جلسه بیست و چهارم

مکانیک تحلیلی

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

حرکت اجسام صلب در سه بعد

یادآوری

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{xx} & \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{xz} \\ \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{yy} & \mathbb{I}_{yz} \\ \mathbb{I}_{xz} & \mathbb{I}_{yz} & \mathbb{I}_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad \mathbb{I}_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2), \quad \mathbb{I}_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i, \quad \mathbb{I}_{xz} = \mathbb{I}_{zx} = -\sum_i m_i x_i z_i, \quad \mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{yy} = \int (x^2 + z^2)\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{zz} = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m$$

$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yx} = -\int xy\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{xz} = \mathbb{I}_{zx} = -\int xz\mathrm{d}m, \quad \mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zy} = -\int yz\mathrm{d}m$$

$$\vec{\omega} = \hat{i}\omega_x + \hat{j}\omega_y + \hat{k}\omega_z : \quad L = \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}, \quad T = \frac{1}{2}\omega \cdot \mathcal{I} \cdot \vec{\omega}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تانسوری لختی در نمایش اندیسی

$$\begin{cases} T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \end{cases} \Longrightarrow \quad T = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 - \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)^2$$

$$\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i = \sum_k \omega_k x_{i,k}$$

$$x_{i,1} = x_i,\ x_{i,2} = y_i,\ x_{i,3} = z_i, \qquad \omega_1 = \omega_x,\ \omega_2 = \omega_y,\ \omega_3 = \omega_z$$

$$(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)^2 = (\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i) = \left(\sum_k \omega_k x_{i,k}\right)\left(\sum_l \omega_k x_{i,l}\right) = \sum_{k,l} \omega_k x_{i,k} x_{i,l} \omega_l$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 - \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{k,l} \omega_k x_{i,k} x_{i,l} \omega_l$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تانسوری لختی در نمایش اندیسی

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 - \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{k,l} \omega_k x_{i,k} x_{i,l} \omega_l$$

$$r_i^2\omega^2 = \left(\sum_s x_{i,s}^2\right)\left(\sum_k \omega_k^2\right) = \left(\sum_s x_{i,s}^2\right)\left(\sum_{k,l} \delta_{kl}\omega_k\omega_l\right)$$

$$= \sum_{k,l} \omega_k \delta_{kl} \left(\sum_s x_{i,s}^2\right) \omega_l$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{k,l} \omega_k \delta_{kl} \left(\sum_s x_{i,s}^2\right) \omega_l - \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{k,l} \omega_k x_{i,k} x_{i,l} \omega_l$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تانسوری لختی در نمایش اندیسی

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{k,l} \omega_k \delta_{kl} (\sum_s x_{i,s}^2) \omega_l - \frac{1}{2}\sum_i m_i \sum_{k,l} \omega_k x_{i,k} x_{i,l} \omega_l$$

$$T = \frac{1}{2}\underbrace{\sum_i m_i}_{i} \sum_{k,l} \omega_k \delta_{kl} \underbrace{(\sum_s x_{i,s}^2)}_{s} \omega_l - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_i m_i}_{i} \sum_{k,l} \omega_k \underbrace{x_{i,k} x_{i,l}}_{} \omega_l$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,l} \omega_k \delta_{kl} (\sum_i m_i \sum_s x_{i,s}^2) \omega_l - \frac{1}{2}\sum_{k,l} \omega_k \left(\sum_i m_i x_{i,k} x_{i,l}\right) \omega_l$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,l} \omega_k \left[\delta_{kl} \left(\sum_i m_i \sum_s x_{i,s}^2\right) - \left(\sum_i m_i x_{i,k} x_{i,l}\right)\right] \omega_l$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

تانسوری لختی در نمایش اندیسی

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,l}\omega_k\left[\delta_{kl}\left(\sum_i m_i\sum_s x_{i,s}^2\right)-\left(\sum_i m_i x_{i,k}x_{i,l}\right)\right]\omega_l$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,l}\omega_k\left[\sum_i m_i\left(\delta_{kl}\sum_s x_{i,s}^2 - x_{i,k}x_{i,l}\right)\right]\omega_l$$

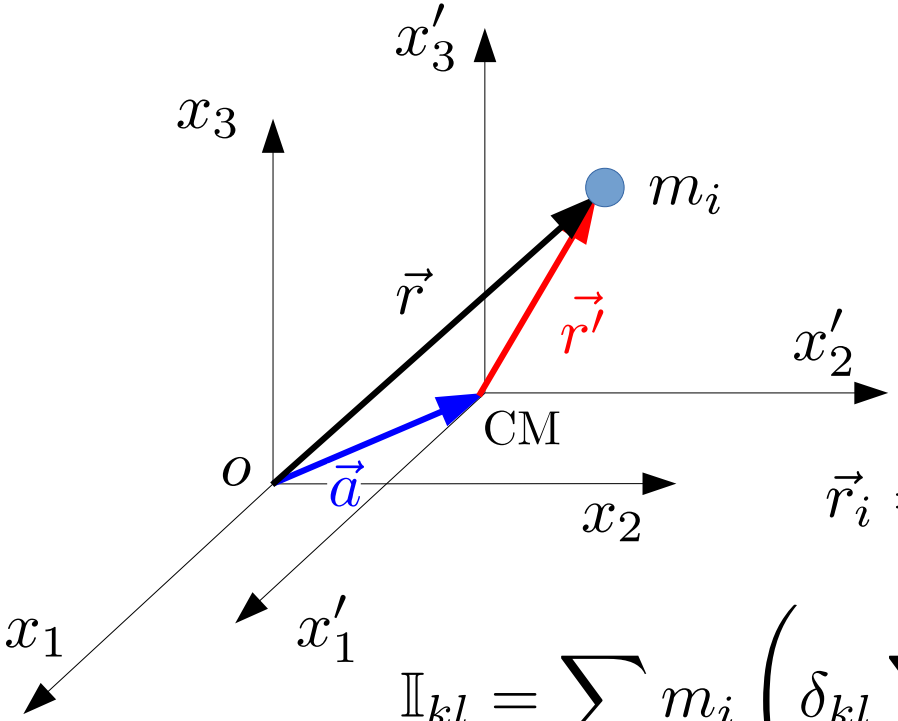
$$\mathbb{I}_{kl} = \sum_i m_i\left(\delta_{kl}\sum_s x_{i,s}^2 - x_{i,k}x_{i,l}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,l}\omega_k\mathbb{I}_{kl}\omega_l = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathcal{I}\cdot\vec{\omega}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قضیه محورهای موازی



$$\mathbb{I}_{kl} = \sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s x_{i,s}^2 - x_{i,k} x_{i,l} \right)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r'}_i + \vec{a}, \quad x_{i,s} = x'_{i,s} + a_s, \quad s = 1, 2, 3$$

$$\mathbb{I}_{kl} = \sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s (x'_{i,s} + a_s)^2 - (x'_{i,k} + a_k)(x'_{i,l} + a_l) \right)$$

$$\mathbb{I}_{kl} = \sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s ({x'_{i,s}}^2 + 2x'_{i,s} a_s + a_s^2) - (x'_{i,k} x'_{i,l} + a_k x'_{i,l} + a_l x'_{i,k} + a_k a_l) \right)$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قضیه محورهای موازی

$$\mathbb{I}_{kl} = \sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s ({x'_{i,s}}^2 + 2x'_{i,s}a_s + a_s^2) - (x'_{i,k}x'_{i,l} + a_k x'_{i,l} + a_l x'_{i,k} + a_k a_l) \right)$$

$$\mathbb{I}_{kl} = \sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s {x'_{i,s}}^2 - x'_{i,k}x'_{i,l} \right) + \sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s a_s^2 - a_k a_l \right)$$

$$+2\delta_{kl} \sum_s a_s \sum_i m_i x'_{i,s} - a_k \sum_i m_i x'_{i,l} - a_l \sum_i m_i x'_{i,k}$$

$$\sum_i \vec{r'}_i = 0, \quad \sum_i m_i x'_{i,s} = 0, \quad s = 1, 2, 3$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قضیه محورهای موازی

$$\mathbb{I}_{kl} = \sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s {x'_{i,s}}^2 - x'_{i,k} x'_{i,l} \right) + \sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s a_s^2 - a_k a_l \right)$$

$$+2\delta_{kl} \sum_s a_s \sum_i m_i x'_{i,s} - a_k \sum_i m_i x'_{i,l} - a_l \sum_i m_i x'_{i,k}$$

$$\sum_i \vec{r'}_i = 0, \quad \sum_i m_i x'_{i,s} = 0, \quad s = 1, 2, 3$$

$$\mathbb{I}_{kl} = \underbrace{\sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s {x'_{i,s}}^2 - x'_{i,k} x'_{i,l} \right)}_{= \mathbb{I}'_{kl}} + \sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s a_s^2 - a_k a_l \right)$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قضیه محورهای موازی

$$\mathbb{I}_{kl} = \underbrace{\sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s {x'_{i,s}}^2 - x'_{i,k} x'_{i,l} \right)}_{= \mathbb{I}'_{kl}} + \underbrace{\sum_i m_i}_{= M} \left(\delta_{kl} \sum_s a_s^2 - a_k a_l \right)$$

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{kl} = \mathbb{I}'_{kl} + M \left(\delta_{kl} \sum_s a_s^2 - a_k a_l \right) \\ \mathbb{I}'_{kl} = \sum_i m_i \left(\delta_{kl} \sum_s {x'_{i,s}}^2 - x'_{i,k} x'_{i,l} \right) \end{cases}$$

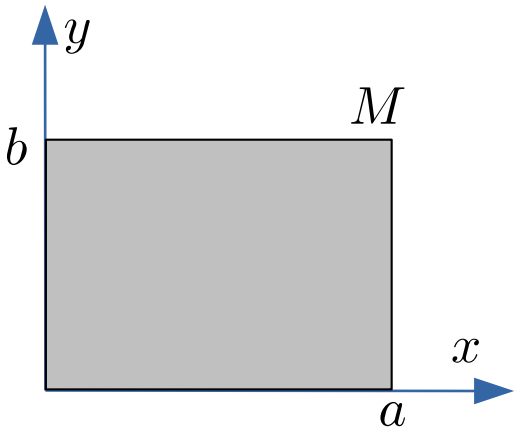
$$\vec{r}_i = \vec{r'}_i + \vec{a}$$

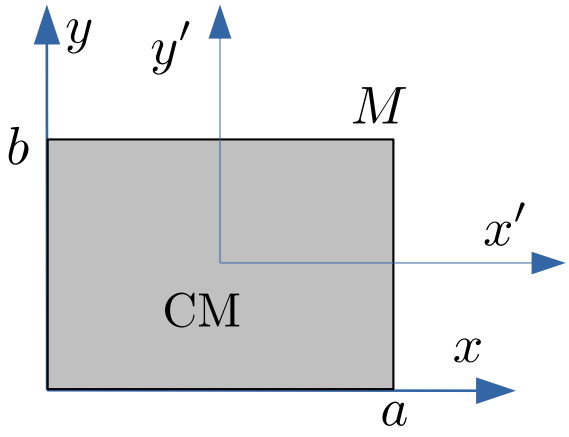
$$x_{i,s} = x'_{i,s} + a_s$$

$$s = 1, 2, 3$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد





$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

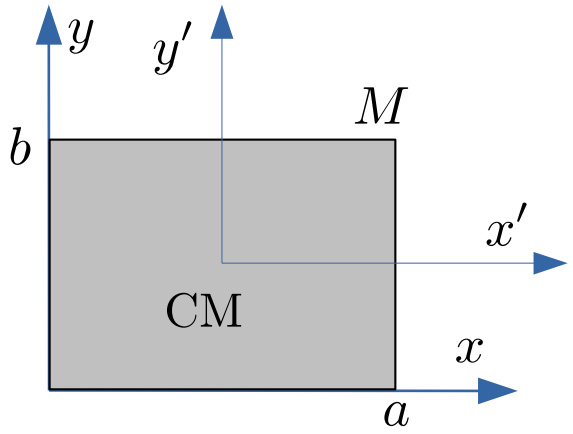
$$\mathbb{I}_{kl} = \mathbb{I}'_{kl} + M\left(\delta_{kl}\sum_s a_s^2 - a_k a_l\right)$$

$$\mathbb{I}'_{kl} = \mathbb{I}_{kl} - M\left(\delta_{kl}\sum_s a_s^2 - a_k a_l\right)$$

$$a_1 = a_x = \frac{a}{2}, \quad a_2 = a_y = \frac{a}{2}, \quad a_3 = a_z = 0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

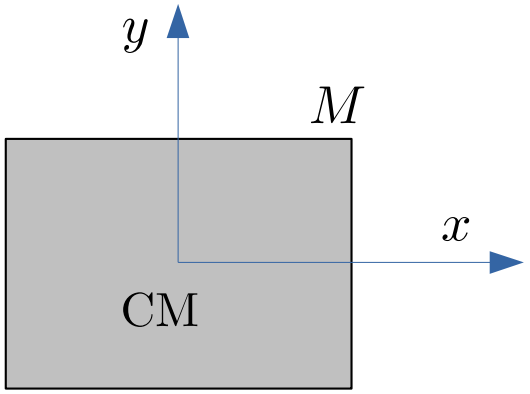
$$a_1 = a_x = \frac{a}{2}, \quad a_2 = a_y = \frac{b}{2}$$

$$M\left(\delta_{kl}\sum_s a_s^2 - a_k a_l\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}Mb^2 & -\frac{1}{4}Mab & 0 \\ -\frac{1}{4}Mab & \frac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}'_{kl} = \mathbb{I}_{kl} - M\left(\delta_{kl}\sum_s a_s^2 - a_k a_l\right): \quad \mathcal{I}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

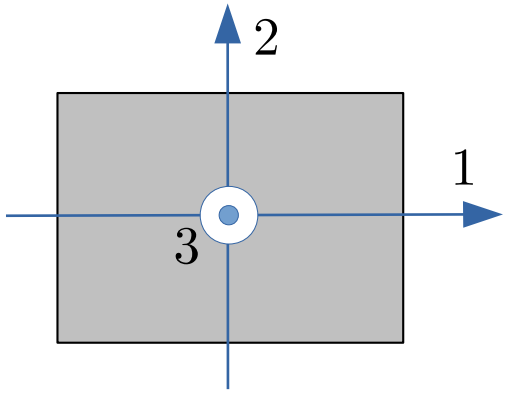
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}Mb^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}M(a^2+b^2) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$



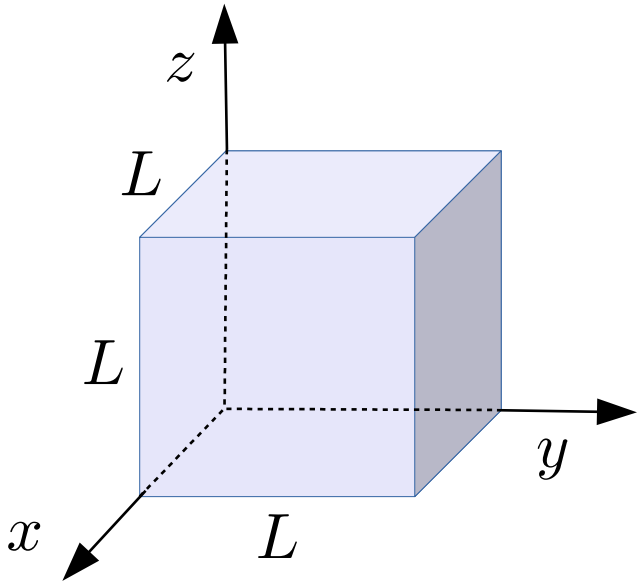
محورهای 1، 2 و 3 را محورهای اصلی جسم صلب می‌نامند.

$$\vec{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3$$

$$\vec{L} = \mathbb{I}_1\omega_1\hat{e}_1 + \mathbb{I}_2\omega_2\hat{e}_2 + \mathbb{I}_3\omega_3\hat{e}_3, \quad T = \frac{1}{2}\mathbb{I}_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_3\omega_3^2$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L^3}\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

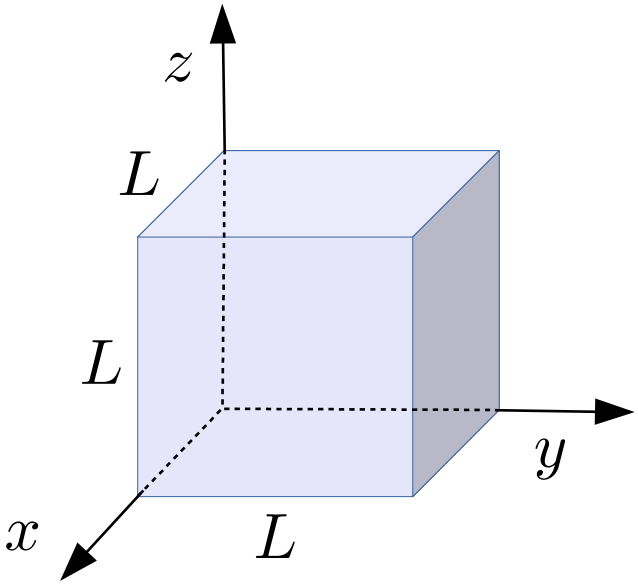
$$\mathbb{I}_{xx} = \int (y^2+z^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{L^3}\int (y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \frac{M}{L^3}\left(\int_0^L \mathrm{d}x\right)\left[\left(\int_0^L y^2\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^L \mathrm{d}z\right) + \left(\int_0^L \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^L z^2\mathrm{d}z\right)\right]$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \frac{2}{3}ML^2$$

$$\mathbb{I}_{xx} = \mathbb{I}_{yy} = \mathbb{I}_{zz} = \frac{2}{3}ML^2$$

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L^3}\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathbb{I}_{xy} = -\int xy\mathrm{d}m = -\frac{M}{L^3}\int xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{M}{L^3}\left(\int_0^L x\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^L y\mathrm{d}y\right)\left(\int_0^L \mathrm{d}z\right)$$

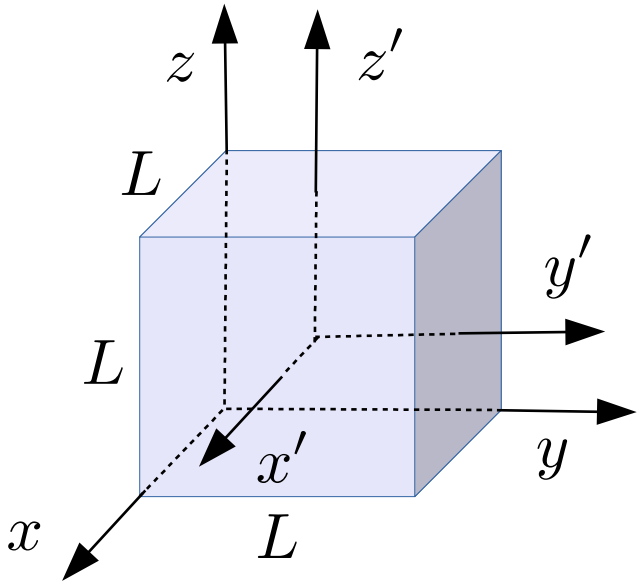
$$\mathbb{I}_{xy} = -\frac{1}{4}ML^2$$

$$\mathbb{I}_{xy} = \mathbb{I}_{yz} = \mathbb{I}_{zx} = -\frac{1}{4}ML^2$$

$$\mathcal{I} = ML^2\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L^3}\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\mathcal{I} = ML^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

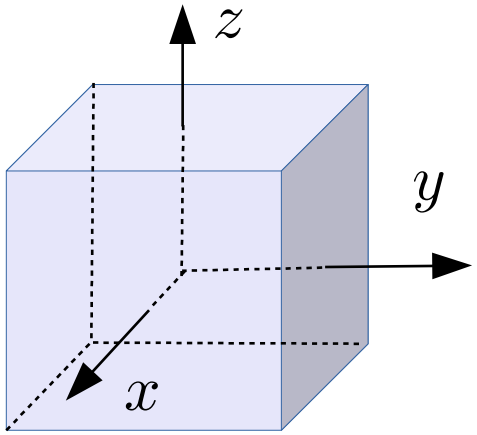
$$a_1 = a_x = \frac{L}{2}, \quad a_2 = a_y = \frac{L}{2}, \quad a_3 = a_z = \frac{L}{2}$$

$$M\left(\delta_{kl}\sum_s a_s^2 - a_k a_l\right) = ML^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{I}'_{kl} = \mathbb{I}_{kl} - M\left(\delta_{kl}\sum_s a_s^2 - a_k a_l\right): \quad \mathcal{I}' = ML^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

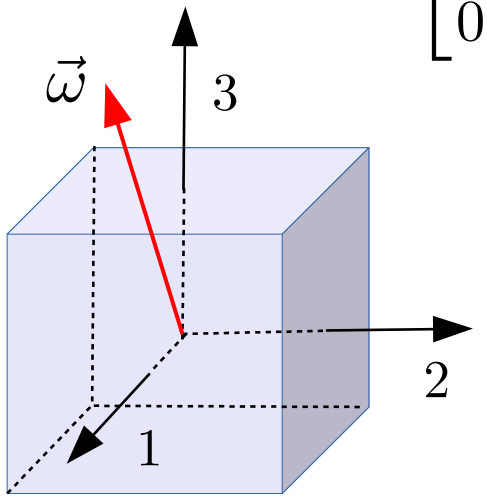
محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

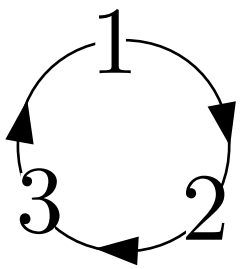


$$\mathcal{I} = ML^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$



محورهای 1، 2 و 3 را محورهای اصلی جسم صلب می‌نامند.

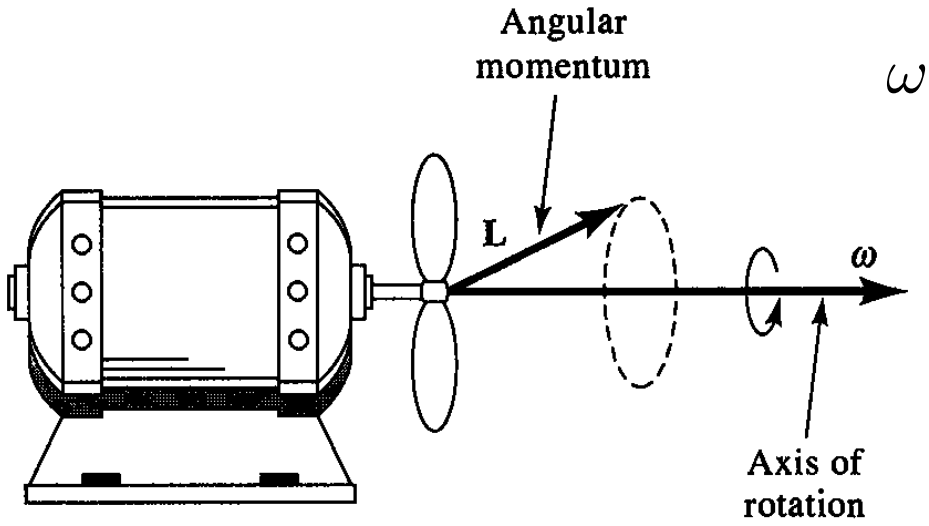


$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$$

$$\vec{L} = \mathbb{I}_1 \omega_1 \hat{e}_1 + \mathbb{I}_2 \omega_2 \hat{e}_2 + \mathbb{I}_3 \omega_3 \hat{e}_3, \quad T = \frac{1}{2}\mathbb{I}_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_3 \omega_3^2$$

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$\omega_1 = \omega, \text{and}\, \omega_2 = \omega_3 = 0 \Rightarrow \vec{L} = I_1 \omega \hat{e}_1$$



* تعادل استاتیکی:

مرکز جرم پروانه روی محور چرخ قرار بگیرد.

* تعادل دینامیکی:

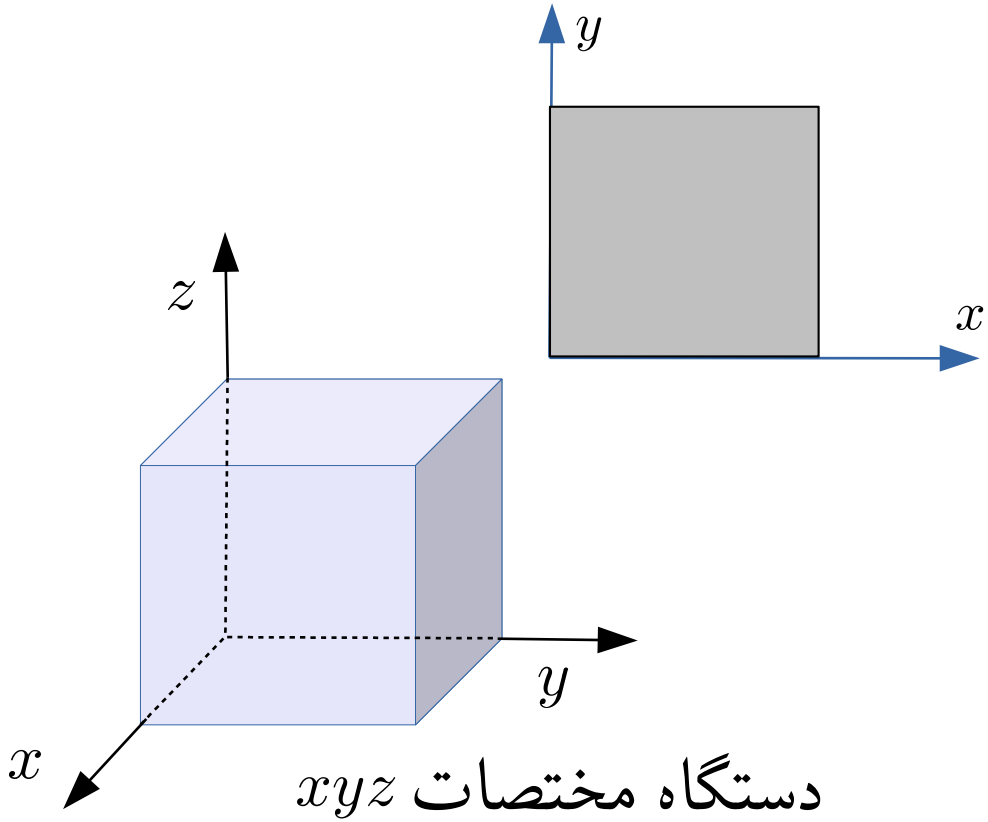
محور چرخش یکی از محورهای اصلی باشد. در این شرایط بردار تکانه زاویه‌ای پروانه $\vec{L}$ در امتداد محور چرخش $\vec{\omega}$ قرار می‌گیرد.

* عدم تعادل دینامیکی:

اگر محور دوران، محور اصلی نباشد، تکانه زاویه‌ای یک مخروط را در فضا جاروب می‌کند. بنابراین با گذر زمان تغییرات تکانه زاویه‌ای با زمان غیر صفر است، یعنی گشتاور نیروی $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$ عمود بر میله وارد می‌شود.

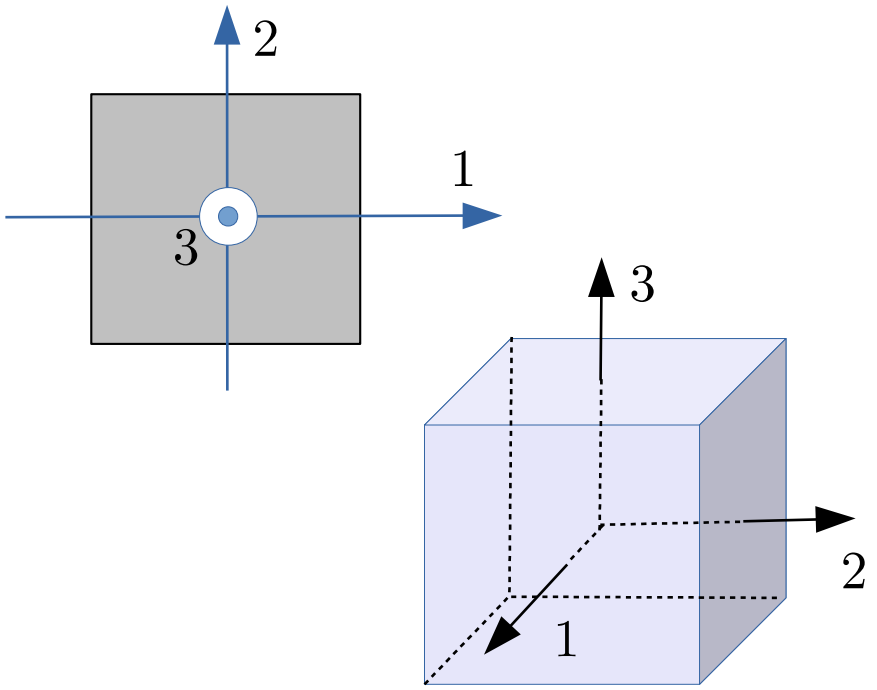
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



دستگاه مختصات xyz

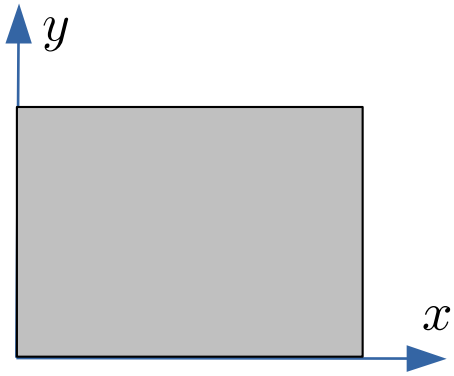
$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{xx} & \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{xz} \\ \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{yy} & \mathbb{I}_{yz} \\ \mathbb{I}_{xz} & \mathbb{I}_{yz} & \mathbb{I}_{zz} \end{bmatrix}$$

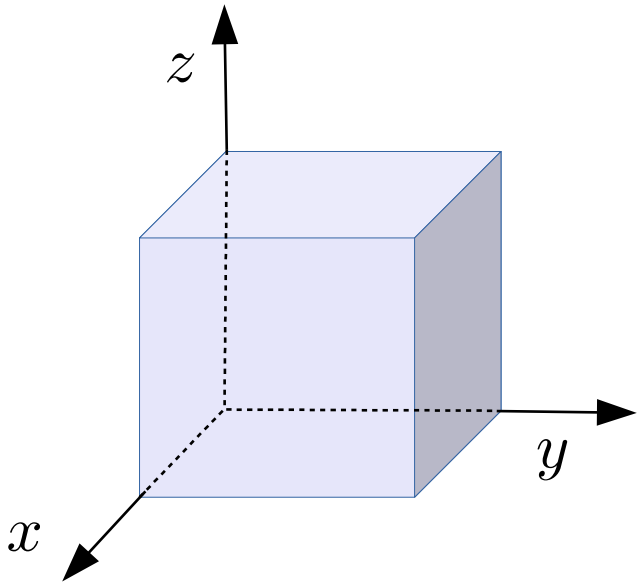


دستگاه محورهای اصلی 123

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$

حرکت اجسام صلب در سه بعد





دستگاه مختصات xyz

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{xx} & \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{xz} \\ \mathbb{I}_{xy} & \mathbb{I}_{yy} & \mathbb{I}_{yz} \\ \mathbb{I}_{xz} & \mathbb{I}_{yz} & \mathbb{I}_{zz} \end{bmatrix}$$

قطری کردن

دستگاه محورهای اصلی 123

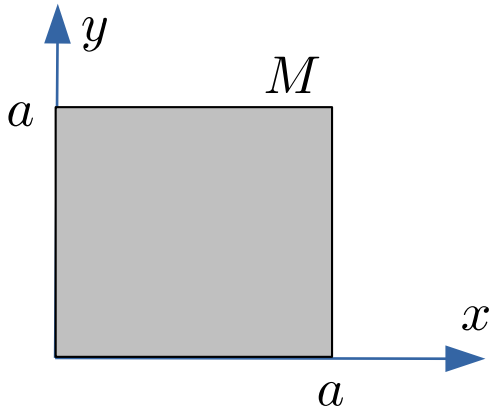
$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathcal{I} = Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$



$$[\mathcal{I}]\{u\} = \lambda[1]\{u\} \quad \text{یا} \quad [\mathcal{I} - \lambda 1]\{u\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}Ma^2 & -\frac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{1}{3}Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

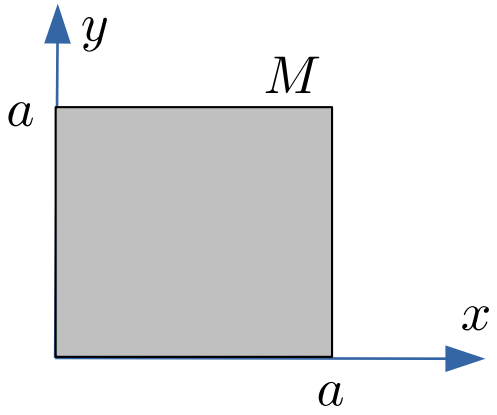
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & -\frac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Ma^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathcal{I} = Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & -\frac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Ma^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

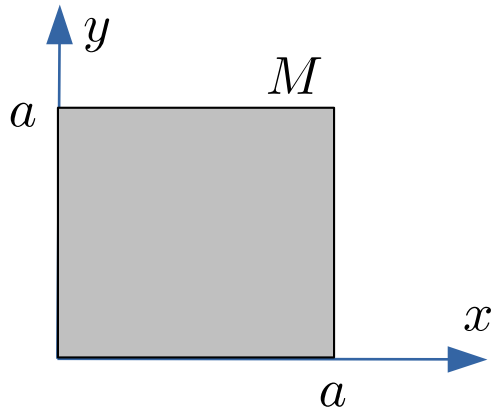
$$|\mathcal{I} - \lambda 1| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & -\frac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Ma^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\frac{1}{3}Ma^2 - \lambda)^2(\frac{2}{3}Ma^2 - \lambda) - (\frac{1}{4}Ma^2)^2(\frac{2}{3}Ma^2 - \lambda) = 0$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن



$$\mathcal{I} = Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$(\frac{1}{3}Ma^2 - \lambda)^2(\frac{2}{3}Ma^2 - \lambda) - (\frac{1}{4}Ma^2)^2(\frac{2}{3}Ma^2 - \lambda) = 0$$

$$(\frac{2}{3}Ma^2 - \lambda)[(\frac{1}{3}Ma^2 - \lambda)^2 - (\frac{1}{4}Ma^2)^2] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda = \pm\frac{1}{4}Ma^2 \\ \frac{2}{3}Ma^2 - \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{I}_1 = \lambda_1 = \frac{1}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_2 = \lambda_2 = \frac{7}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_3 = \lambda_3 = \frac{2}{3}Ma^2$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathbb{I}_1 = \lambda_1 = \frac{1}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_2 = \lambda_2 = \frac{7}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_3 = \lambda_3 = \frac{2}{3}Ma^2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & -\frac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Ma^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbb{I}_3 = \lambda_3 = \frac{2}{3}Ma^2 : Ma^2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}u - \frac{1}{4}v = 0 \\ -\frac{1}{4}u - \frac{1}{3}v = 0 \end{cases} \Rightarrow u = v = 0, \quad w \neq 0$$

$u = v = 0, w = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \hat{z}$$

$u = v = 0, w = -1$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\hat{z}$$

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathbb{I}_1 = \lambda_1 = \frac{1}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_2 = \lambda_2 = \frac{7}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_3 = \lambda_3 = \frac{2}{3}Ma^2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & -\frac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Ma^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbb{I}_1 = \lambda_1 = \frac{1}{12}Ma^2 : Ma^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v = 0 \\ -\frac{1}{4}u + \frac{1}{4}v = 0 \end{cases} \Rightarrow v = u, \quad w = 0$$

اگر $u = 1 \Rightarrow v = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر $u = -1 \Rightarrow v = -1$:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathbb{I}_1 = \lambda_1 = \frac{1}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_2 = \lambda_2 = \frac{7}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_3 = \lambda_3 = \frac{2}{3}Ma^2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & -\frac{1}{4}Ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}Ma^2 & \frac{1}{3}Ma^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Ma^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbb{I}_2 = \lambda_2 = \frac{7}{12}Ma^2 : Ma^2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v = 0 \\ -\frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v = 0 \end{cases} \Rightarrow v = -u, \quad w = 0$$

اگر $u = 1 \Rightarrow v = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اگر $u = -1 \Rightarrow v = 1$:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

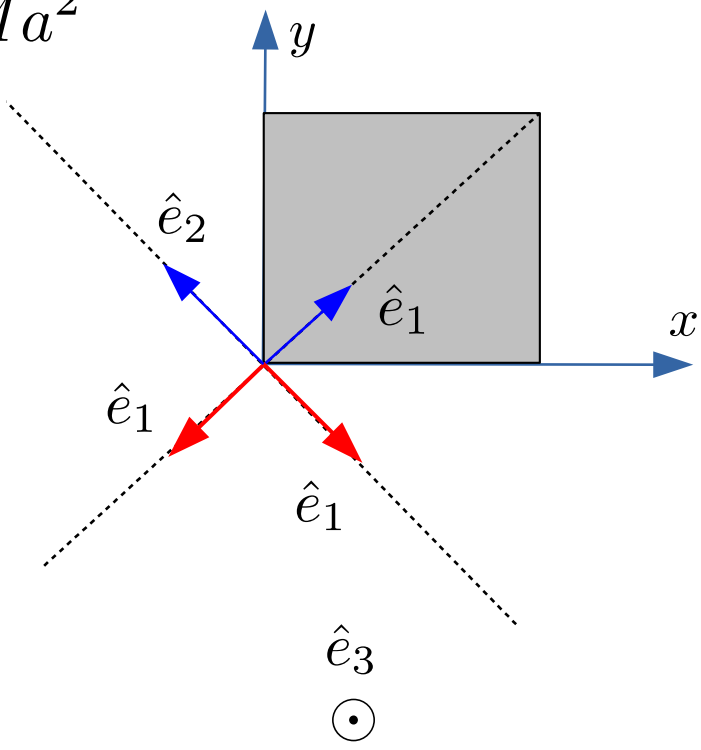
حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathbb{I}_1 = \frac{1}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_2 = \frac{7}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_3 = \frac{2}{3}Ma^2$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \hat{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$



$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \hat{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

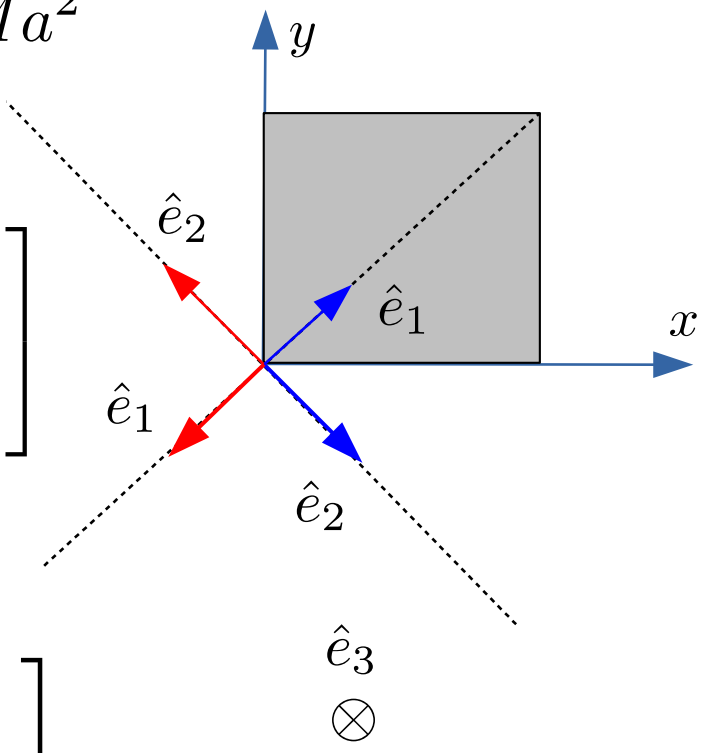
حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathbb{I}_1 = \frac{1}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_2 = \frac{7}{12}Ma^2, \quad \mathbb{I}_3 = \frac{2}{3}Ma^2$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \hat{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$



$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$$

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \hat{e}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

* برای هر جسم صلب، در هر نقطه معین، دست کم یک مجموعه از محورهای اصلی راستگرد وجود دارد.
* برای بررسی هر مسئله، فقط به یک مجموعه از محورهای اصلی نیاز است.
* انتخاب هر مجموعه از محورهای اصلی، تأثیری در جواب نهایی مسئله نخواهد داشت.
* تکانه زاویه‌ای و انرژی جنبشی در دستگاه محورهای اصلی بصورت زیر داده می‌شود،

$$\vec{L} = \mathbb{I}_1\omega_1\hat{e}_1 + \mathbb{I}_2\omega_2\hat{e}_2 + \mathbb{I}_3\omega_3\hat{e}_3$$

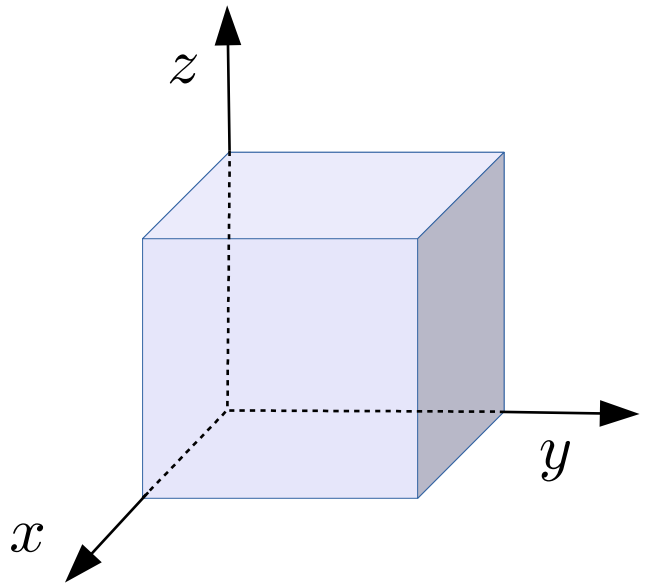
$$T = \frac{1}{2}\mathbb{I}_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_3\omega_3^2$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathcal{I} = ML^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$



$$[\mathcal{I}]\{u\} = \lambda[1]\{u\} \quad \text{یا} \quad [\mathcal{I} - \lambda 1]\{u\} = 0$$

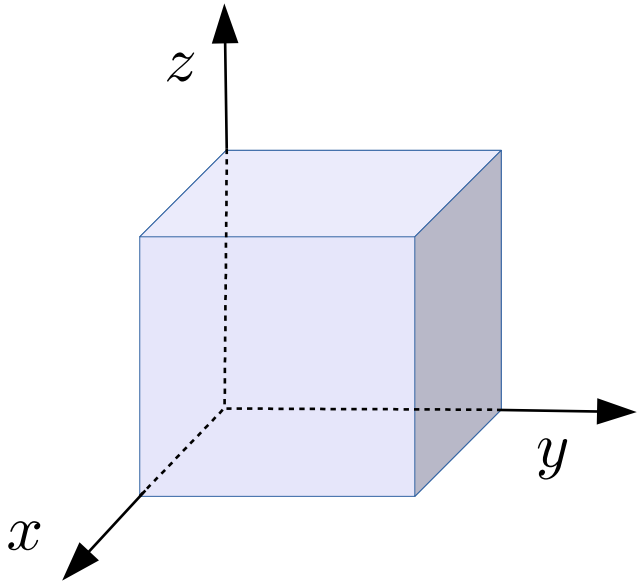
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}ML^2 - \lambda & -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 - \lambda & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathcal{I} = ML^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

قطری کردن

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$$|\mathcal{I} - \lambda 1| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{2}{3}ML^2 - \lambda & -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 - \lambda & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\frac{2}{3}ML^2 - \lambda)^3 - 2(\frac{1}{4}ML^2)^3 - 3(\frac{1}{4}ML^2)^2(\frac{2}{3}ML^2 - \lambda) = 0$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathbb{I}_1 = \lambda_1 = \frac{11}{12}ML^2, \quad \mathbb{I}_2 = \lambda_2 = \frac{11}{12}ML^2, \quad \mathbb{I}_3 = \lambda_3 = \frac{1}{6}ML^2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}ML^2 - \lambda & -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 - \lambda & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbb{I}_3 = \lambda_3 = \frac{1}{6}ML^2 : ML^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

اگر $u = -1 \Rightarrow v = w = -1$: اگر $u = 1 \Rightarrow w = v = 1$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}v - \frac{1}{4}w = 0 \\ -\frac{1}{4}u + \frac{1}{2}v - \frac{1}{4}w = 0 \\ -\frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v + \frac{1}{2}w = 0 \end{cases} \Rightarrow v = u = w, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathbb{I}_1 = \lambda_1 = \frac{11}{12}ML^2, \quad \mathbb{I}_2 = \lambda_2 = \frac{11}{12}ML^2, \quad \mathbb{I}_3 = \lambda_3 = \frac{1}{6}ML^2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}ML^2 - \lambda & -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 - \lambda & -\frac{1}{4}ML^2 \\ -\frac{1}{4}ML^2 & -\frac{1}{4}ML^2 & \frac{2}{3}ML^2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbb{I}_1 = \lambda_1 = \frac{11}{12}ML^2 : ML^2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v - \frac{1}{4}w = 0 \\ -\frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v - \frac{1}{4}w = 0 \\ -\frac{1}{4}u - \frac{1}{4}v - \frac{1}{4}w = 0 \end{cases} \Rightarrow u + v + w = 0,$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$\mathbb{I}_1 = \lambda_1 = \frac{11}{12}ML^2, \quad \mathbb{I}_2 = \lambda_2 = \frac{11}{12}ML^2, \quad \mathbb{I}_3 = \lambda_3 = \frac{1}{6}ML^2$$

قطری کردن

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$u + v + w = 0$$

$$\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = 0$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

قطری کردن

$$\mathbb{I}_1 = \lambda_1 = \frac{11}{12}ML^2, \quad \mathbb{I}_2 = \lambda_2 = \frac{11}{12}ML^2, \quad \mathbb{I}_3 = \lambda_3 = \frac{1}{6}ML^2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

محمدرضا مظفری گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم