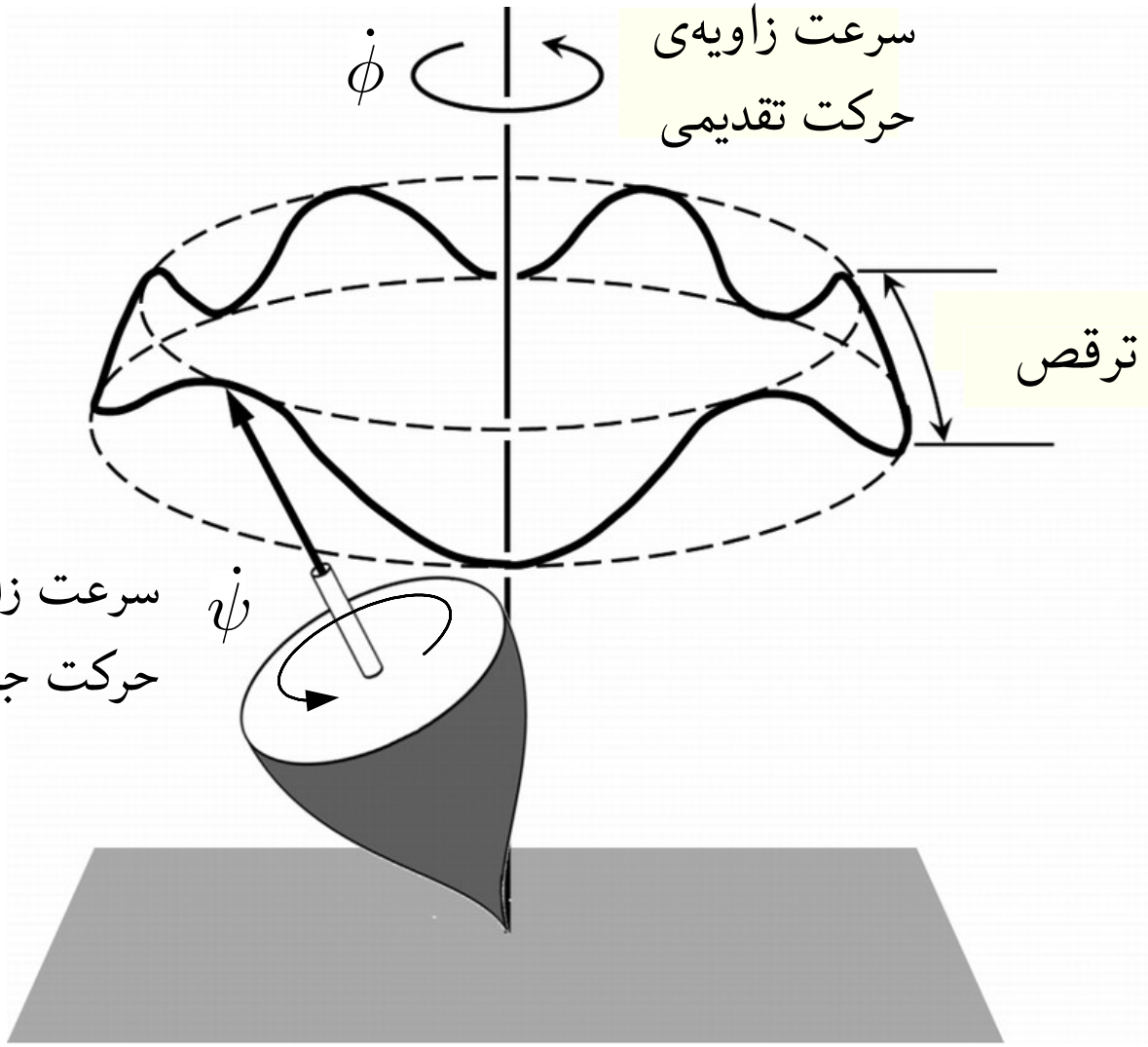
جلسه بیست و شش

مکانیک تحلیلی

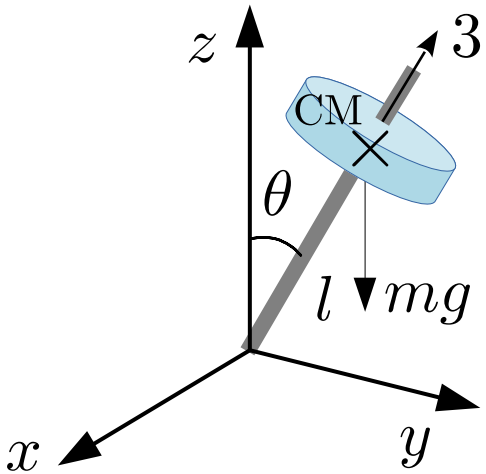
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه
دانشگاه قم
اسفند ۹۸

حرکت اجسام صلب در سه بعد



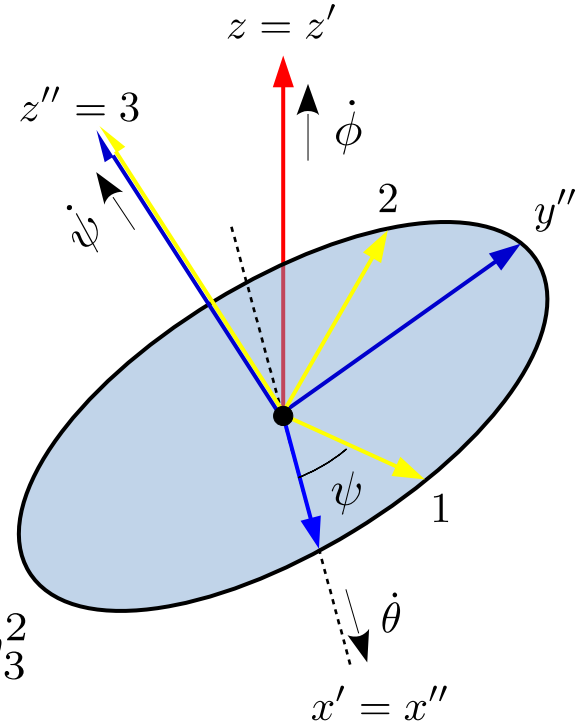
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد



$$\mathbb{I}_1 = \mathbb{I}_2 = \mathbb{I}, \quad \mathbb{I}_3 = \mathbb{I}_s$$

$$\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot\phi\sin\theta\sin\psi + \dot\theta\cos\psi\\ \dot\phi\sin\theta\cos\psi - \dot\theta\sin\psi\\ \dot\phi\cos\theta + \dot\psi\end{pmatrix}$$



$$T = \frac{1}{2}\mathbb{I}_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}\mathbb{I}_3\omega_3^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}\mathbb{I}(\omega_1^2+\omega_2^2) + \frac{1}{2}\mathbb{I}_s\omega_3^2$$

$$T = \frac{1}{2}\mathbb{I}(\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{1}{2}\mathbb{I}_s(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2, \quad V = mgl\cos\theta$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\mathbb{I}(\dot\phi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2) + \frac{1}{2}\mathbb{I}_s(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgl\cos\theta$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\mathbb{I}(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\mathbb{I}_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgl\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbb{I}\dot{\phi}\sin^2\theta + \mathbb{I}_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta\right) = 0 \Rightarrow \mathbb{I}\dot{\phi}\sin^2\theta + \mathbb{I}_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta = \text{const.}$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad : \quad \boxed{\mathbb{I}\dot{\phi}\sin^2\theta + \mathbb{I}_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta = p_\phi = \text{const.}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbb{I}_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\right) = 0 \Rightarrow \mathbb{I}_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) = \text{const.}$$

$$p_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \quad : \quad \boxed{\mathbb{I}_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) = p_\psi = \text{const.}}$$

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$\begin{cases} \mathbb{I}\dot{\phi}\sin^2\theta + \mathbb{I}_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\cos\theta = p_\phi \\ \mathbb{I}_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) = p_\psi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\phi} = \dfrac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta} \\ \dot{\psi} = \dfrac{p_\psi}{\mathbb{I}_s} - \dfrac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)\cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta} \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbb{I}(\dot{\phi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}\mathbb{I}_s(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgl\cos\theta$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + \frac{p_\psi^2}{2\mathbb{I}_s} + \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} - mgl\cos\theta, \qquad p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \mathbb{I}\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{\mathbb{I}}$$

$$E = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + \frac{p_\psi^2}{2\mathbb{I}_s} + \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E = 0 \Rightarrow \boxed{\mathbb{I}\ddot{\theta} = -\frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)(p_\psi - p_\phi\cos\theta)}{\mathbb{I}\sin^3\theta} + mgl\sin\theta}$$

حرکت اجسام صلب در سه بعد

شرایط اولیه

$$\begin{cases} \phi_0, \theta_0, \psi_0 \\ \dot{\phi}_0, \dot{\theta}_0, \dot{\psi}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_\phi = \mathbb{I}\dot{\phi}_0 \sin^2\theta_0 + \mathbb{I}_s(\dot{\phi}_0 \cos\theta_0 + \dot{\psi}_0)\cos\theta_0 \\ p_\psi = \mathbb{I}_s(\dot{\phi}_0 \cos\theta_0 + \dot{\psi}_0) \end{cases}$$

$$\mathbb{I}\ddot{\theta} = -\frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)(p_\psi - p_\phi \cos\theta)}{\mathbb{I}\sin^3\theta} + mgl\sin\theta$$

$$\Downarrow$$

$$\theta = \theta(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta} \qquad \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{\mathbb{I}_s} - \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)\cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\phi(t) = \phi_0 + \int_0^t \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta}\mathrm{d}t \qquad \psi(t) = \psi_0 + \int_0^t \left[\frac{p_\psi}{\mathbb{I}_s} - \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)\cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta}\right]\mathrm{d}t$$

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$E = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + \frac{p_\psi^2}{2\mathbb{I}_s} + \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta = \frac{p_\psi^2}{2\mathbb{I}_s} + E'$$

$$E' = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

$$\dot{\theta}^2 = (2/\mathbb{I})(E' - V_{\text{eff}}(\theta)) \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{(2/\mathbb{I})(E' - V_{\text{eff}}(\theta))}$$

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{(2/\mathbb{I})(E' - V_{\text{eff}}(\theta))} \Rightarrow t(\theta) = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{(2/\mathbb{I})(E' - V_{\text{eff}}(\theta))}$$

$$t = t(\theta) \Rightarrow \theta = \theta(t), \begin{cases} \dot{\phi} = \dfrac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta} \\ \dot{\psi} = \dfrac{p_\psi}{\mathbb{I}_s} - \dfrac{(p_\phi - p_\psi\cos\theta)\cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta} \end{cases} \Rightarrow \phi = \phi(t), \quad \psi = \psi(t)$$

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$E' = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

$$N_\theta = -\frac{\partial V_{\text{eff}}(\theta)}{\partial\theta}|_{\theta_0} = 0$$

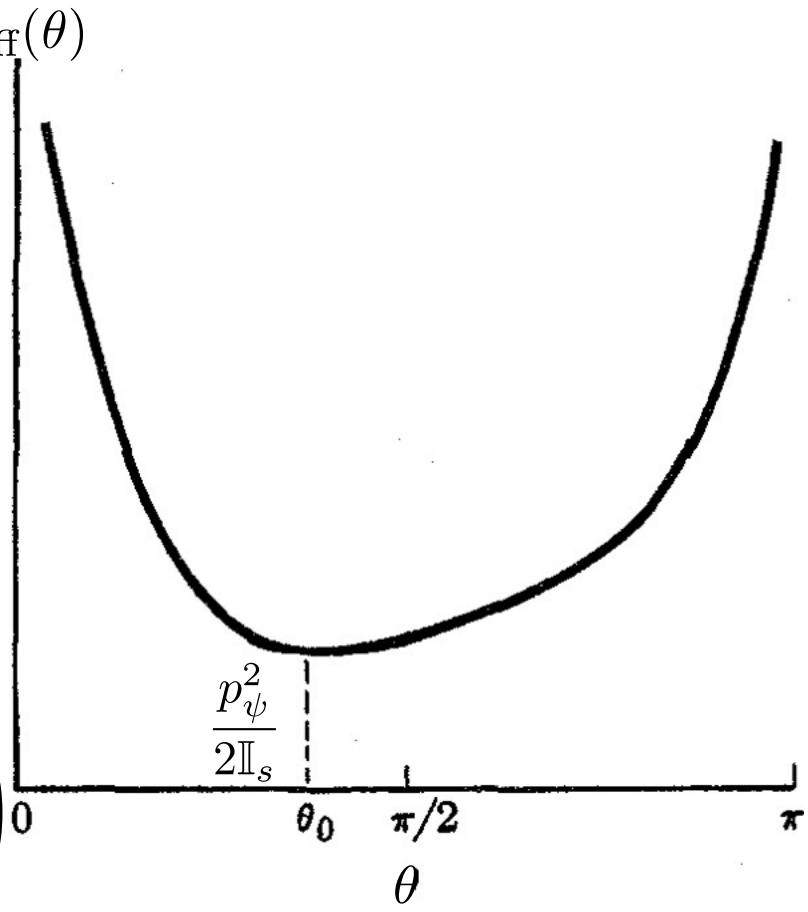
$$N = -\frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta_0)(p_\psi - p_\phi \cos\theta_0)}{\mathbb{I}\sin^3\theta_0} + mgl\sin\theta_0 = 0$$

$$-(p_\phi - p_\psi \cos\theta_0)(p_\psi - p_\phi \cos\theta_0) + mgl\mathbb{I}\sin^4\theta_0 = 0$$

$$(\cos\theta_0)(p_\phi - p_\psi \cos\theta_0)^2$$

$$-(p_\psi \sin^2\theta_0)(p_\phi - p_\psi \cos\theta_0) + mgl\mathbb{I}\sin^4\theta_0 = 0$$

$$p_\phi - p_\psi \cos\theta_0 = \frac{p_\psi \sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}{p_\psi^2}}\right)$$



حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$E' = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

$$p_\phi - p_\psi \cos\theta_0 = \frac{p_\psi \sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}{p_\psi^2}}\right)$$

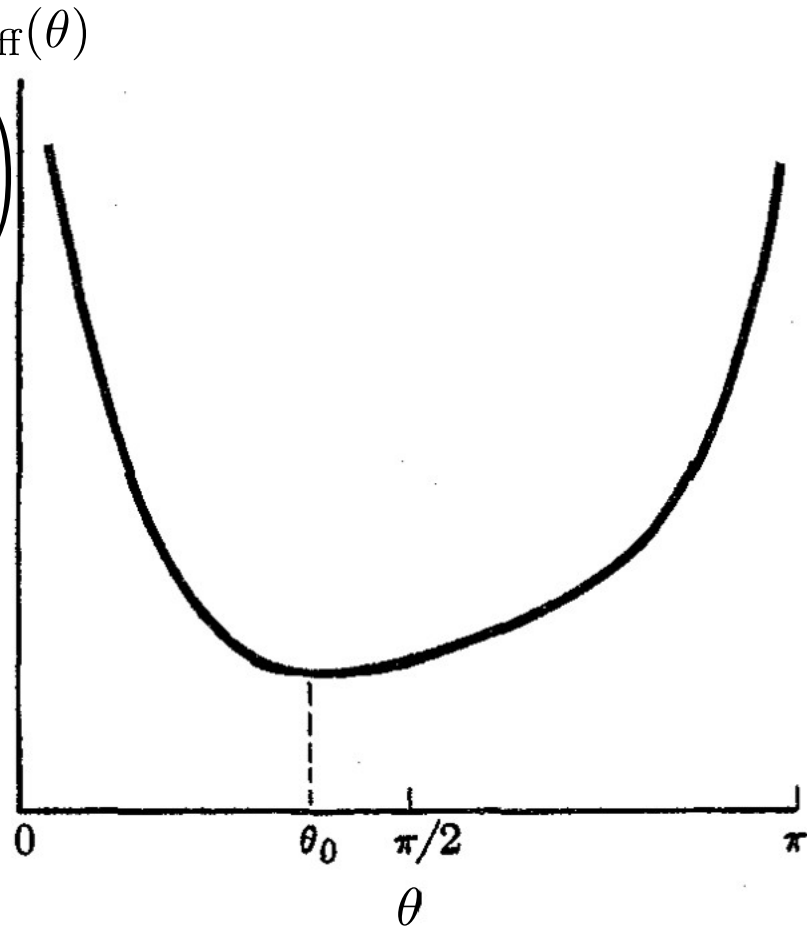
$$1 - \frac{4mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}{p_\psi^2} \geq 0$$

$$p_\psi^2 \geq 4mgl\mathbb{I}\cos\theta_0 \Rightarrow p_\psi \geq 2\sqrt{mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}$$

$$p_\psi = \mathbb{I}_s\omega_3$$

$$\omega_3 \geq \frac{2}{I_s}\sqrt{mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}$$

شرط یک حرکت تقدیمی پایدار با زاویه‌ی ثابت θ_0



محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$E' = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

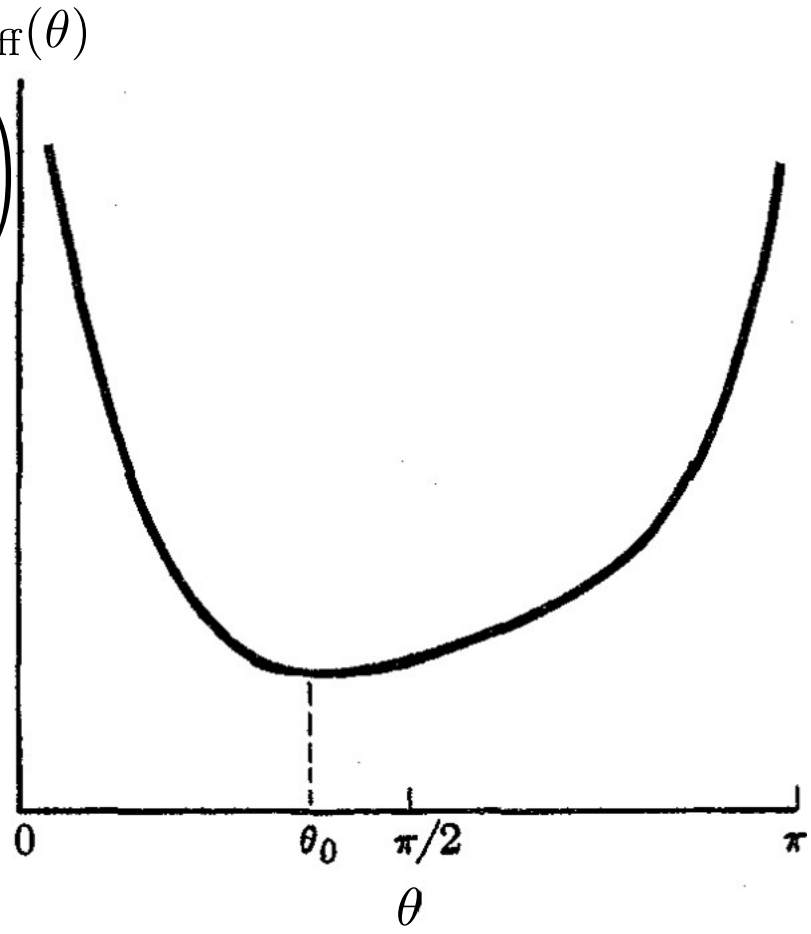
$$p_\phi - p_\psi \cos\theta_0 = \frac{p_\psi \sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}{p_\psi^2}}\right)$$

$$\omega_3 \geq \frac{2}{I_s}\sqrt{mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}$$

شرط یک حرکت تقدیمی پایدار با زاویه‌ی ثابت θ_0

$$\dot{\phi}|_{\theta_0} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta_0}{\mathbb{I}\sin^2\theta_0}$$

$$\dot{\phi}|_{\theta_0} = \dot{\phi}_0 = \frac{p_\psi}{\mathbb{I}\cos\theta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}{p_\psi^2}}\right)$$



محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$E' = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

شرط یک حرکت تقدیمی پایدار با زاویه‌ی ثابت θ_0

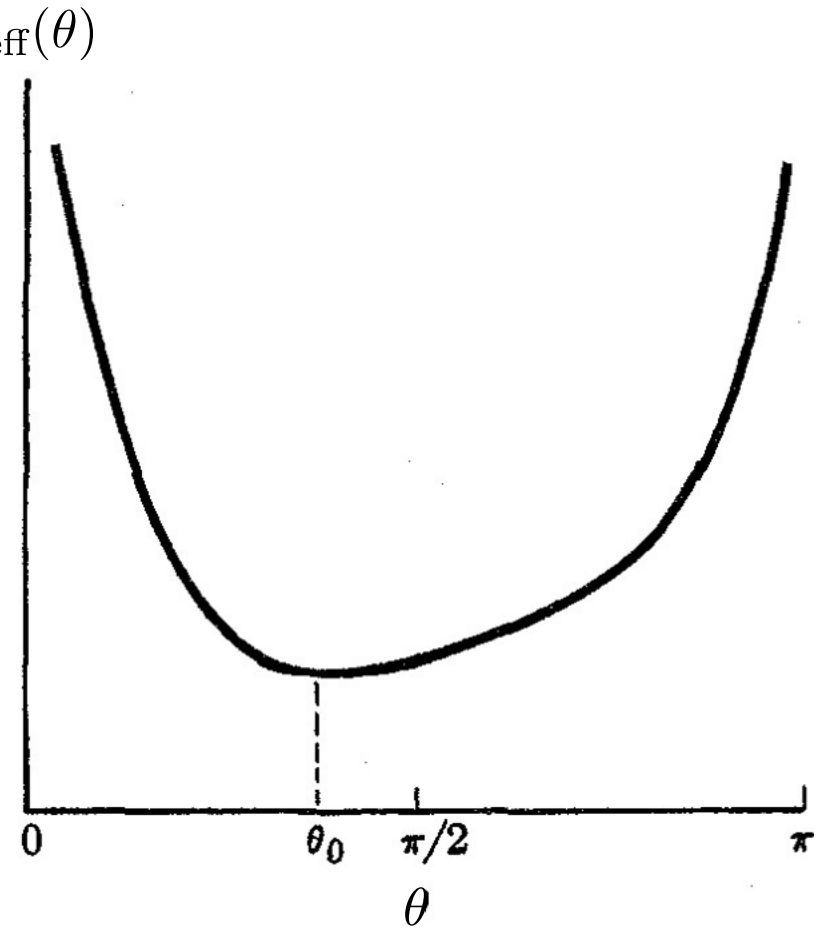
$$\omega_3 \geq \frac{2}{I_s}\sqrt{mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}$$

$$\dot{\phi}|_{\theta_0} = \dot{\phi}_0 = \frac{p_\psi}{\mathbb{I}\cos\theta_0}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}{p_\psi^2}}\right)$$

اگر p_ψ خیلی بزرگ باشد.

$$\dot{\phi}_0 \propto \frac{p_\psi}{\mathbb{I}\cos\theta_0}\left[1 \pm \left(1 - \frac{2mgl\mathbb{I}\cos\theta_0}{p_\psi^2}\right)\right]$$

$$\dot{\phi}_0(+) \propto \frac{p_\psi}{\mathbb{I}\cos\theta_0}, \qquad \dot{\phi}_0(-) \propto \frac{2mgl}{p_\psi}$$



محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$E' = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

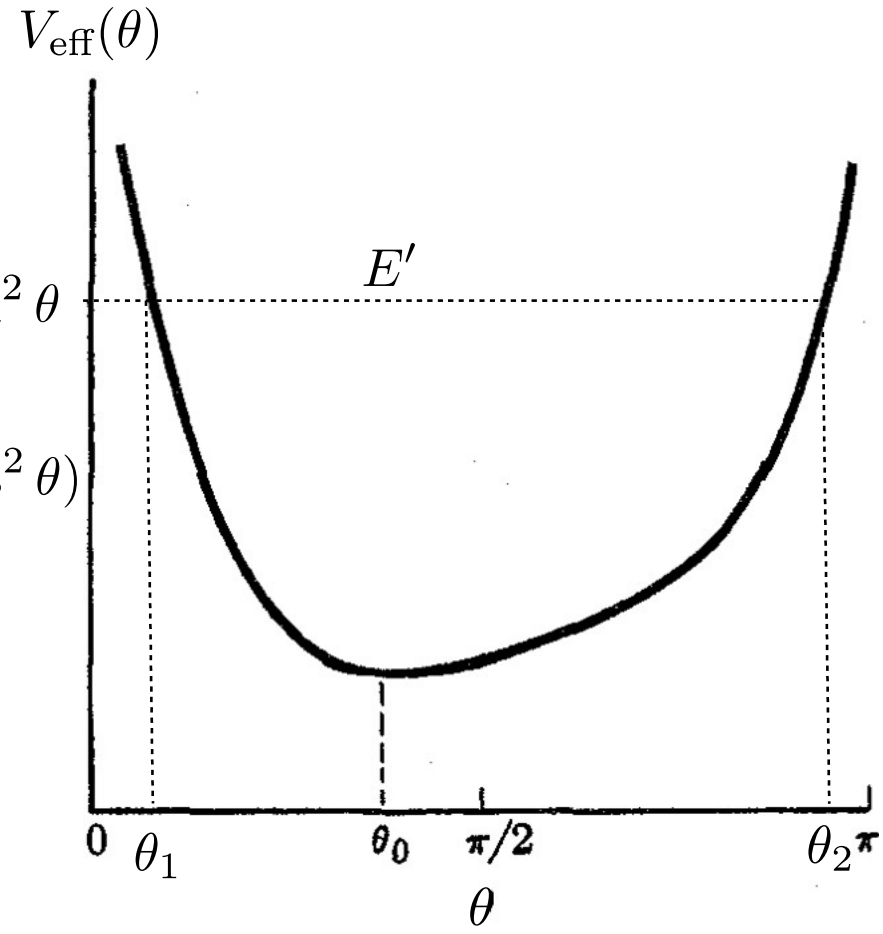
$$\frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta = E'$$

$$\xrightarrow{\times \sin^2\theta} \quad \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}} + mgl\cos\theta\sin^2\theta = E'\sin^2\theta$$

$$\frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}} + mgl\cos\theta(1-\cos^2\theta) = E'(1-\cos^2\theta)$$

$$-mgl\cos^3\theta + \left(\frac{p_\psi^2}{2\mathbb{I}} + E'\right)\cos^2\theta$$

$$+\left(-\frac{p_\psi p_\phi}{\mathbb{I}} + mgl\right)\cos\theta + \left(\frac{p_\phi^2}{2\mathbb{I}} - E'\right) = 0$$



محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

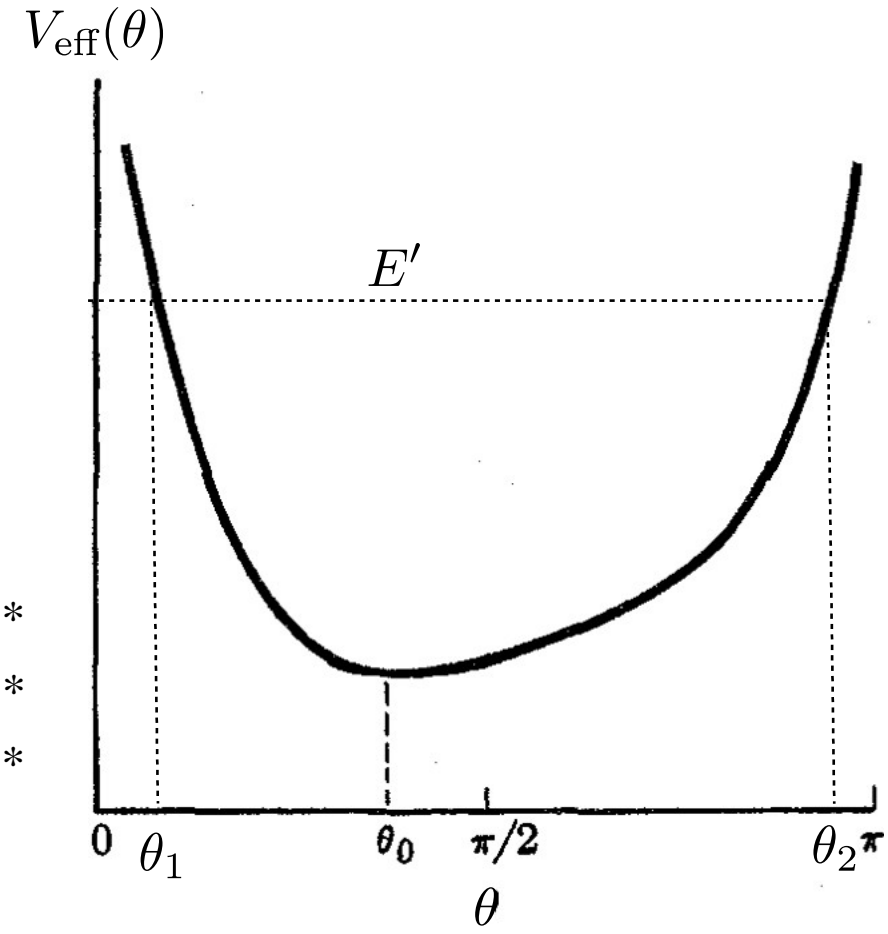
حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$E' = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

$$\frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta = E'$$

$$-mgl\cos^3\theta + \left(\frac{p_\psi^2}{2\mathbb{I}} + E'\right)\cos^2\theta$$

$$+\left(-\frac{p_\psi p_\phi}{\mathbb{I}} + mgl\right)\cos\theta + \left(\frac{p_\phi^2}{2\mathbb{I}} - E'\right) = 0$$



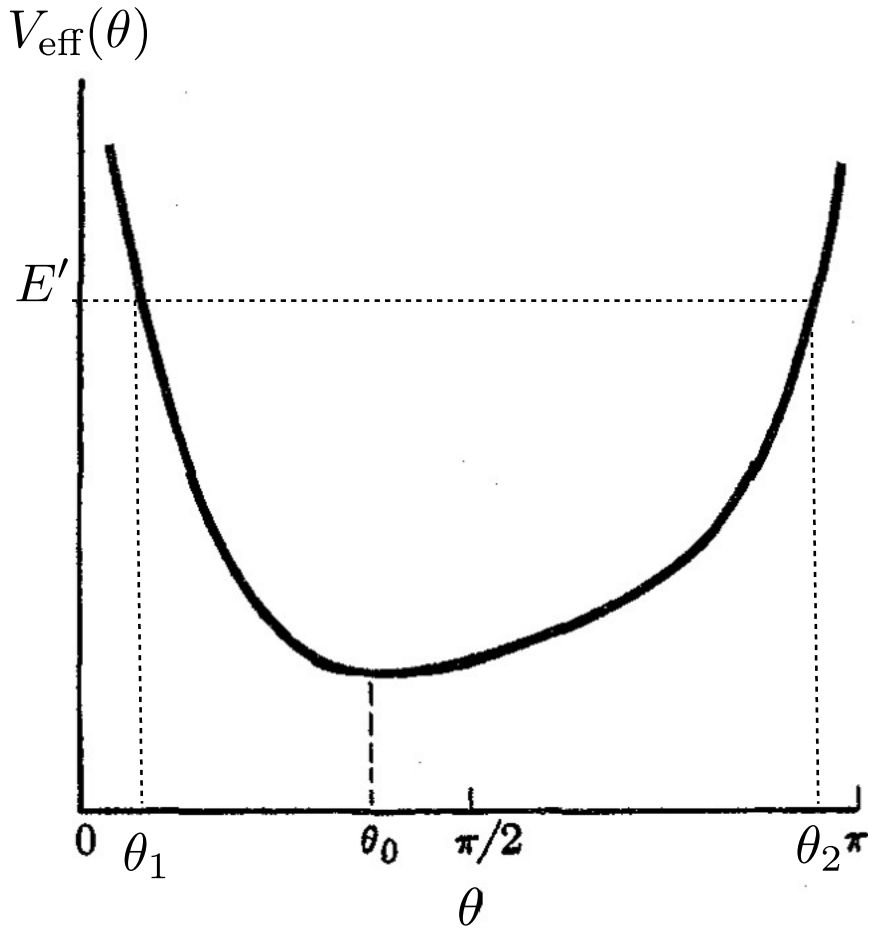
* معادله دارای دوریشه حقیقی $\cos\theta_1$ و $\cos\theta_2$ بین -1 و 1 است.
* بررسی معادله نشان داده است که ریشه سوم $\cos\theta_3$ بزرگتر از 1 است.
* در طی حرکت ترقصی، سرعت زاویه تقدیمی طبق رابطه زیر تغییر می کند،

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta}$$

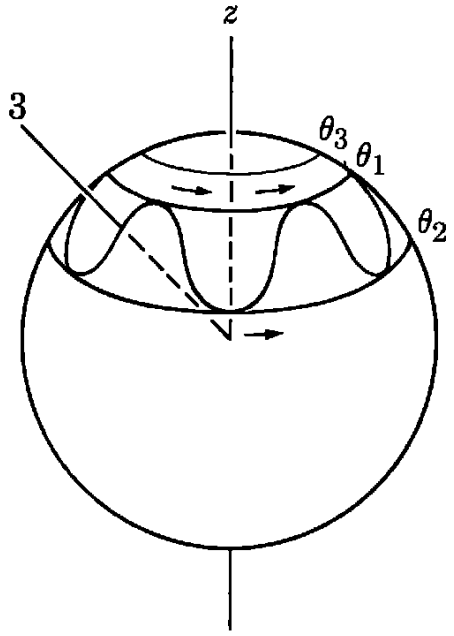
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$E' = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$



* بازای p_ψ و p_ϕ ، اگر $\dot{\phi}$ تغییر علامت **ندهد**. محور تقارن فرفره بین θ_1 و θ_2 نوسان می‌کند که آن حرکت ترقص می‌گویند.



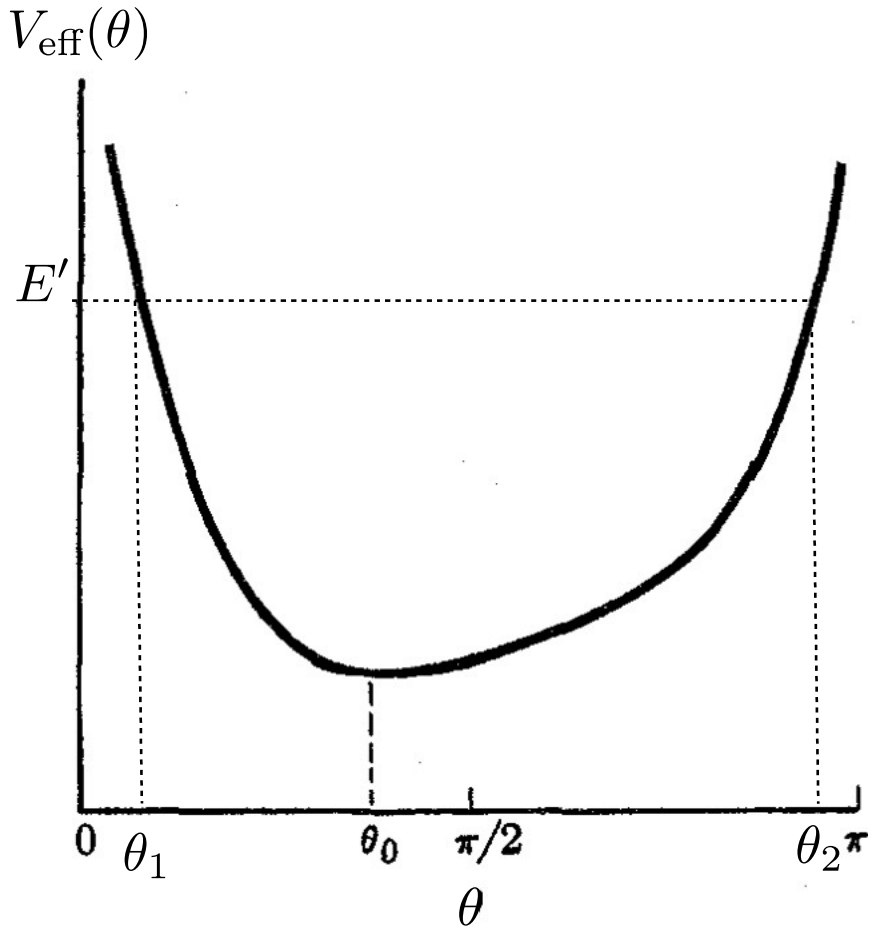
$$\cos\theta_3 > 1$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta}$$

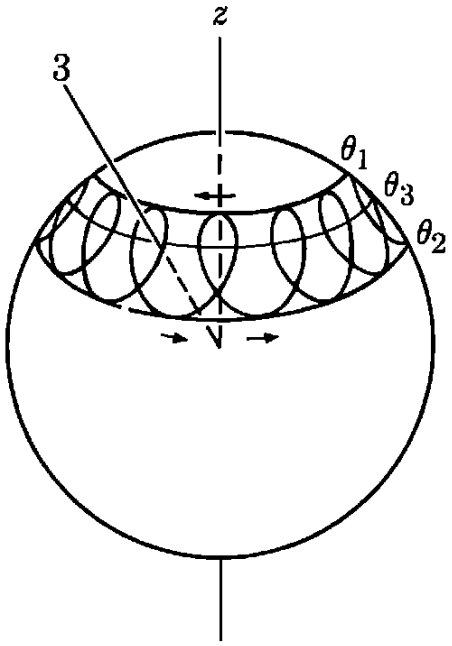
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$E' = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$



* بازای p_ψ و p_ϕ ، اگر $\dot{\phi}$ تغییر علامت **دهد**. محور تقارن فرفره بین θ_1 و θ_2 نوسان می‌کند که به آن حرکت ترقص – تقدیمی می‌گویند.



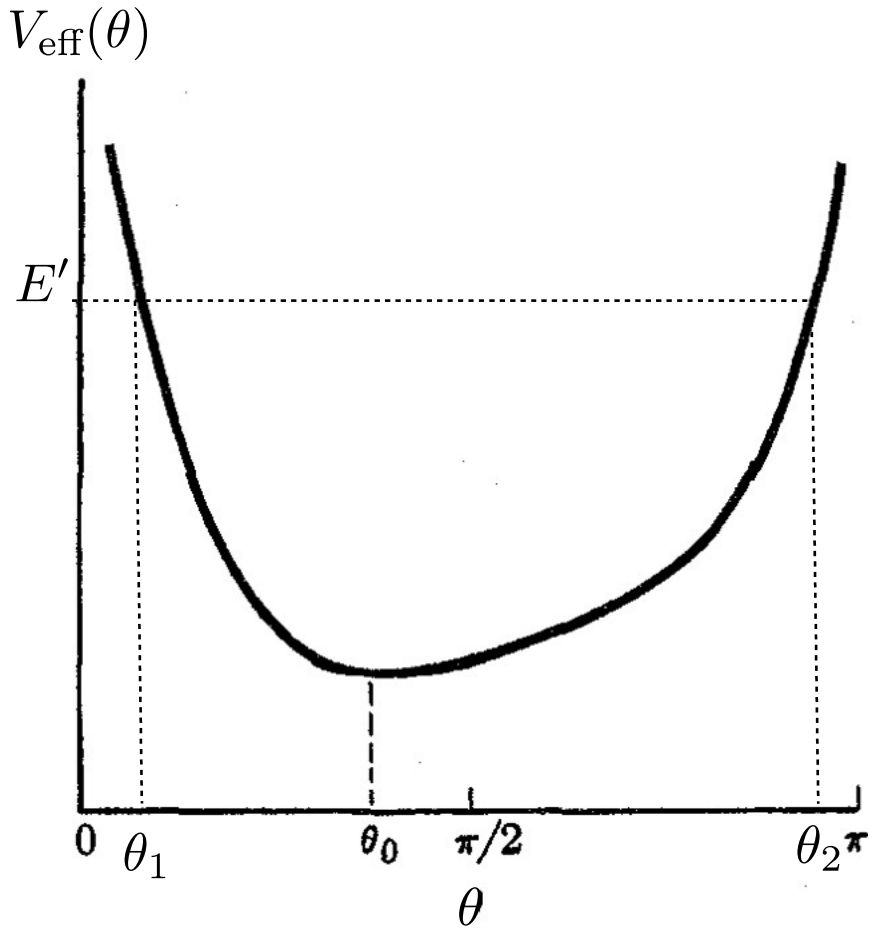
$$\theta_3 < \theta_2$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta}$$

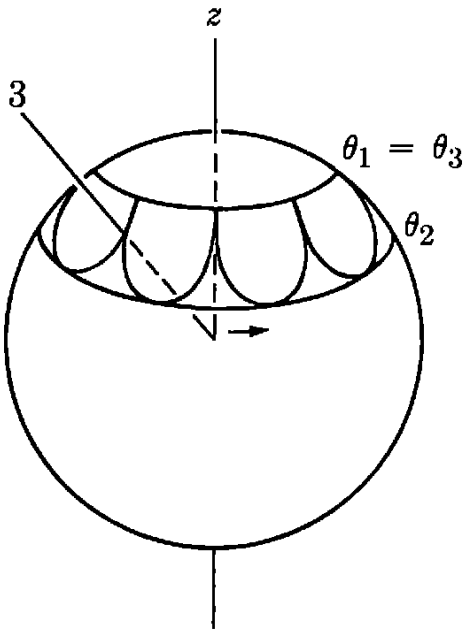
محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

حرکت اجسام صلب در سه بعد

$$E' = \frac{1}{2}\mathbb{I}\dot{\theta}^2 + V_{\text{eff}}(\theta), \quad V_{\text{eff}}(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2\mathbb{I}\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$



* یک حالت خاص وقتی اتفاق می‌افتد که وقتی فرفره با سرعت زاویه‌ای حول محور تقارنش می‌چرخد با سرعت زاویه‌های $\dot{\phi}$ و $\dot{\theta}$ از θ_1 رها کنیم



$$\theta_3 = \theta_1$$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{\mathbb{I}\sin^2\theta}$$

محمدرضا مظفری
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم