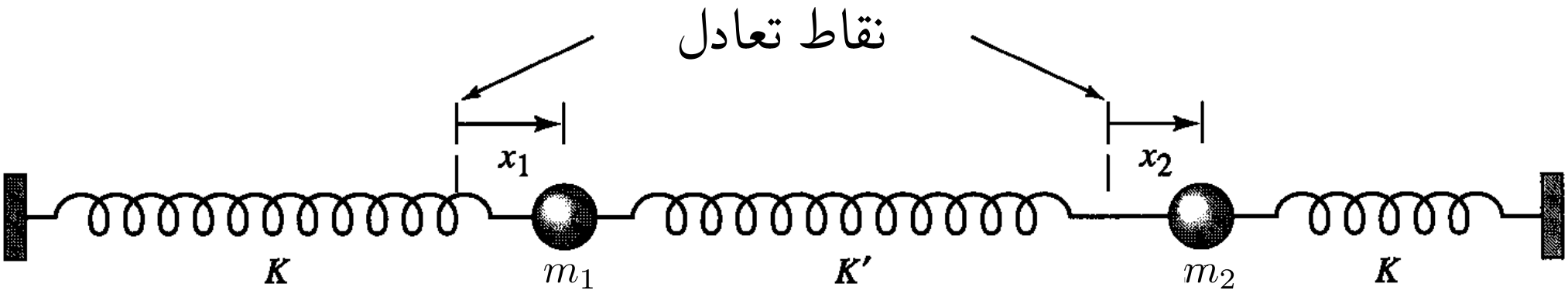
جلسه بیست و یکم

مکانیک تحلیلی

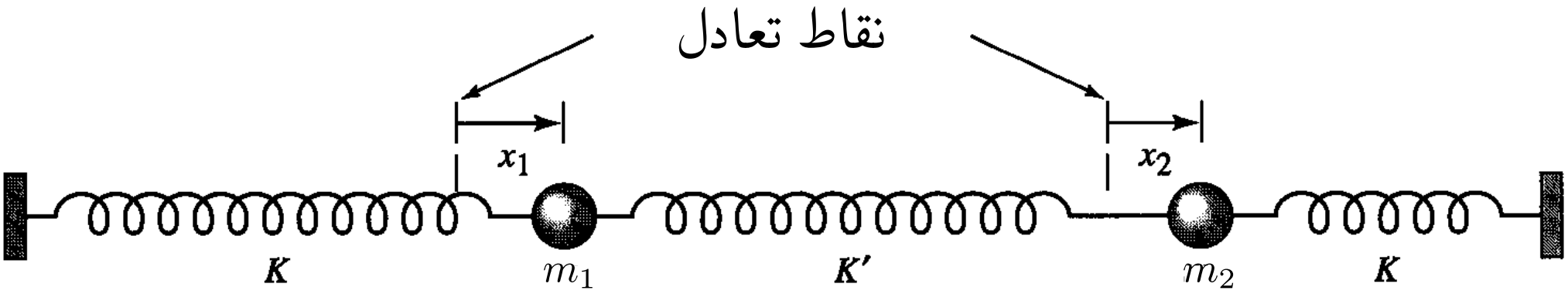
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

دینامیک سیستم‌های نوسانی



* نوسانگرهای یکسانی که فقط در امتداد خط راست حرکت می‌کنند.
* جفت شدگی توسط فنری با ثابت K' اعمال می‌شود.
* x_1 و x_2 جابجایی هر ذره نسبت به وضعیت تعادل

دینامیک سیستم‌های نوسانی



* انرژی پایسته است.

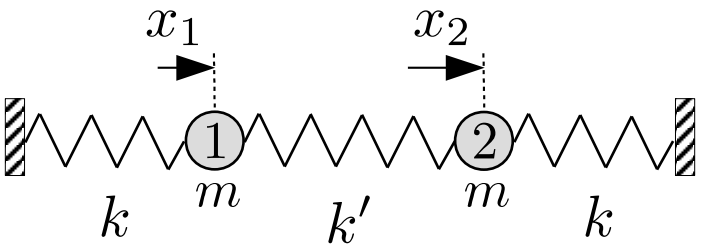
* m_1 وm_2 انرژی‌هایشان را از طریق فنر جفت کننده مبادله می‌کنند.

* حرکت واقعی سیستم شدیداً به شرایط اولیه بستگی دارد.

* هر حرکت نوسانی از ذرات را می‌توان به مدهای نوسانی سیستم تحت بررسی تجزیه کرد.

* حرکت هماهنگ ذرات با فرکانسهای مشخصی صورت می‌گیرد.

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_2^2$$

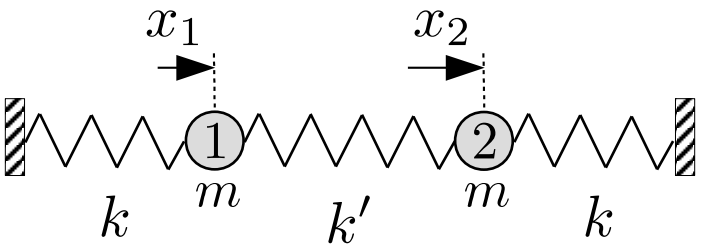
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}k\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}k\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}k'(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_1} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} : m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k'(x_2 - x_1) \Rightarrow m\ddot{x}_1 + (k + k')x_1 - k'x_2 = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_2} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} : m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k'(x_2 - x_1) \Rightarrow m\ddot{x}_2 + (k + k')x_2 - k'x_1 = 0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k+k')x_1 - k'x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + (k+k')x_2 - k'x_1 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + (k+k')a_1 - k'a_2 = 0 \\ -m\omega^2 a_2 + (k+k')a_2 - k'a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + (k+k') & -k' \\ -k' & -m\omega^2 + (k+k') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$[-m\omega^2 + (k+k')]^2 = k'^2 \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k+2k'}{m}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$x_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + (k+k')a_1 - k'a_2 = 0 \\ -m\omega^2 a_2 + (k+k')a_2 - k'a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k+2k'}{m}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + (k+k')a_1 - k'a_2 = 0 \\ \omega_1^2 = \dfrac{k}{m} \end{cases} \Rightarrow a_2 = a_1$$

اگر $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = 1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t}, \quad \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$x_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + (k+k')a_1 - k' a_2 = 0 \\ -m\omega^2 a_2 + (k+k')a_2 - k' a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k+2k'}{m}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + (k+k')a_1 - k' a_2 = 0 \\ \omega_2^2 = \dfrac{k+2k'}{m} \end{cases} \Rightarrow a_2 = -a_1$$

اگر $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = -1 : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t}, \quad \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2k'}{m}}$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}: \quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} \quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_1 t\\ \sin\omega_1 t\end{Bmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_1 t\\ \sin\omega_1 t\end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}: \quad \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{i\omega_2 t} \quad \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_2 t\\ \sin\omega_2 t\end{Bmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_2 t\\ \sin\omega_2 t\end{Bmatrix}$$

نمایش مختلط نمایش حقیقی نمایش بهنجار

روش بهنجارش

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\begin{bmatrix}A\\B\\C\end{bmatrix}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}: \quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} \quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_1 t\\ \sin\omega_1 t\end{Bmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_1 t\\ \sin\omega_1 t\end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}: \quad \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{i\omega_2 t} \quad \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_2 t\\ \sin\omega_2 t\end{Bmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_2 t\\ \sin\omega_2 t\end{Bmatrix}$$

نمایش مختلط | نمایش حقیقی | نمایش بهنجار

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(A_1\cos\omega_1 t + A_2\sin\omega_1 t) + \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(B_1\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t)$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} A\cos(\omega_1 t + \delta_1) + \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} B\cos(\omega_2 t + \delta_2)$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}: \quad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} \qquad \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_1 t\\ \sin\omega_1 t\end{Bmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_1 t\\ \sin\omega_1 t\end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}: \quad \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} e^{i\omega_2 t} \qquad \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_2 t\\ \sin\omega_2 t\end{Bmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos\omega_2 t\\ \sin\omega_2 t\end{Bmatrix}$$

نمایش مختلط | نمایش حقیقی | نمایش بهنجار

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} A\cos(\omega_1 t+\delta_1) + \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} B\cos(\omega_2 t+\delta_2)$$

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega_1 t+\delta_1) + B\cos(\omega_2 t+\delta_2) \\ x_2 = A\cos(\omega_1 t+\delta_1) - B\cos(\omega_2 t+\delta_2) \end{cases}$$

$A, B, \delta_1, \delta_2 = ?$

شرایط اولیه

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k+2k'}{m}$$

$$\begin{cases} x_1 = A\cos(\omega_1 t + \delta_1) + B\cos(\omega_2 t + \delta_2) \\ x_2 = A\cos(\omega_1 t + \delta_1) - B\cos(\omega_2 t + \delta_2) \end{cases}$$

$A, B, \delta_1, \delta_2 = ?$

شرایط اولیه

فرض می کنیم $k' = 0.25k \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{2}\omega_0$

شرایط اولیه $x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0$

$$1 = A\cos(\delta_1) + B\cos(\delta_2)$$

$$0 = A\cos(\delta_1) - B\cos(\delta_2)$$

$$A = B = \frac{1}{2}$$

$$0 = -\omega_1 A\sin(\delta_1) - \omega_1 B\sin(\delta_2)$$

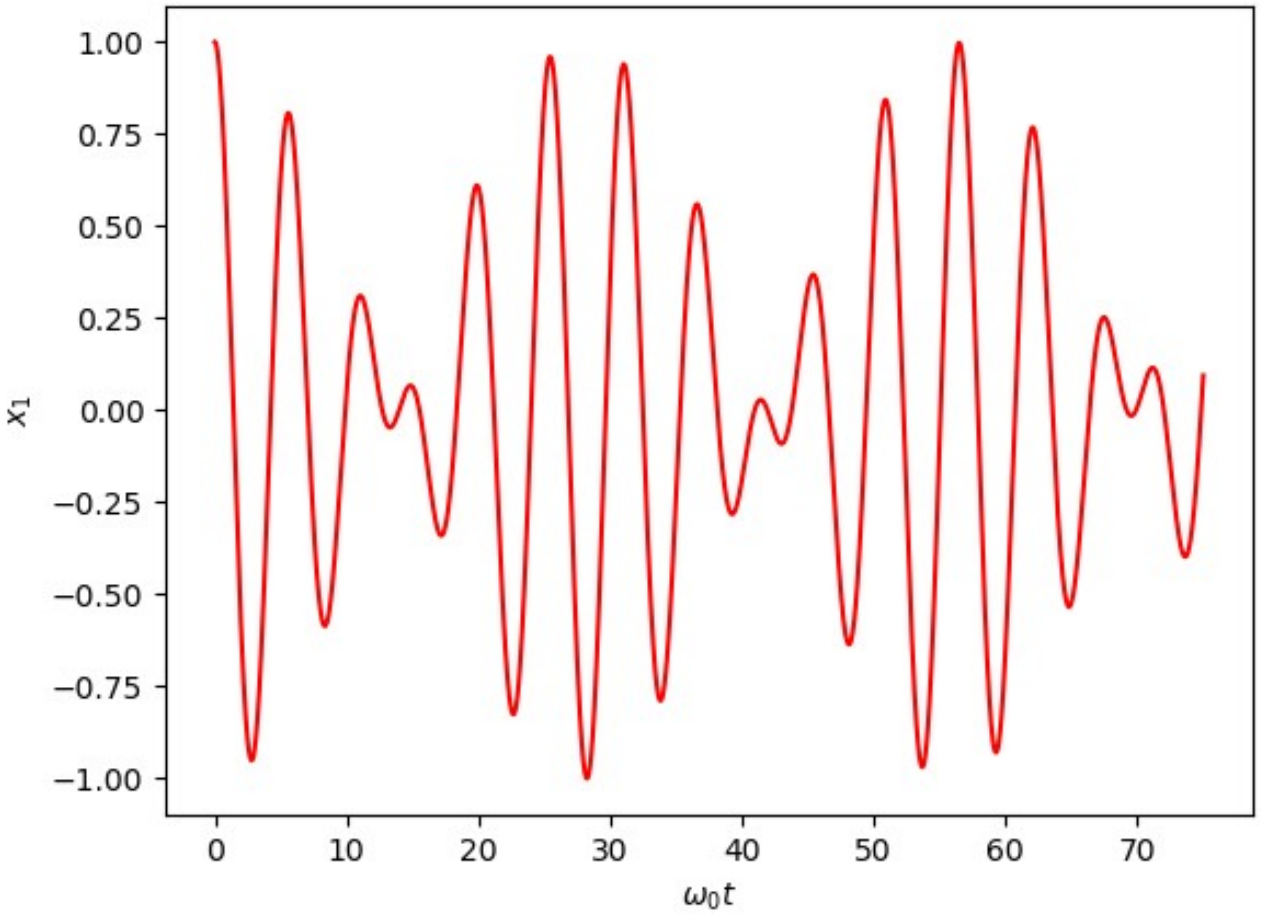
$$0 = -\omega_1 A\sin(\delta_1) + \omega_1 B\sin(\delta_2)$$

$$\delta_1, \delta_2 = 0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$x_1 = \frac{1}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$



$$k' = 0.25k$$

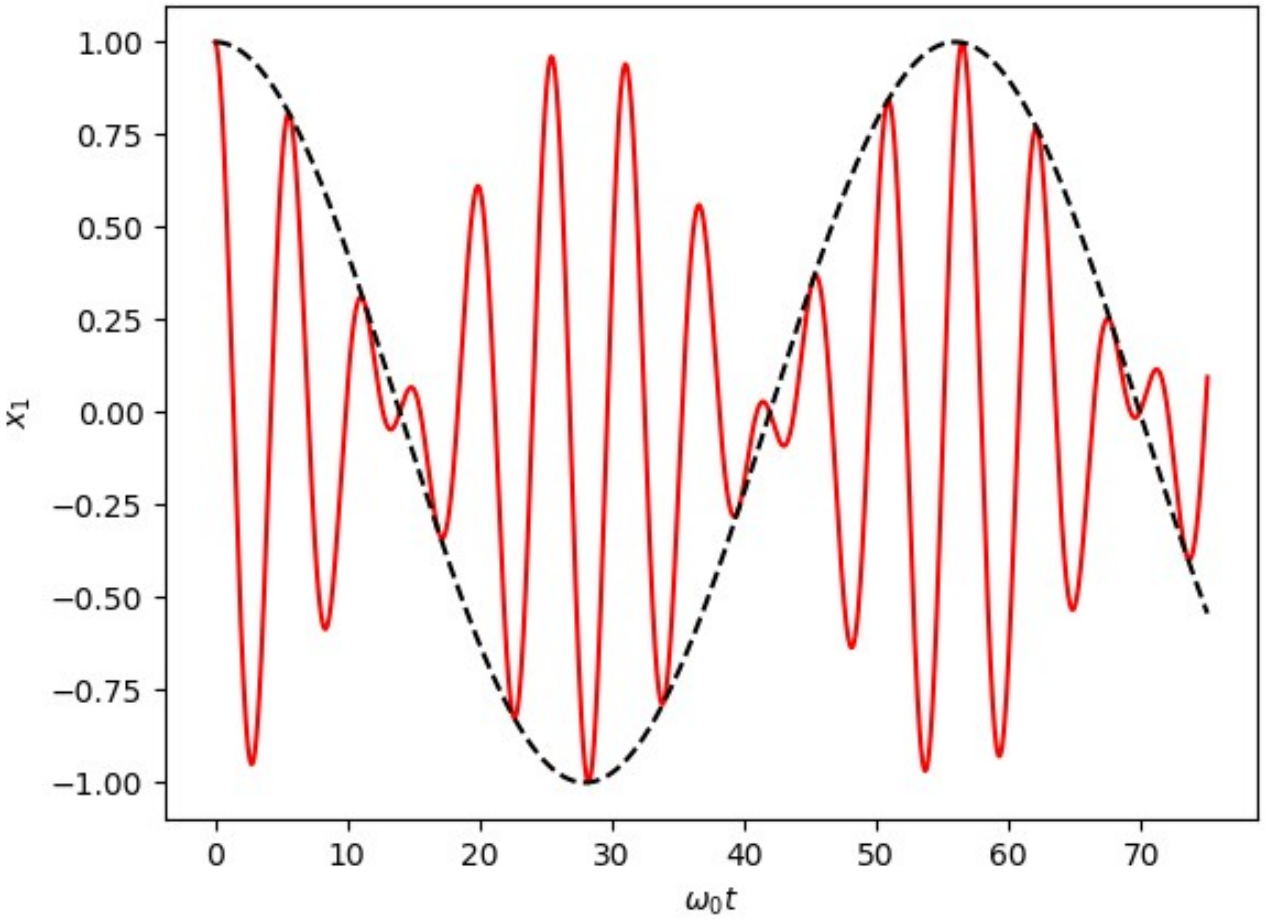
$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\omega_2 = \sqrt{1.5}\omega_0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$x_1 = \frac{1}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = \cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t\right)\cos\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t\right)$$



$$k' = 0.25k$$

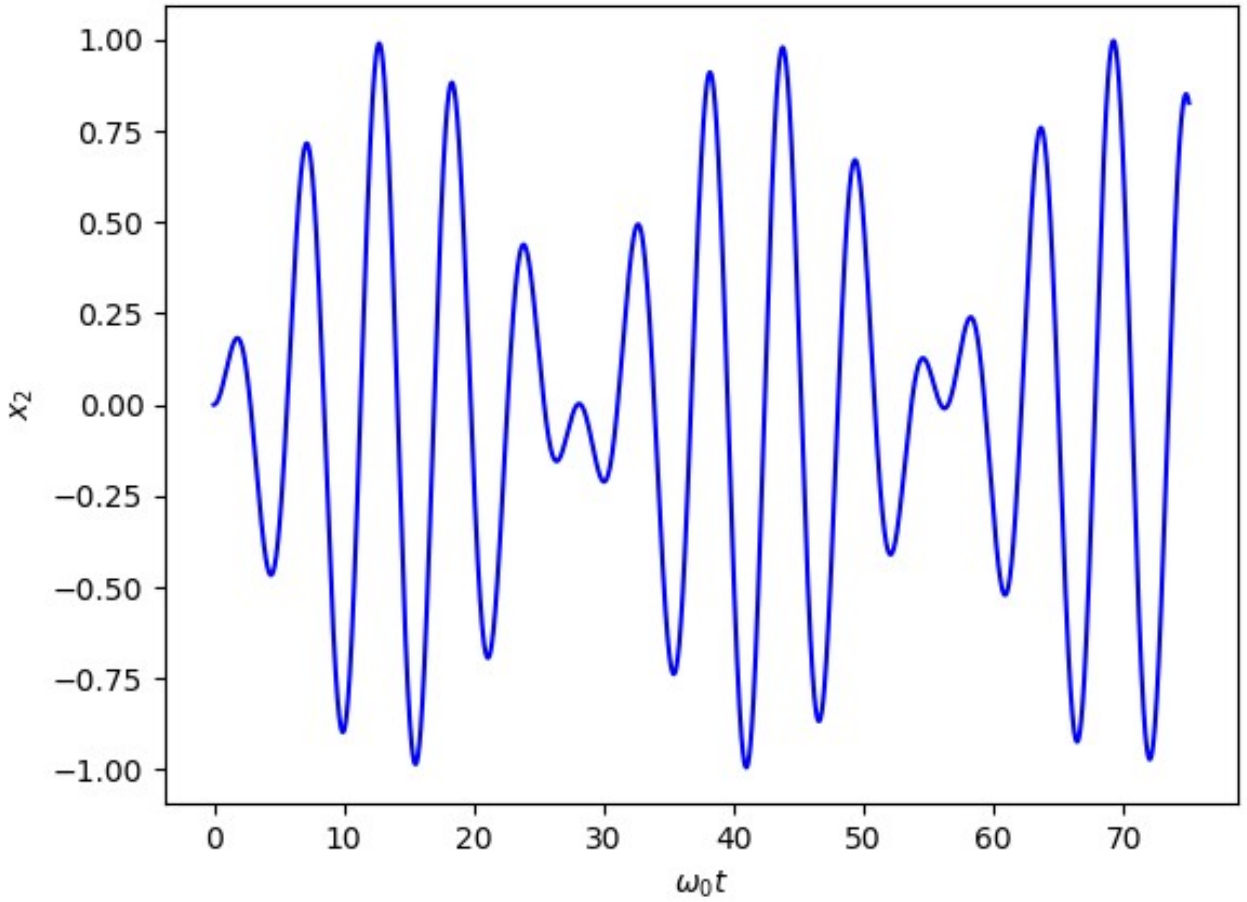
$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\omega_2 = \sqrt{1.5}\omega_0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$x_2 = 0.5(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$$



$$k' = 0.25k$$

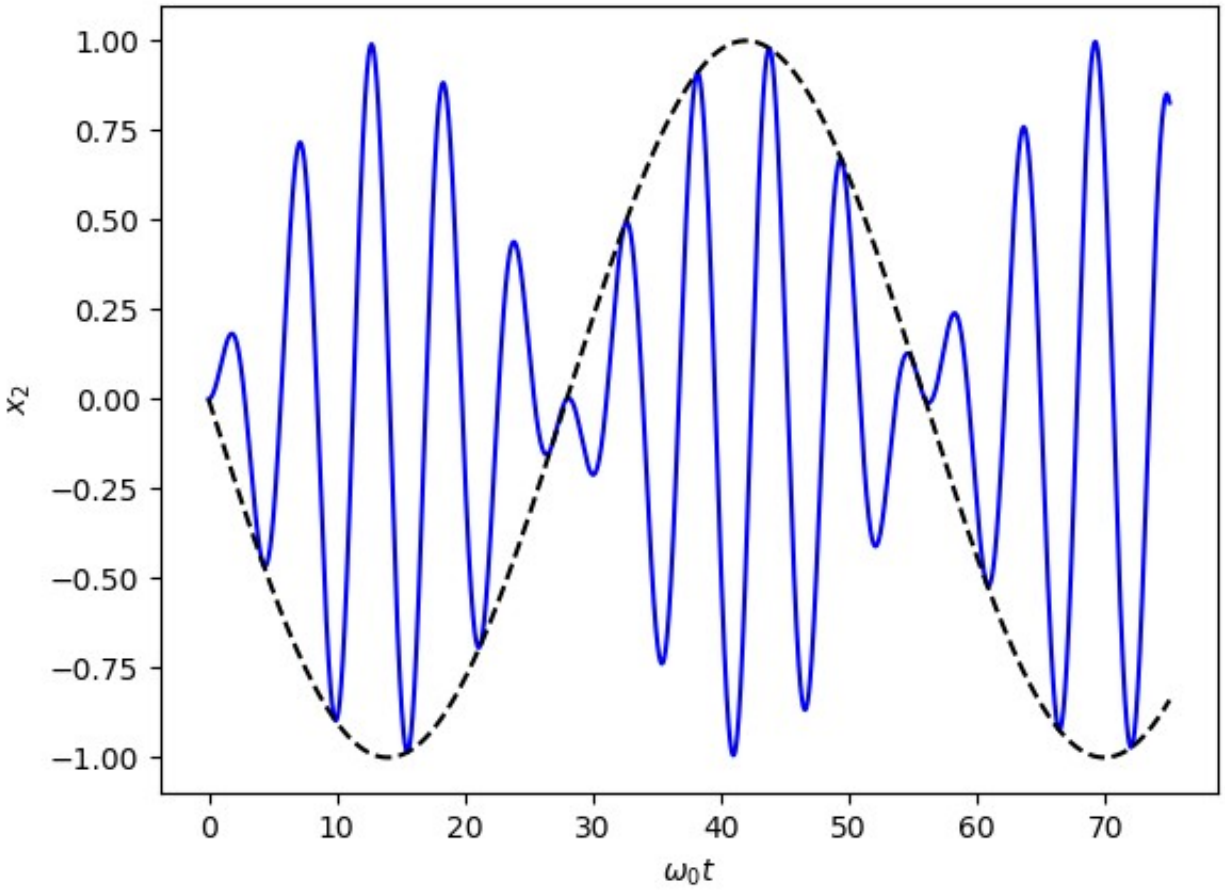
$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\omega_2 = \sqrt{1.5}\omega_0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$x_2 = \frac{1}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)t\right)\sin\left(\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)t\right)$$



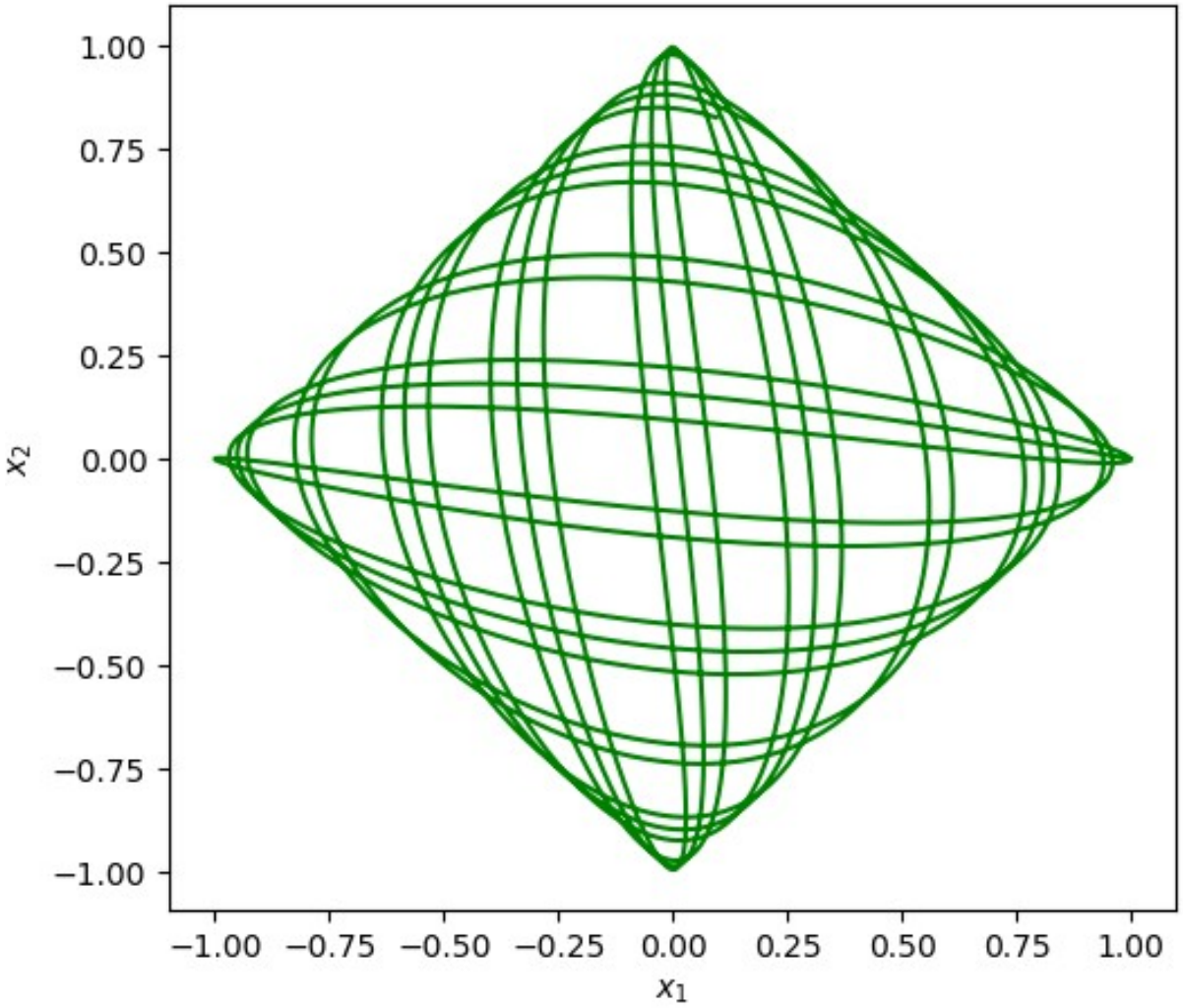
$$k' = 0.25k$$

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\omega_2 = \sqrt{1.5}\omega_0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$x_1 = \frac{1}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t)$$

$$k' = 0.25k$$

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

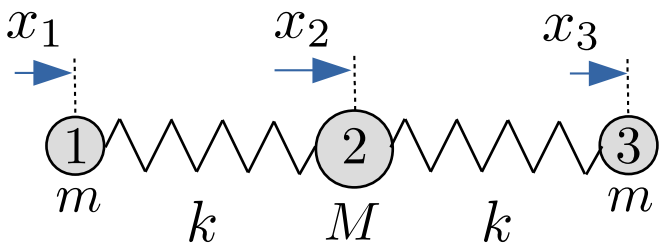
$$\omega_2 = \sqrt{1.5}\omega_0$$

نوسانگرهای هماهنگ جفت‌شده

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)^2$$

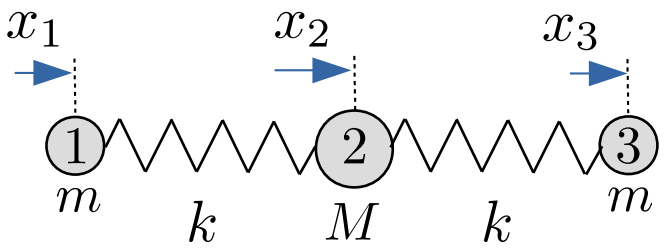
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} : m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} : M\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) + k(x_3 - x_2)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} : m\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ M\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 - kx_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 + kx_3 - kx_2 = 0 \end{cases}$$

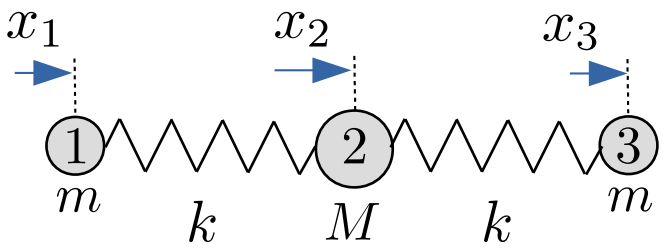
$$x_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = a_2 e^{i\omega t}, \quad x_3 = a_3 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + ka_1 - ka_2 = 0 \\ -M\omega^2 a_2 + 2ka_2 - ka_1 - ka_3 = 0 \\ -m\omega^2 a_3 + ka_3 - ka_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + k & -k & 0 \\ -k & -M\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$x_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = a_2 e^{i\omega t}, \quad x_3 = a_3 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + k a_1 - k a_2 = 0 \\ -M\omega^2 a_2 + 2k a_2 - k a_1 - k a_3 = 0 \\ -m\omega^2 a_3 + k a_3 - k a_2 = 0 \end{cases}$$

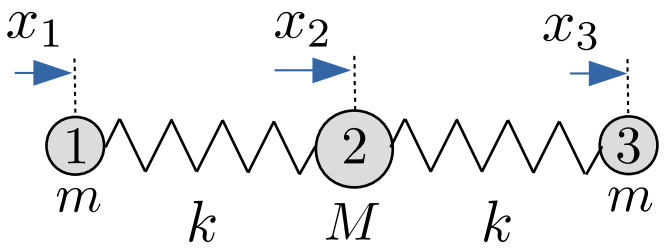
$$\begin{bmatrix} -m\omega^2 + k & -k & 0 \\ -k & -M\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2 + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + k & -k & 0 \\ -k & -M\omega^2 + 2k & -k \\ 0 & -k & -m\omega^2 + k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (-m\omega^2 + k)^2(-M\omega^2 + 2k)$$

$$= 2k^2(-m\omega^2 + k)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$x_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = a_2 e^{i\omega t}, \quad x_3 = a_3 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + k a_1 - k a_2 = 0 \\ -M\omega^2 a_2 + 2k a_2 - k a_1 - k a_3 = 0 \\ -m\omega^2 a_3 + k a_3 - k a_2 = 0 \end{cases}$$

$$(-m\omega^2 + k)^2(-M\omega^2 + 2k) = 2k^2(-m\omega^2 + k)$$

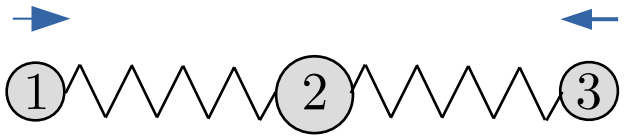
$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^2 = k\frac{2m + M}{mM}$$

$\omega_2^2 = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0$ حرکت نوسانی نداریم.

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$x_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = a_2 e^{i\omega t}, \quad x_3 = a_3 e^{i\omega t}$$



$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + k a_1 - k a_2 = 0 \\ -M\omega^2 a_2 + 2k a_2 - k a_1 - k a_3 = 0 \\ -m\omega^2 a_3 + k a_3 - k a_2 = 0 \end{cases}$$

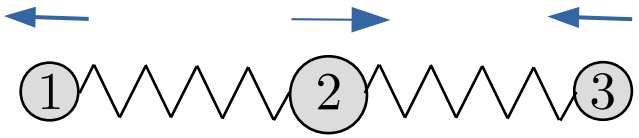
$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow a_2 = 0, \quad a_3 = -a_1$$

اگر $a_1 = 1 \Rightarrow a_3 = -1 : \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی

$$x_1 = a_1 e^{i\omega t}, \quad x_2 = a_2 e^{i\omega t}, \quad x_3 = a_3 e^{i\omega t}$$



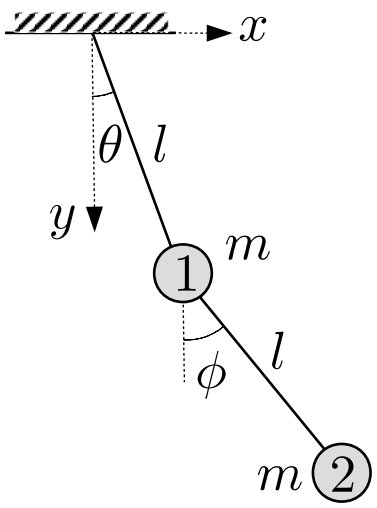
$$\begin{cases} -m\omega^2 a_1 + k a_1 - k a_2 = 0 \\ -M\omega^2 a_2 + 2k a_2 - k a_1 - k a_3 = 0 \\ -m\omega^2 a_3 + k a_3 - k a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_3^2 = k\frac{2m+M}{mM} = \frac{2k}{M} + \frac{k}{m} \Rightarrow a_1 = -\frac{M}{2m}a_2, \quad a_3 = -\frac{M}{2m}a_2$$

اگر $a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = a_3 = -\frac{M}{2m}$: $\begin{bmatrix} -\frac{M}{2m} \\ 1 \\ -\frac{M}{2m} \end{bmatrix} e^{i\omega_3 t}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{M} + \frac{k}{m}}$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\begin{cases} 1 : (l\sin\theta, -l\cos\theta) \\ 2 : (l\sin\theta + l\sin\phi, -l\cos\theta - l\cos\phi) \end{cases}$$

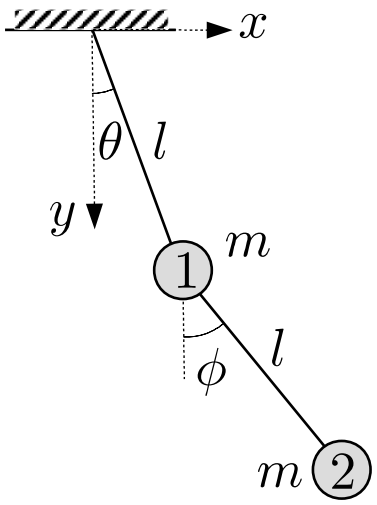
$$\begin{cases} 1 : (l\dot{\theta}\cos\theta, l\dot{\theta}\sin\theta) \\ 2 : (l\dot{\theta}\cos\theta + l\dot{\phi}\cos\phi, l\dot{\theta}\sin\theta + l\dot{\phi}\sin\phi) \end{cases}$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2}_{\text{ذره اول}} + \underbrace{\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta-\phi)}_{\text{ذره دوم}}$$

$$V = \underbrace{-mgl\cos\theta}_{\text{ذره اول}} \underbrace{- mgl(\cos\theta + \cos\phi)}_{\text{ذره دوم}} = -mgl(2\cos\theta + \cos\phi)$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$T = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}\cos(\theta - \phi)$$

$$V = -mgl(2\cos\theta + \cos\phi)$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \cdots$$

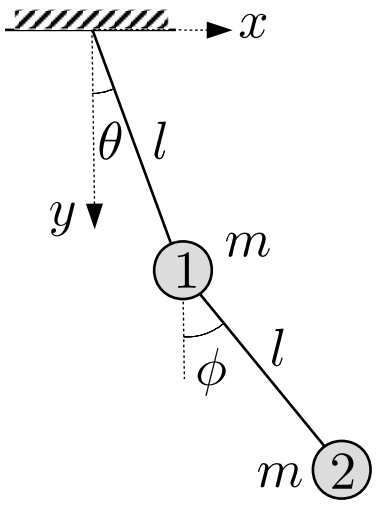
$$T = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi}(1 - \frac{(\theta - \phi)^2)}{2} + \cdots)$$

$$V = -mgl[2(1 - \frac{\theta^2}{2}) + (1 - \frac{\phi^2}{2})]$$

$$\mathcal{L} = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi} - \frac{1}{2}mgl(2\theta^2 + \phi^2) + \text{const.}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



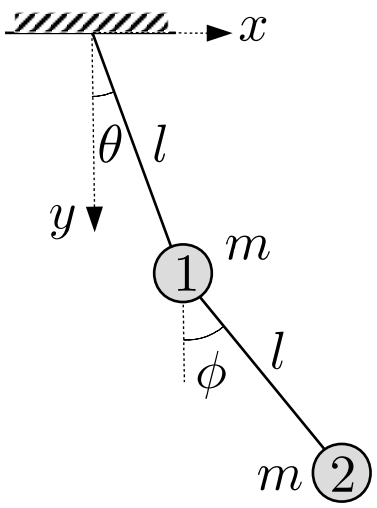
$$\mathcal{L} = ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + ml^2\dot{\theta}\dot{\phi} - \frac{1}{2}mgl(2\theta^2 + \phi^2)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \Rightarrow 2ml^2\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\phi} = -2mgl\theta \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \Rightarrow ml^2\ddot{\phi} + ml^2\ddot{\theta} = -mgl\phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\ddot{\theta} + \ddot{\phi} = -\dfrac{2g}{l}\theta \\ \ddot{\theta} + \ddot{\phi} = -\dfrac{g}{l}\phi \end{cases} \qquad \theta = a_1 e^{i\omega t}, \quad \phi = a_2 e^{i\omega t} \qquad \begin{cases} -2\omega^2 a_1 - \omega^2 a_2 = -\dfrac{2g}{l}a_1 \\ -\omega^2 a_1 - \omega^2 a_2 = -\dfrac{g}{l}a_2 \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\theta = a_1 e^{i\omega t}, \quad \phi = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} 2\omega^2 a_1 + \omega^2 a_2 = \dfrac{2g}{l} a_1 \\ \omega^2 a_1 + \omega^2 a_2 = \dfrac{g}{l} a_2 \end{cases}$$

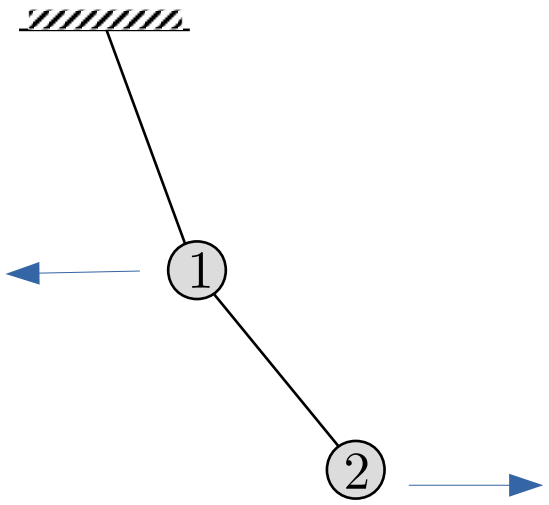
$$\begin{bmatrix} 2\omega^2 - \frac{2g}{l} & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\omega^2 - \frac{2g}{l} & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{l} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\omega^2 - \frac{g}{l})^2 = \frac{1}{2}\omega^4 \Rightarrow \omega^2 - \frac{g}{l} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^2$$

$$\omega_+^2 = \frac{g}{l}(2+\sqrt{2}), \quad \omega_-^2 = \frac{g}{l}(2-\sqrt{2})$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\theta = a_1 e^{i\omega t}, \quad \phi = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} (2\omega^2 - \frac{2g}{l})a_1 + \omega^2 a_2 = 0 \\ \omega^2 a_2 + (\omega^2 - \frac{g}{l})a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_+^2 = \frac{g}{l}(2+\sqrt{2}), \quad \omega_-^2 = \frac{g}{l}(2-\sqrt{2})$$

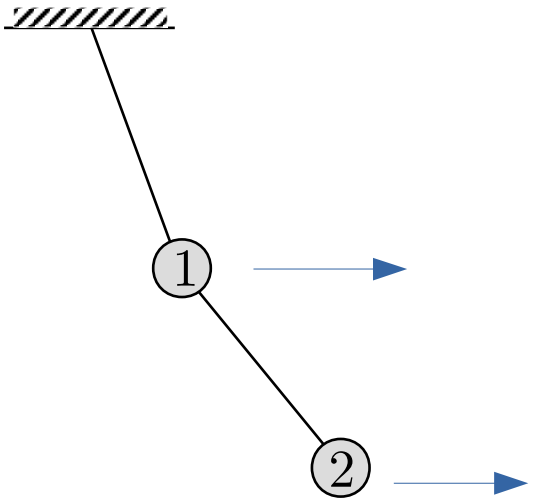
$$(2\omega^2 - \frac{2g}{l})a_1 + \omega^2 a_2 = 0$$

$$\omega_+^2 = \frac{g}{l}(2+\sqrt{2}) \Rightarrow a_2 = -\sqrt{2}a_1$$

اگر $a_1 = 1, \quad a_2 = -\sqrt{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} e^{i\omega_+ t}, \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})}$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\theta = a_1 e^{i\omega t}, \quad \phi = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} (2\omega^2 - \frac{2g}{l})a_1 + \omega^2 a_2 = 0 \\ \omega^2 a_2 + (\omega^2 - \frac{g}{l})a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\omega_+^2 = \frac{g}{l}(2+\sqrt{2}), \quad \omega_-^2 = \frac{g}{l}(2-\sqrt{2})$$

$$(2\omega^2 - \frac{2g}{l})a_1 + \omega^2 a_2 = 0$$

$$\omega_-^2 = \frac{g}{l}(2-\sqrt{2}) \Rightarrow a_2 = \sqrt{2}a_1$$

اگر $a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{i\omega_- t}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g}{l}(2-\sqrt{2})}$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم