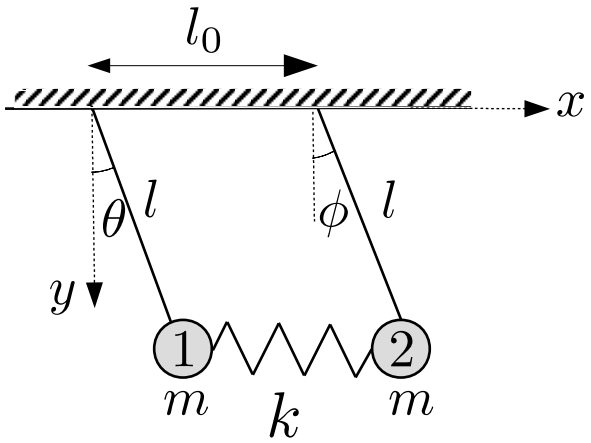
جلسه بیست و دوم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\begin{cases} 1 : (l\sin\theta, -l\cos\theta) \\ 2 : (l_0 + l\sin\phi, -l\cos\phi) \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 : (l\dot\theta\cos\theta, l\dot\theta\sin\theta) \\ 2 : (l\dot\phi\cos\phi, l\dot\phi\sin\phi) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\phi^2$$

$$V = -mgl(\cos\theta + \cos\phi) + \frac{1}{2}k(l\sin\phi - l\sin\theta)^2$$

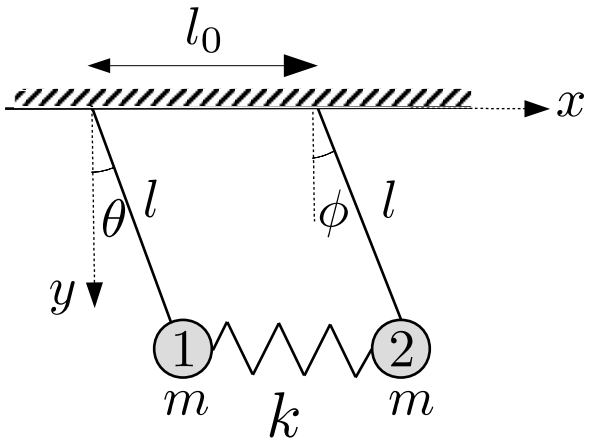
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\phi^2 + mgl(\cos\theta + \cos\phi) - \frac{1}{2}k(l\sin\phi - l\sin\theta)^2$$

$$\cos\alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \quad \sin\alpha = \alpha$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\phi^2 + mgl(2 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\phi^2}{2}) - \frac{1}{2}kl^2(\phi - \theta)^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2$$

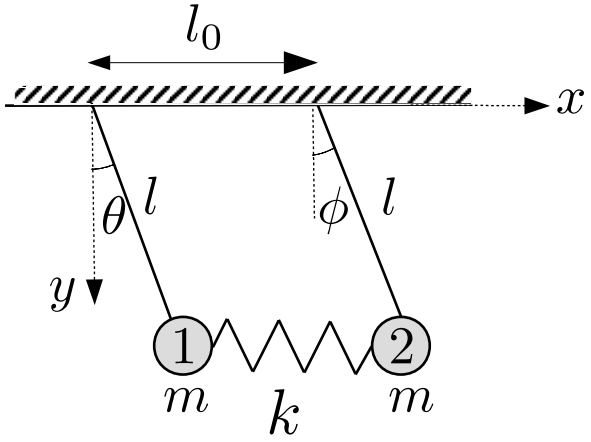
$$+mgl(2 - \frac{\theta^2}{2} - \frac{\phi^2}{2}) - \frac{1}{2}kl^2(\phi - \theta)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -mgl\theta + kl^2(\phi - \theta) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Rightarrow ml^2\ddot{\phi} = -mgl\phi - kl^2(\phi - \theta) \end{cases}$$

$$\theta = a_1 e^{i\omega t}, \quad \phi = a_2 e^{i\omega t} \quad \begin{cases} -ml^2\omega^2 a_1 = -mgla_1 + kl^2(a_2 - a_1) \\ -ml^2\omega^2 a_2 = -mgla_2 - kl^2(a_2 - a_1) \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\theta = a_1 e^{i\omega t}, \quad \phi = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -ml^2\omega^2 a_1 = -mgla_1 + kl^2(a_2 - a_1) \\ -ml^2\omega^2 a_2 = -mgla_2 - kl^2(a_2 - a_1) \end{cases}$$

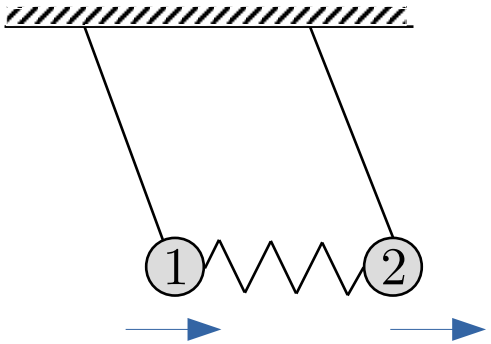
$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})^2 = (\frac{k}{m})^2$$

$$-\omega_{\pm}^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m} = \pm\frac{k}{m} \Rightarrow \omega_+^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega_-^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\theta = a_1 e^{i\omega t}, \quad \phi = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})a_1 - \frac{k}{m}a_2 = 0 \\ -\frac{k}{m}a_2 + (-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})a_2 = 0 \end{cases}$$

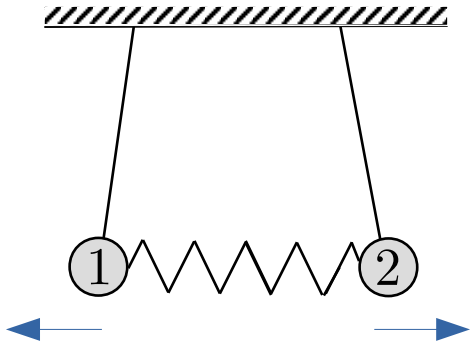
$$\omega_+^2 = \frac{g}{l}$$

$$(-\omega_+^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})a_1 - \frac{k}{m}a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = a_1$$

اگر $a_1 = 1, a_2 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_+ t}, \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\theta = a_1 e^{i\omega t}, \quad \phi = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} (-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})a_1 - \frac{k}{m}a_2 = 0 \\ -\frac{k}{m}a_2 + (-\omega^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})a_2 = 0 \end{cases}$$

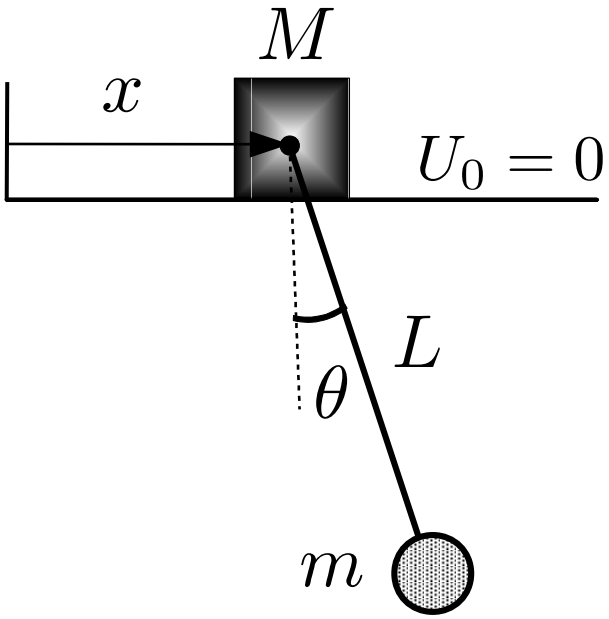
$$\omega_-^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m}$$

$$(-\omega_-^2 + \frac{g}{l} + \frac{k}{m})a_1 - \frac{k}{m}a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1$$

اگر $a_1 = 1, a_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_- t}, \quad \omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\begin{cases} m : (x + L\sin\theta, -L\cos\theta) \\ m : (\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta, L\dot{\theta}\sin\theta) \end{cases} \qquad \begin{cases} M : (x, 0) \\ M : (\dot{x}, 0) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta)$$

$$V = -mgL\cos\theta$$

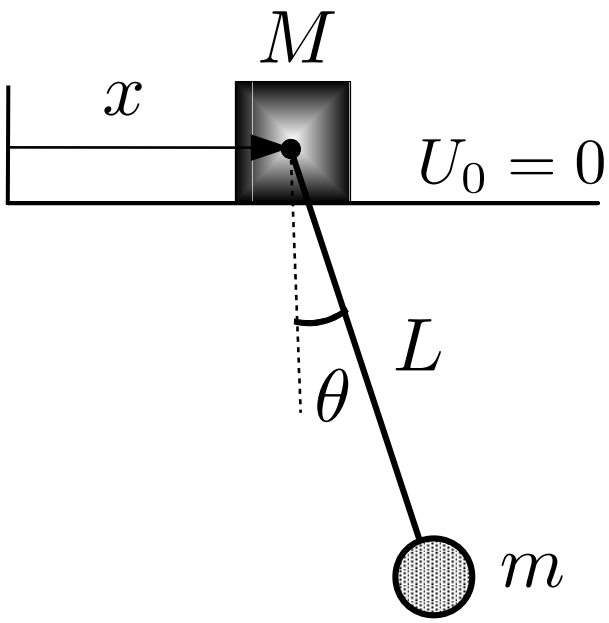
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta) + mgL\cos\theta$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{\theta}\dot{x}(1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots)] + mgL(1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots)$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{\theta}\dot{x}(1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots)]$$

$$+mgL(1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots)$$

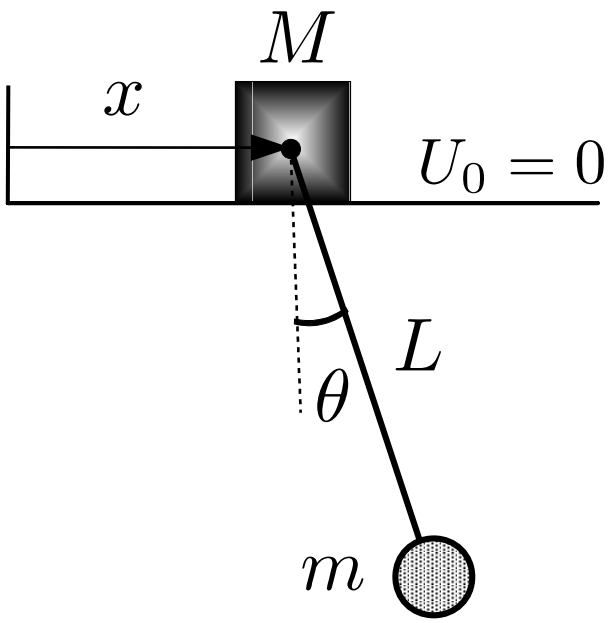
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m[\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2L\dot{\theta}\dot{x}]$$

$$+mgL(1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mL\dot{\theta}\dot{x} + mgL(1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + mL\dot{\theta}\dot{x}$$

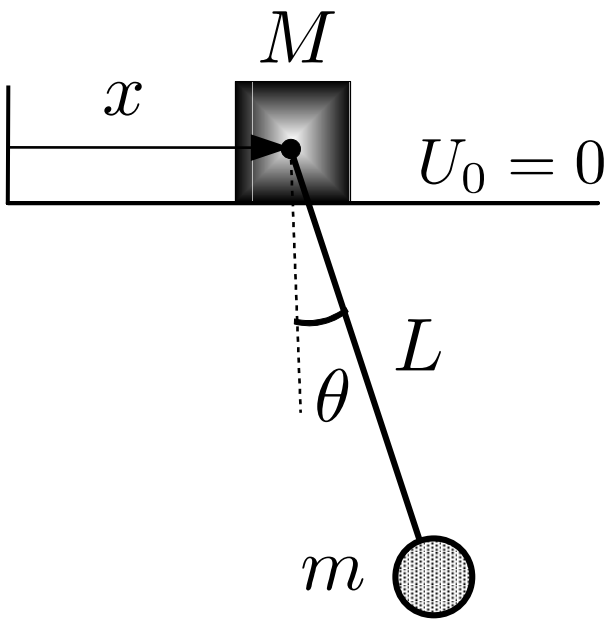
$$+mgL(1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow (M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Rightarrow mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x} = -mgL\theta \end{cases}$$

$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad L\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow (M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Rightarrow mL\ddot{\theta} + m\ddot{x} = -mg\theta \end{cases}$$

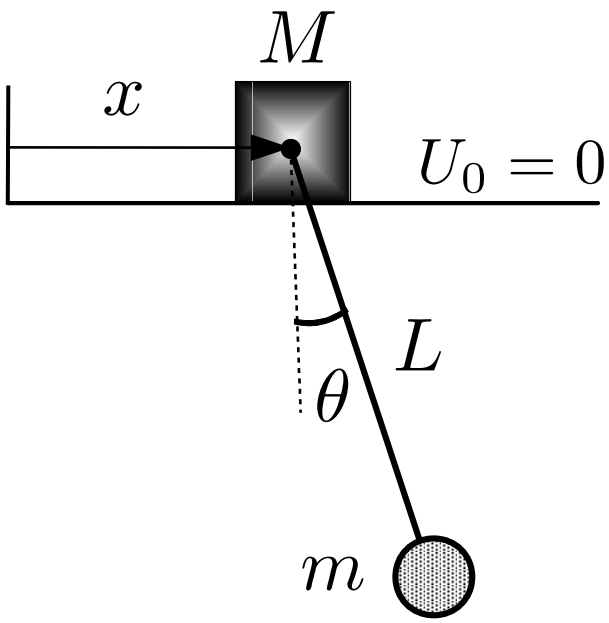
$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad L\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -(M+m)\omega^2 a_1 - m\omega^2 a_2 = 0 \\ -m\omega^2 a_2 - m\omega^2 a_1 + m\dfrac{g}{L}a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (M+m)\omega^2 a_1 + m\omega^2 a_2 = 0 \\ m\omega^2 a_1 + (m\omega^2 - m\dfrac{g}{L})a_2 = 0 \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad L\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

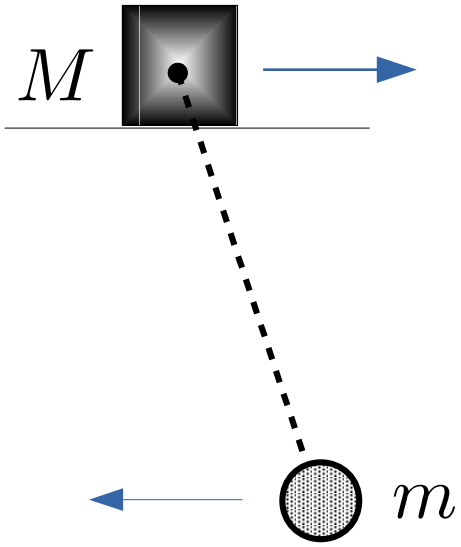
$$\begin{cases} (M+m)\omega^2 a_1 + m\omega^2 a_2 = 0 \\ m\omega^2 a_1 + (m\omega^2 - m\frac{g}{L})a_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (M+m)\omega^2 & m\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (M+m)\omega^2 & m\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{L} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{M+m}{M}\frac{g}{L}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad L\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{bmatrix} (M+m)\omega^2 & m\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\omega_1^2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$ نوسان نداریم

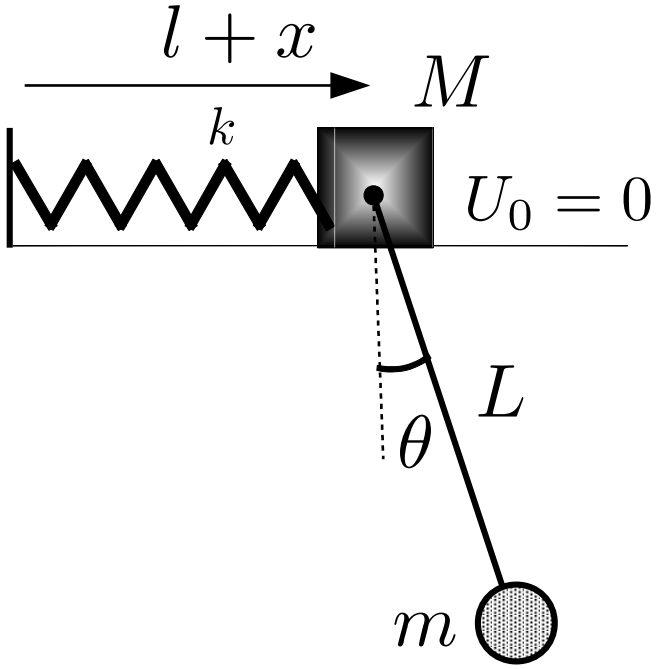
جرم m ساکن است و جرم M یا ساکن است یا با سرعت ثابت حرکت می‌کند

$$\omega_2^2 = \frac{M+m}{M}\frac{g}{L} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = -\frac{M+m}{m}$$

اگر $a_1 = 1, a_2 = -(m+M)/m$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{m+M}{m} \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{M+m}{M}\frac{g}{L}}$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\begin{cases} m:(l+x+L\sin\theta,-L\cos\theta) \\ m:(\dot{x}+L\dot{\theta}\cos\theta,L\dot{\theta}\sin\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} M:(l+x,0) \\ M:(\dot{x},0) \end{cases}$$

$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+L^2\dot{\theta}^2+2L\dot{\theta}\dot{x}\cos\theta)$$

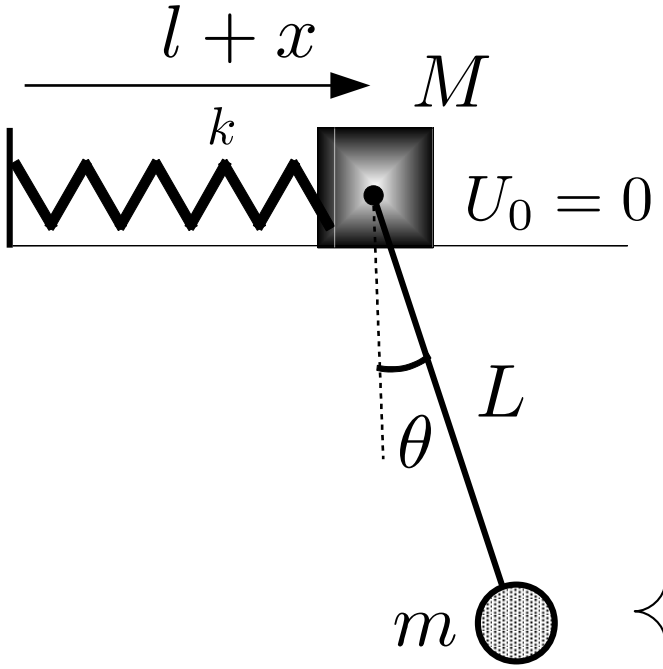
$$V=\frac{1}{2}kx^2-mgL\cos\theta$$

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2}+\cdots$$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+L^2\dot{\theta}^2+2L\dot{\theta}\dot{x})-\frac{1}{2}kx^2-mgL(1-\frac{\theta^2}{2})$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



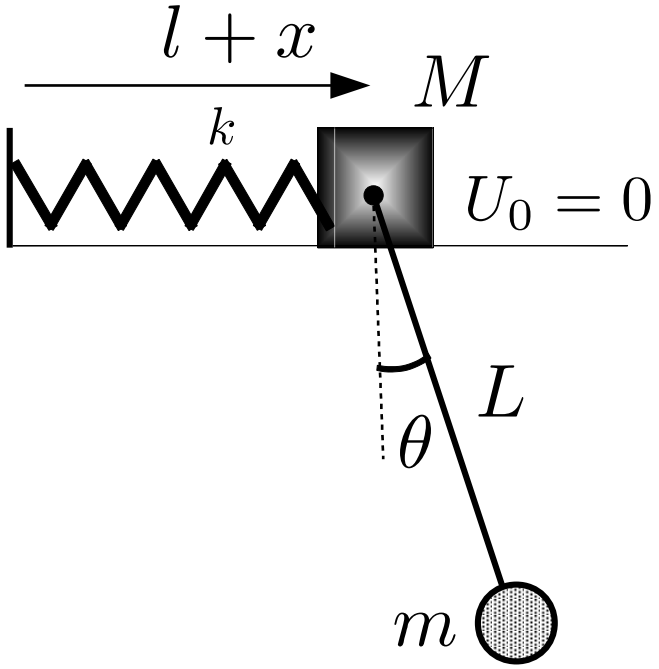
$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2+\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2+mL\dot{\theta}\dot{x}$$
$$-\frac{1}{2}kx^2+mgL(1-\frac{\theta^2}{2})$$

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}\Rightarrow(M+m)\ddot{x}+mL\ddot{\theta}=-kx\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}\Rightarrow mL^2\ddot{\theta}+mL\ddot{x}=-mgL\theta\end{cases}$$

$$x=a_1e^{i\omega t},\quad L\theta=a_2e^{i\omega t}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



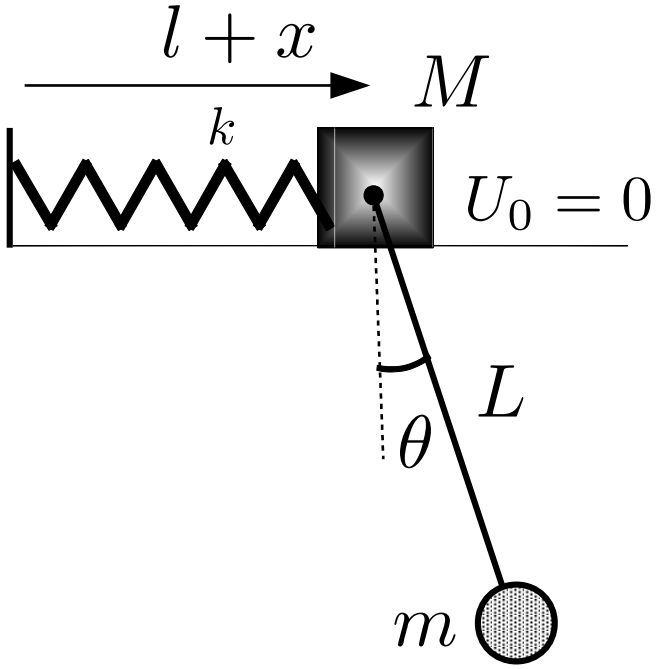
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \Rightarrow (M+m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} = -kx \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Rightarrow mL^2\ddot{\theta} + mL\ddot{x} = -mgL\theta \end{cases}$$

