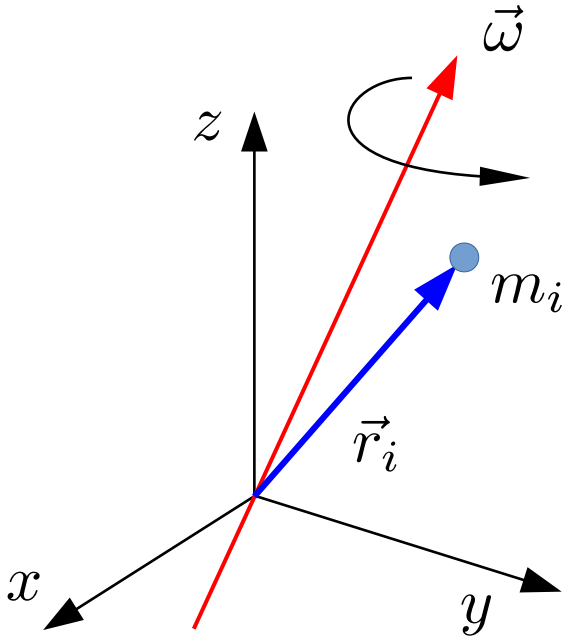
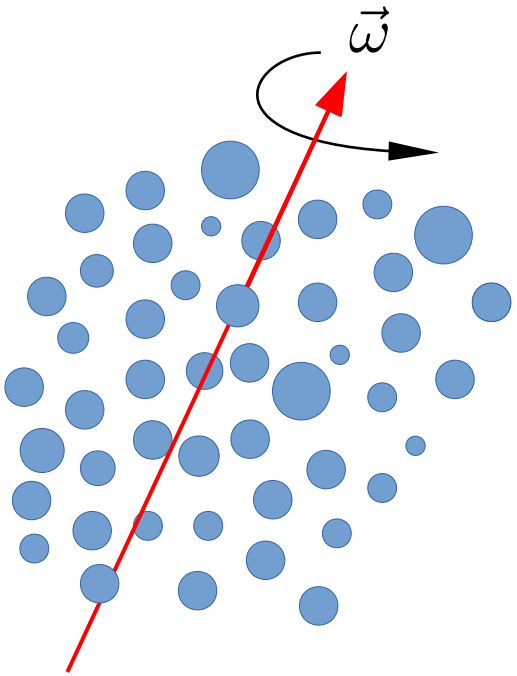
جلسه بیست و سوم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

حرکت اجسام صلب در سه بعد





$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$$

تکانه زاویه‌ای

$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

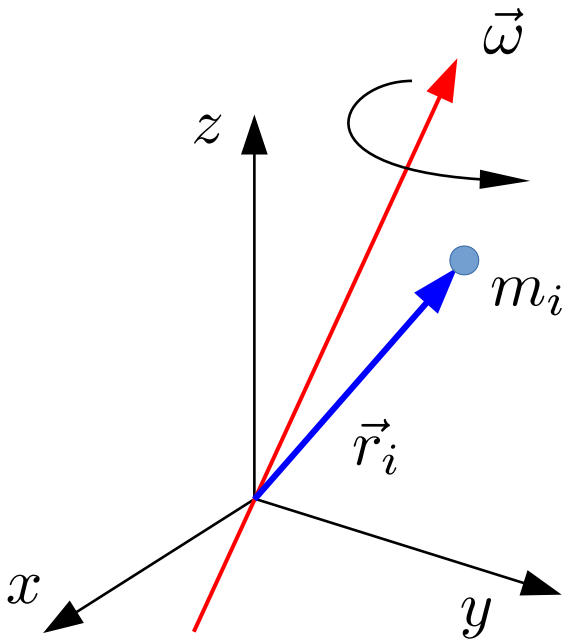
$$\vec{L} = \sum_i^N \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i^N m_i(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\omega} - \sum_i^N m_i(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)\vec{r}_i$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{B} \cdot \vec{A})\vec{C} - (\vec{C} \cdot \vec{A})\vec{B}$$

محمدرضا مظفری — گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

چرخش حول محور دلخواه

حرکت اجسام صلب در سه بعد



تکانه زاویه‌ای

$$\vec{L} = \sum_i^N m_i(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\omega} - \sum_i^N m_i(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)\vec{r}_i$$

$$\vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i$$

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z) - \sum_i m_i(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)(\hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تکانه زاویه‌ای

$$\vec{L} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z)$$

$$- \sum_i m_i(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)(\hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i)$$

$$\vec{L} = \hat{i}\left(\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_x - \sum_i m_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)x_i\right)$$

$$+\hat{j}\left(\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_y - \sum_i m_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)y_i\right)$$

$$+\hat{k}\left(\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_z - \sum_i m_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)z_i\right)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تکانه زاویه‌ای

$$\vec{L} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z)$$

$$- \sum_i m_i(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)(\hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i)$$

$$\vec{L} = \hat{i}\left(\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_x - \sum_i m_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)x_i\right)$$

$$+\hat{j}\left(\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_y - \sum_i m_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)y_i\right)$$

$$+\hat{k}\left(\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_z - \sum_i m_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)z_i\right)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تکانه زاویه‌ای

$$\vec{L} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z)$$

$$- \sum_i m_i(\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)(\hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i)$$

$$\vec{L} = \hat{i}\left[\left(\sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)\right)\omega_x - \left(\sum_i m_i x_i y_i\right)\omega_y - \left(\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega_z\right]$$

$$+\hat{j}\left[-\left(\sum_i m_i x_i y_i\right)\omega_x + \left(\sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2)\right)\omega_y - \left(\sum_i m_i y_i z_i\right)\omega_z\right]$$

$$+\hat{k}\left[-\left(\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega_x - \left(\sum_i m_i y_i z_i\right)\omega_y + \left(\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)\right)\omega_z\right]$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تکانه زاویه‌ای

$$\vec{L} = \hat{i}\left[\left(\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)\right)\omega_x - \left(\sum_i m_i x_i y_i\right)\omega_y - \left(\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega_z\right]$$

$$+\hat{j}\left[-\left(\sum_i m_i x_i y_i\right)\omega_x + \left(\sum_i m_i(x_i^2+z_i^2)\right)\omega_y - \left(\sum_i m_i y_i z_i\right)\omega_z\right]$$

$$+\hat{k}\left[-\left(\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega_x - \left(\sum_i m_i y_i z_i\right)\omega_y + \left(\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\right)\omega_z\right]$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2+z_i^2), \quad \mathbb{I}_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2+z_i^2), \quad \mathbb{I}_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تکانه زاویه‌ای

$$\vec{L} = \hat{i}\left[\left(\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)\right)\omega_x - \left(\sum_i m_i x_i y_i\right)\omega_y - \left(\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega_z\right]$$
$$+\hat{j}\left[-\left(\sum_i m_i x_i y_i\right)\omega_x + \left(\sum_i m_i(x_i^2+z_i^2)\right)\omega_y - \left(\sum_i m_i y_i z_i\right)\omega_z\right]$$
$$+\hat{k}\left[-\left(\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega_x - \left(\sum_i m_i y_i z_i\right)\omega_y + \left(\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\right)\omega_z\right]$$

$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad \mathbb{I}_{xz} = \mathbb{I}_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad \mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تکانه زاویه‌ای

$$\vec{L} = \hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z$$

$$\begin{cases} L_x = \mathbb{I}_{xx}\omega_x + \mathbb{I}_{xy}\omega_y + \mathbb{I}_{xz}\omega_z \\ L_y = \mathbb{I}_{xy}\omega_x + \mathbb{I}_{yy}\omega_y + \mathbb{I}_{yz}\omega_z \\ L_z = \mathbb{I}_{xz}\omega_x + \mathbb{I}_{yz}\omega_y + \mathbb{I}_{zz}\omega_z \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{xx} & \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{xz} \\ \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{yy} & \mathbb{I}_{yz} \\ \mathbb{I}_{xz} & \mathbb{I}_{yz} & \mathbb{I}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad \mathbb{I}_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2), \quad \mathbb{I}_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad \mathbb{I}_{xz} = \mathbb{I}_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad \mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

$$\sum_i m_i \to \int \mathrm{d}m$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تکانه زاویه‌ای

$$\vec{L} = \hat{i}L_x + \hat{j}L_y + \hat{k}L_z$$

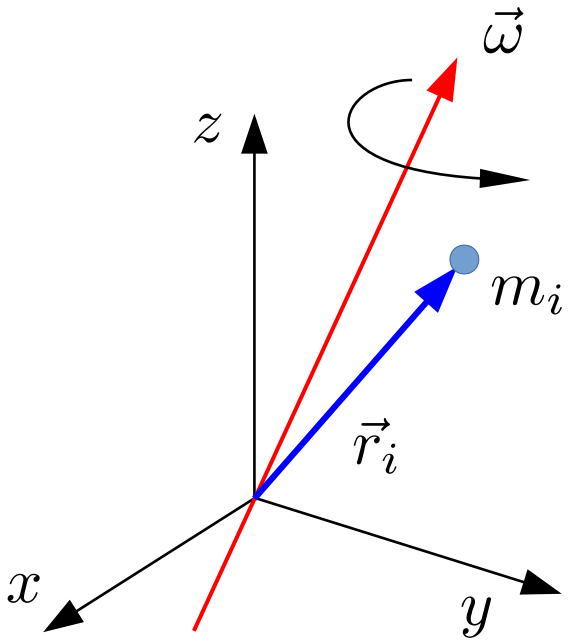
$$\begin{cases} L_x = \mathbb{I}_{xx}\omega_x + \mathbb{I}_{xy}\omega_y + \mathbb{I}_{xz}\omega_z \\ L_y = \mathbb{I}_{xy}\omega_x + \mathbb{I}_{yy}\omega_y + \mathbb{I}_{yz}\omega_z \\ L_z = \mathbb{I}_{xz}\omega_x + \mathbb{I}_{yz}\omega_y + \mathbb{I}_{zz}\omega_z \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{xx} & \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{xz} \\ \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{yy} & \mathbb{I}_{yz} \\ \mathbb{I}_{xz} & \mathbb{I}_{yz} & \mathbb{I}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{yy} = \int (x^2 + z^2)\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{zz} = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m$$

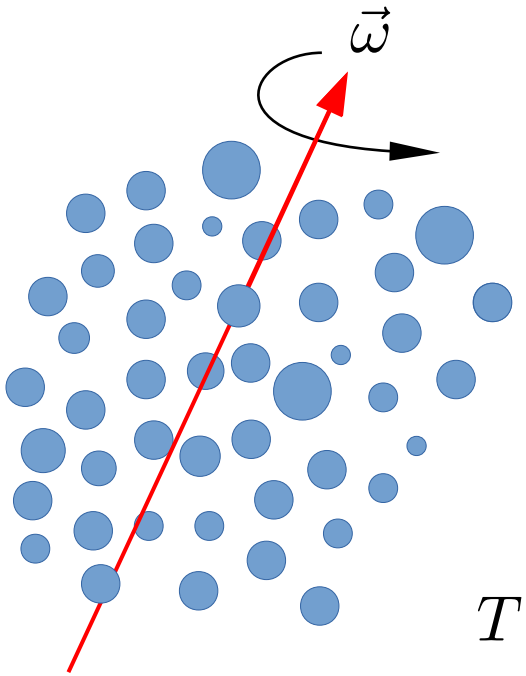
$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yx} = -\int xy\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{xz} = \mathbb{I}_{zx} = -\int xz\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zy} = -\int yz\mathrm{d}m$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$$



انرژی جنبشی دورانی

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

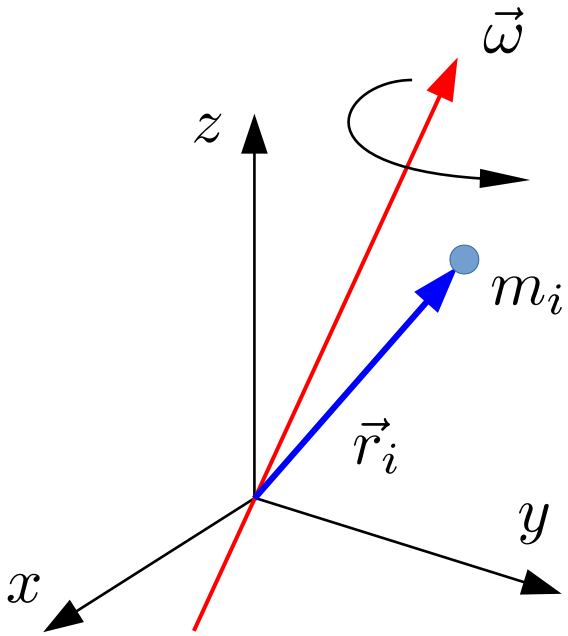
$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{r}_i \cdot [(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \times \vec{\omega}] = (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 - \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



انرژی جنبشی دورانی

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 - \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)^2$$

$$\vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i$$

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_i m_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

انرژی جنبشی دورانی

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i[(x_i^2+y_i^2+z_i^2)(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2) - (\omega_x x_i+\omega_y y_i+\omega_z z_i)^2]$$

$$(x_i^2+y_i^2+z_i^2)(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2) = (x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega_x^2$$

$$+(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega_y^2 + (x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega_z^2$$

$$(x_i\omega_x+y_i\omega_y+z_i\omega_z)^2 = x_i^2\omega_x^2+y_i^2\omega_y^2+z_i^2\omega_z^2$$

$$+2x_iy_i\omega_x\omega_y + 2y_iz_i\omega_y\omega_z + 2z_ix_i\omega_z\omega_x$$

حرکت اجسام صلب در سه بعد

انرژی جنبشی دورانی

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i[(x_i^2+y_i^2+z_i^2)(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2) - (\omega_x x_i+\omega_y y_i+\omega_z z_i)^2]$$

$$(x_i^2+y_i^2+z_i^2)(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2) = (x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega_x^2$$
$$+(x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega_y^2 + (x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega_z^2$$

$$(x_i\omega_x+y_i\omega_y+z_i\omega_z)^2 = x_i^2\omega_x^2+y_i^2\omega_y^2+z_i^2\omega_z^2$$
$$+2x_iy_i\omega_x\omega_y + 2y_iz_i\omega_y\omega_z + 2z_ix_i\omega_z\omega_x$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i[(y_i^2+z_i^2)\omega_x^2 + (z_i^2+x_i^2)\omega_y^2 + (x_i^2+y_i^2)\omega_z^2$$
$$-2x_iy_i\omega_x\omega_y - 2y_iz_i\omega_y\omega_z - 2z_ix_i\omega_z\omega_x]$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

انرژی جنبشی دورانی

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i[(y_i^2+z_i^2)\omega_x^2 + (z_i^2+x_i^2)\omega_y^2 + (x_i^2+y_i^2)\omega_z^2$$
$$-2x_iy_i\omega_x\omega_y - 2y_iz_i\omega_y\omega_z - 2z_ix_i\omega_z\omega_x]$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\omega_x\left(\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)\right)\omega_x + \omega_x\left(-\sum_i m_ix_iy_i\right)\omega_y + \omega_x\left(-\sum_i m_ix_iz_i\right)\omega_z\right.$$
$$+\omega_y\left(-\sum_i m_ix_iy_i\right)\omega_x + \omega_y\left(\sum_i m_i(z_i^2+x_i^2)\right)\omega_y + \omega_y\left(-\sum_i m_iy_iz_i\right)\omega_z$$
$$\left.+\omega_z\left(-\sum_i m_ix_iz_i\right)\omega_x + \omega_z\left(-\sum_i m_iy_iz_i\right)\omega_y + \omega_z\left(\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\right)\omega_z\right]$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

انرژی جنبشی دورانی

$$T = \frac{1}{2}\left[\omega_x\left(\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)\right)\omega_x + \omega_x\left(-\sum_i m_i x_i y_i\right)\omega_y + \omega_x\left(-\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega_z\right.$$
$$+\omega_y\left(-\sum_i m_i x_i y_i\right)\omega_x + \omega_y\left(\sum_i m_i(z_i^2+x_i^2)\right)\omega_y + \omega_y\left(-\sum_i m_i y_i z_i\right)\omega_z$$
$$\left.+\omega_z\left(-\sum_i m_i x_i z_i\right)\omega_x + \omega_z\left(-\sum_i m_i y_i z_i\right)\omega_y + \omega_z\left(\sum_i m_i(x_i^2+y_i^2)\right)\omega_z\right]$$

$$T = \frac{1}{2}[\omega_x \mathbb{I}_{xx}\omega_x + \omega_x \mathbb{I}_{xy}\omega_y + \omega_x \mathbb{I}_{xz}\omega_z$$
$$+\omega_y \mathbb{I}_{yx}\omega_x + \omega_y \mathbb{I}_{yy}\omega_y + \omega_y \mathbb{I}_{yz}\omega_z$$
$$+\omega_z \mathbb{I}_{zx}\omega_x + \omega_z \mathbb{I}_{zy}\omega_y + \omega_z \mathbb{I}_{zz}\omega_z]$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

انرژی جنبشی دورانی

$$T = \frac{1}{2}[\omega_x \mathbb{I}_{xx}\omega_x + \omega_x \mathbb{I}_{xy}\omega_y + \omega_x \mathbb{I}_{xz}\omega_z$$
$$+\omega_y \mathbb{I}_{yx}\omega_x + \omega_y \mathbb{I}_{yy}\omega_y + \omega_y \mathbb{I}_{yz}\omega_z$$
$$+\omega_z \mathbb{I}_{zx}\omega_x + \omega_z \mathbb{I}_{zy}\omega_y + \omega_z \mathbb{I}_{zz}\omega_z]$$

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{I}_{xx} & \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{xz}\\ \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{yy} & \mathbb{I}_{yz}\\ \mathbb{I}_{xz} & \mathbb{I}_{yz} & \mathbb{I}_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}, \quad T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathcal{I}\cdot\vec{\omega}$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \int (y^2+z^2)\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{yy} = \int (x^2+z^2)\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{zz} = \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m$$

$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yx} = -\int xy\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{xz} = \mathbb{I}_{zx} = -\int xz\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zy} = -\int yz\mathrm{d}m$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

بطور خلاصه

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{xx} & \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{xz} \\ \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{yy} & \mathbb{I}_{yz} \\ \mathbb{I}_{xz} & \mathbb{I}_{yz} & \mathbb{I}_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad \mathbb{I}_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2), \quad \mathbb{I}_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad \mathbb{I}_{xz} = \mathbb{I}_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad \mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{yy} = \int (x^2 + z^2)\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{zz} = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m$$

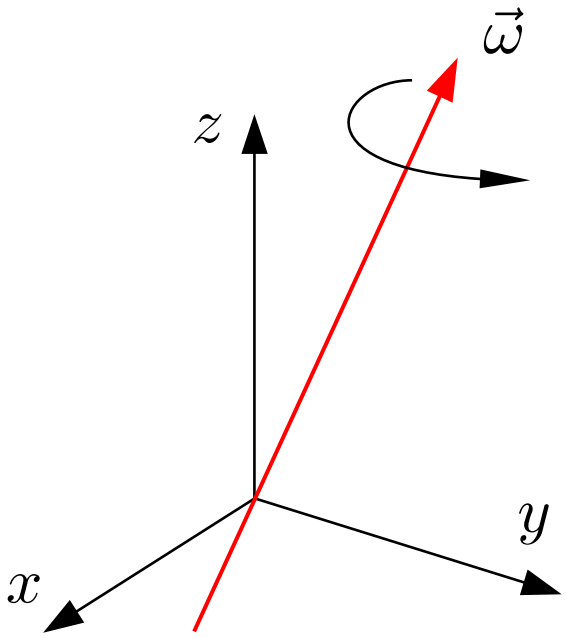
$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yx} = -\int xy\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{xz} = \mathbb{I}_{zx} = -\int xz\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zy} = -\int yz\mathrm{d}m$$

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z : \quad L = \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}, \quad T = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}$$

چرخش حول محور دلخواه

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



چرخش حول محور دلخواه

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\omega_x & \omega_y & \omega_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{I}_{xx} & \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{xz}\\ \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{yy} & \mathbb{I}_{yz}\\ \mathbb{I}_{xz} & \mathbb{I}_{yz} & \mathbb{I}_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z, \quad \hat{n} = \frac{\vec{\omega}}{\omega} = \hat{i}\cos\alpha + \hat{j}\cos\beta + \hat{k}\cos\gamma$$

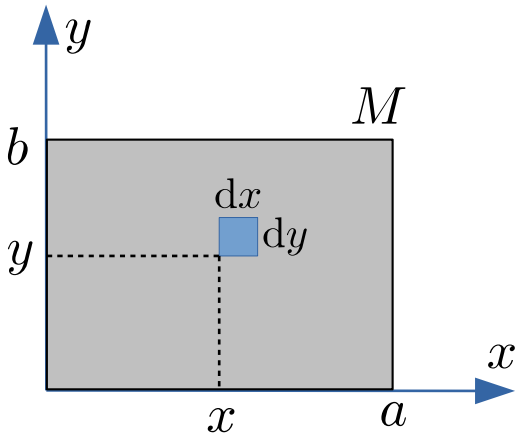
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{I}_{xx} & \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{xz}\\ \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{yy} & \mathbb{I}_{yz}\\ \mathbb{I}_{xz} & \mathbb{I}_{yz} & \mathbb{I}_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \cos\beta\\ \cos\gamma\end{bmatrix}\omega^2 = \frac{1}{2}\mathbb{I}\omega^2$$

$$\mathbb{I} = \hat{n}\cdot\mathcal{I}\cdot\hat{n} = \mathbb{I}_{xx}\cos^2\alpha + \mathbb{I}_{yy}\cos^2\beta + \mathbb{I}_{zz}\cos^2\gamma + 2\mathbb{I}_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2\mathbb{I}_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2\mathbb{I}_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$z = 0$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\int y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{M}{ab}\left(\int_0^a \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b y^2\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{3}Mb^2$$

$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yx} = -\int xy\mathrm{d}m = -\frac{M}{ab}\int xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

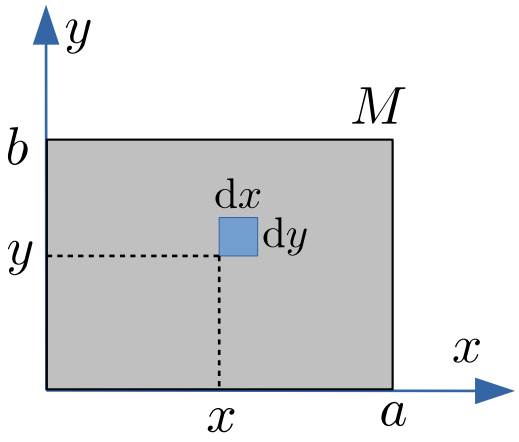
$$= -\frac{M}{ab}\left(\int_0^a x\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b y\mathrm{d}y\right) = -\frac{1}{4}Mab$$

$$\mathbb{I}_{yy} = \int (x^2 + z^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\int x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{M}{ab}\left(\int_0^a x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b \mathrm{d}y\right) = \frac{1}{3}Ma^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathbb{I}_{xz} = \mathbb{I}_{zx} = \int xz\mathrm{d}m = 0$$

$$\mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zy} = \int yz\mathrm{d}m = 0$$

$$\mathbb{I}_{zz} = \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\int (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$z = 0$$

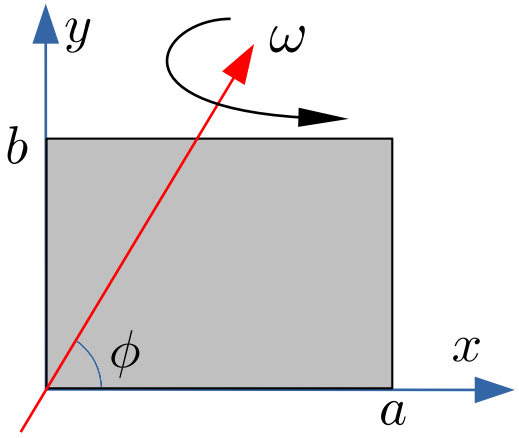
$$= \frac{M}{ab}\left(\int_0^a x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b \mathrm{d}y\right) + \frac{M}{ab}\left(\int_0^a \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b y^2\mathrm{d}y\right)$$

$$= \frac{1}{3}Ma^2 + \frac{1}{3}Mb^2 = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$$

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{n} = \omega(\underbrace{\hat{i}\cos\phi}_{=\cos\alpha} + \underbrace{\hat{j}\sin\phi}_{=\cos\beta} + 0\hat{k})$$

$$\mathbb{I} = \hat{n}\cdot\mathcal{I}\cdot\hat{n}: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{3}Mb^2\cos^2\phi - \frac{1}{2}Mab\cos\phi\sin\phi + \frac{1}{3}Ma^2\sin^2\phi$$

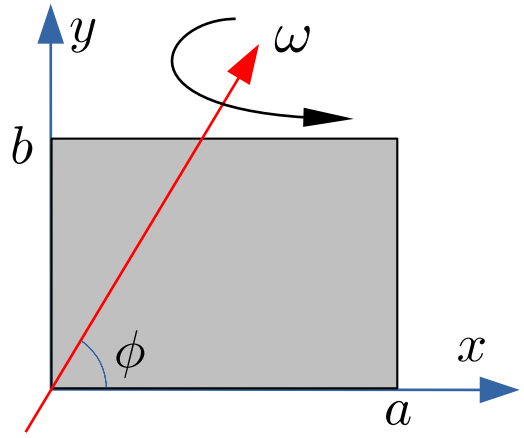
$$\phi = 0: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{3}Mb^2$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{6}M(a^2+b^2) - \frac{1}{4}Mab$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{n} = \omega(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi)$$

$$\mathbb{I} = \hat{n}\cdot\mathcal{I}\cdot\hat{n}$$

$$\mathbb{I} = \frac{1}{3}Mb^2\cos^2\phi - \frac{1}{2}Mab\cos\phi\sin\phi + \frac{1}{3}Ma^2\sin^2\phi$$

$a = b$:

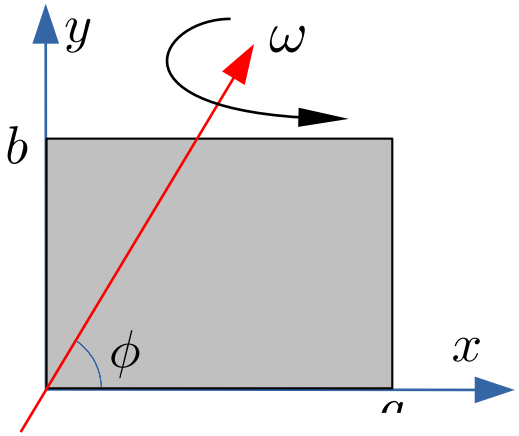
$$\phi = 0: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{12}Ma^2$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{3}Ma^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{n} = \omega(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi)$$

$$\vec{L} = \mathcal{I}\cdot\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega\cos\phi \\ \omega\sin\phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{L} = \left[\tfrac{1}{3}Mb^2\cos\phi - \tfrac{1}{4}Mab\sin\phi, \quad -\tfrac{1}{4}Mab\cos\phi + \tfrac{1}{3}Ma^2\sin\phi, \quad 0\right]\omega$$

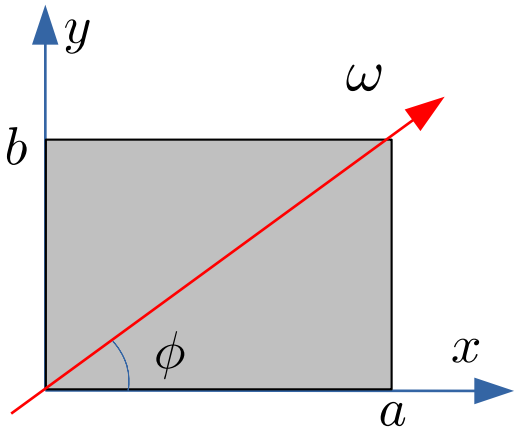
$$T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathcal{I}\cdot\vec{\omega} = \frac{1}{2}\hat{n}\cdot\mathcal{I}\cdot\hat{n}\omega^2 = \frac{1}{2}\mathbb{I}\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Mb^2\cos^2\phi - \frac{1}{2}Mab\cos\phi\sin\phi + \frac{1}{3}Ma^2\sin^2\phi\right)\omega^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

چرخش حول محور دلخواه

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

$$\hat{n} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \hat{n} = \hat{i}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \hat{j}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\mathbb{I} = \hat{n}\cdot\mathcal{I}\cdot\hat{n}$$

$$\mathbb{I} = \frac{1}{3}Mb^2\cos^2\phi - \frac{1}{2}Mab\cos\phi\sin\phi + \frac{1}{3}Ma^2\sin^2\phi$$

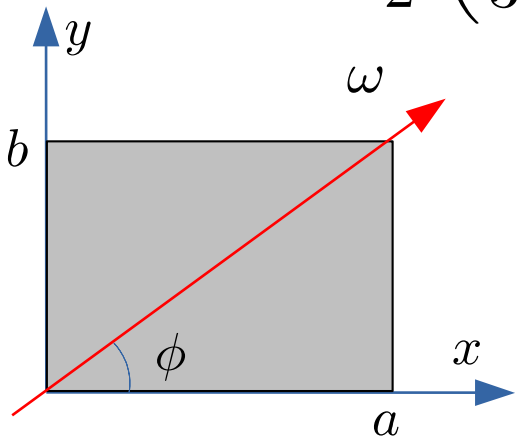
$$\mathbb{I} = \frac{1}{6}M\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \xrightarrow{a=b} \mathbb{I} = \frac{1}{12}Ma^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$\vec{L} = \left[\tfrac{1}{3}Mb^2\cos\phi - \tfrac{1}{4}Mab\sin\phi, \quad -\tfrac{1}{4}Mab\cos\phi + \tfrac{1}{3}Ma^2\sin\phi, \quad 0\right]\omega$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Mb^2\cos^2\phi - \frac{1}{2}Mab\cos\phi\sin\phi + \frac{1}{3}Ma^2\sin^2\phi\right)\omega^2$$



$$\hat{n} = \hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi$$

$$\hat{n} = \hat{i}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \hat{j}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

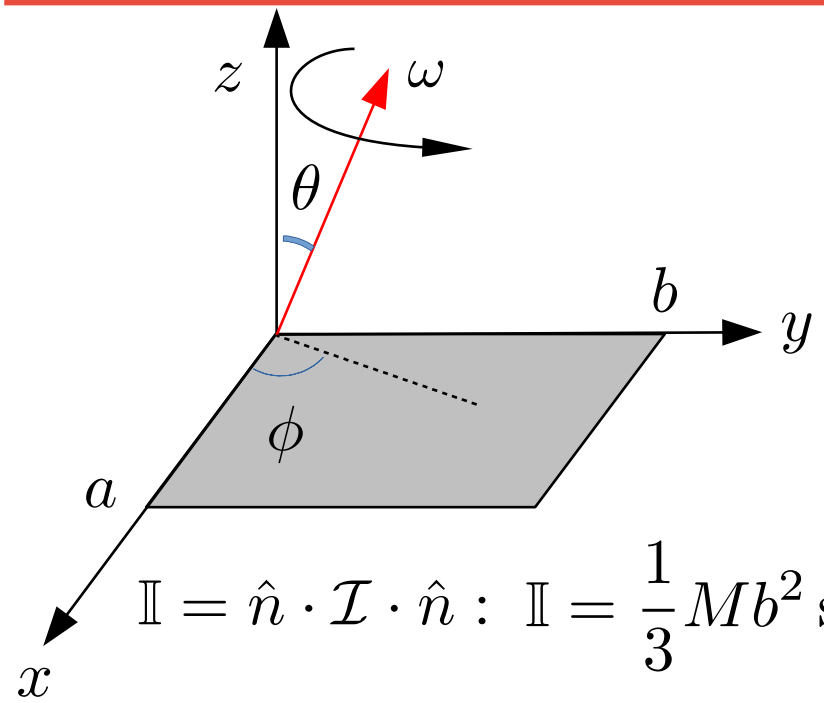
$$\vec{L} = \left[b, \quad a, \quad 0\right]\frac{1}{12}M\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\omega \xrightarrow{a=b} \vec{L} = (\hat{i}+\hat{j})\frac{1}{12}Ma^2\frac{\omega}{\sqrt{2}}$$

$$T = \frac{1}{12}M\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\omega^2 \xrightarrow{a=b} T = \frac{1}{24}Ma^2\omega^2$$

محمدرضا مظفری — گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

چرخش حول محور دلخواه

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{n} = \omega(\hat{i}\underbrace{\sin\theta\cos\phi}_{=\cos\alpha} + \hat{j}\underbrace{\sin\theta\sin\phi}_{=\cos\beta} + \hat{k}\underbrace{\cos\theta}_{=\cos\gamma})$$

$$\mathbb{I} = \hat{n}\cdot\mathcal{I}\cdot\hat{n}: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{3}Mb^2\sin^2\theta\cos^2\phi + \frac{1}{3}Ma^2\sin^2\theta\sin^2\phi$$

$$+\frac{1}{3}M(a^2+b^2)\cos^2\theta - \frac{1}{2}Mab\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi$$

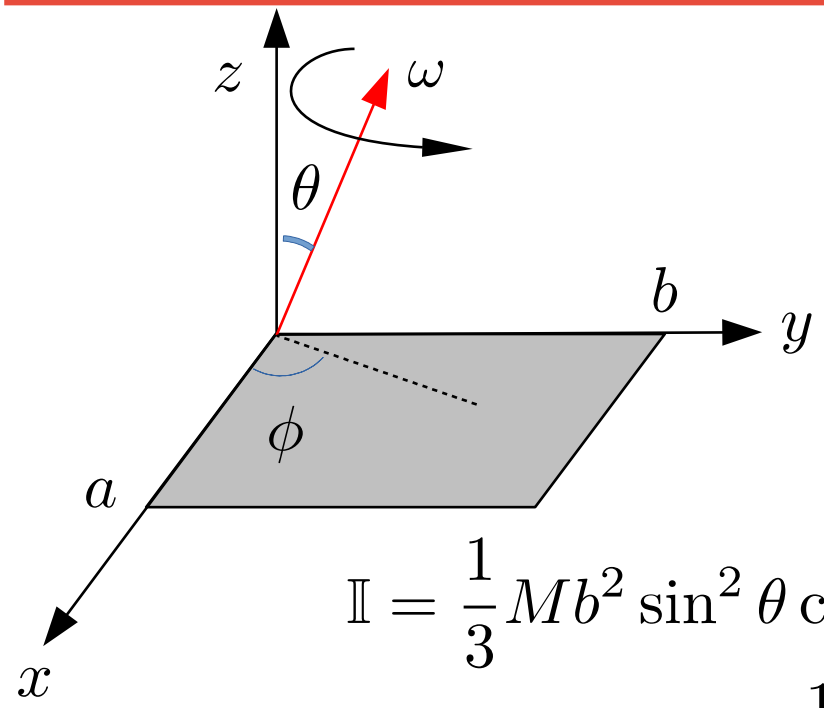
$$\theta = \frac{\pi}{2}: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{3}Mb^2\cos^2\phi + \frac{1}{3}Ma^2\sin^2\phi - \frac{1}{2}Mab\cos\phi\sin\phi$$

$$\theta = 0: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

چرخش حول محور دلخواه

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{n} = \omega(\hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta)$$

$$\mathbb{I} = \hat{n}\cdot\mathcal{I}\cdot\hat{n}$$

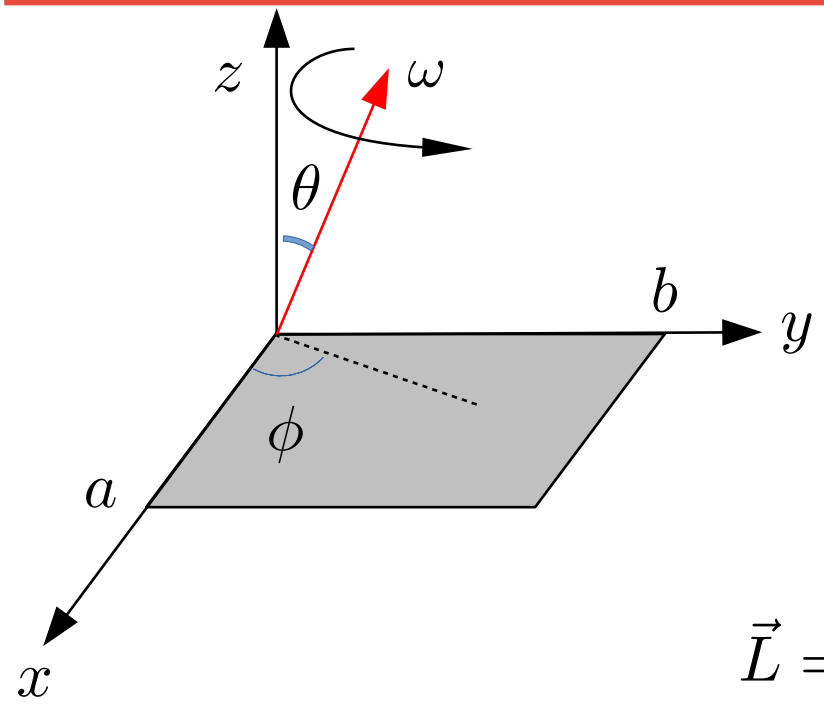
$$\mathbb{I} = \frac{1}{3}Mb^2\sin^2\theta\cos^2\phi + \frac{1}{3}Ma^2\sin^2\theta\sin^2\phi + \frac{1}{3}M(a^2+b^2)\cos^2\theta - \frac{1}{2}Mab\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{3}Mb^2\cos^2\phi + \frac{1}{3}Ma^2\sin^2\phi - \frac{1}{2}Mab\cos\phi\sin\phi$$

$$\theta = 0: \quad \mathbb{I} = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{n} = \omega(\hat{i}\sin\theta\cos\phi + \hat{j}\sin\theta\sin\phi + \hat{k}\cos\theta)$$

$$\vec{L} = \mathcal{I}\cdot\vec{\omega}$$

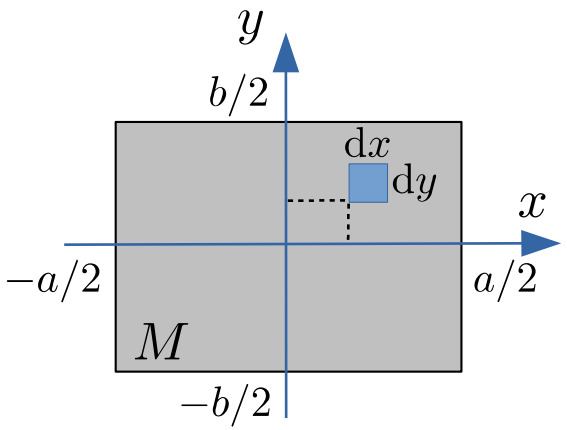
$$\vec{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2\sin\theta\cos\phi - \frac{1}{4}Mab\sin\theta\sin\phi \\ -\frac{1}{4}Mab\sin\theta\cos\phi + \frac{1}{3}Mb^2\sin\theta\sin\phi \\ \frac{1}{3}M(a^2+b^2)\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}\mathbb{I}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}Mb^2\sin^2\theta\cos^2\phi + \frac{1}{3}Ma^2\sin^2\theta\sin^2\phi + \frac{1}{3}M(a^2+b^2)\cos^2\theta - \frac{1}{2}Mab\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi\right)\omega^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

چرخش حول محور دلخواه

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$z = 0$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\int y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{M}{ab}\left(\int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2} y^2 \mathrm{d}y\right) = \frac{1}{12}Mb^2$$

$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yx} = -\int xy\mathrm{d}m = -\frac{M}{ab}\int xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

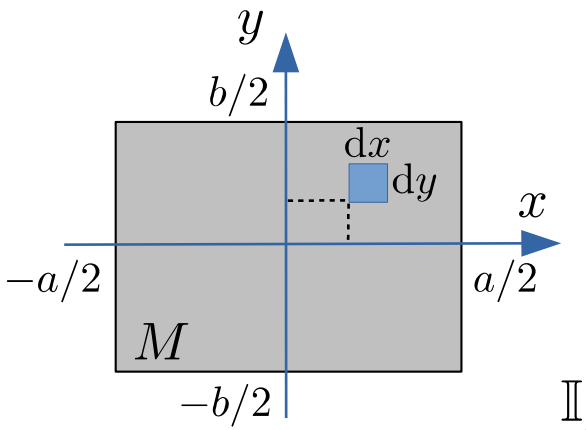
$$= -\frac{M}{ab}\left(\int_{a/2}^{-a/2} x\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2} y\mathrm{d}y\right) = 0$$

$$\mathbb{I}_{yy} = \int (x^2 + z^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\int x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{M}{ab}\left(\int_{-a/2}^{a/2} x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y\right) = \frac{1}{12}Ma^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathbb{I}_{xz} = \mathbb{I}_{zx} = \int xz\mathrm{d}m = 0$$

$$\mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zy} = \int yz\mathrm{d}m = 0$$

$$\mathbb{I}_{zz} = \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\int (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{M}{ab}\left(\int_{-a/2}^{a/2} x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y\right) + \frac{M}{ab}\left(\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2} y^2\mathrm{d}y\right)$$

$$= \frac{1}{12}Ma^2 + \frac{1}{12}Mb^2 = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

محورهای اصلی جسم صلب