}$$



$$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2, \quad V = -Mgy - mg(l-y)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + Mgy + mg(l-y)$$

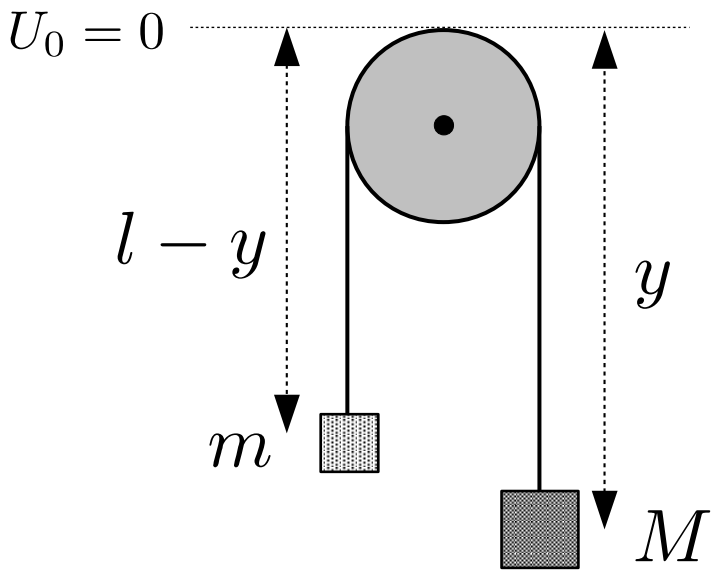
$$p_y = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = M\dot{y} + m\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \frac{p_y}{M+m}$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_y^2}{2(M+m)} - Mgy - mg(l-y)$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

$$\mathcal{H} = \frac{p_y^2}{2(M+m)} - Mgy - mg(l-y)$$



$$\dot{y} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_y}\right) : \quad \dot{y} = \frac{p_y}{M+m}$$

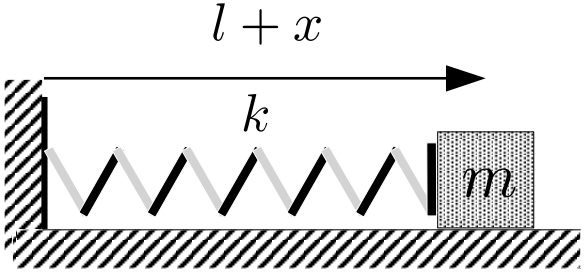
$$p_y = (M+m)\dot{y}$$

$$\dot{p}_y = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right) : \quad \dot{p}_y = Mg - mg \Rightarrow (M+m)\ddot{y} = (M-m)g$$

$$\boxed{\ddot{y} = \frac{M-m}{M+m}g}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$m: \ l+x, \quad \dot{x}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

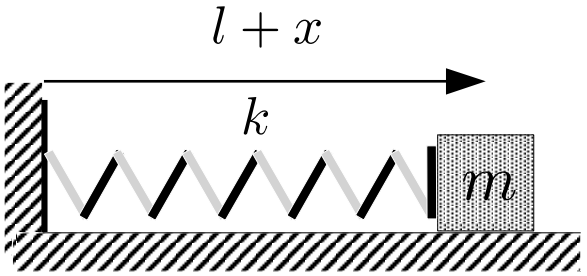
$$p_x = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 = \frac{p_x^2}{2m}, \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}\right) : \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m} \Rightarrow p_x = m\dot{x}$$

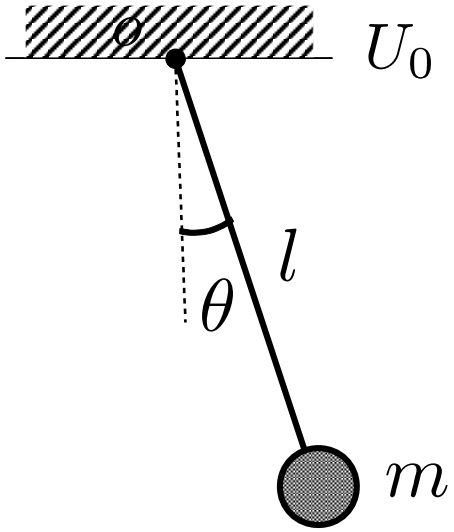
$$\dot{p}_x = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right) : \quad \dot{p}_x = -kx$$

$$\begin{cases} p_x = m\dot{x} \\ \dot{p}_x = -kx \end{cases} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$q_1 = \theta, \quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}$$

$$T = \frac{1}{2}\mathbb{I}_o\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, \quad V(\theta) = -mgl\cos\theta$$

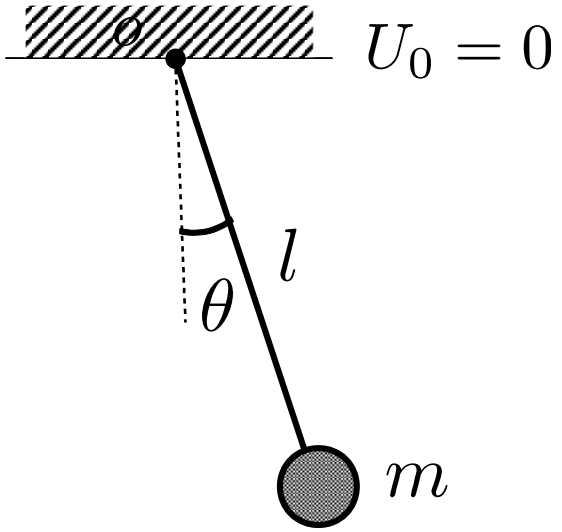
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

$$p_\theta = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{p_\theta^2}{2ml^2}, \quad V(\theta) = -mgl\cos\theta$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

مکانیک لاگرانژی



$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl\cos\theta$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta}\right) : \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \Rightarrow p_\theta = ml^2\dot{\theta}$$

$$\dot{p}_\theta = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}\right) : \quad \dot{p}_\theta = -mgl\sin\theta$$

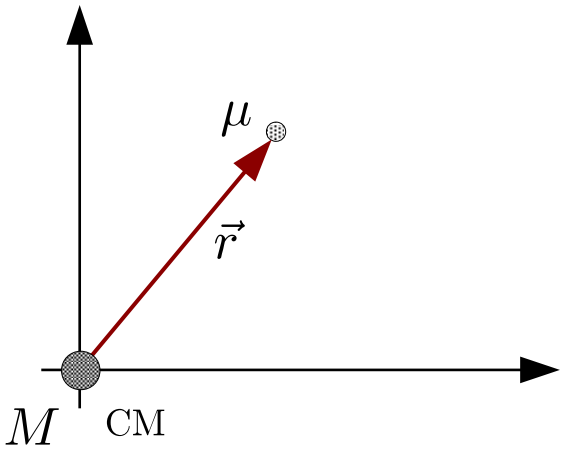
$$\begin{cases} p_\theta = ml^2\dot{\theta} \\ \dot{p}_\theta = -mgl\sin\theta \end{cases} \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

نیروهای مرکزی

$$q_1 = r,\ q_2 = \theta$$



فرض: $\vec{R} = 0$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

$$p_r = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = \mu\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{\mu}$$

$$p_\theta = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \mu r^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2}$$

$$T = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2}, \quad V = V(r)$$

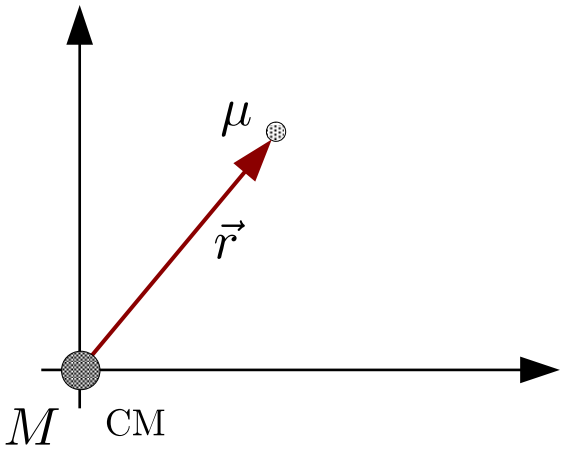
$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

نیروهای مرکزی

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V(r)$$



فرض: $\vec{R} = 0$

$$\dot{r} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_r}\right) : \quad \dot{r} = \frac{p_r}{\mu} \Rightarrow p_r = \mu \dot{r}$$

$$\dot{p}_r = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r}\right) : \quad \dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta}\right) : \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} \Rightarrow p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta}$$

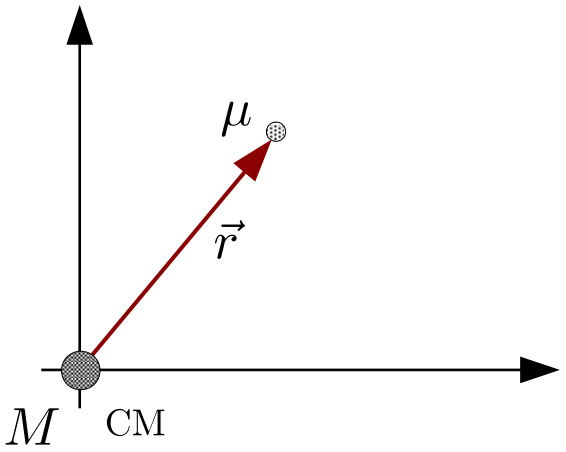
$$\dot{p}_\theta = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}\right) : \quad \dot{p}_\theta = 0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی

نیروهای مرکزی

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V(r)$$



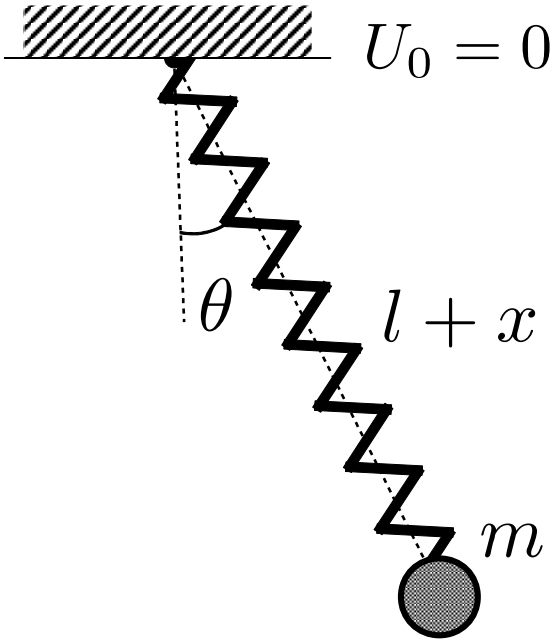
فرض: $\vec{R} = 0$

$$\begin{cases} p_r = \mu \dot{r} \\ \dot{p}_r = \dfrac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \dfrac{\partial V}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mu \ddot{r} = \frac{p_\theta^2}{\mu r^3} - \frac{\partial V}{\partial r}}$$

$$\begin{cases} p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} \\ \dot{p}_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{p_\theta = \mu r^2 \dot{\theta} = \text{const.}}$$

$$\boxed{V_{\text{eff}}(r) = \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + V(r), \quad \mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2\mu} + V_{\text{eff}}(r)}$$

مکانیک لاگرانژی



$$m : ((l+x)\sin\theta, -(l+x)\cos\theta)$$

$$m : (\dot{x}\sin\theta + (l+x)\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$-\dot{x}\cos\theta + (l+x)\dot{\theta}\sin\theta)$$

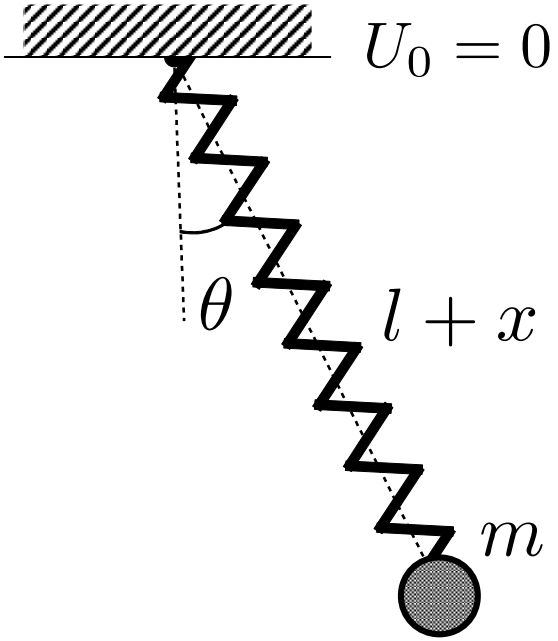
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2)$$
$$-\frac{1}{2}kx^2 + mg(l+x)\cos\theta$$

$$p_x = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

$$p_\theta = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = m(l+x)^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m(l+x)^2}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$p_x = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}$$

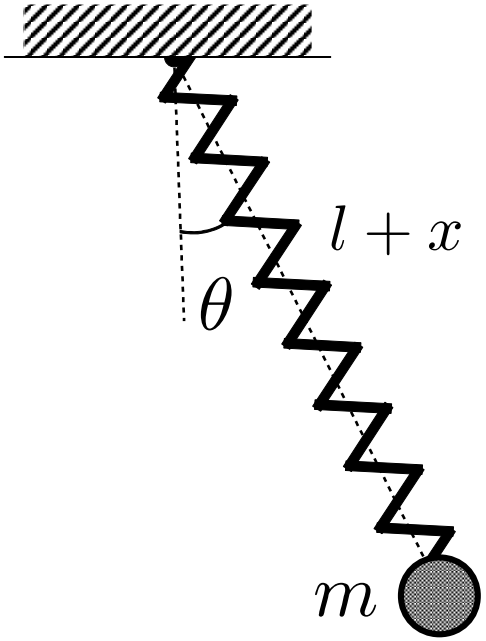
$$p_\theta = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = m(l+x)^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m(l+x)^2}$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (l+x)^2\dot{\theta}^2) = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m(l+x)^2}$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mg(l+x)\cos\theta$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m(l+x)^2} + \frac{1}{2}kx^2 - mg(l+x)\cos\theta$$

مکانیک لاگرانژی



$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2m(l+x)^2} + \frac{1}{2}kx^2 - mg(l+x)\cos\theta$$

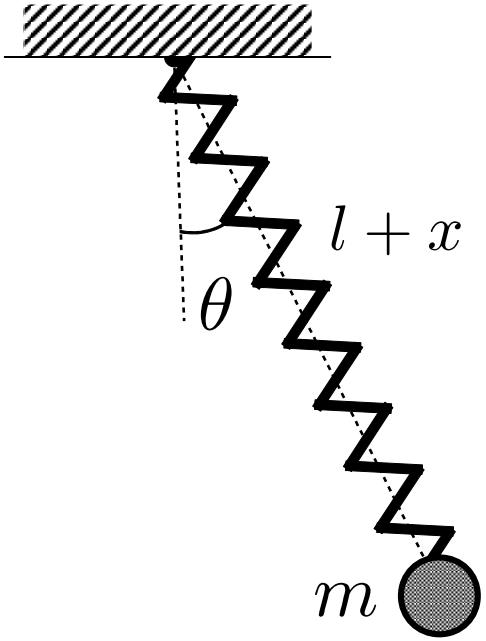
$$\dot{x} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}\right) : \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m} \Rightarrow p_x = m\dot{x}$$

$$\dot{p}_x = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right) : \quad \dot{p}_x = \frac{p_\theta^2}{m(l+x)^3} - kx + mg\cos\theta$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta}\right) : \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m(l+x)^2} \Rightarrow p_\theta = m(l+x)^2\dot{\theta}$$

$$\dot{p}_\theta = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}\right) : \quad \dot{p}_\theta = -mg(l+x)\sin\theta$$

مکانیک لاگرانژی



$$\begin{cases} p_x = m\dot{x} \\ \dot{p}_x = \dfrac{p_\theta^2}{m(l+x)^3} - kx + mg\cos\theta \end{cases}$$

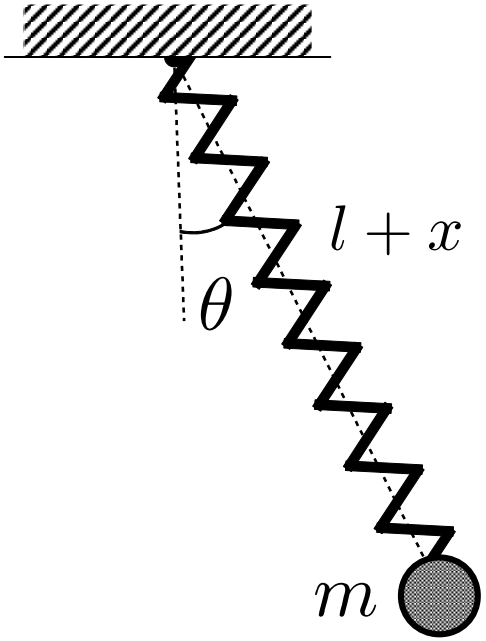
$$m\ddot{x} = \frac{p_\theta^2}{m(l+x)^3} - kx + mg\cos\theta$$

$$\begin{cases} p_\theta = m(l+x)^2\dot{\theta} \\ \dot{p}_\theta = -mg(l+x)\sin\theta \end{cases}$$

$$m(l+x)^2\ddot{\theta} + 2m(l+x)\dot{x}\dot{\theta} = -mg(l+x)\sin\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$\begin{cases} p_x = m\dot{x} \\ \dot{p}_x = \dfrac{p_\theta^2}{m(l+x)^3} - kx + mg\cos\theta \end{cases}$$

$$m\ddot{x} = \boxed{\frac{p_\theta^2}{m(l+x)^3}} - kx + mg\cos\theta$$

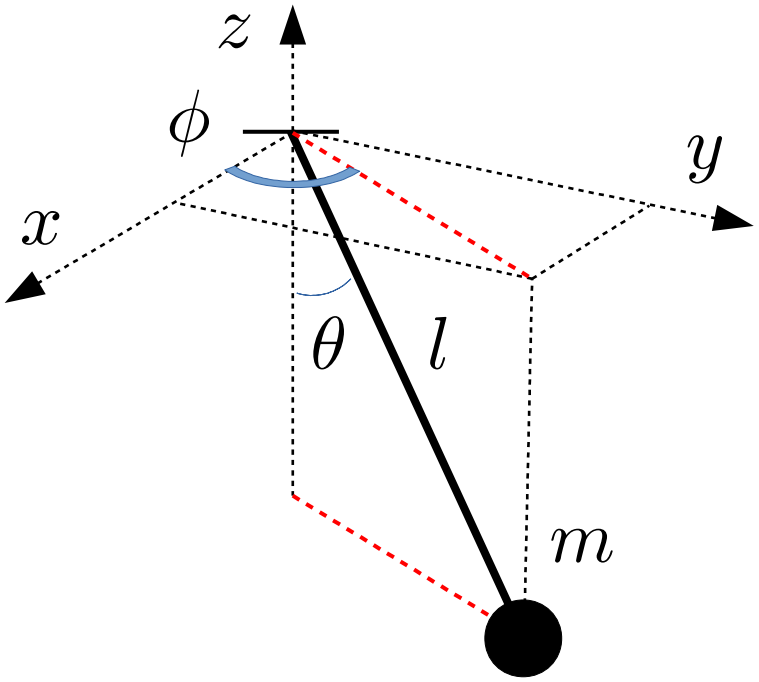
$$\boxed{m\ddot{x} = m(l+x)\dot{\theta}^2 - kx + mg\cos\theta}$$

$$\begin{cases} p_\theta = m(l+x)^2\dot{\theta} \\ \dot{p}_\theta = -mg(l+x)\sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{m(l+x)^2\ddot{\theta} + 2m(l+x)\dot{x}\dot{\theta} = -mg(l+x)\sin\theta}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$m:\begin{cases}\dot{x}=-l\dot{\phi}\sin\phi\sin\theta+l\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta\\ \dot{y}=l\dot{\phi}\cos\phi\sin\theta+l\dot{\theta}\sin\phi\cos\theta\\ \dot{z}=l\dot{\theta}\sin\theta\end{cases}$$

$$T=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)$$

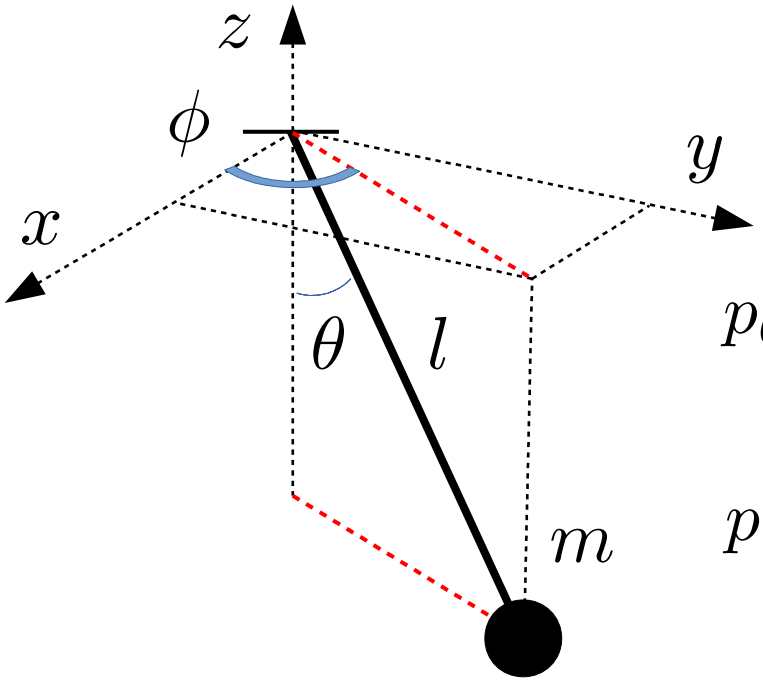
$$V=-mgl\cos\theta$$

$$m:\begin{cases}x=l\cos\phi\sin\theta\\ y=l\sin\phi\sin\theta\\ z=-l\cos\theta\end{cases}$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+mgl\cos\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta) + mgl\cos\theta$$

$$p_\theta = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2}$$

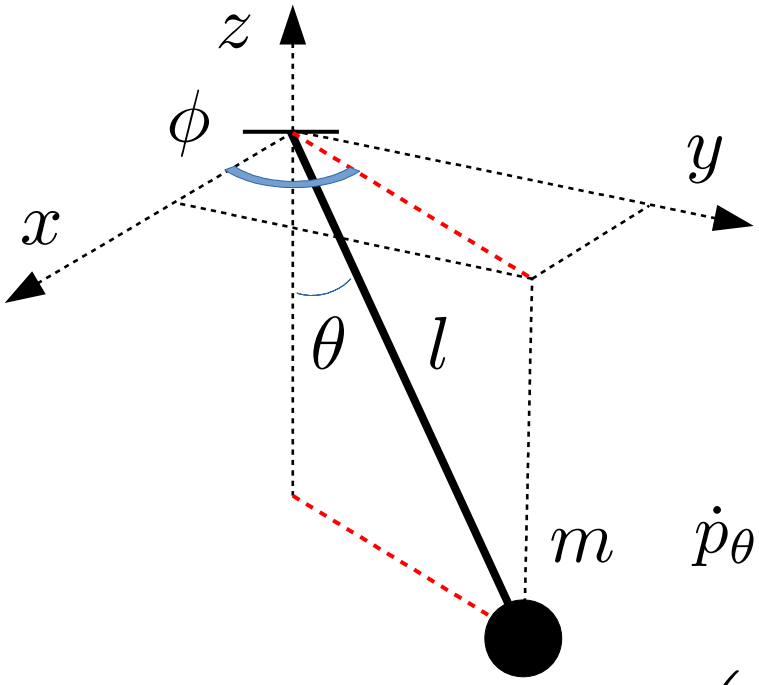
$$p_\phi = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) = ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2\sin^2\theta}$$

$$T = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2\sin^2\theta}, \qquad V = -mgl\cos\theta$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2\theta} - mgl\cos\theta$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta}\right) : \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{ml^2} \Rightarrow p_\theta = ml^2\dot{\theta}$$

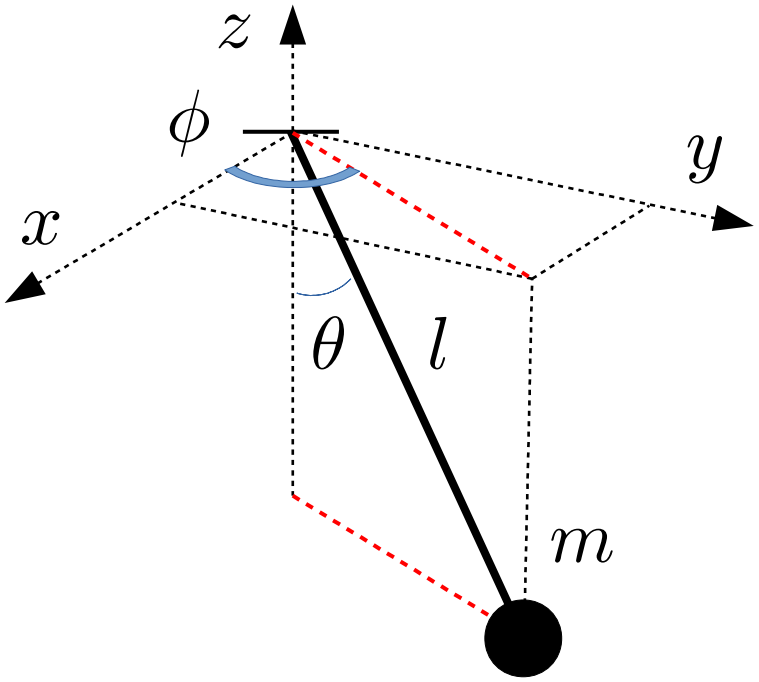
$$\dot{p}_\theta = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta}\right) : \quad \dot{p}_\theta = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} - mgl\sin\theta$$

$$\dot{\phi} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\phi}\right) : \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta} \Rightarrow p_\phi = ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta$$

$$\dot{p}_\phi = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}\right) : \quad \dot{p}_\phi = 0 \Rightarrow p_\phi = \text{const.}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مکانیک لاگرانژی



$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} + \frac{p_\phi^2}{2ml^2 \sin^2\theta} - mgl\cos\theta$$

$$\begin{cases} p_\theta = ml^2\dot{\theta} \\ \dot{p}_\theta = \dfrac{p_\phi^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} - mgl\sin\theta \end{cases}$$

$$ml^2\ddot{\theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{ml^2 \sin^3\theta} - mgl\sin\theta$$

$$p_\phi = ml^2\dot{\phi}\sin^2\theta = \text{const.}$$

$$\boxed{\dot{\phi} = \frac{p_\phi}{ml^2 \sin^2\theta}}$$

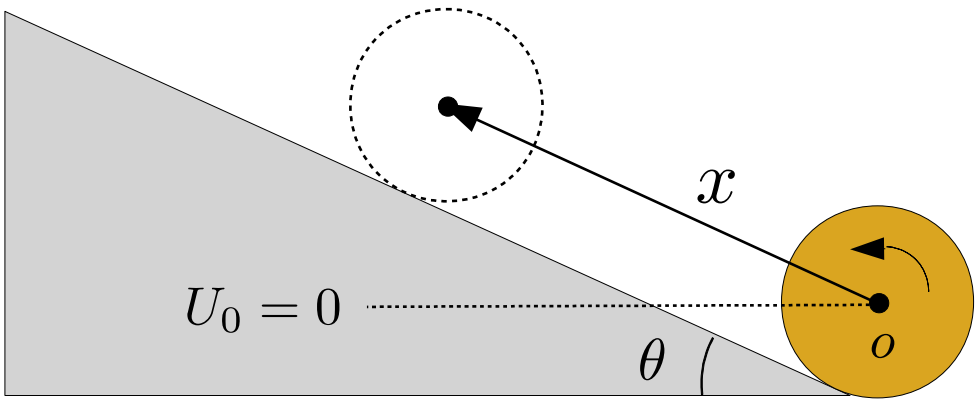
$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{m^2 l^4 \sin^3\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta}$$

محمدرضا مظفری — گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

کاربردها

مکانیک لاگرانژی

$$x = R\phi, \quad \dot{x} = R\dot{\phi}$$



$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_o\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}M\dot{x}^2$$

$$V = Mgx\sin\theta$$

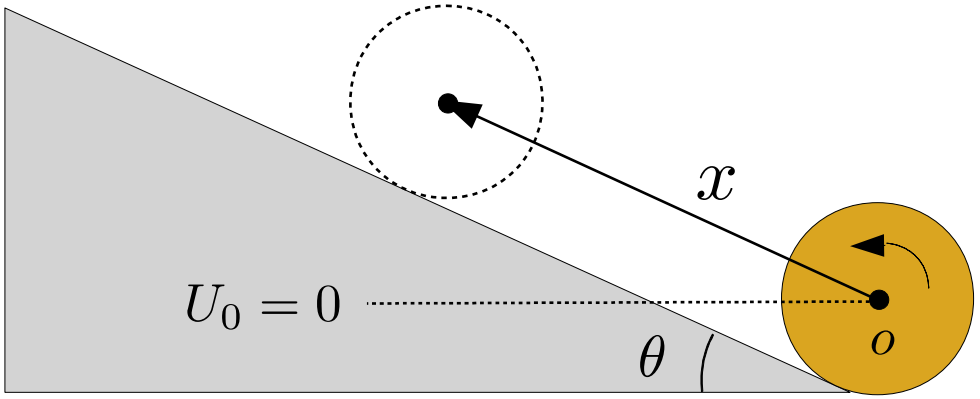
$$\mathcal{L} = T - V = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - Mgx\sin\theta$$

$$p_x = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{3}{2}M\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{2p_x}{3M}$$

$$T = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 = \frac{p_x^2}{3M}, \quad V = Mgx\sin\theta$$

$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{3M} + Mgx\sin\theta$$

مکانیک لاگرانژی



$$\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{3M} + Mgx\sin\theta$$

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x}\right) : \quad \dot{x} = \frac{2p_x}{3M} \Rightarrow p_x = \frac{3}{2}M\dot{x}$$

$$\dot{p}_x = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right) : \quad \dot{p}_x = -Mg\sin\theta$$

$$\frac{3}{2}M\ddot{x} = -Mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2}{3}g\sin\theta$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم