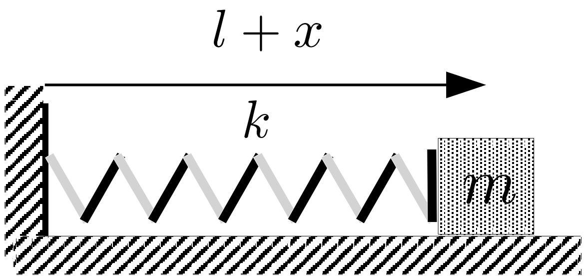
جلسه بیستم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸



$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

نقطه‌ی تعادل : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0$

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -kx$$ (نیروی بازگرداننده)

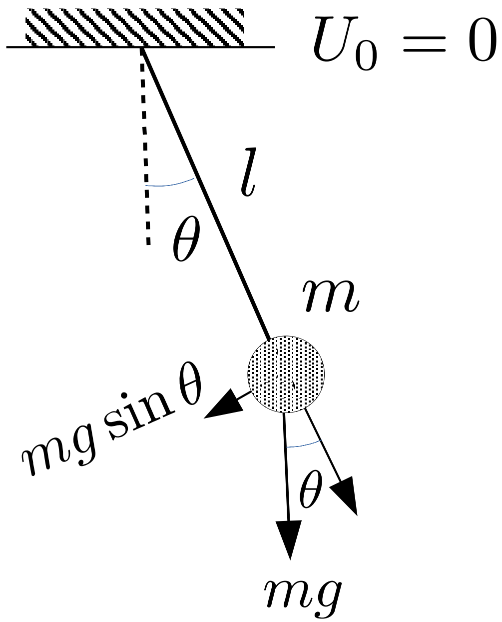
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = kx = 0$$

نقطه‌ی تعادل : $x = 0$

از مباحث فیزیک ۱

نقطه‌ی تعادل **پایدار** : $x = 0$

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$V(\theta) = -mgl\cos\theta$$

نقطه‌ی تعادل : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$

$$\tau_\theta = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -mgl\sin\theta$$ (گشتاور نیروی بازگرداننده)

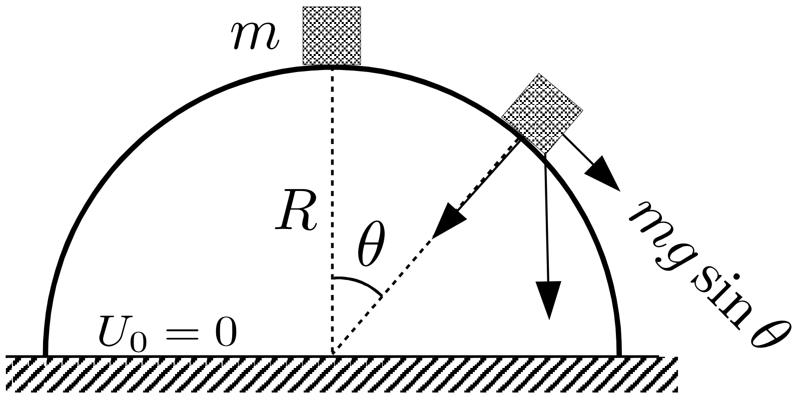
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = mgl\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

نقطه‌ی تعادل : $\theta = 0$

از مباحث فیزیک ۱

نقطه‌ی تعادل **پایدار** : $\theta = 0$

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$V(\theta) = mgR\cos\theta$$

نقطه‌ی تعادل : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$

$\tau_\theta = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = mgR\sin\theta$ (گشتاور نیروی بازگرداننده)

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -mgR\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

نقطه‌ی تعادل : $\theta = 0$

از مباحث فیزیک ۱

نقطه‌ی تعادل **ناپایدار** : $\theta = 0$

برای یک سیستم پایستار

$$V = V(q)$$

نیرو یا گشتاور نیروی وارد بر سیستم برابر صفر می‌شوند

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)_{q=q_0} = 0$$

$$V(q) = V(q_0) + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)_{q_0}(q-q_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0}(q-q_0)^2 + \cdots$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)_{q=q_0} = 0 \Longrightarrow V(q) = V(q_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0}(q-q_0)^2 + \cdots$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

برای یک سیستم پایستار

$$V = V(q)$$

نیرو یا گشتاور نیروی وارد بر
سیستم برابر صفر می‌شوند

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)_{q=q_0} = 0$$

$$V(q) = V(q_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0}(q-q_0)^2 + \cdots$$

فرض می‌کنیم $V(q_0) = 0 : \; V(q) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0}(q-q_0)^2 + \cdots$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

برای یک سیستم پایستار

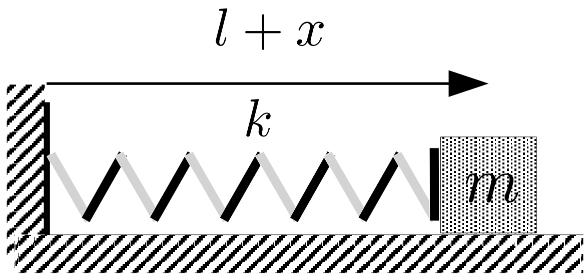
$$V = V(q)$$

نیرو یا گشتاور نیروی وارد بر سیستم برابر صفر می‌شوند

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)_{q=q_0} = 0$$

$$V(q) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0}(q-q_0)^2 + \cdots$$

$$F_q = -\frac{\mathrm{d}V(q)}{\mathrm{d}q} = -\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0}(q-q_0)$$



ثابت فنر $k = \left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0} > 0 \Longrightarrow$ تعادل پایدار

$$F_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -kx$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

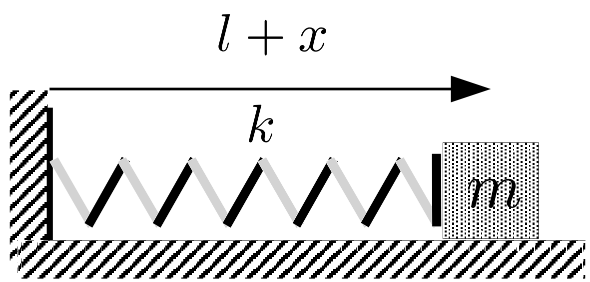
برای یک سیستم پایستار

$$V = V(q)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)_{q=q_0} = 0$$

نیرو یا گشتاور نیروی وارد بر
سیستم برابر صفر می‌شوند

ثابت فنر $k = \left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0} > 0 \Longrightarrow$ تعادل پایدار



$$\omega_0 \propto \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

برای یک سیستم پایستار

$$V = V(q)$$

نیرو یا گشتاور نیروی وارد بر سیستم برابر صفر می‌شوند

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}q}\right)_{q=q_0} = 0$$

$$V(q) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0}(q-q_0)^2 + \cdots$$

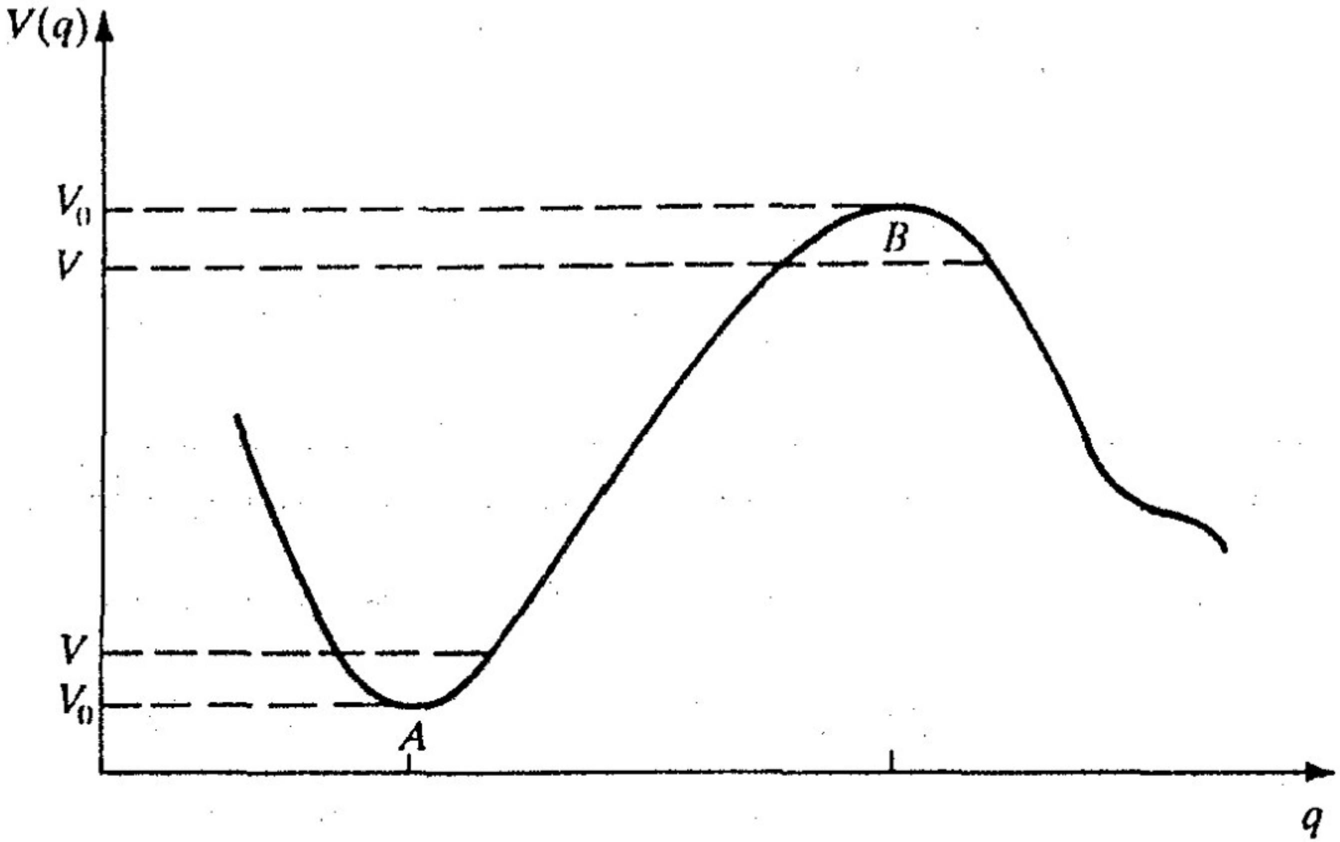
$$F_q = -\frac{\mathrm{d}V(q)}{\mathrm{d}q} = -\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0}(q-q_0)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}q^2}\right)_{q_0} < 0 \quad \Longrightarrow$$ تعادل ناپایدار

دینامیک سیستم‌های نوسانی

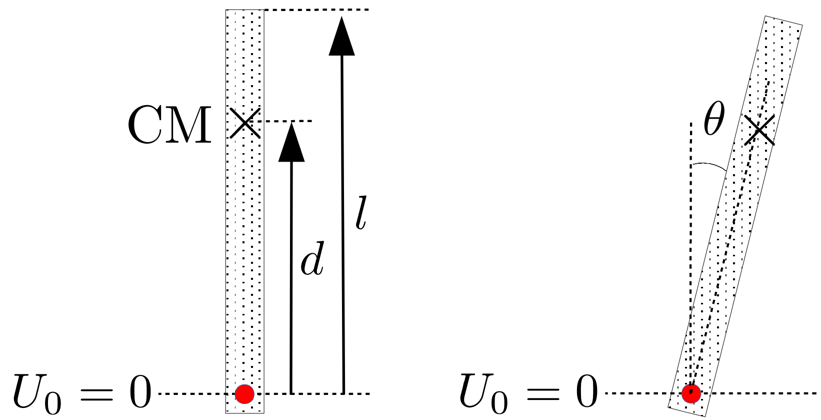
برای یک سیستم پایستار

$$V = V(q)$$



محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

$$V(\theta) = mgd\cos\theta$$



نقطه‌ی تعادل : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = -mgd\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=0} = -mgd\cos\theta|_{\theta=0} = -mgd < 0$$

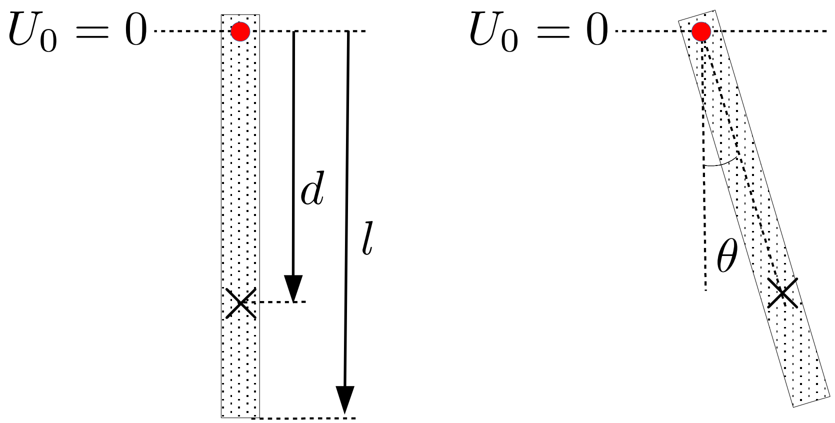
$\theta = 0$ نقطه‌ی تعادل ناپایدار

نقطه‌ی تعادل : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = mgd\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

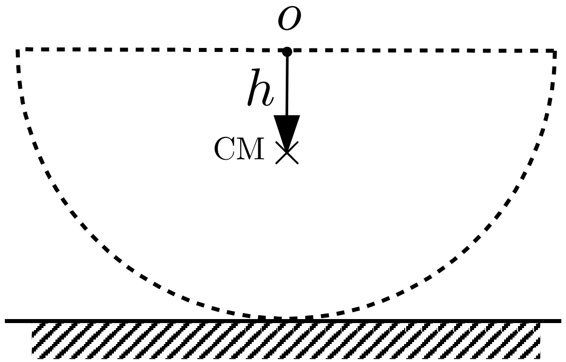
$$\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=0} = mgd\cos\theta|_{\theta=0} = mgd > 0$$

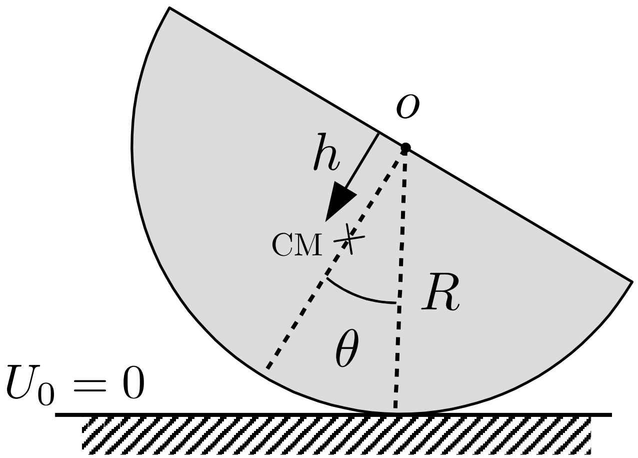
$\theta = 0$ نقطه‌ی تعادل پایدار



$$V(\theta) = -mgd\cos\theta$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی





$$V(\theta) = mg(R - h\cos\theta)$$

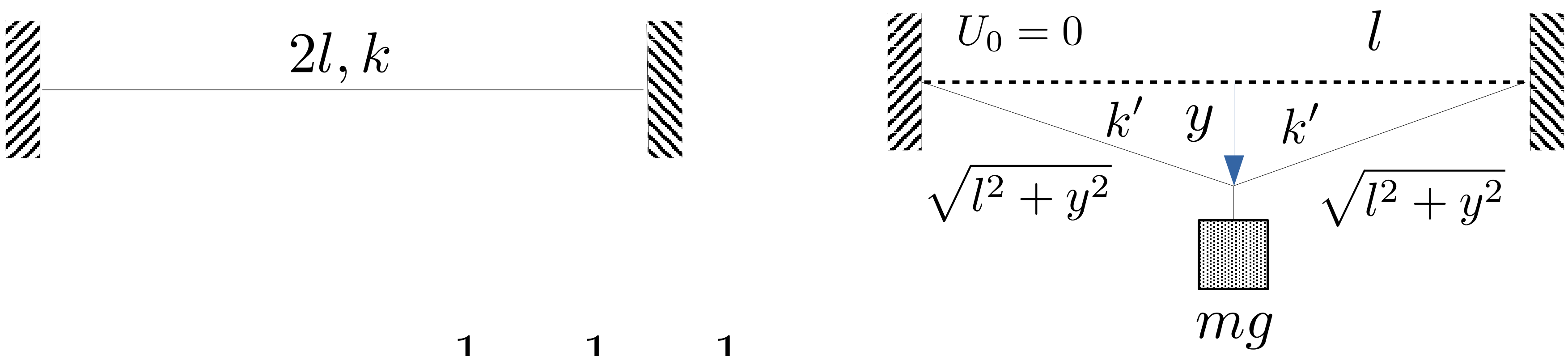
نقطه‌ی تعادل : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = mgh\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=0} = mgh\cos\theta|_{\theta=0} = mgh > 0$$

$\theta = 0$ نقطه تعادل پایدار

دینامیک سیستم‌های نوسانی



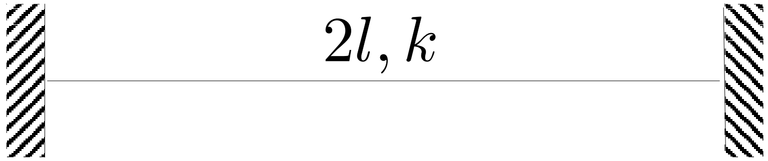
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k'} + \frac{1}{k'} \Rightarrow k' = 2k$$

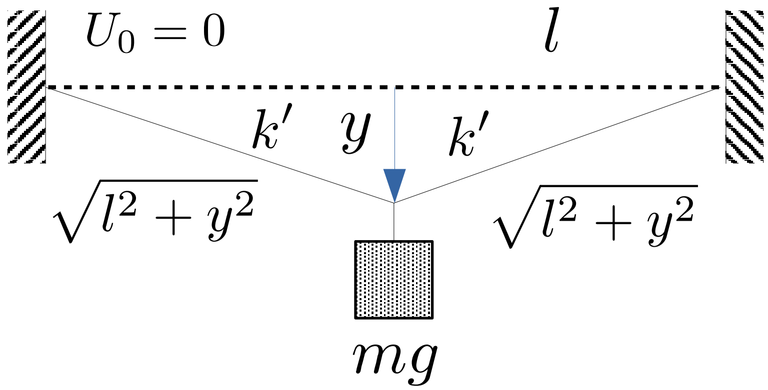
$$V(y) = -mgy + \frac{1}{2}k'(\sqrt{l^2+y^2} - l)^2 + \frac{1}{2}k'(\sqrt{l^2+y^2} - l)^2$$

$$V(y) = -mgy + k(\sqrt{l^2+y^2} - l)^2 + k(\sqrt{l^2+y^2} - l)^2$$

$$V(y) = -mgy + 2k(\sqrt{l^2+y^2} - l)^2$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

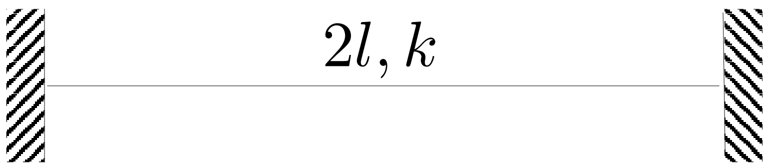


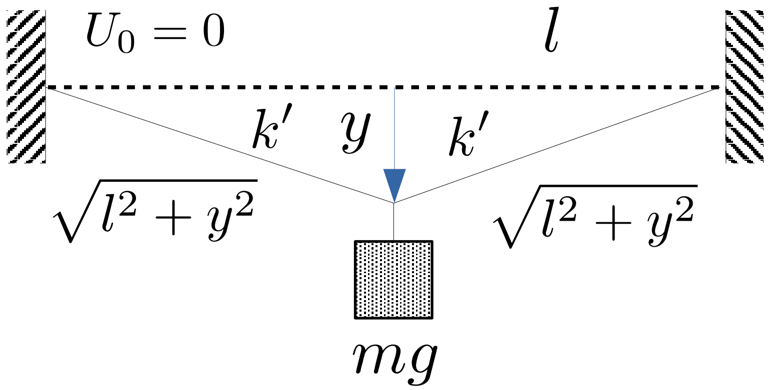


$$V(y) = -mgy + 2k(\sqrt{l^2+y^2} - l)^2$$

$$V(y) = -mgy + 2k(y^2 - 2l\sqrt{l^2+y^2} + 2l^2)$$

نقطه‌ی تعادل : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = 0 \Rightarrow -mg + 2k(2y - 2ly(l^2+y^2)^{-1/2}) = 0$

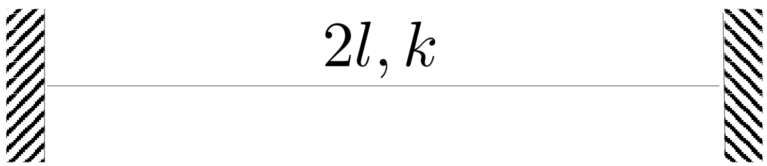


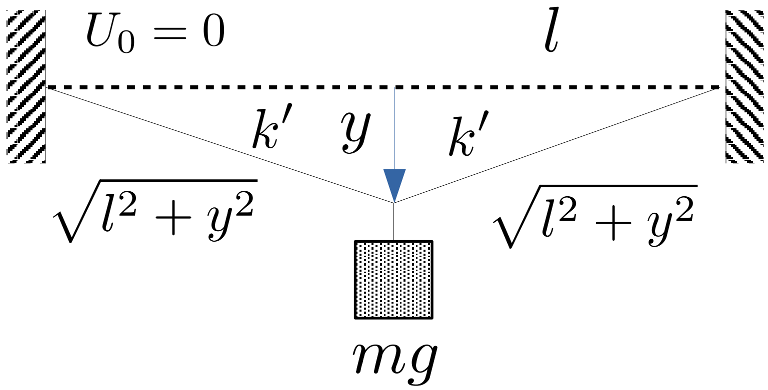


$$-mg + 2k\left(2y - \frac{2ly}{\sqrt{l^2+y^2}}\right) = 0$$

$$-mg + 4kl\left(\frac{y}{l} - \frac{y}{l}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{l}\right)^2}}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{mg}{4kl} + \left(\frac{y}{l} - \frac{y}{l}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{l}\right)^2}}\right) = 0$$

$$c = \frac{mg}{4kl}, \quad x = \frac{y}{l}, \qquad -c + x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 0$$





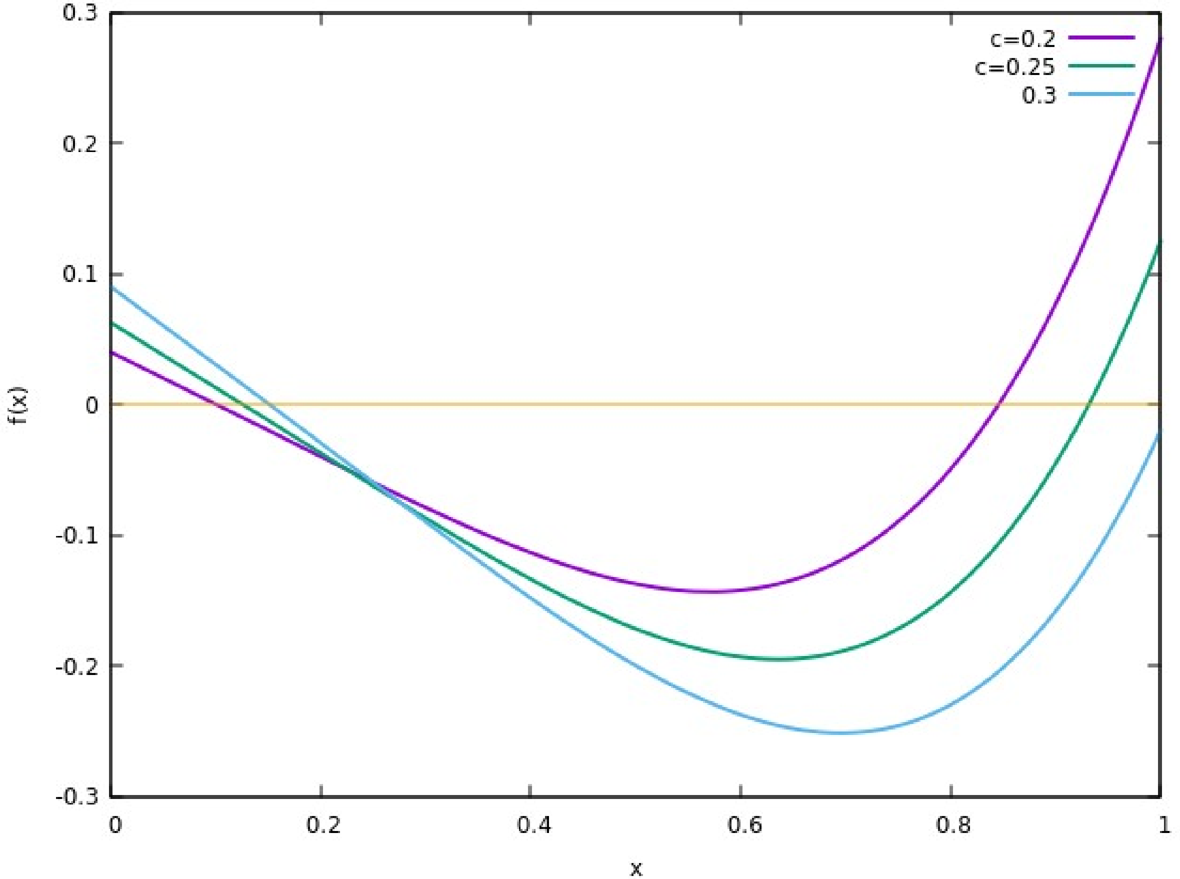
$$-c + x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 0 \Rightarrow (x-c)^2 = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow (x-c)^2(1+x^2) = x^2$$

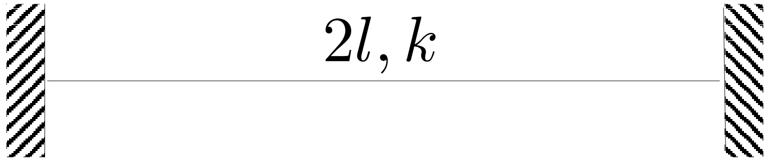
$$f(x) = x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2cx + c^2 = 0$$

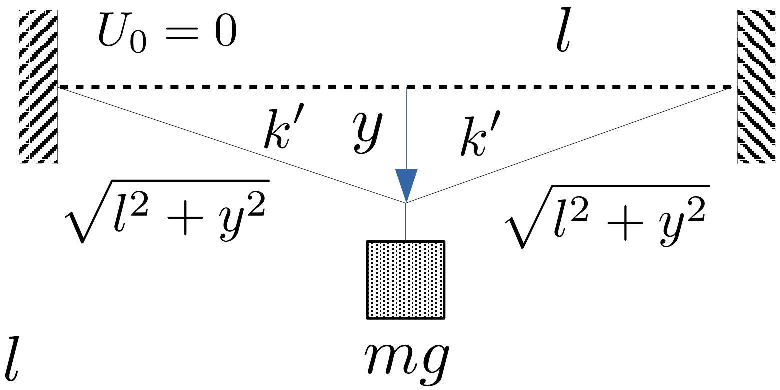
$$m = 1\text{kg},\ g = 10\text{m/s}^2,\ l = 1\text{m},\ k = 10\text{N/m},\ c = \frac{mg}{4kl} = 0.25$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$f(x) = x^4 - 2cx^3 + c^2x^2 - 2cx + c^2 = 0, \quad c = 0.25$$







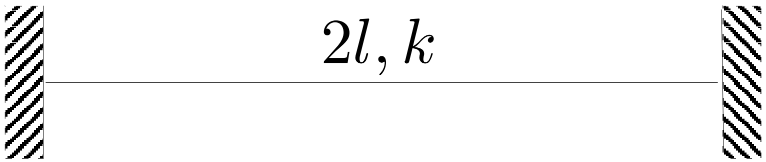
$$y \ll l$$

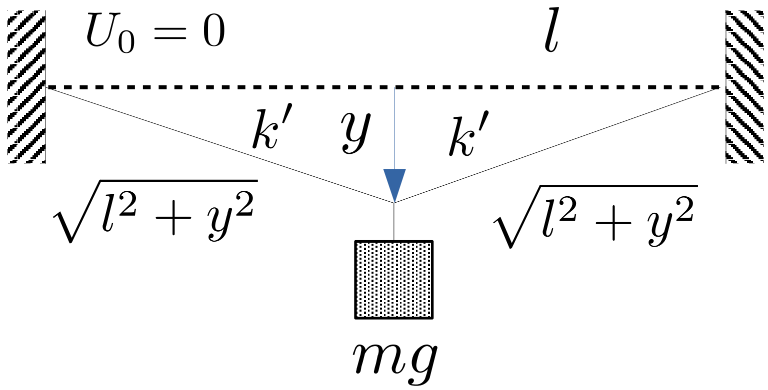
$$V(y) = -mgy + 2k(y^2 - 2l\sqrt{l^2+y^2}) = -mgy + 2k\left(y^2 - 2l^2\sqrt{1+\frac{y^2}{l}}\right)$$

$$V(y) \simeq -mgy + 2k\left(\cancel{y^2} - 2l^2\left[1 + \frac{1}{2}\cancel{\left(\frac{y}{l}\right)^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{y}{l}\right)^4\right]\right)$$

$$V(y) \simeq -mgy - 4kl^2\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{y}{l}\right)^4\right] = -mgy + \frac{k}{2l^2}y^4 - 4kl^2$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی





$$y \ll l$$

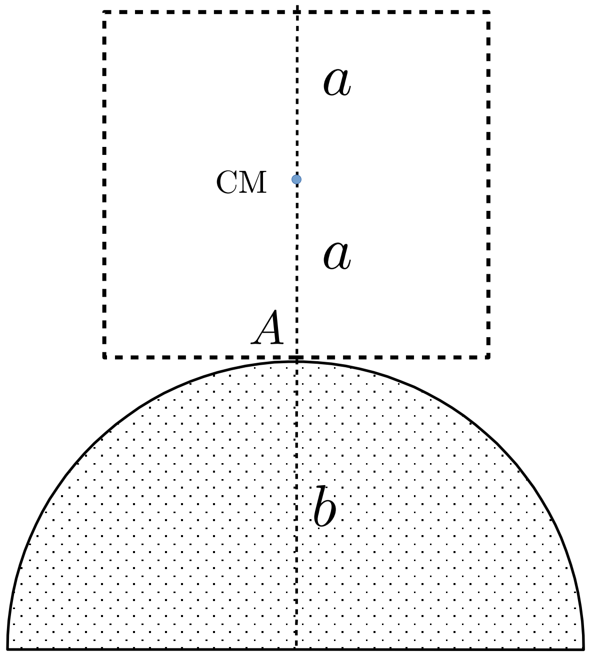
$$V(y) \simeq -mgy + \frac{k}{2l^2} y^4 - 4kl^2$$

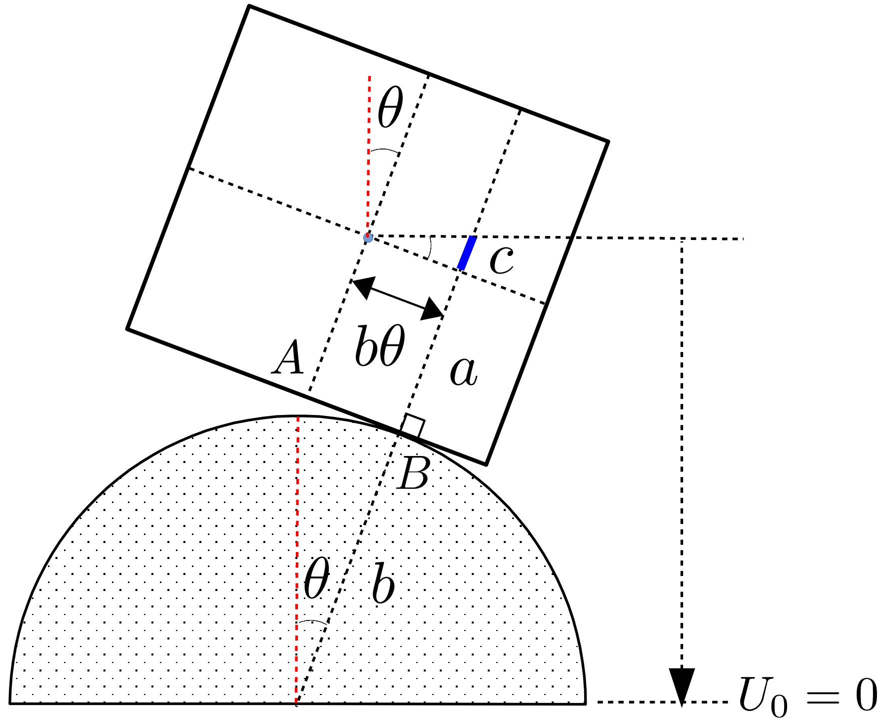
نقطه‌ی تعادل : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = 0 \Rightarrow -mg + \dfrac{2k}{l^2} y^3 = 0 \Rightarrow y_0 = \left(\dfrac{mgl^2}{2k}\right)^{1/3}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}y^2}\right)_{y_0} = \frac{6k}{l^2} y_0^2 = \frac{6k}{l^2}\left(\frac{mgl^2}{2k}\right)^{2/3}$$

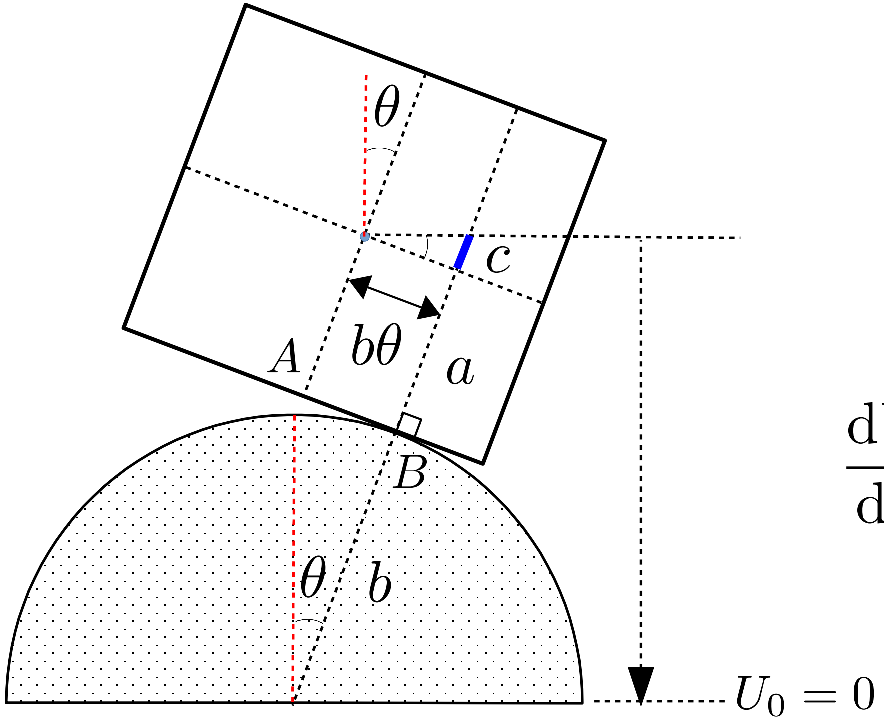
$$V(y) \simeq \frac{1}{2} 6k \frac{y_0^2}{l^2}(y-y_0)^2\,,\ \mathcal{L} = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 - \frac{1}{2} 6k \frac{y_0^2}{l^2}(y-y_0)^2\,, \omega = \left(\frac{y_0}{l}\right)\sqrt{\frac{6k}{m}}$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی





$$\begin{cases} V(\theta) = mg(a+b+c)\cos\theta \\ \tan\theta = \dfrac{c}{b\theta} \Rightarrow c = b\theta\tan\theta \end{cases} \Longrightarrow V(\theta) = mg[(a+b)\cos\theta + b\theta\sin\theta]$$



$$V(\theta) = mg[(a+b)\cos\theta + b\theta\sin\theta]$$

نقطه‌ی تعادل : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$

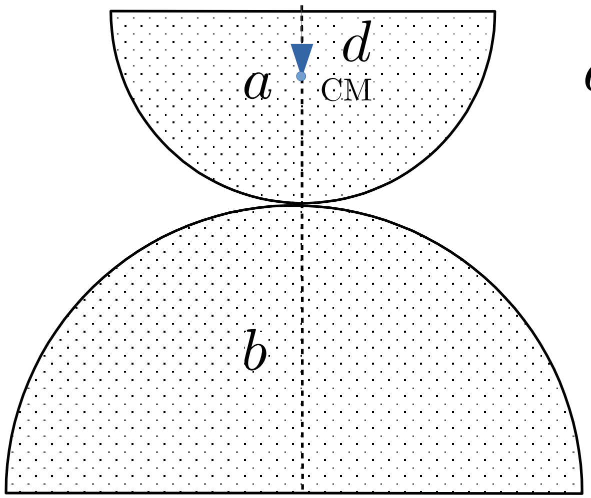
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = mg[-(a+b)\sin\theta + b\sin\theta + b\theta\cos\theta] = 0$$

$\Rightarrow \theta = 0$ نقطه تعادل

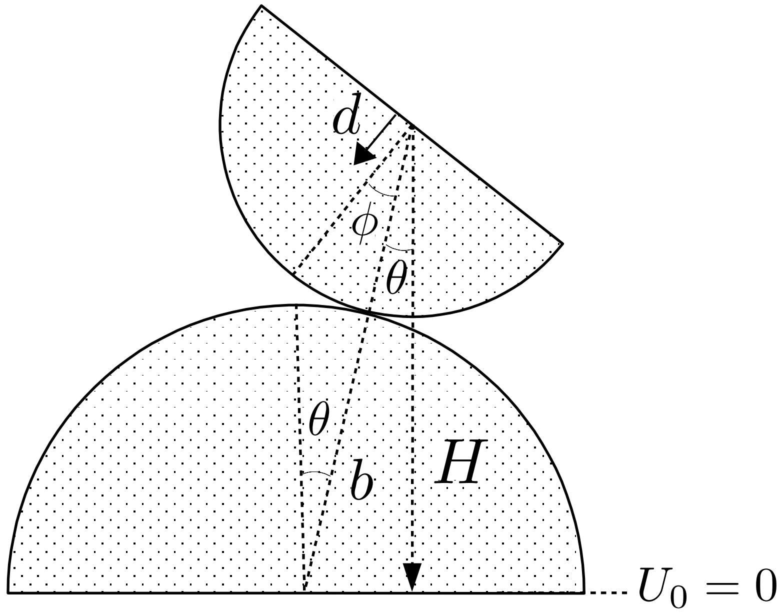
$$\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=0} = mg[-(a+b)\cos\theta + 2b\cos\theta - b\theta\sin\theta]_{\theta=0} = -a+b$$

تعادل ناپایدار $-a+b<0 \Rightarrow b<a$

تعادل پایدار $-a+b>0 \Rightarrow b>a$

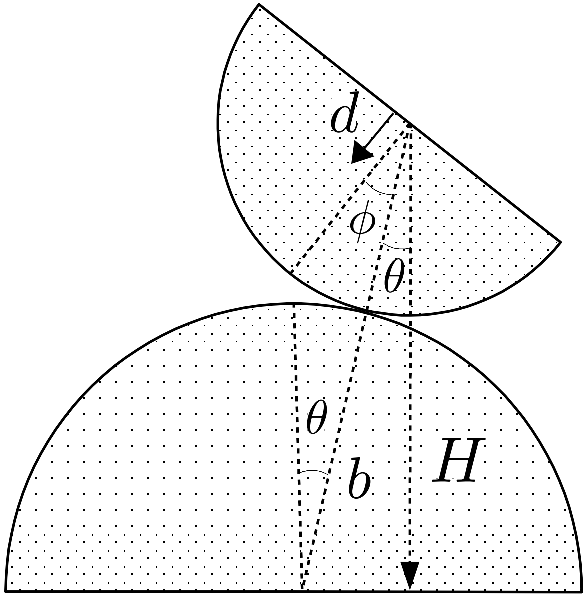


$$d = \frac{3a}{8}$$



$$\begin{cases} H = (a+b)\cos\theta \\ a\phi = b\theta \\ V = mg[H - d\cos(\theta+\phi)] \end{cases} \Longrightarrow V = mg\left[(a+b)\cos\theta - \frac{3a}{8}\cos\left(\theta + \frac{b\theta}{a}\right)\right]$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$V = mg\left[(a+b)\cos\theta - \frac{3a}{8}\cos\left(\theta + \frac{b\theta}{a}\right)\right]$$

نقطه‌ی تعادل : $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = mg\left[-(a+b)\sin\theta + \frac{3a}{8}\left(1+\frac{b}{a}\right)\sin\left(\theta+\frac{b\theta}{a}\right)\right]$$

$\Rightarrow \theta = 0$ نقطه تعادل

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\theta^2} = mg\left[-(a+b)\cos\theta + \frac{3a}{8}\left(1+\frac{b}{a}\right)^2\cos\left(\theta+\frac{b\theta}{a}\right)\right]_{\theta=0} = \frac{(a+b)}{3a}(-5a+3b)$$

تعادل ناپایدار $-5a+3b<0 \Rightarrow b<\dfrac{5a}{3}$

تعادل پایدار $-5a+3b>0 \Rightarrow b>\dfrac{5a}{3}$

برای یک سیستم پایستار

$$V = V(\{q\})$$

نیروها یا گشتاور نیروی‌های وارد بر سیستم برابر صفر می‌شوند

$$\left(\frac{\partial V}{\partial q_k}\right)_{\{q^0\}} = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q^0\}}$$

$$V(\{q\}) = V_0 + \frac{1}{2!}\sum_{i,j}^{n} k_{ij}(q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0) + \cdots$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q^0\}}, \quad V(\{q\}) = V_0 + \frac{1}{2!}\sum_{i,j}^{n} k_{ij}(q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0) + \cdots$$

سیستمی با دو درجه آزادی:

$$V(\{q\}) = V_0 + \frac{1}{2}[k_{11}(q_1 - q_1^0)^2 + k_{12}(q_1 - q_1^0)(q_2 - q_2^0)$$
$$+k_{21}(q_2 - q_2^0)(q_1 - q_1^0) + k_{22}(q_2 - q_2^0)^2]$$

$$V(\{q\}) = V_0 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_1 - q_1^0 & q_2 - q_2^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 - q_1^0 \\ q_2 - q_2^0 \end{bmatrix}$$

تعادل پایدار $\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0$ تعادل ناپایدار $\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} < 0$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q^0\}}, \quad V(\{q\}) = V_0 + \frac{1}{2!}\sum_{i,j}^{n} k_{ij}(q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0) + \cdots$$

سیستمی با سه درجه آزادی:

$$\begin{aligned} V(\{q\}) = V_0 + \frac{1}{2}[&k_{11}(q_1 - q_1^0)^2 + k_{12}(q_1 - q_1^0)(q_2 - q_2^0) + k_{13}(q_1 - q_1^0)(q_3 - q_3^0) \\ &+k_{21}(q_2 - q_2^0)(q_1 - q_1^0) + k_{22}(q_2 - q_2^0)^2 + k_{23}(q_2 - q_2^0)(q_3 - q_3^0) \\ &+k_{23}(q_2 - q_2^0)(q_3 - q_3^0) + k_{32}(q_2 - q_2^0)(q_3 - q_3^0) + k_{33}(q_3 - q_3^0)^2] \end{aligned}$$

$$V(\{q\}) = V_0 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_1 - q_1^0 & q_2 - q_2^0 & q_3 - q_3^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 - q_1^0 \\ q_2 - q_2^0 \\ q_3 - q_3^0 \end{bmatrix}$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_{\{q^0\}}, \quad V(\{q\}) = V_0 + \frac{1}{2!}\sum_{i,j}^{n} k_{ij}(q_i - q_i^0)(q_j - q_j^0) + \cdots$$

سیستمی با سه درجه آزادی:

$$V(\{q\}) = V_0 + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_1 - q_1^0 & q_2 - q_2^0 & q_3 - q_3^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 - q_1^0 \\ q_2 - q_2^0 \\ q_3 - q_3^0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} < 0$$ تعادل ناپایدار

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0$$ تعادل پایدار

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مثال:

$$V(x) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{k^2}{x}$$

نقطه تعادل

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0 : \quad kx - \frac{k^2}{x^2} = 0 \Rightarrow x_0 = k^{1/3}$$

تعادل پایدار

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x_0} = k + \frac{2k^2}{x_0^3} = 3k > 0$$

$$V(x) \simeq V(x_0) + \frac{1}{2}3k(x - x_0)^2, \qquad T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x_0) - \frac{3k}{2}(x - x_0)^2, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$

$$m\ddot{x} = -3k(x - x_0) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{3k}{m}x = \frac{3k}{m}x_0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

مثال:

$$V(x,y) = k(x^2 + y^2 - 2bx - 4by)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = 0: \quad k(2x - 2b) = 0 \Rightarrow x = b \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0: \quad k(2y - 4b) = 0 \Rightarrow y = 2b \end{cases} \Longrightarrow (x_0, y_0) = (b, 2b)$$

نقطه تعادل

تعادل پایدار

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)_{(x_0,y_0)} = 2k, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)_{(x_0,y_0)} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)_{(x_0,y_0)} = 2k$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k \end{vmatrix} = 4k^2 > 0$$

$$V(x,y) \simeq V(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

مثال:

$$V(x,y) = k(x^2 + y^2 - 2bx - 4by)$$

$$V(x,y) \simeq V(x_0,y_0) + \frac{1}{2}2k(x-b)^2 + \frac{1}{2}2k(y-2b)^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - V(x_0,y_0) - \frac{1}{2}2k(x-b)^2 - \frac{1}{2}2k(y-2b)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow m\ddot{x} + 2kx = 2kx_0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2kx_0}{m}, \quad \omega_x = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} \Rightarrow m\ddot{y} + 2ky = 2ky_0 \Rightarrow \ddot{y} + \frac{2k}{m}y = \frac{2ky_0}{m}, \quad \omega_y = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

دینامیک سیستم‌های نوسانی

مثال:

$$V(x,y) = k(x^2 + y^2 - 2bx - 4by)$$

$$V(x,y) = \underbrace{k(x^2 - 2bx + b^2)}_{= (x-b)^2} + \underbrace{k(y^2 - 4by + 4b^2)}_{= (y-2b)^2} \underbrace{- kb^2 - k4b^2}_{= V_0}$$

$$V(x,y) = \frac{1}{2}2k(x-b)^2 + \frac{1}{2}2k(y-2b)^2 + V_0$$

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega_x^2(x-b)^2 + \frac{1}{2}m\omega_y^2(y-2b)^2 + V_0$$