$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad L\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -(M+m)\omega^2 a_1 - m\omega^2 a_2 = -k a_1 \\ -m\omega^2 a_2 - m\omega^2 a_1 = -m\dfrac{g}{L} a_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} [(M+m)\omega^2 - k]a_1 + m\omega^2 a_2 = 0 \\ \omega^2 a_1 + (\omega^2 - \dfrac{g}{L})a_2 = 0 \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad L\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} [(M+m)\omega^2 - k]a_1 + m\omega^2 a_2 = 0 \\ \omega^2 a_1 + (\omega^2 - \frac{g}{L})a_2 = 0 \end{cases}$$

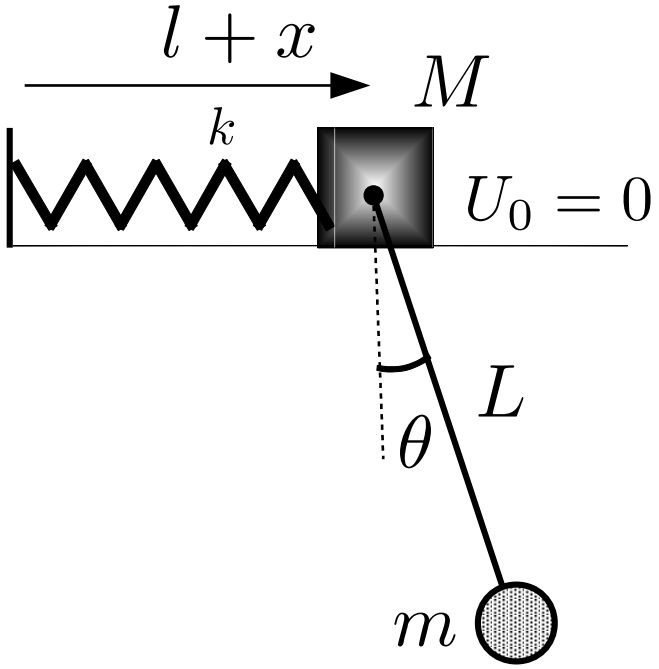
$$\begin{bmatrix} (M+m)\omega^2 - k & m\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (M+m)\omega^2 - k & m\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{L} \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^4 - \left[\frac{k}{M} + \frac{M+m}{M}\frac{g}{L}\right]\omega^2 + \left(\frac{k}{M}\right)\left(\frac{g}{L}\right) = 0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad L\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{bmatrix} (M+m)\omega^2 - k & m\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \frac{g}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

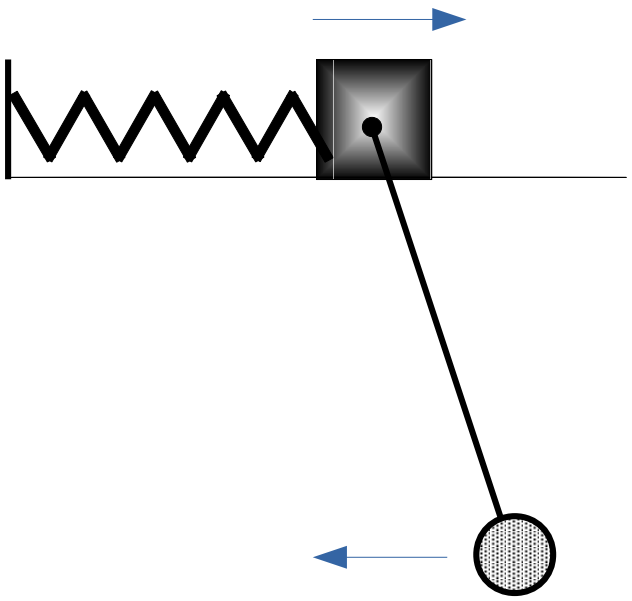
$$\omega^4 - \left[\frac{k}{M} + \frac{M+m}{M}\frac{g}{L}\right]\omega^2 + \left(\frac{k}{M}\right)\left(\frac{g}{L}\right) = 0$$

فرض می‌کنیم $M = m, \quad kL = 2mg$

$$\omega^4 - 2\left(\frac{k}{m}\right)\omega^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \omega_\pm^2 = \frac{k}{m}\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



فرض می‌کنیم $M = m, \quad kL = 2mg$

$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad L\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

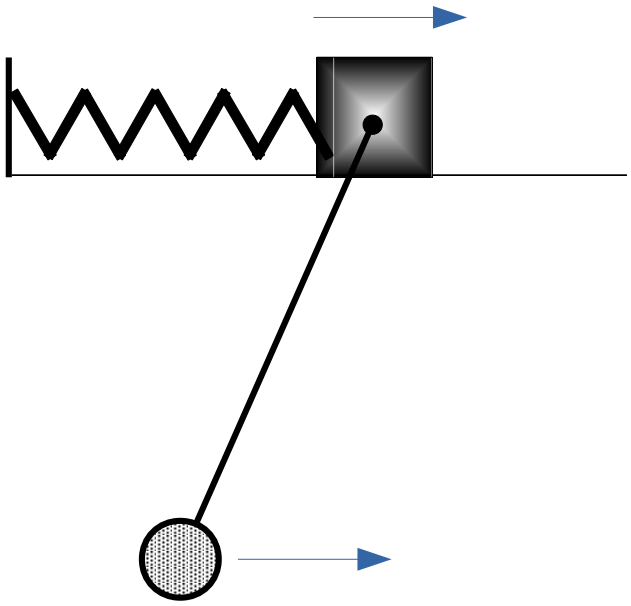
$$\begin{bmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & \frac{1}{2}\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{2m}$$

$$\omega_+^2 = \frac{k}{m}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \omega_0^2(2+\sqrt{2}) : \quad a_2 = -\sqrt{2}a_1$$

اگر $a_1 = 1, a_2 = -\sqrt{2} : \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} e^{i\omega_+ t}, \quad \omega_+ = \omega_0\sqrt{2+\sqrt{2}}$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



فرض می‌کنیم $M = m, \quad kL = 2mg$

$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad L\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

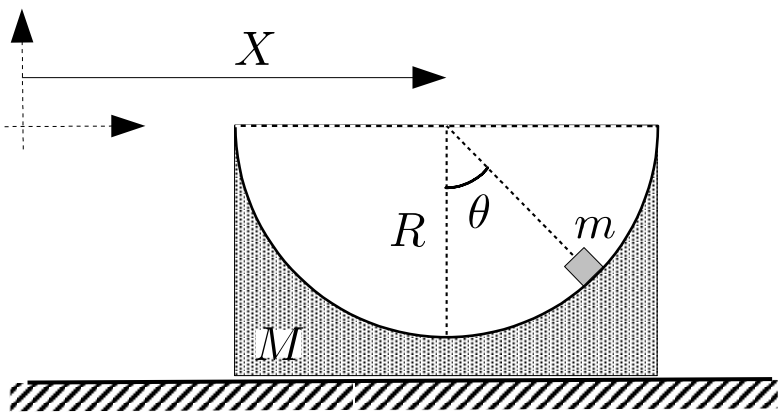
$$\begin{bmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & \frac{1}{2}\omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{2m}$$

$$\omega_-^2 = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \omega_0^2(2 - \sqrt{2}) : \quad a_2 = \sqrt{2}a_1$$

اگر $a_1 = 1, a_2 = \sqrt{2} : \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} e^{i\omega_- t}, \quad \omega_- = \omega_0\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$\mu_k = 0$

$$\begin{cases} m : (X + R\sin\theta, -R\cos\theta) \\ m : (\dot{X} + R\dot{\theta}\cos\theta, R\dot{\theta}\sin\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} M : (X, 0) \\ M : (\dot{X}, 0) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{X}\cos\theta)$$

$$V = -mgR\cos\theta$$

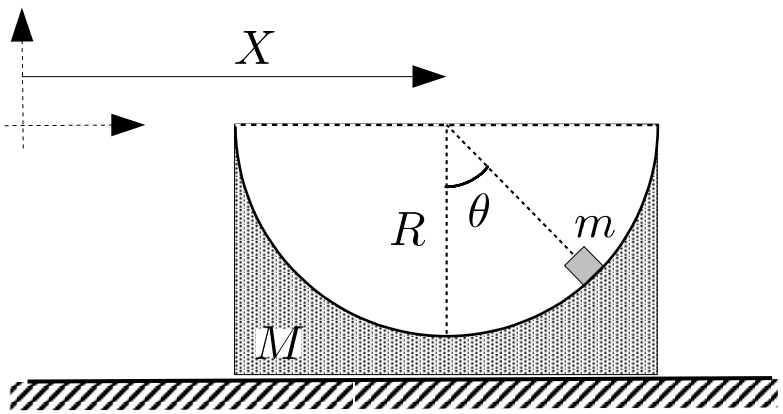
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{X}\cos\theta) + mgR\cos\theta$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{X}) + mgR(1 - \frac{\theta^2}{2})$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + 2R\dot{\theta}\dot{X}) + mgR(1-\frac{\theta^2}{2})$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} \Rightarrow (M+m)\ddot{X} + mR\ddot{\theta} = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \Rightarrow mR^2\ddot{\theta} + mR\ddot{x} = -mgR\theta \end{cases}$$

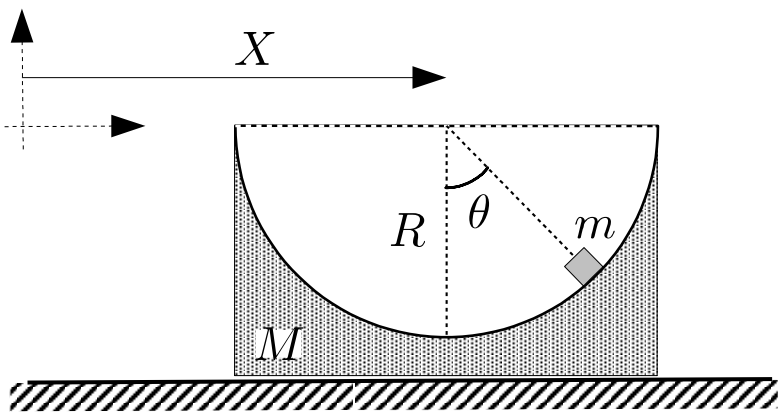
$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad R\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{X} + mR\ddot{\theta} = 0 \\ R\ddot{\theta} + \ddot{x} = -\dfrac{g}{R}R\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(M+m)\omega^2 a_1 - m\omega^2 a_2 = 0 \\ -\omega^2 a_2 - \omega^2 a_1 = -\dfrac{g}{R}a_2 \end{cases}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$\mu_k = 0$

$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad R\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -(M+m)\omega^2 a_1 - m\omega^2 a_2 = 0 \\ -\omega^2 a_2 - \omega^2 a_1 = -\dfrac{g}{R} a_2 \end{cases}$$

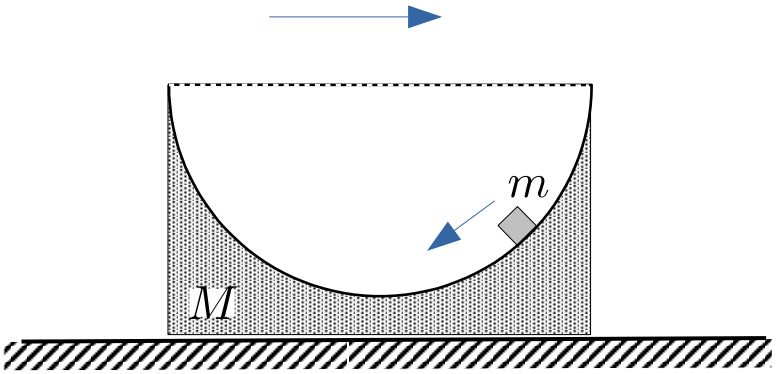
$$\begin{bmatrix} -(M+m)\omega^2 & -m\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \frac{g}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -(M+m)\omega^2 & -m\omega^2 \\ -\omega^2 & -\omega^2 + \frac{g}{L} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (M+m)\omega^4 - (M+m)\omega^2 \frac{g}{R} = m\omega^4$$

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{M+m}{M} \frac{g}{R}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

دینامیک سیستم‌های نوسانی



$$x = a_1 e^{i\omega t}, \quad R\theta = a_2 e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} -(M+m)\omega^2 a_1 - m\omega^2 a_2 = 0 \\ -\omega^2 a_2 - \omega^2 a_1 = -\frac{g}{R} a_2 \end{cases}$$

$\omega_1^2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$ نوسان نداریم

$$\omega_1^2 = \frac{M+m}{M}\frac{g}{R} \Rightarrow a_2 = -\frac{m}{M+m} a_1$$

اگر $a_1 = 1, a_2 = -\frac{m}{m+M} : \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{m}{m+M} \end{bmatrix} e^{i\omega_2 t}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{M+m}{M}\frac{g}{R}}$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم