

فیزیک ۲

بردارها

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

بطور کلی کمیت‌های فیزیکی به سه دسته تقسیم می‌شوند،

◀ کمیت‌های اسکالر (Scalar)

فقط بزرگی دارند.

مانند: جرم، دما، زمان، انرژی و ...

◀ کمیت‌های برداری (Vector)

علاوه بر بزرگی شامل جهتگیری فضایی نیز می‌باشند.

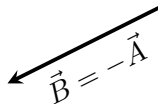
مانند: تغییر مکان، سرعت، شتاب، نیرو، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و ...

◀ کمیت‌های تانسوری (Tensor)

موکول به آینده ...



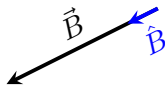
$$A = |\vec{A}|$$



$$B = |\vec{B}| = |-\vec{A}| = A$$



$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad |\hat{A}| = 1$$



$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{-\vec{A}}{A} = -\hat{A}, \quad |\hat{B}| = 1$$

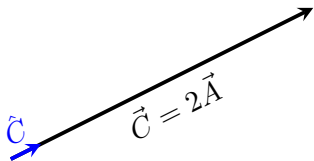


$$A = |\vec{A}|, \quad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad \vec{A} = A\hat{A}$$



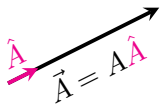
$$B = |\vec{B}| = \left| \frac{1}{2}\vec{A} \right| = \frac{1}{2}|\vec{A}| = \frac{1}{2}A$$

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{\frac{1}{2}\vec{A}}{\frac{1}{2}A} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A}$$



$$C = |\vec{C}| = |2\vec{A}| = 2|\vec{A}| = 2A$$

$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{2\vec{A}}{2A} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A}$$

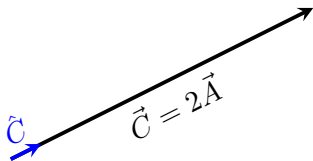


$$A = |\vec{A}|, \quad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad \vec{A} = A\hat{A}$$



$$B = |\vec{B}| = \frac{1}{2}A, \quad \hat{B} = \hat{A}$$

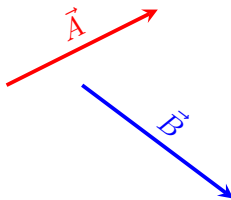
$$\vec{B} = |\vec{B}|\hat{B} = \frac{1}{2}A\hat{A} = \frac{1}{2}\vec{A}$$



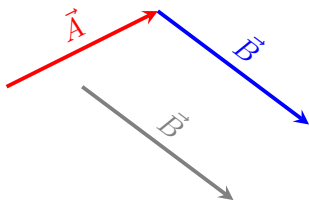
$$C = |\vec{C}| = 2A, \quad \hat{C} = \hat{A}$$

$$\vec{C} = |\vec{C}|\hat{C} = 2A\hat{A} = 2\vec{A}$$

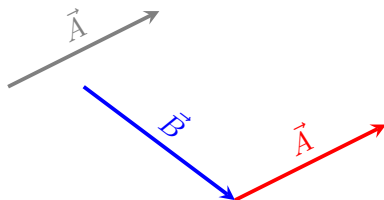
جمع هندسی بردارها



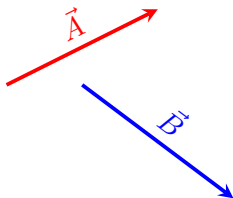
جمع برداری $\vec{A} + \vec{B}$ با روش مثلثی



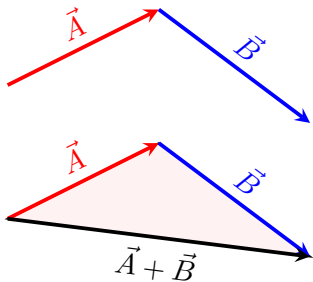
جمع برداری $\vec{B} + \vec{A}$ با روش مثلثی



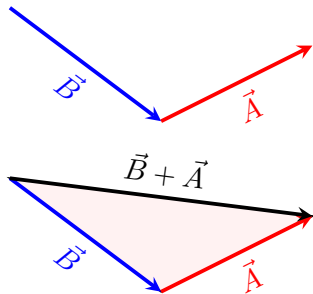
جمع هندسی بردارها

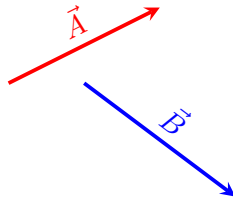


جمع برداری $\vec{A} + \vec{B}$ با روش مثلثی

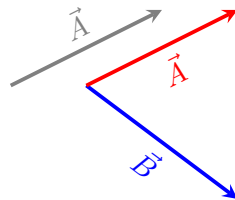
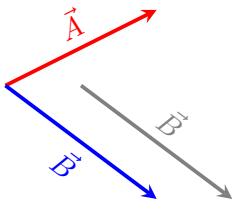


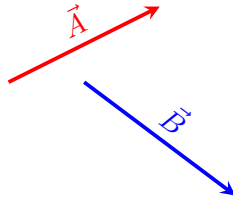
جمع برداری $\vec{B} + \vec{A}$ با روش مثلثی



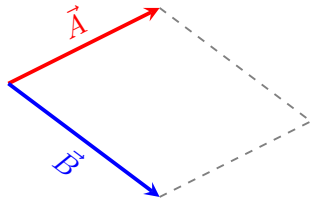
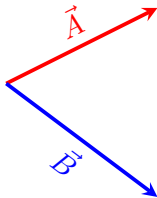


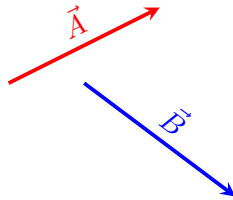
جمع برداری $\vec{A} + \vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع



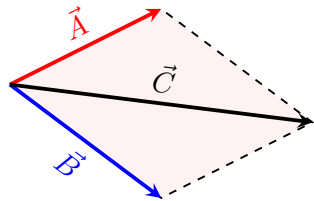
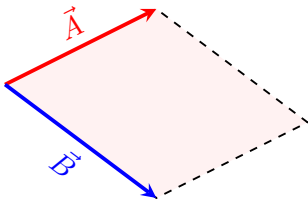


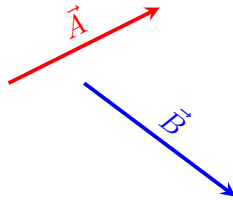
جمع برداری $\vec{A} + \vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع



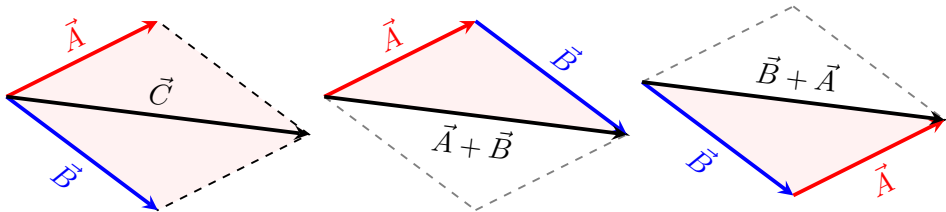


جمع برداری $\vec{A} + \vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع

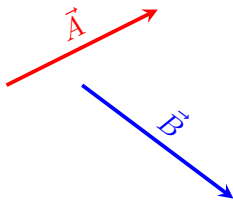




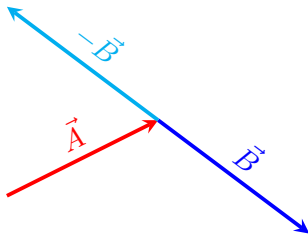
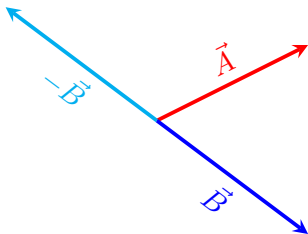
از مقایسه روش مثلثی و روش متوازی الاضلاع نتیجه می‌گیریم که $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

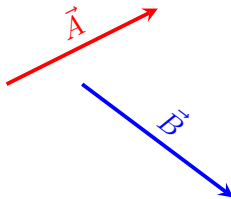


جمع هندسی بردارها

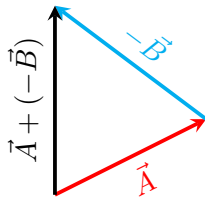
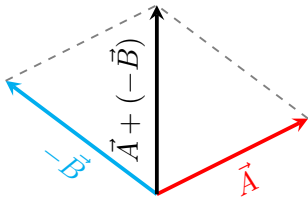


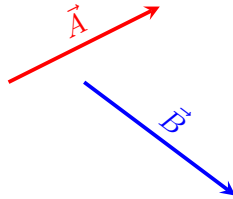
جمع برداری $\vec{A} - \vec{B}$



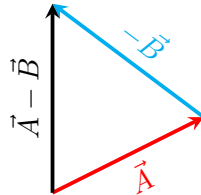
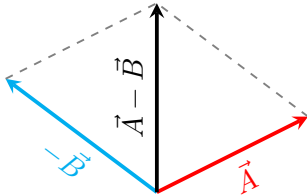


جمع برداری $\vec{A} - \vec{B}$

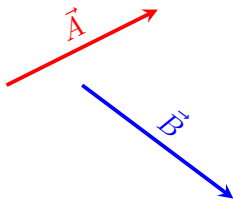




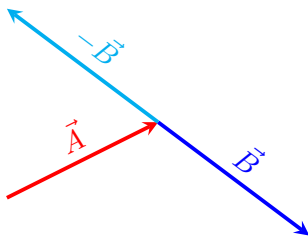
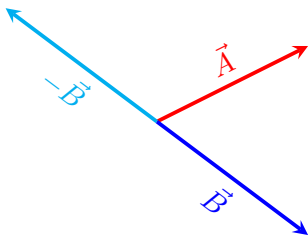
$$\vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{A} - \vec{B} \text{ جمع برداری}$$



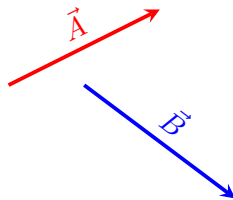
جمع هندسی بردارها



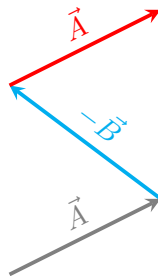
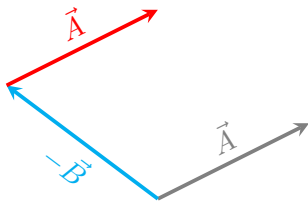
جمع برداری $\vec{A} + \vec{B}$



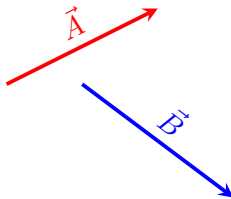
جمع هندسی بردارها



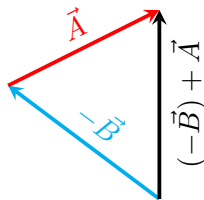
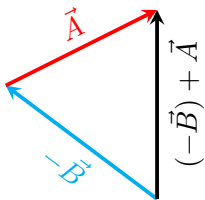
جمع برداری $\vec{A} - \vec{B}$

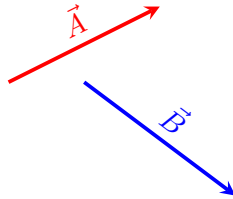


جمع هندسی بردارها

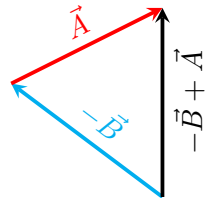
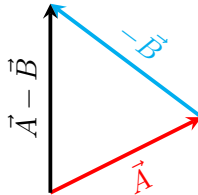
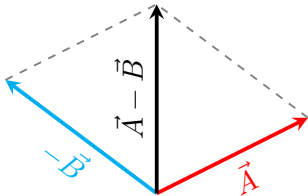


جمع برداری $\vec{A} - \vec{B}$



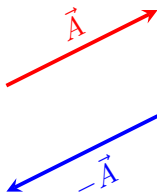


جمع برداری $\vec{A} + (-\vec{B}) = (-\vec{B}) + \vec{A} = \vec{A} - \vec{B}$



جمع هندسی بردارها

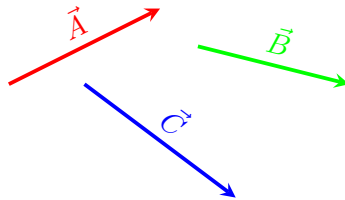
جمع یک بردار با معکوس جهت خود



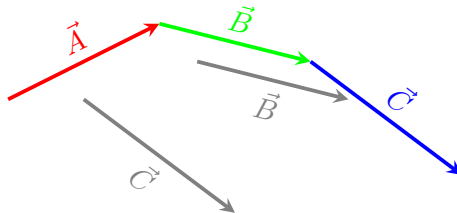
$$\vec{A} + (-\vec{A}) = (-\vec{A}) + \vec{A} = 0$$

$$\vec{A} = 0 + \vec{A} = \vec{A} + 0$$

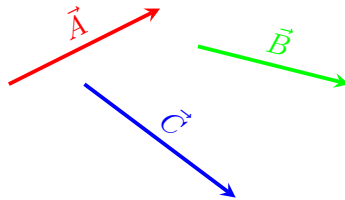
خاصیت شرکت پذیری جمع برداری



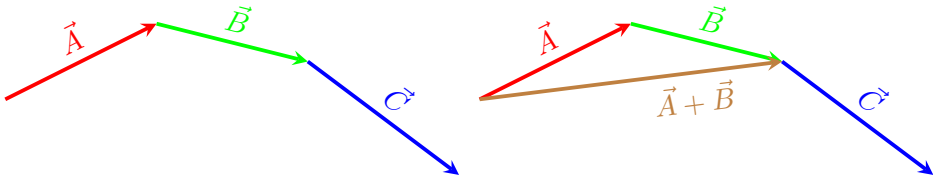
جمع برداری $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$



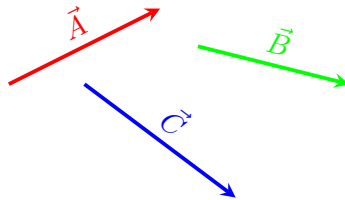
خاصیت شرکت پذیری جمع برداری



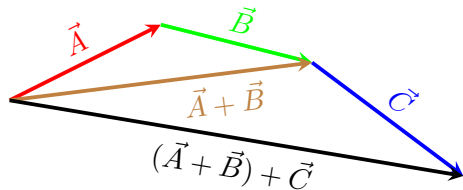
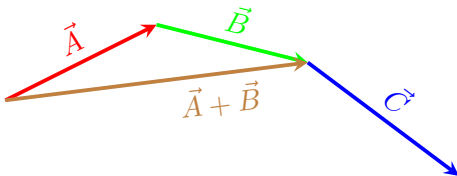
جمع برداری $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$



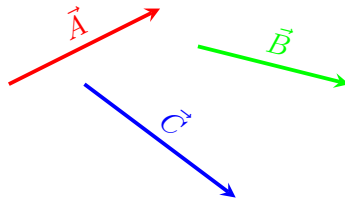
خاصیت شرکت پذیری جمع برداری



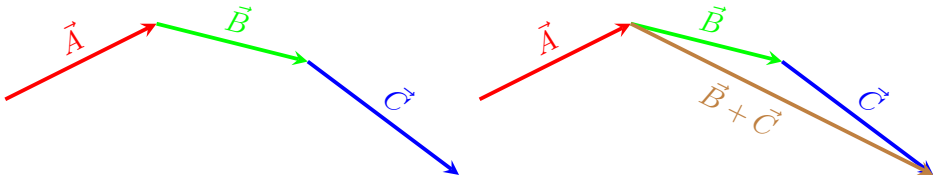
جمع برداری $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$



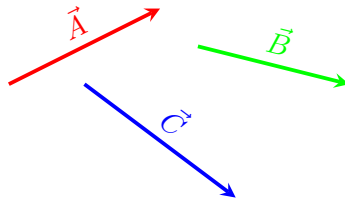
خاصیت شرکت پذیری جمع برداری



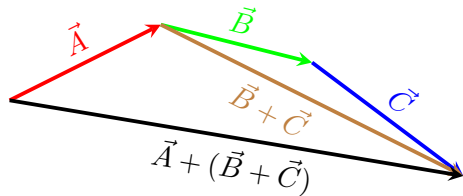
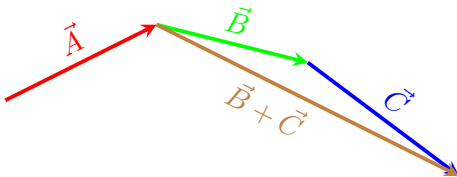
جمع برداری $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$



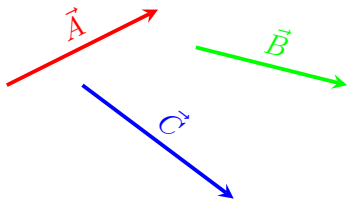
خاصیت شرکت پذیری جمع برداری



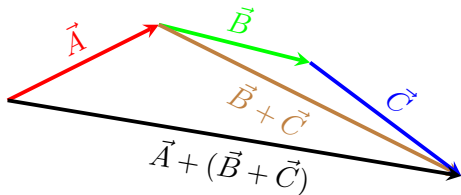
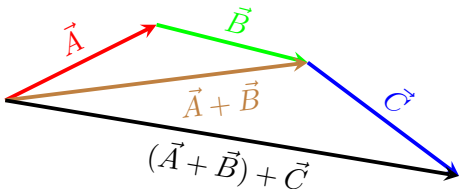
جمع برداری $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$



خاصیت شرکت پذیری جمع برداری



$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) \text{ جمع برداری}$$



ضرب برداری

بطور کلی ضرب برداری به دو دسته تقسیم می‌شوند،

◀ ضرب داخلی (inner product)

نتیجه حاصلضرب داخلی دو بردار یک اسکالر است.

کاربردها: محاسبه کار، محاسبه انرژی یک دوقطبی در حضور میدان خارجی و ...

◀ ضرب خارجی (cross product or vector product or outer product)

نتیجه حاصلضرب خارجی دو بردار یک بردار است.

کاربردها: محاسبه گشتاور نیرو، محاسبه اندازه حرکت زاویه‌ای و ...

ضرب داخلی

بررسی زاویه‌ی دو بردار

تعریف ضرب داخلی

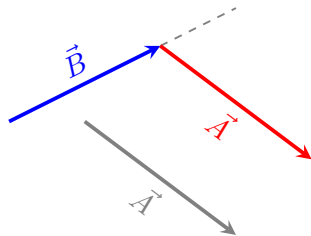
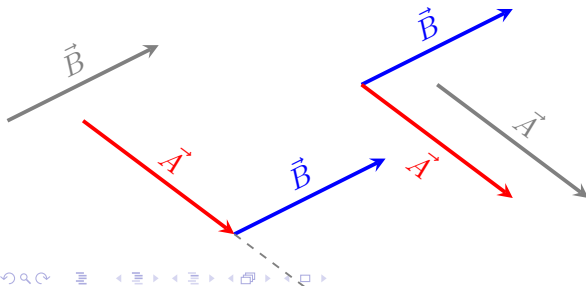
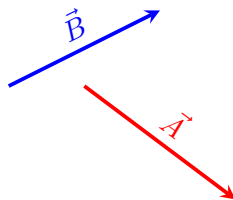
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و



ضرب داخلی

بررسی زاویه‌ی دو بردار

تعریف ضرب داخلی

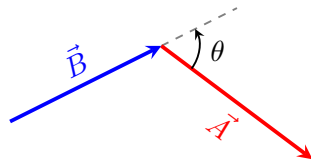
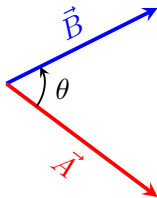
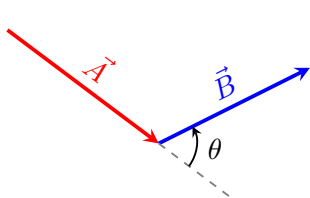
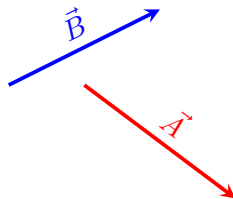
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و



تعریف ضرب داخلی

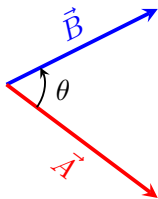
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

محدوده‌ی ضرب داخلی دو بردار

$$0 \leq \theta \leq \pi \Rightarrow -1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$-AB \leq AB \cos \theta \leq AB$$

$$-AB \leq \vec{A} \cdot \vec{B} \leq AB$$

حالت‌های خاص ضرب داخلی دو بردار

$$\theta = 0 \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = AB$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = -AB$$

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$

تعریف ضرب داخلی

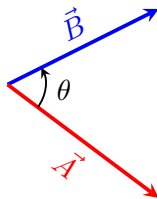
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

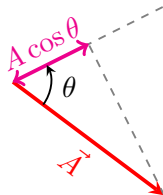
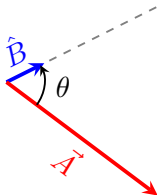
و

تصویر بردار \vec{A} بر راستای بردار \vec{B}

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$\vec{A} \cdot \frac{\vec{B}}{B} = A \cos \theta$$

$$\vec{A} \cdot \hat{B} = A \cos \theta$$



تعریف ضرب داخلی

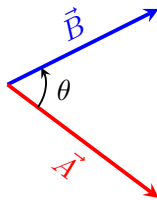
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

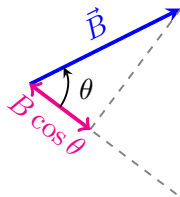
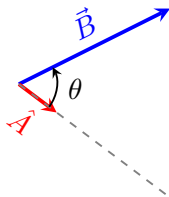
$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

تصویر بردار \vec{B} بر راستای بردار \vec{A}

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$\frac{\vec{A}}{A} \cdot \vec{B} = B \cos \theta$$

$$\hat{A} \cdot \vec{B} = B \cos \theta$$

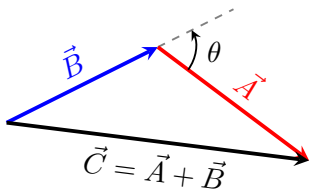


تعریف ضرب داخلی

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

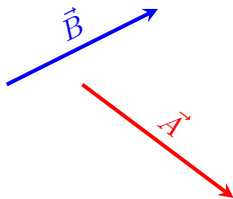
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



که

و

قانون کوسینوسها

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{A} + \vec{B} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = C^2, \quad \vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

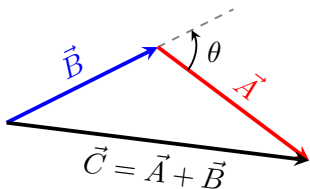
$$\vec{B} \cdot \vec{B} = B^2, \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

تعریف ضرب داخلی

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

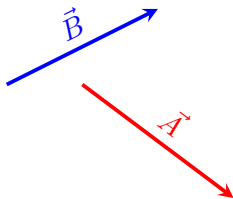
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



که

و

قانون کوسینوسها

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{A} + \vec{B})$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

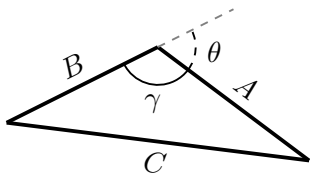
$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

تعریف ضرب داخلی

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

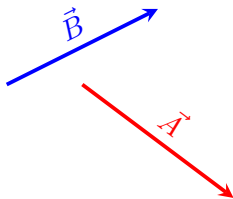
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



که

و

قانون کوسینوسها

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

$$\gamma = \pi - \theta \Rightarrow \cos \gamma = \cos(\pi - \theta)$$

$$\cos \gamma = -\cos \theta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma$$

ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی دو بردار

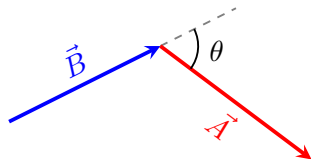
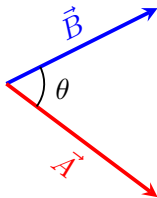
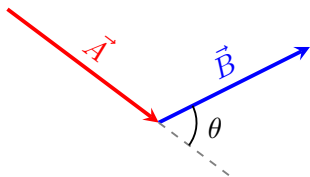
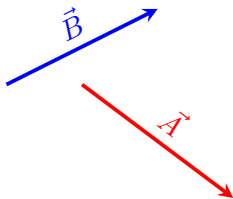
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB |\sin \theta|$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و



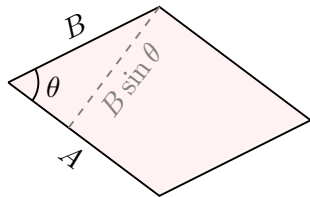
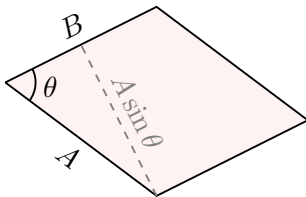
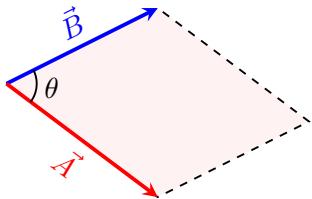
ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی دو بردار

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB |\sin \theta|$$

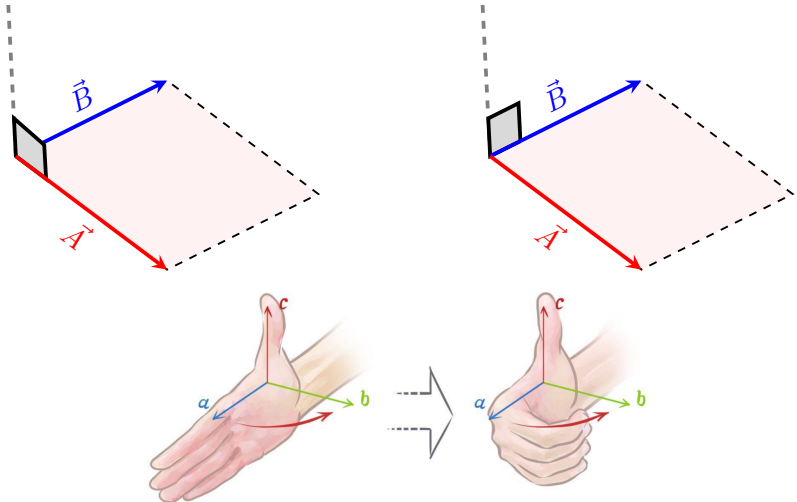
مساحت سطح متوازی الاضلاع تشکیل شده بوسیله بردارها

$$S = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \quad S = BH = B(A \sin \theta) \quad S = AH = A(B \sin \theta)$$



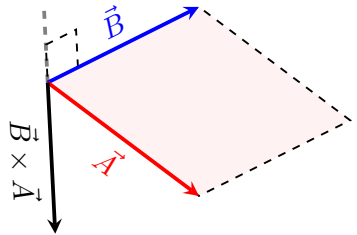
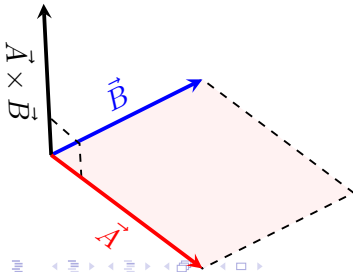
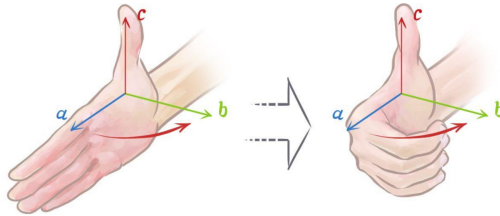
ضرب خارجی

تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست



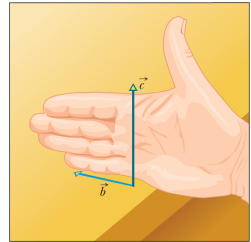
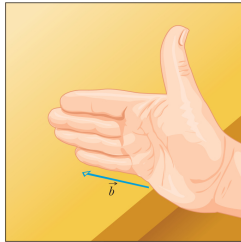
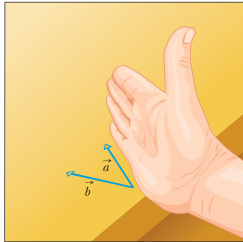
ضرب خارجی

تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست

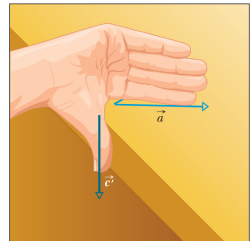
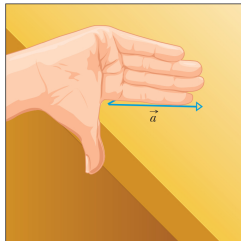
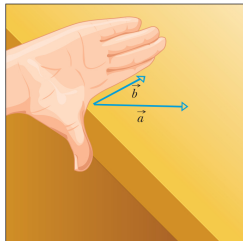


ضرب خارجی

تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست

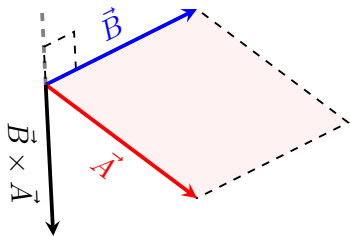
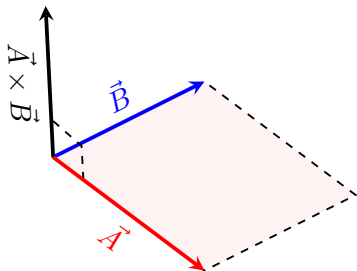


(a)



ضرب خارجی

تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست



$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \Rightarrow |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{B} \times \vec{A}|$$

محدوده‌ی ضرب خارجی دو بردار

$$0 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$0 \leq |\vec{A} \times \vec{B}| \leq AB$$

حالت‌های خاص ضرب خارجی دو بردار

$$\theta = 0, \pi \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = 0 \text{ or } |\vec{A} \times \vec{B}| = 0$$

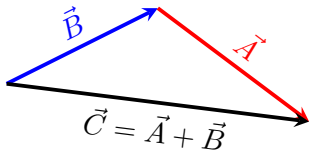
$$\theta = \pi/2 \Rightarrow |\vec{A} \times \vec{B}| = AB$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB |\sin \theta|$$

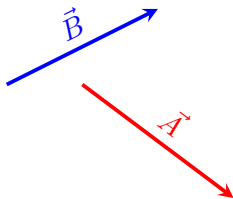
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



که

و

قانون سینوسها

$$\vec{C} \times \vec{C} = (\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C}$$

$$0 = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

$$\vec{A} \times \vec{C} = -\vec{B} \times \vec{C}$$

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{B} \times \vec{C}|$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

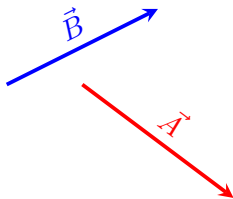
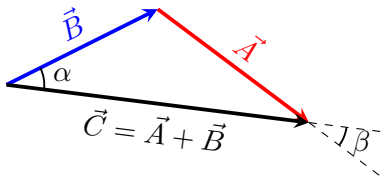
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB |\sin \theta|$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و

قانون سینوسها

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{B} \times \vec{C}|$$

$$AC |\sin \beta| = BC |\sin \alpha|$$

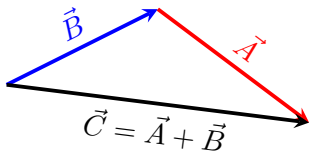
$$\boxed{\frac{|\sin \beta|}{B} = \frac{|\sin \alpha|}{A}} \quad (1)$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB |\sin \theta|$$

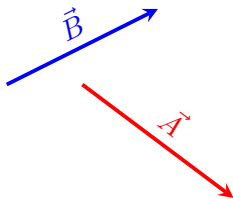
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



که

و

قانون سینوسها

$$\vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times (\vec{A} + \vec{B})$$

$$\vec{A} \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} \times \vec{C} = 0 + \vec{A} \times \vec{B}$$

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

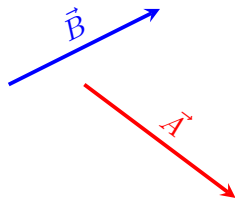
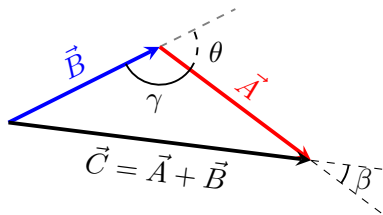
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB |\sin \theta|$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و

قانون سینوسها

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$AC |\sin \beta| = AB |\sin \theta|$$

$$\sin \theta = \sin(\pi - \gamma) = \sin \gamma$$

$$AC |\sin \beta| = AB |\sin \gamma|$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

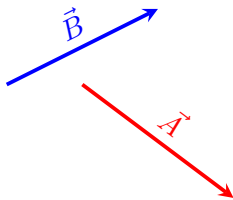
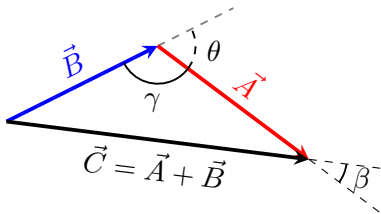
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB |\sin \theta|$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و

قانون سینوسها

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$AC |\sin \beta| = AB |\sin \gamma|$$

$$\boxed{\frac{|\sin \beta|}{B} = \frac{|\sin \gamma|}{C}} \quad \textcircled{2}$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

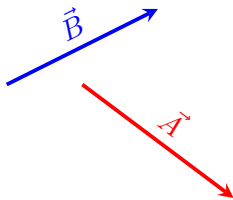
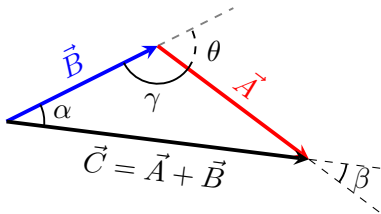
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB |\sin \theta|$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و



قانون سینوسها

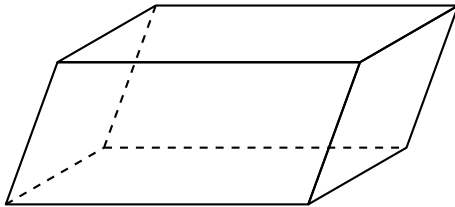
$$\frac{|\sin \beta|}{B} = \frac{|\sin \alpha|}{A} \quad (1)$$

$$\frac{|\sin \beta|}{B} = \frac{|\sin \gamma|}{C} \quad (2)$$

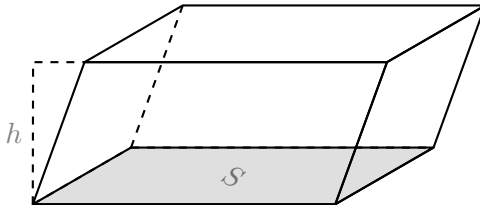
$$\boxed{\frac{|\sin \alpha|}{A} = \frac{|\sin \beta|}{B} = \frac{|\sin \gamma|}{C}}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

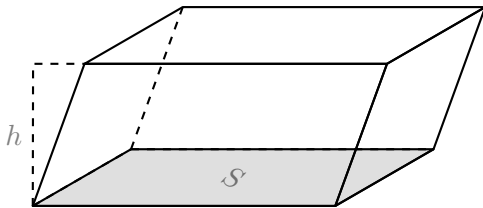


$$V = hS$$

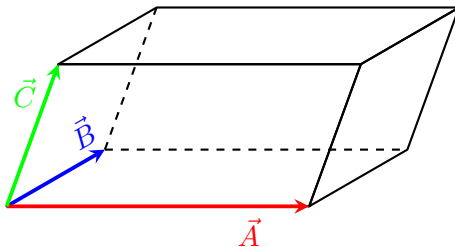


ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

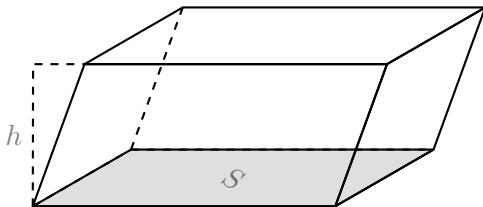


سه بردار \vec{A} ، \vec{B} و \vec{C} را مطابق شکل زیر اعمال می‌کنیم،



ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

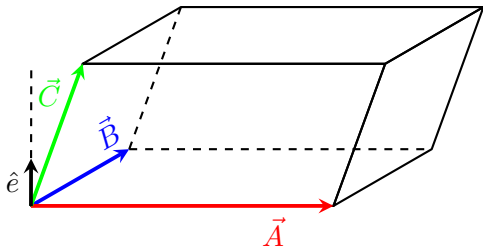
محاسبه حجم متوازی السطوح



محاسبه مساحت سطح تشکیل شده

بوسیله‌ی بردارهای \vec{A} و \vec{B}

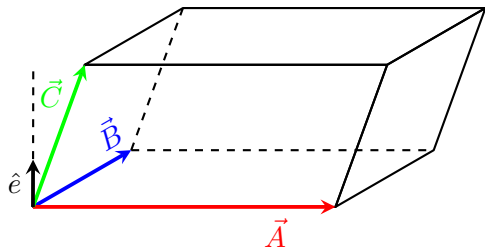
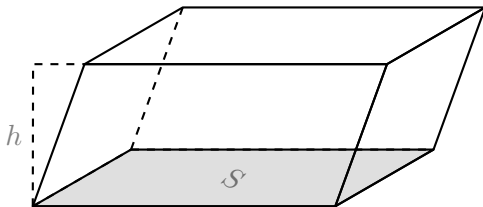
$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$



\vec{A}

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

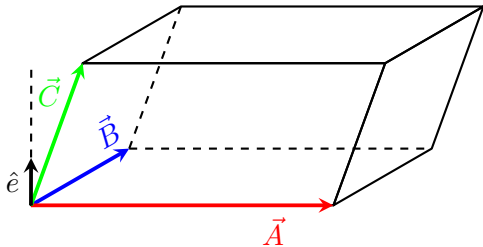
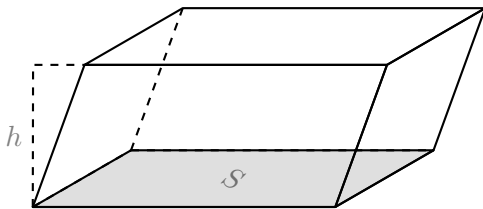


محاسبه بردار یکه عمود بر سطح
تشکیل شده از بردارهای \vec{A} و \vec{B}

$$\hat{e} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح



$$\hat{e} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

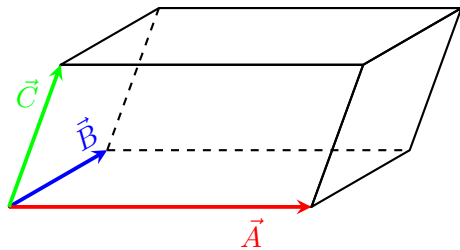
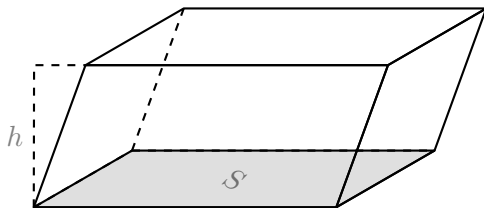
محاسبه ارتفاع h

$$h = \hat{e} \cdot \vec{C}$$

$$h = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح



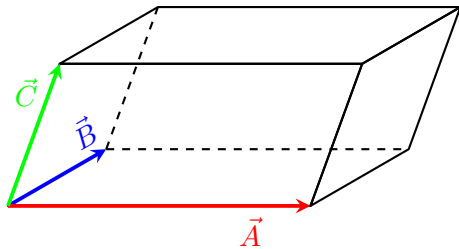
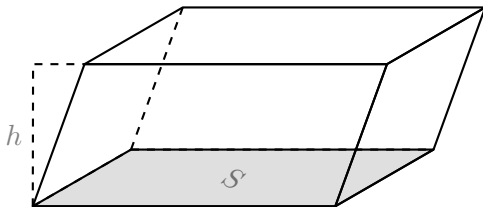
$$h = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$V = hS = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

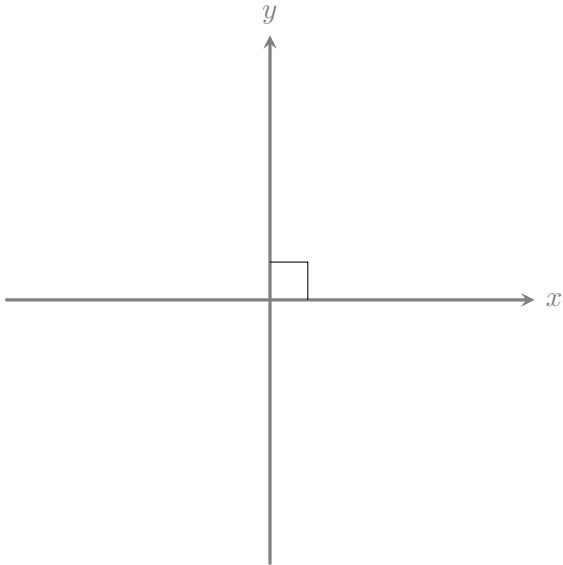
محاسبه حجم متوازی السطوح



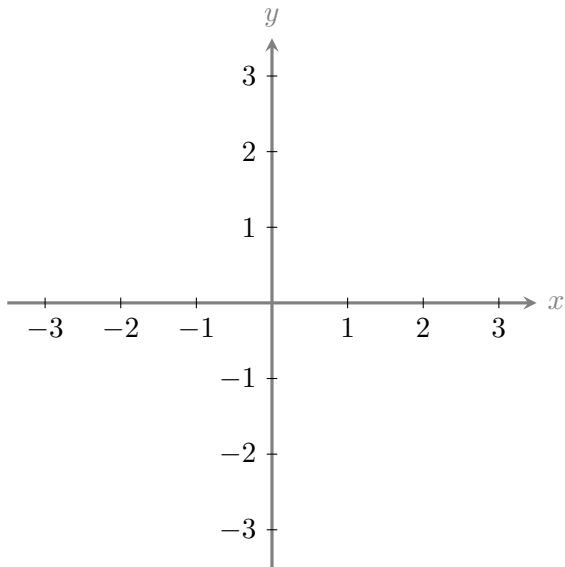
$$V = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$$

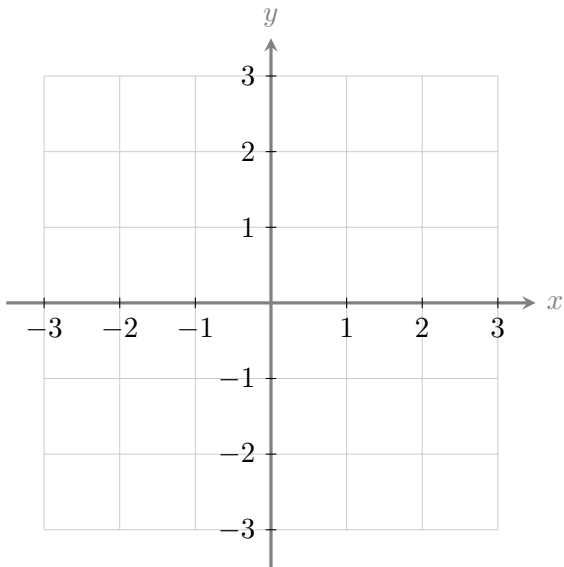
دستگاه مختصات دو بعدی- دکارتی



دستگاه مختصات دو بعدی - دکارتی



دستگاه مختصات دو بعدی - دکارتی

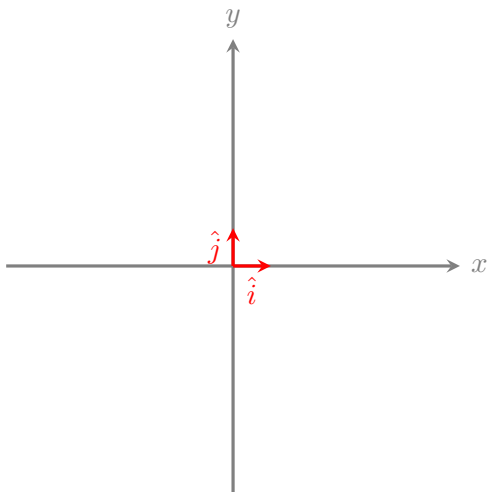


دستگاه مختصات دوبعدی- دکارتی

بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

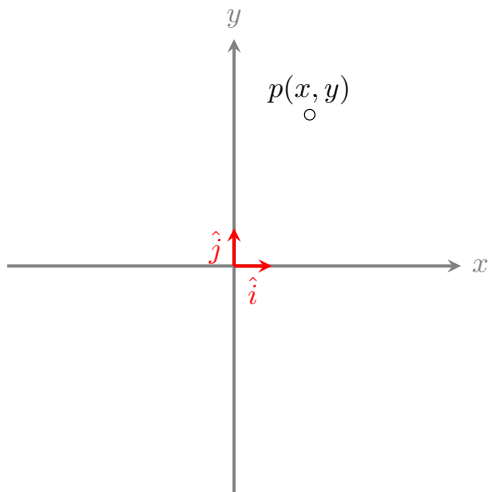


دستگاه مختصات دوبعدی- دکارتی

بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

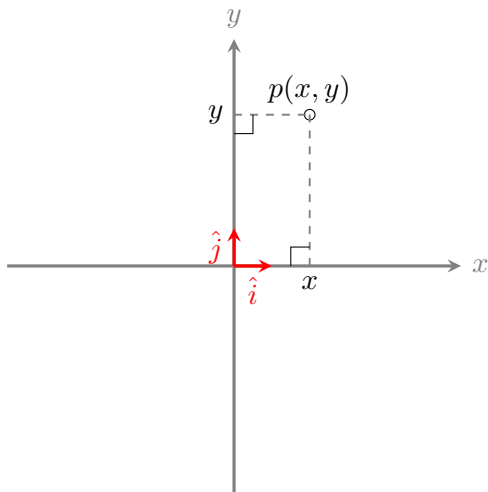


دستگاه مختصات دوبعدی- دکارتی

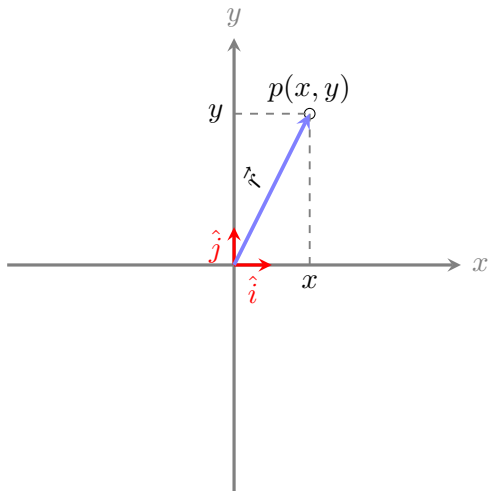
بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$



دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی



بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

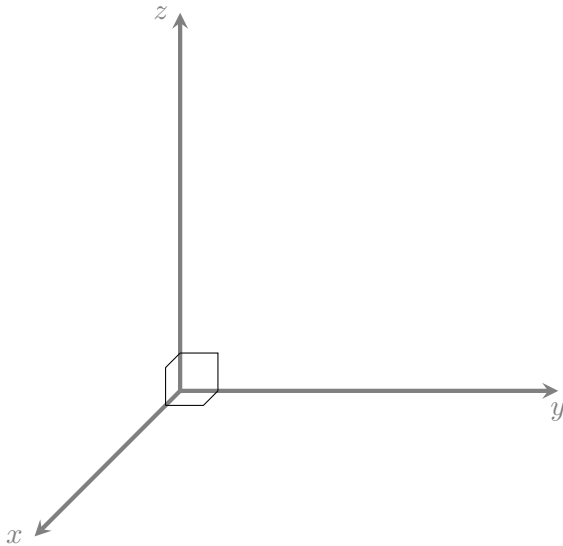
بردار مکان

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

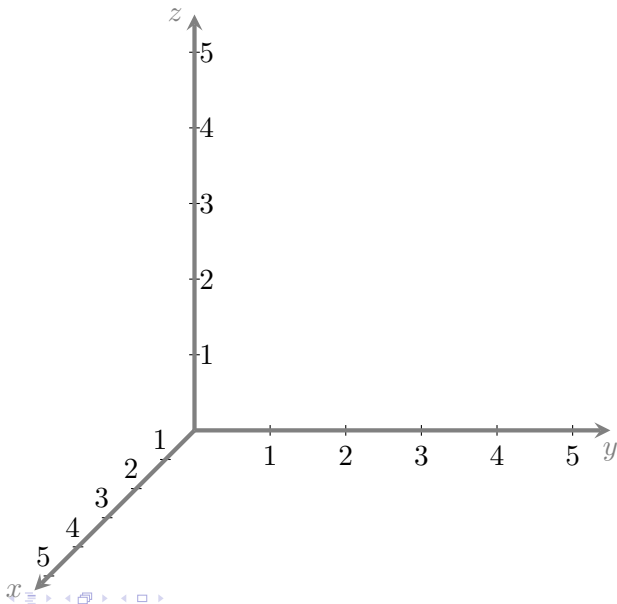
$$\hat{i} \cdot \vec{r} = x, \quad \hat{j} \cdot \vec{r} = y$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

دستگاه مختصات سه بعدی - دکارتی



دستگاه مختصات سه بعدی - دکارتی



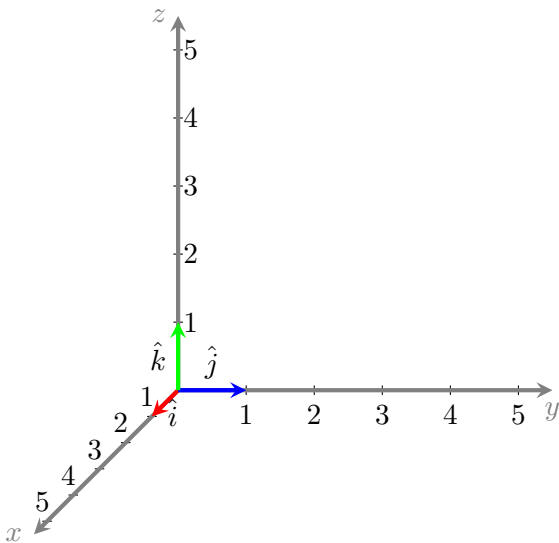
دستگاه مختصات سه بعدی - دکارتی

بردار یکه

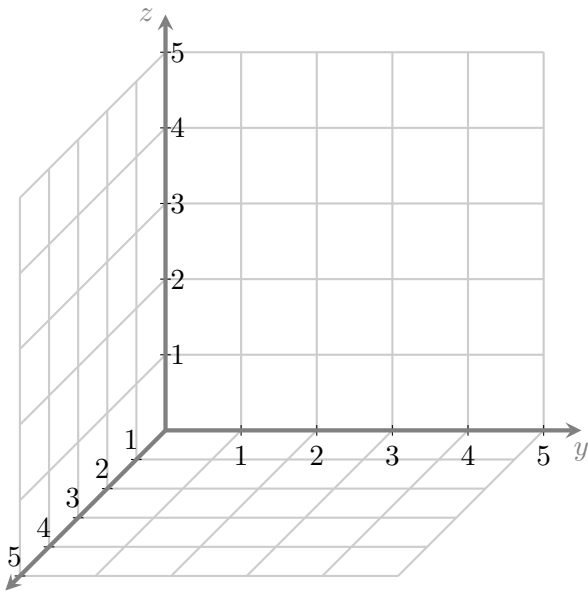
$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

$$\begin{cases} \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0 \\ \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0 \\ \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0 \end{cases}$$

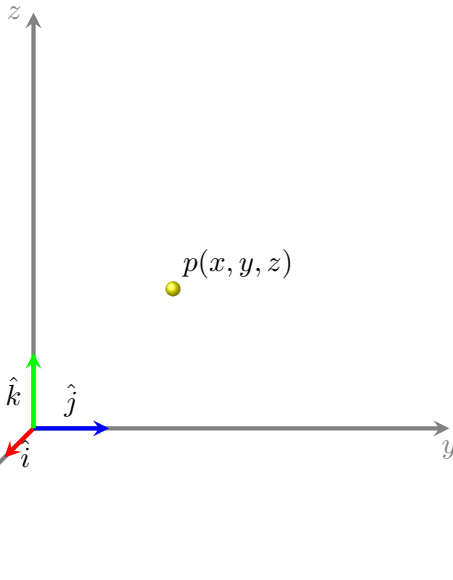
$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j} \end{cases}$$



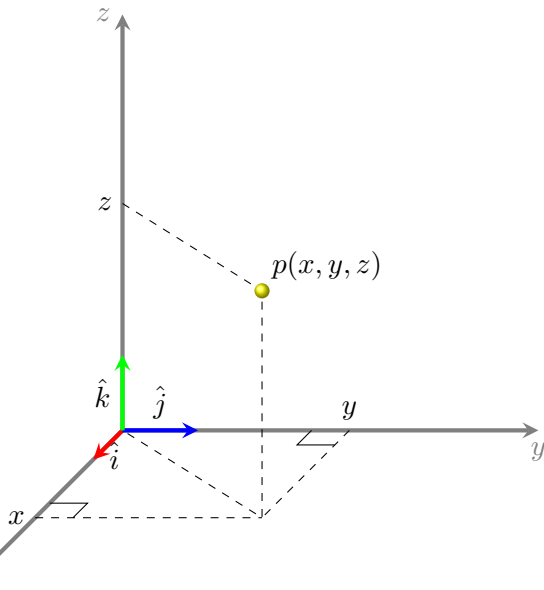
دستگاه مختصات سه بعدی - دکارتی



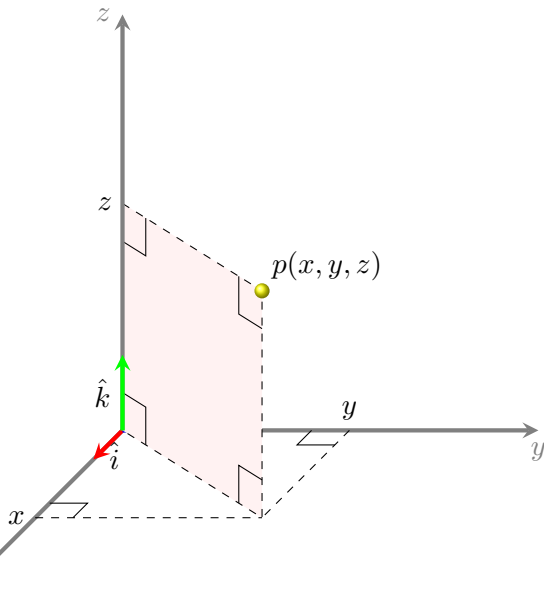
دستگاه مختصات سه بعدی - دکارتی



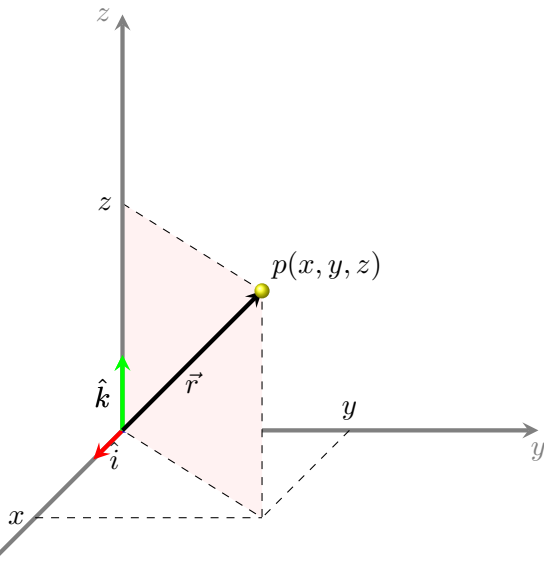
دستگاه مختصات سه بعدی - دکارتی



دستگاه مختصات سه بعدی - دکارتی



دستگاه مختصات سه بعدی - دکارتی



دستگاه مختصات سه بعدی - دکارتی

بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

بردار مکان

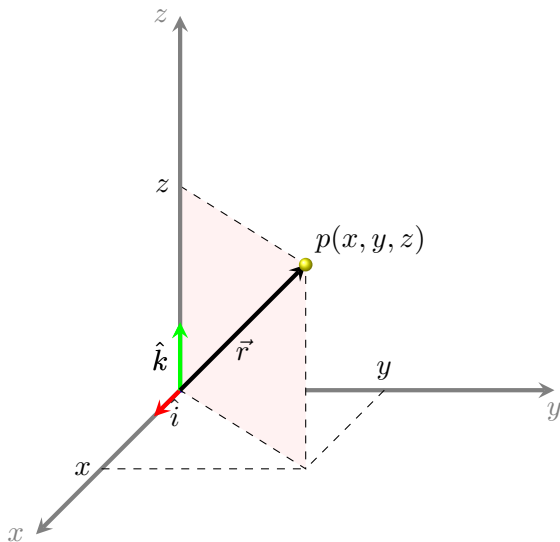
$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$x = \hat{i} \cdot \vec{r}$$

$$y = \hat{j} \cdot \vec{r}$$

$$z = \hat{k} \cdot \vec{r}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \pm (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x) \hat{i} + (A_y \pm B_y) \hat{j} + (A_z \pm B_z) \hat{k}$$

حالت خاص: جمع دو بردار در دو بعد

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

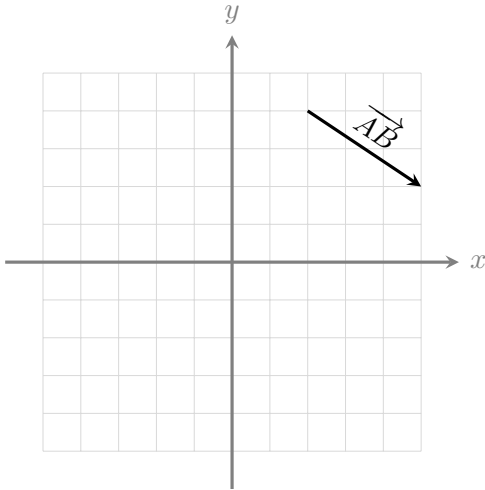
$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \pm (B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x) \hat{i} + (A_y \pm B_y) \hat{j}$$

جمع برداری (تحلیلی)

برداری دلخواه

$$\vec{AB} = ?$$



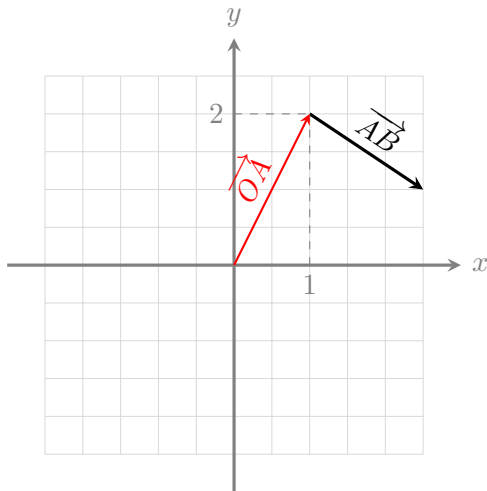
جمع برداری (تحلیلی)

برداری دلخواه

$$\vec{AB} = ?$$

برداری مکان

$$\vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$



جمع برداری (تحلیلی)

بردار دلخواه

$$\vec{AB} = ?$$

بردار مکان

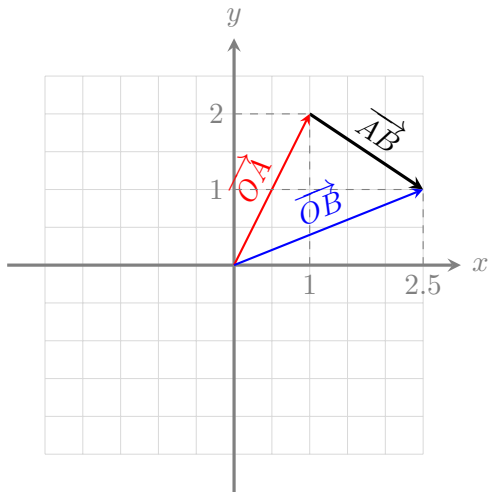
$$\vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{OB} = 2.5\hat{i} + \hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

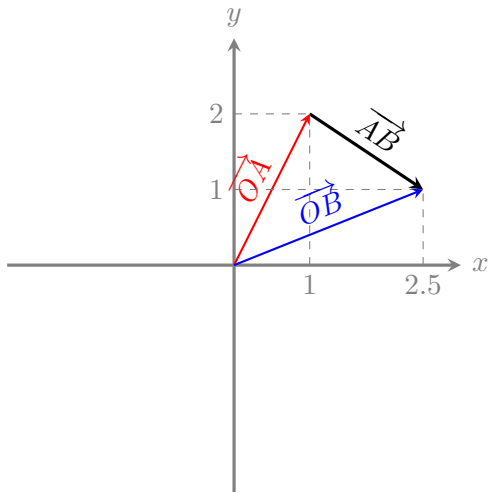
$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$



جمع برداری (تحلیلی)

بردار مکان



$$\vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{OB} = 2.5\hat{i} + \hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} = (2.5\hat{i} + \hat{j}) - (\hat{i} + 2\hat{j})$$

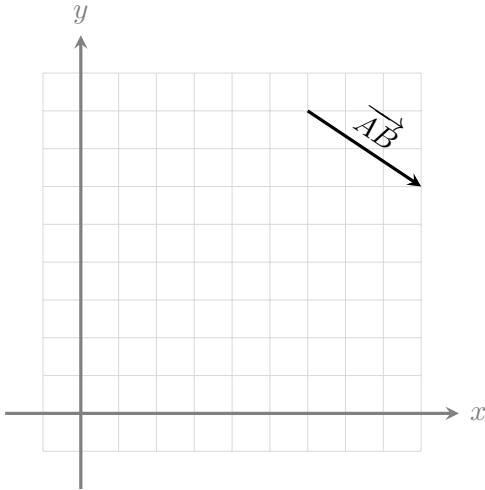
$$\vec{AB} = (2.5 - 1)\hat{i} + (1 - 2)\hat{j}$$

$$\vec{AB} = 1.5\hat{i} - \hat{j}$$

جمع برداری (تحلیلی)

برداری دلخواه

$$\vec{AB} = ?$$



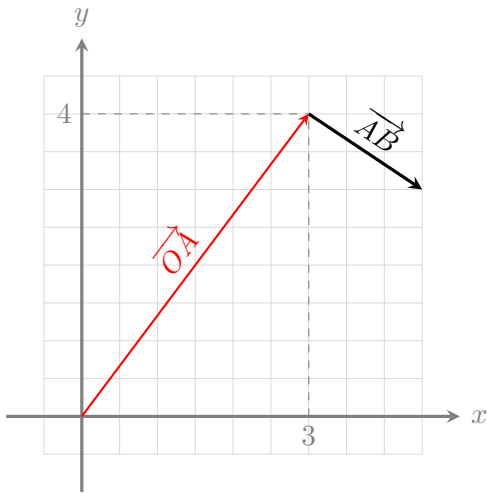
جمع برداری (تحلیلی)

برداری دلخواه

$$\vec{AB} = ?$$

برداری مکان

$$\vec{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$



جمع برداری (تحلیلی)

برداری دلخواه

$$\vec{AB} = ?$$

برداری مکان

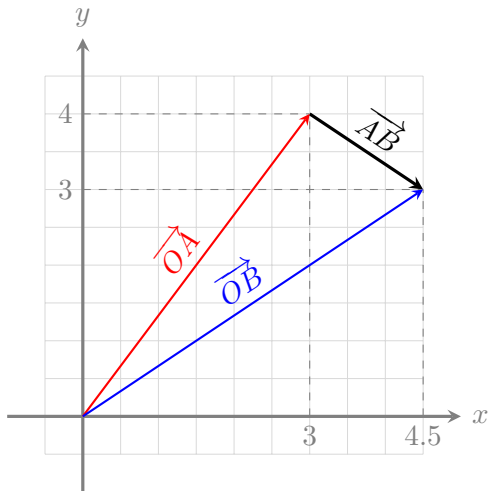
$$\vec{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\vec{OB} = 4.5\hat{i} + 3\hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

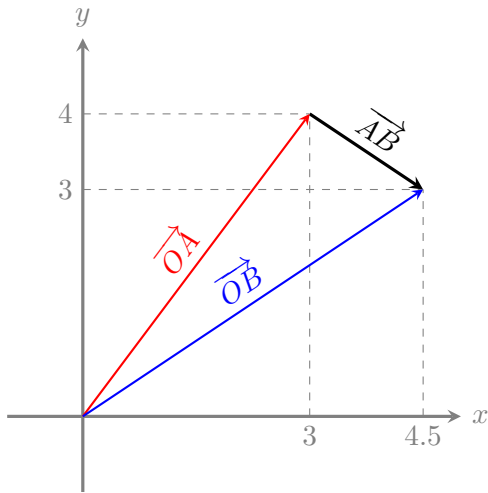
$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$



جمع برداری (تحلیلی)

برداری مکان



$$\vec{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\vec{OB} = 4.5\hat{i} + 3\hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

$$\vec{AB} = (4.5\hat{i} + 3\hat{j}) - (3\hat{i} + 4\hat{j})$$

$$\vec{AB} = (4.5 - 3)\hat{i} + (3 - 4)\hat{j}$$

$$\vec{AB} = 1.5\hat{i} - \hat{j}$$

تعریف ضرب داخلی

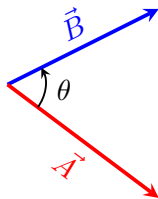
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k}$$

$$+ A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \cdot \hat{k}$$

$$+ A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k}$$

تعریف ضرب داخلی

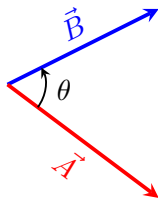
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$



$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= A_x B_x \hat{i} \cdot \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \cdot \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \cdot \hat{k} \\ &+ A_y B_x \hat{j} \cdot \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \cdot \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \cdot \hat{k} \\ &+ A_z B_x \hat{k} \cdot \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \cdot \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1, \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = 0, \quad \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{j} \cdot \hat{i} = 0, \quad \hat{j} \cdot \hat{j} = 1, \quad \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{k} \cdot \hat{i} = 0, \quad \hat{k} \cdot \hat{j} = 0, \quad \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

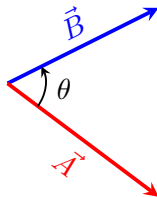
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و



$$\begin{cases} \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \\ \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

حالت خاص: ضرب داخلی در دو بعد

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \\ \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

اندازه بردار ◀

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

تعریف ضرب داخلی (هندسی) ▶

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

تعریف ضرب داخلی (تحلیلی) ▶

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

در اینصورت

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

حالت خاص: اندازه بردار در دو بعد

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

◀ بردار یکه‌ی بردار

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

▶ بردار یکه (هندسی)

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

در اینصورت

$$\hat{A} = \frac{1}{A} (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k})$$

حالت خاص: بردار یکه در دو بعد

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{A} (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \quad \text{که} \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

◀ زاویه‌ی بین دو بردار

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

▶ تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \text{و} \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

▶ تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

در اینصورت

$$AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \Rightarrow \cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

حالت خاص: زاویه بین دو بردار در دو بعد

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$$

◀ تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{و} \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

◀ تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

در اینصورت

$$AB \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y \Rightarrow \boxed{\cos \theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{AB}}$$

تعریف ضرب خارجی

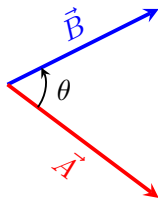
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin \theta|$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} = & A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} \\ & + A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} \\ & + A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k} \end{aligned}$$

تعریف ضرب خارجی

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin \theta|$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} \\ &+ A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} \\ &+ A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k} \end{aligned}$$

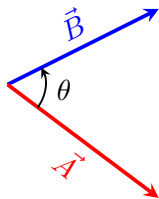
$$\hat{i} \times \hat{i} = 0, \quad \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{j} = 0, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

که

و



تعریف ضرب داخلی

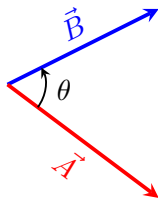
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin \theta|$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و



$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= A_x B_y \hat{k} - A_x B_z \hat{j} \\ &\quad - A_y B_x \hat{k} + A_y B_z \hat{i} \\ &\quad + A_z B_x \hat{j} - A_z B_y \hat{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} \\ &\quad + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} \\ &\quad + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \end{aligned}$$

تعریف ضرب خارجی

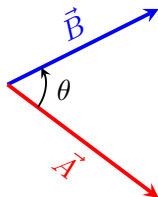
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin \theta|$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و



$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} \\ &+ (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} \\ &+ (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

تعریف ضرب خارجی

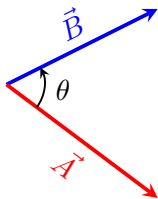
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin \theta|$$

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

که

و

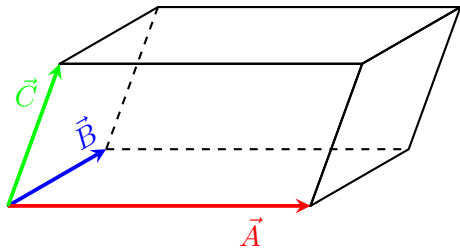
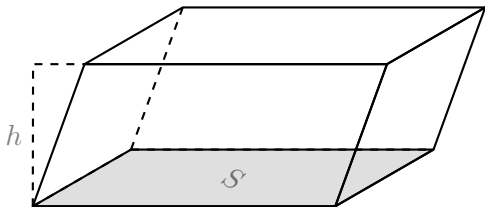


$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} \\ &+ (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} \\ &+ (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح



$$V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$$

$$V = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح

$$V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$$

$$\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C} = \vec{B} \times \vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B} \cdot \vec{C} \times \vec{A}$$

ضرب سه‌گانه برداری (تحلیلی)

قاعده بک-کب

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_y C_z - B_z C_y & B_z C_x - B_x C_z & B_x C_y - B_y C_x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \hat{i}[A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z)] \\ &+ \hat{j}[A_z(B_y C_z - B_z C_y) - A_x(B_x C_y - B_y C_x)] \\ &+ \hat{k}[A_x(B_z C_x - B_x C_z) - A_y(B_y C_z - B_z C_y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \hat{i}B_x(A_y C_y + A_z C_z) - \hat{i}C_x(B_y A_y + B_z A_z) \\ &+ \hat{j}B_y(A_z C_z + A_x C_x) - \hat{j}C_y(A_z B_z + A_x B_x) \\ &+ \hat{k}B_z(A_x C_x + A_y C_y) - \hat{k}C_z(A_x B_x + A_y B_y) \end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه برداری (تحلیلی)

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \hat{i}B_x(A_yC_y + A_zC_z) - \hat{i}C_x(B_yA_y + B_zA_z) \\ &\quad + \hat{j}B_y(A_zC_z + A_xC_x) - \hat{j}C_y(A_zB_z + A_xB_x) \\ &\quad + \hat{k}B_z(A_xC_x + A_yC_y) - \hat{k}C_z(A_xB_x + A_yB_y) \end{aligned}$$

اضافه و کم کردن $\hat{i}A_xB_xC_x$ به سطر اول، اضافه و کم کردن $\hat{j}A_yB_yC_y$ به سطر دوم و اضافه و کم کردن $\hat{k}A_zB_zC_z$ به سطر سوم،

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \hat{i}B_x(\mathbf{A_xC_x} + A_yC_y + A_zC_z) - \hat{i}C_x(\mathbf{A_xB_x} + B_yA_y + B_zA_z) \\ &\quad + \hat{j}B_y(\mathbf{A_yC_y} + A_zC_z + A_xC_x) - \hat{j}C_y(\mathbf{A_yC_y} + A_zB_z + A_xB_x) \\ &\quad + \hat{k}B_z(\mathbf{A_zC_z} + A_xC_x + A_yC_y) - \hat{k}C_z(\mathbf{A_zB_z} + A_xB_x + A_yB_y) \end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه برداری (تحلیلی)

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \hat{i}B_x(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - \hat{i}C_x(A_x B_x + B_y A_y + B_z A_z) \\ &+ \hat{j}B_y(A_y C_y + A_z C_z + A_x C_x) - \hat{j}C_y(A_y C_y + A_z B_z + A_x B_x) \\ &+ \hat{k}B_z(A_z C_z + A_x C_x + A_y C_y) - \hat{k}C_z(A_z B_z + A_x B_x + A_y B_y) \end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \hat{i}B_x(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \hat{i}C_x(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ &+ \hat{j}B_y(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \hat{j}C_y(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ &+ \hat{k}B_z(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \hat{k}C_z(\vec{A} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه برداری (تحلیلی)

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= \hat{i}B_x(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \hat{i}C_x(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ &\quad + \hat{j}B_y(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \hat{j}C_y(\vec{A} \cdot \vec{B}) \\ &\quad + \hat{k}B_z(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \hat{k}C_z(\vec{A} \cdot \vec{B})\end{aligned}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z)(\vec{A} \cdot \vec{C}) - (\hat{i}C_x + \hat{j}C_y + \hat{k}C_z)(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{B} = \hat{i}B_x + \hat{j}B_y + \hat{k}B_z$$

$$\vec{C} = \hat{i}C_x + \hat{j}C_y + \hat{k}C_z$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$