فیزیک ۱
بردارها

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

بردارها

بطور کلی کمیتهای فیزیکی به سه دسته تقسیم می‌شوند،

- کمیتهای اسکالر (Scalar)

$\boxed{\text{فقط بزرگی دارند.}}$

مانند: جرم، دما، زمان، انرژی و ...

- کمیتهای برداری (Vector)

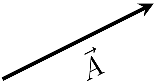
$\boxed{\text{علاوه بر بزرگی شامل جهتگیری فضایی نیز می‌باشند.}}$

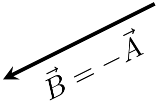
مانند: تغییر مکان، سرعت، شتاب، نیرو، میدان الکتریکی، میدان مغناطیسی و ...

- کمیتهای تانسوری (Tensor)

موکول به آینده ...

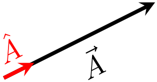
اندازه و جهت

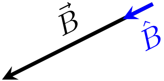




$$A = |\vec{A}|$$

$$B = |\vec{B}| = |-\vec{A}| = A$$

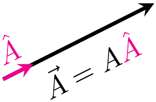




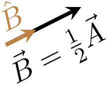
$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad |\hat{A}| = 1$$

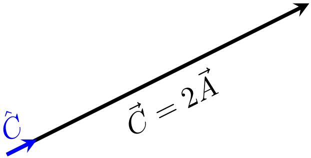
$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{-\vec{A}}{A} = -\hat{A}, \quad |\hat{B}| = 1$$

اندازه و جهت



$$A = |\vec{A}|, \quad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad \vec{A} = A\hat{A}$$





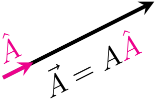
$$B = |\vec{B}| = |\frac{1}{2}\vec{A}| = \frac{1}{2}|\vec{A}| = \frac{1}{2}A$$

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{\frac{1}{2}\vec{A}}{\frac{1}{2}A} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A}$$

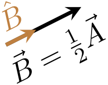
$$C = |\vec{C}| = |2\vec{A}| = 2|\vec{A}| = 2A$$

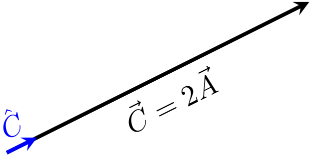
$$\hat{C} = \frac{\vec{C}}{C} = \frac{2\vec{A}}{2A} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A}$$

اندازه و جهت



$$A = |\vec{A}|, \quad \hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}, \quad \vec{A} = A\hat{A}$$





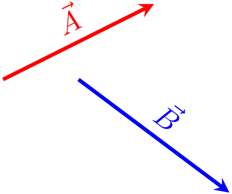
$$B = |\vec{B}| = \frac{1}{2}A, \quad \hat{B} = \hat{A}$$

$$\vec{B} = |\vec{B}|\hat{B} = \frac{1}{2}A\hat{A} = \frac{1}{2}\vec{A}$$

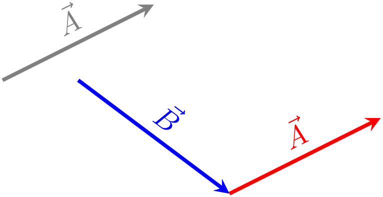
$$C = |\vec{C}| = 2A, \quad \hat{C} = \hat{A}$$

$$\vec{C} = |\vec{C}|\hat{C} = 2A\hat{A} = 2\vec{A}$$

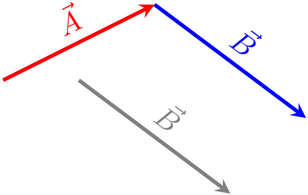
جمع هندسی بردارها



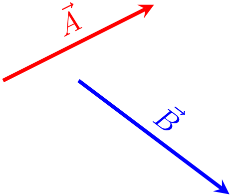
جمع برداری $\vec{B}+\vec{A}$ با روش مثلثی



جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش مثلثی

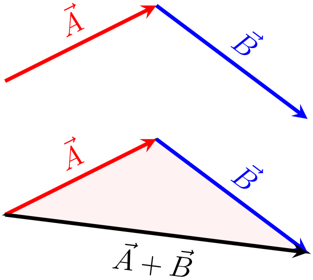


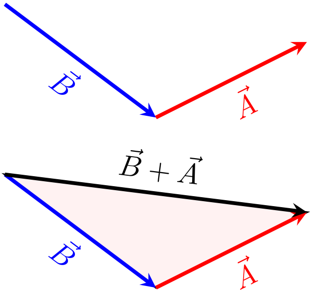
جمع هندسی بردارها



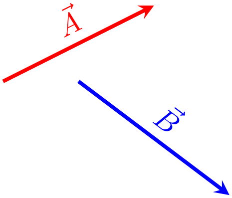
جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش مثلثی

جمع برداری $\vec{B}+\vec{A}$ با روش مثلثی

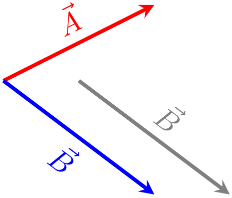


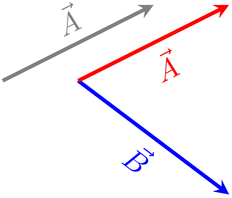


جمع هندسی بردارها

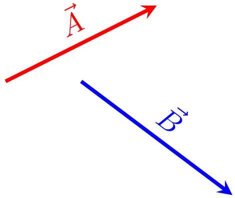


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع

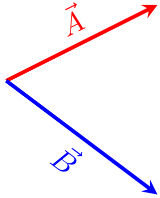


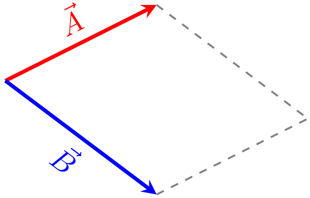


جمع هندسی بردارها

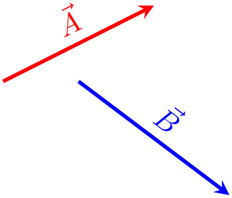


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع

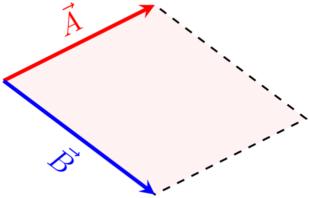


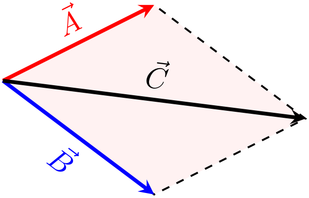


جمع هندسی بردارها

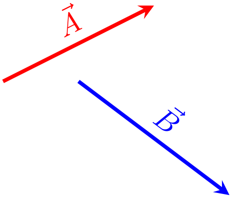


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}$ با روش متوازی الاضلاع

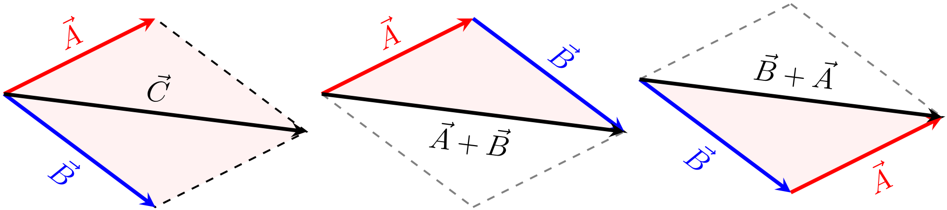




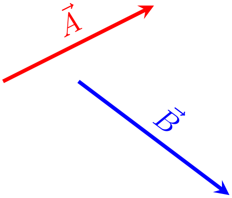
جمع هندسی بردارها



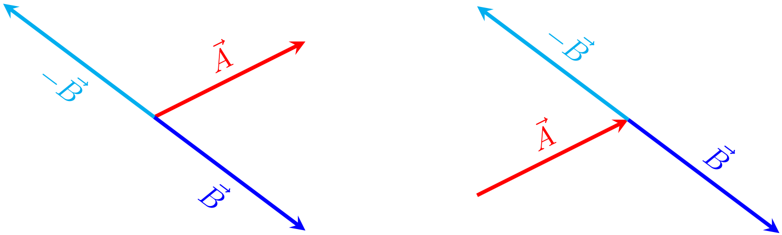
از مقایسه روش مثلثی و روش متوازی الاضلاع نتیجه می‌گیریم که $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$



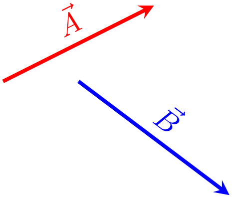
جمع هندسی بردارها



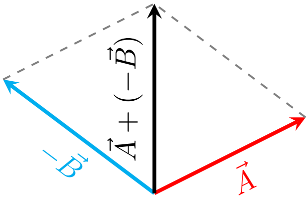
جمع برداری $\vec{A} - \vec{B}$

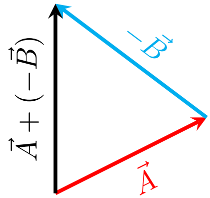


جمع هندسی بردارها

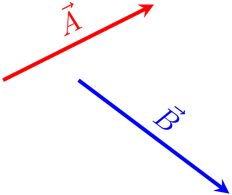


جمع برداری $\vec{A} - \vec{B}$

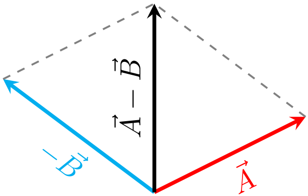


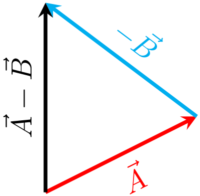


جمع هندسی بردارها

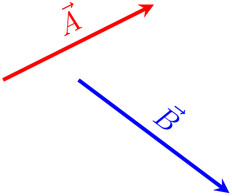


$$\vec{A}+(-\vec{B})=\vec{A}-\vec{B} \quad \text{جمع برداری}$$

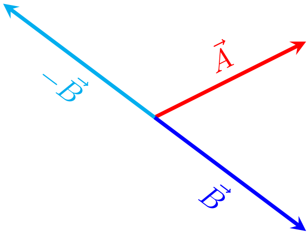


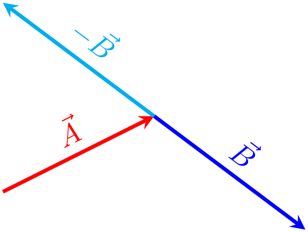


جمع هندسی بردارها

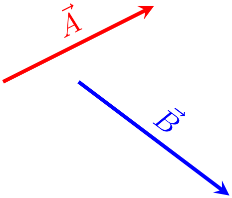


جمع برداری $-\vec{B}+\vec{A}$

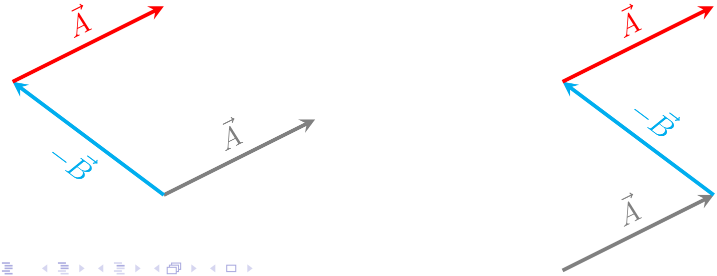




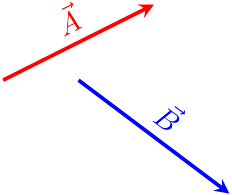
جمع هندسی بردارها



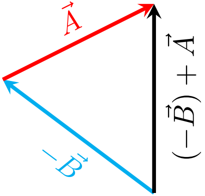
جمع برداری $\vec{A} + -\vec{B}$

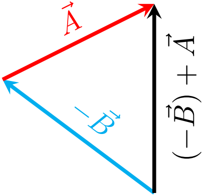


جمع هندسی بردارها

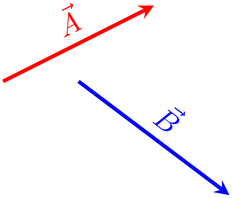


جمع برداری $-\vec{B} + \vec{A}$

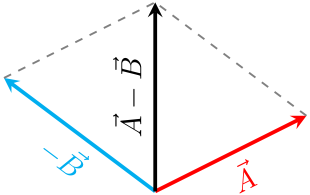


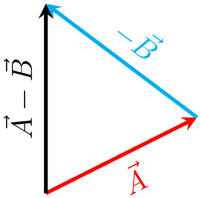


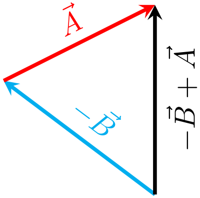
جمع هندسی بردارها



جمع برداری $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=(-\vec{B})+\vec{A}$

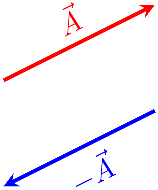






جمع هندسی بردارها

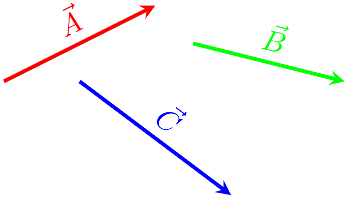
جمع یک بردار با معکوس جهت خود



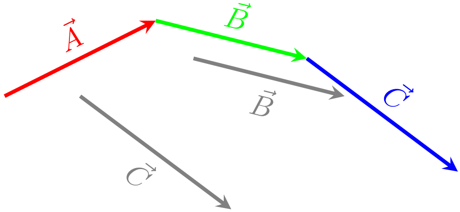
$$\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=0$$

$$\vec{A}=0+\vec{A}=\vec{A}+0$$

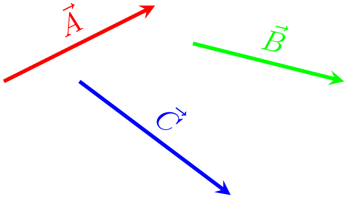
خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری



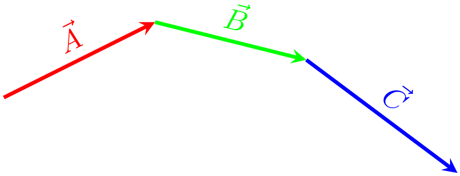
جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

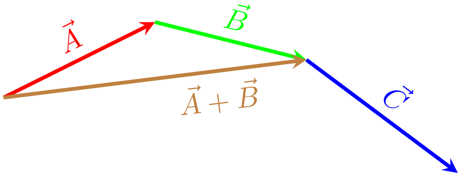


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

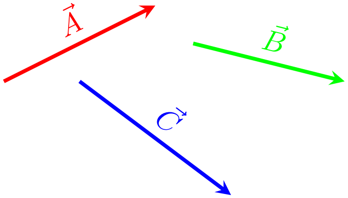


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

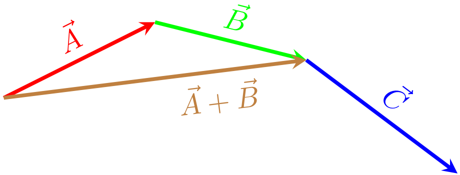


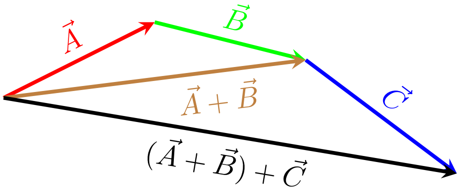


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

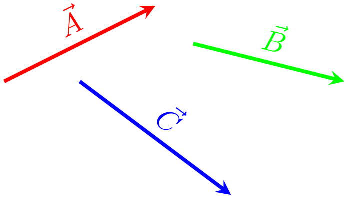


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

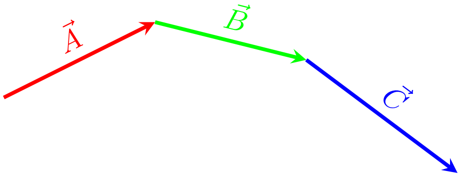


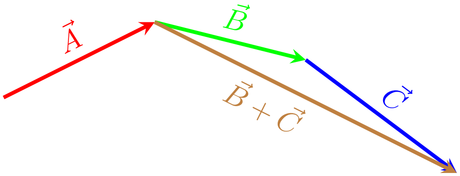


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

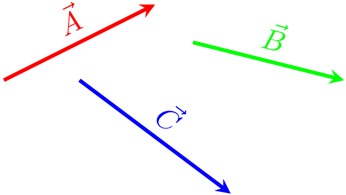


$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ جمع برداری

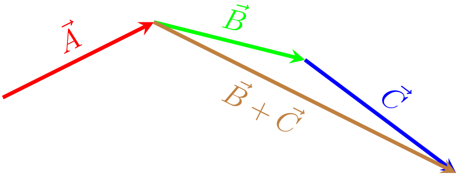


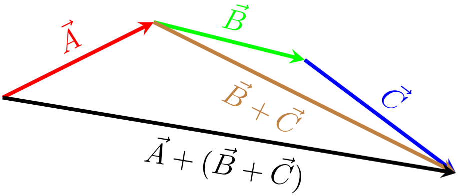


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری

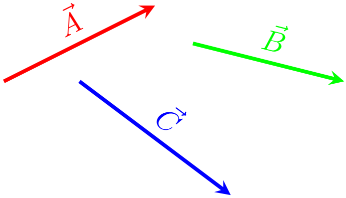


جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$

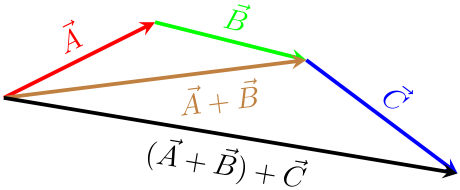


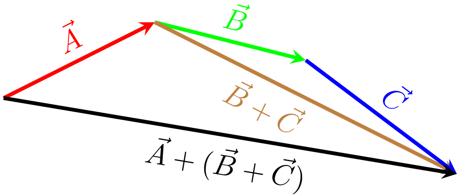


خاصیت شرکت‌پذیری جمع برداری



جمع برداری $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$





ضرب برداری

بطورکلی ضرب برداری به دو دسته تقسیم می‌شوند،

- ضرب داخلی (inner product)

نتیجه حاصلضرب داخلی دو بردار یک اسکالر است.

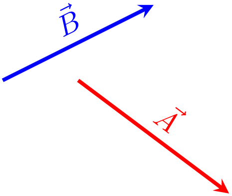
کاربردها: محاسبه کار، محاسبه انرژی یک دوقطبی در حضور میدان خارجی و ...

- ضرب خارجی (cross product or vector product or outer product)

نتیجه حاصلضرب خارجی دو بردار یک بردار است.

کاربردها: محاسبه گشتاور نیرو، محاسبه اندازه حرکت زاویه‌ای و ...

<u>بررسی زاویه‌ی دو بردار</u>



تعریف ضرب داخلی

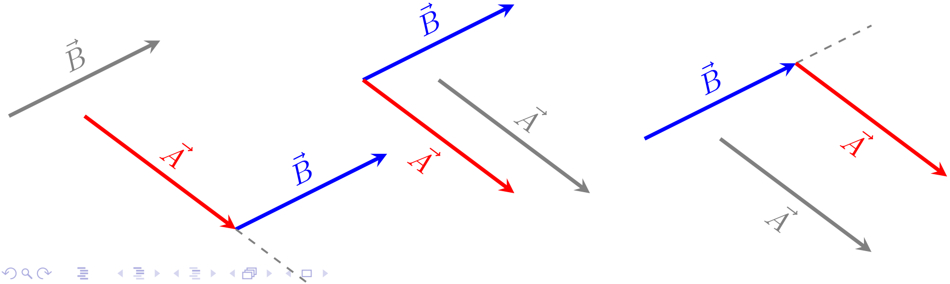
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

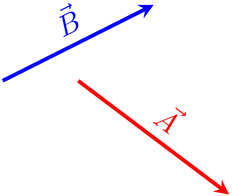
و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



ضرب داخلی

<u>بررسی زاویه‌ی دو بردار</u>



تعریف ضرب داخلی

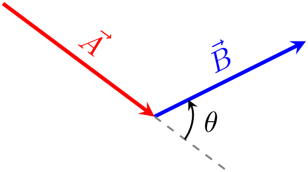
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

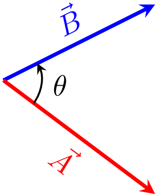
که

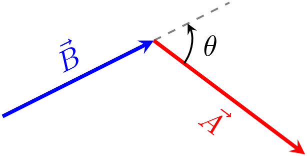
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$







تعریف ضرب داخلی

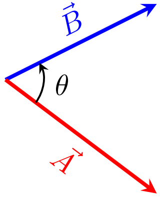
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



محدوده‌ی ضرب داخلی دو بردار

$$0 \le \theta \le \pi \Rightarrow -1 \le \cos\theta \le 1$$

$$-AB \le AB\cos\theta \le AB$$

$$-AB \le \vec{A}\cdot\vec{B} \le AB$$

حالتهای خاص ضرب داخلی دو بردار

$$\theta = 0 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = AB$$

$$\theta = \pi \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = -AB$$

$$\theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

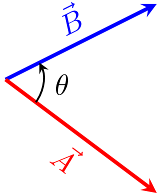
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

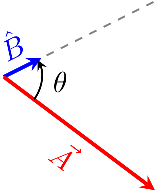


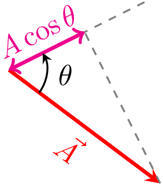
تصویر بردار $\vec{A}$ بر راستا بردار $\vec{B}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\frac{\vec{B}}{B} = A\cos\theta$$

$$\vec{A}\cdot\hat{B} = A\cos\theta$$





تعریف ضرب داخلی

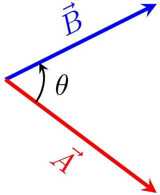
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

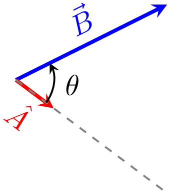


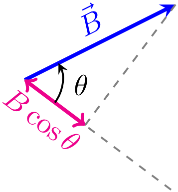
تصویر بردار $\vec{B}$ بر راستا بردار $\vec{A}$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$\frac{\vec{A}}{A}\cdot\vec{B} = B\cos\theta$$

$$\hat{A}\cdot\vec{B} = B\cos\theta$$





ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

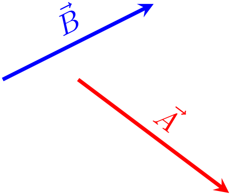
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

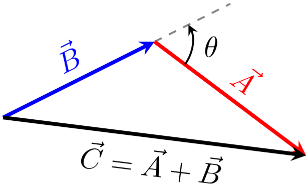
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$





قانون کوسینوسها

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{C} = C^2, \quad \vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$$

$$\vec{B}\cdot\vec{B} = B^2, \quad \vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$$

ضرب داخلی

تعریف ضرب داخلی

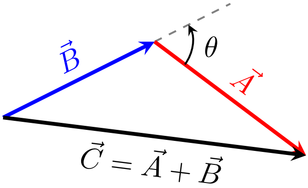
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

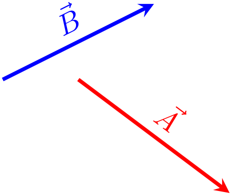
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$





<u>قانون کوسینوسها</u>

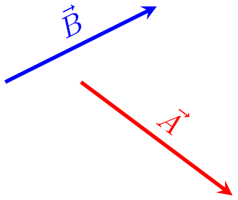
$$\vec{C}\cdot\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

ضرب داخلی



تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

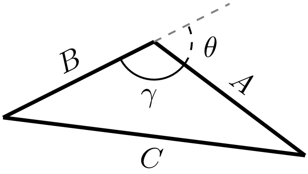
<u>قانون کوسینوسها</u>

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

$$\gamma = \pi - \theta \Rightarrow \cos\gamma = \cos(\pi - \theta)$$

$$\cos\gamma = -\cos\theta$$

$$\boxed{C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}$$



ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی دو بردار

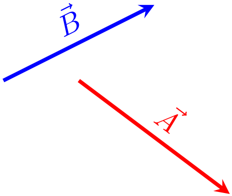
$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

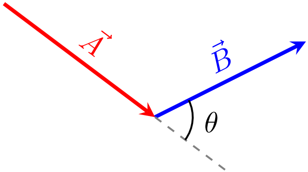
که

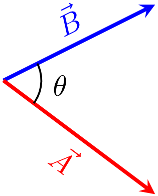
$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

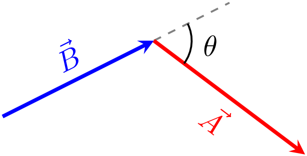
و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$









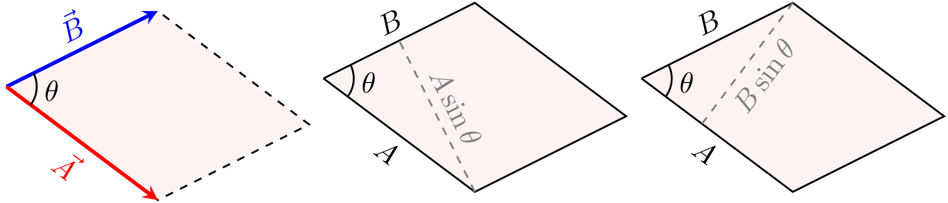
ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی دو بردار

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

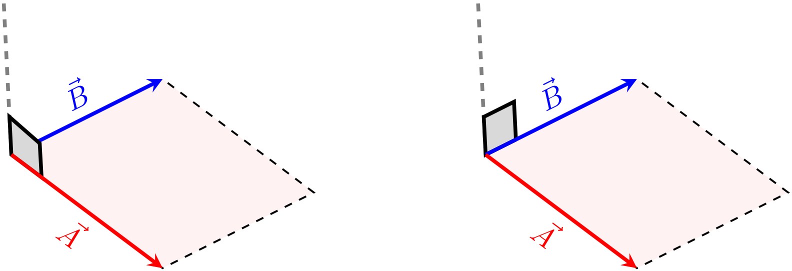
<u>مساحت سطح متوازی الاضلاع تشکیل شده بوسیله بردارها</u>

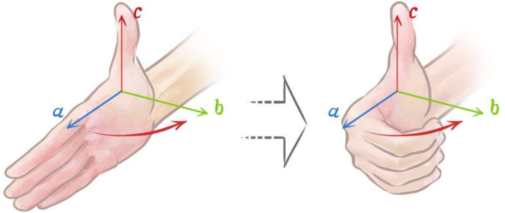
$$S = AH = A(B\sin\theta) \qquad S = BH = B(A\sin\theta) \qquad S = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sin\theta$$



ضرب خارجی

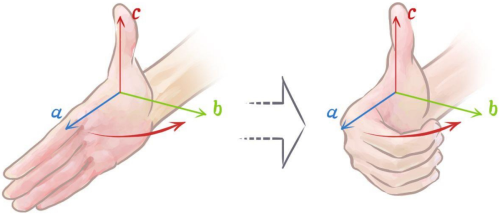
تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست

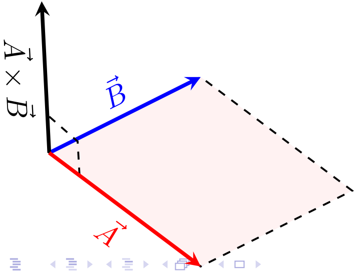


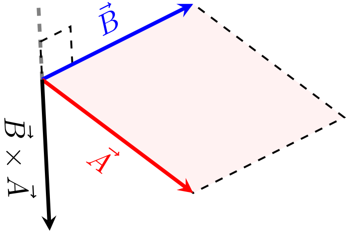


ضرب خارجی

تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست

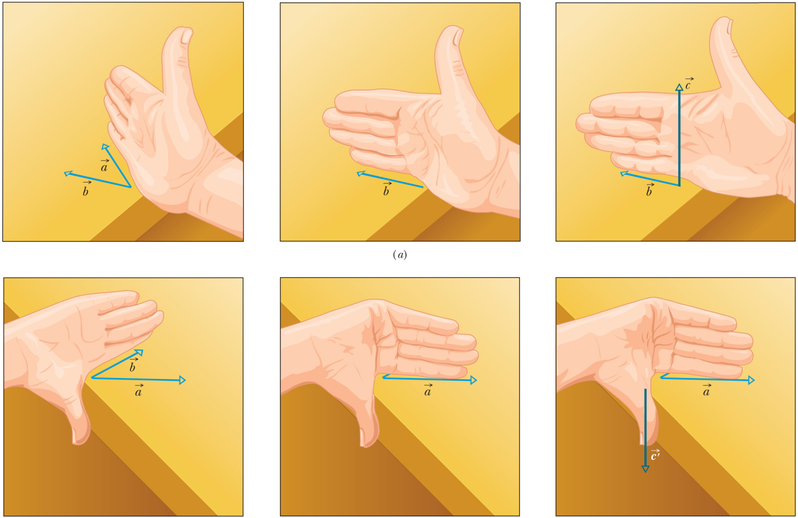






ضرب خارجی

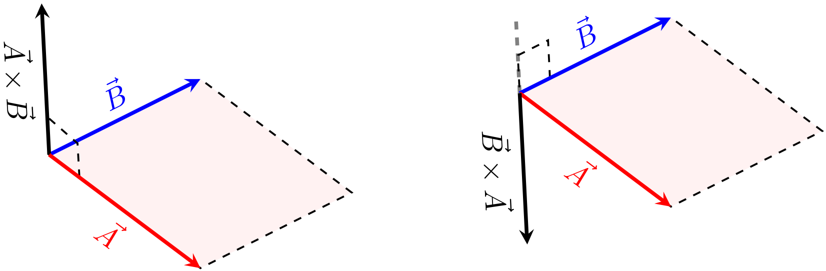
تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست



(a)

ضرب خارجی

تعیین جهت ضرب خارجی دو بردار با استفاده از قاعده دست راست



$$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A} \Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{B}\times\vec{A}|$$

حالتهای خاص ضرب خارجی دو بردار

$$\theta = 0, \pi \Rightarrow \vec{A}\times\vec{B} = 0 \text{ or } |\vec{A}\times\vec{B}| = 0$$

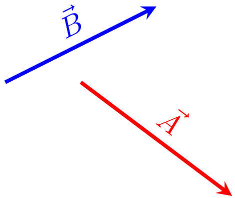
$$\theta = \pi/2 \Rightarrow |\vec{A}\times\vec{B}| = AB$$

محدوده‌ی ضرب خارجی دو بردار

$$0 \leq \sin\theta \leq 1$$

$$0 \leq |\vec{A}\times\vec{B}| \leq AB$$

ضرب خارجی



تعریف بزرگی ضرب خارجی

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

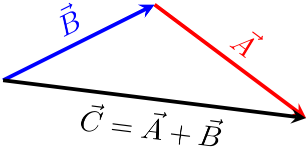
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

<u>قانون سینوسها</u>



$$\vec{C}\times\vec{C} = (\vec{A}+\vec{B})\times\vec{C}$$

$$0 = \vec{A}\times\vec{C} + \vec{B}\times\vec{C}$$

$$\vec{A}\times\vec{C} = -\vec{B}\times\vec{C}$$

$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{B}\times\vec{C}|$$

ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی

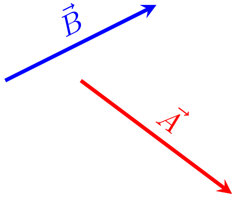
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

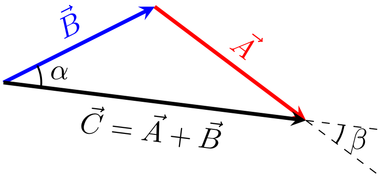
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$





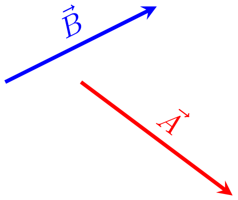
قانون سینوسها

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{B} \times \vec{C}|$$

$$AC|\sin\beta| = BC|\sin\alpha|$$

$$\boxed{\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\alpha|}{A}} \qquad (۱)$$

ضرب خارجی



<u>قانون سینوسها</u>

$$\vec{A}\times\vec{C}=\vec{A}\times(\vec{A}+\vec{B})$$

$$\vec{A}\times\vec{C}=\vec{A}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}$$

$$\vec{A}\times\vec{C}=0+\vec{A}\times\vec{B}$$

$$|\vec{A}\times\vec{C}|=|\vec{A}\times\vec{B}|$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

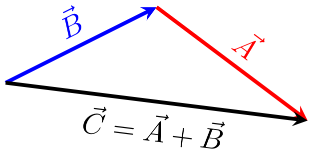
$$|\vec{A}\times\vec{B}|=AB|\sin\theta|$$

که

$$A=|\vec{A}|,\quad B=|\vec{B}|$$

و

$$\theta=\angle(\vec{A},\vec{B})$$



ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی

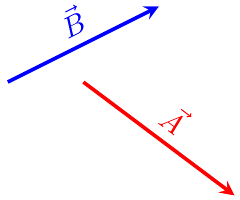
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

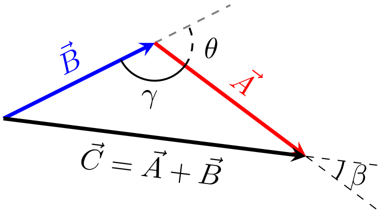
که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$





قانون سینوسها

$$|\vec{A} \times \vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$AC|\sin\beta| = AB|\sin\theta|$$

$$\sin\theta = \sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma$$

$$AC|\sin\beta| = AB|\sin\gamma|$$

ضرب خارجی

تعریف بزرگی ضرب خارجی

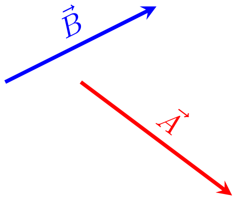
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

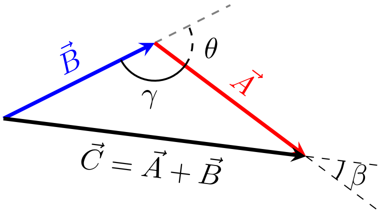


قانون سینوسها

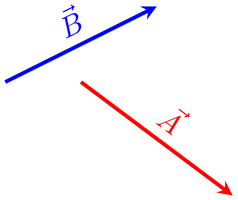
$$|\vec{A}\times\vec{C}| = |\vec{A}\times\vec{B}|$$

$$AC|\sin\beta| = AB|\sin\gamma|$$

$$\boxed{\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\gamma|}{C}}$$ ۲



ضرب خارجی



<u>قانون سینوسها</u>

$$\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\alpha|}{A} \qquad ۱$$

$$\frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\gamma|}{C} \qquad ۲$$

$$\boxed{\frac{|\sin\alpha|}{A} = \frac{|\sin\beta|}{B} = \frac{|\sin\gamma|}{C}}$$

تعریف بزرگی ضرب خارجی

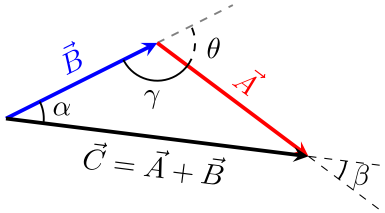
$$|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

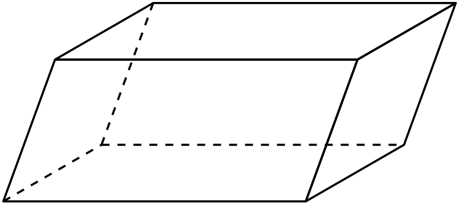
و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

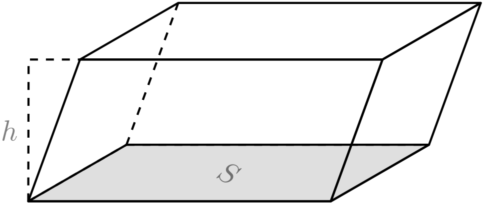


ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

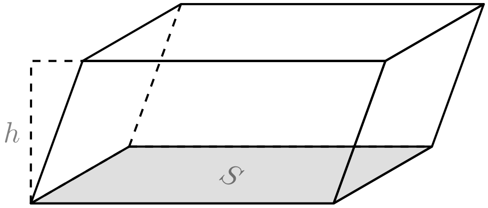


$$V = hS$$

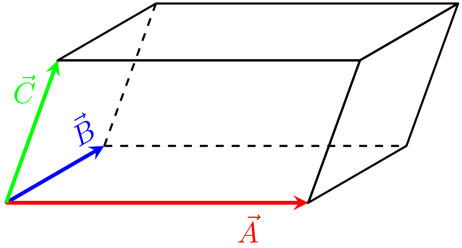


ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

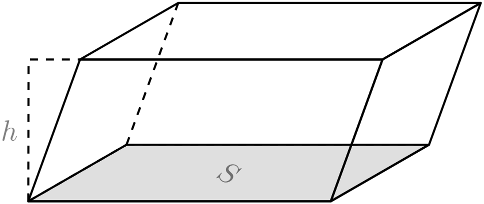


سه بردار $\vec{A}$ ، $\vec{B}$ و $\vec{C}$ را مطابق شکل زیر اعمال می کنیم،



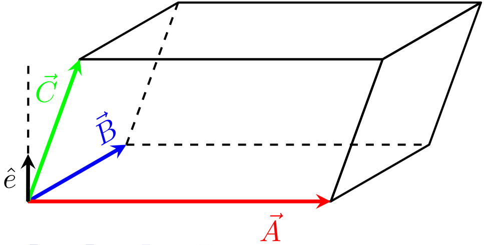
ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح



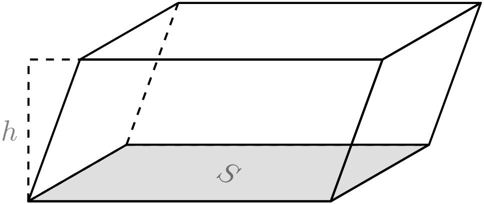
محاسبه مساحت سطح تشکیل شده
بوسیله‌ی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$

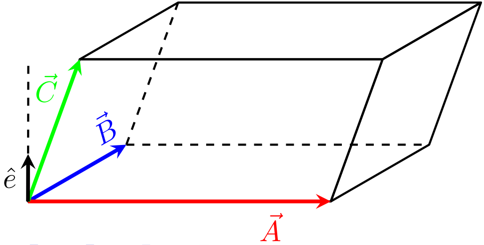
$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$



ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح



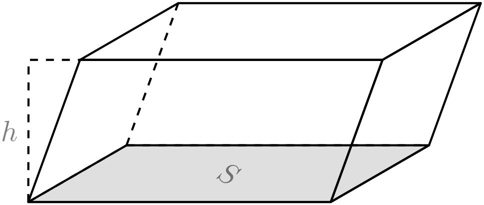


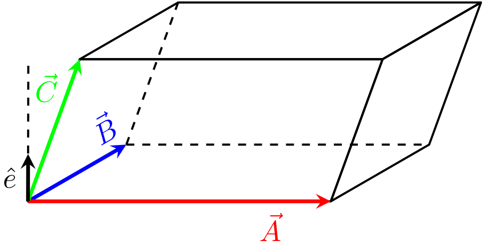
محاسبه بردار یکه عمود بر سطح
تشکیل شده از بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$$\hat{e} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح





$$\hat{e} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

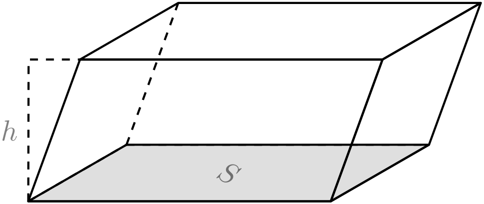
محاسبه ارتفاع h

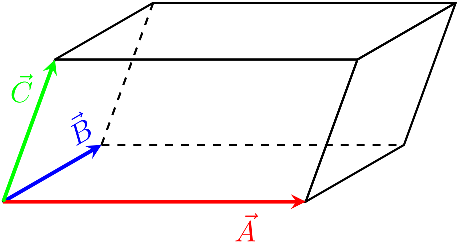
$$h = \hat{e} \cdot \vec{C}$$

$$h = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح





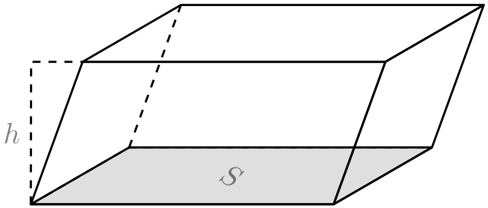
$$h = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

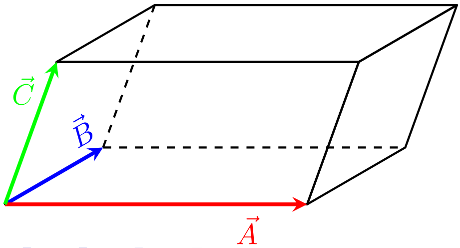
$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

$$V = hS = \frac{\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر

محاسبه حجم متوازی السطوح

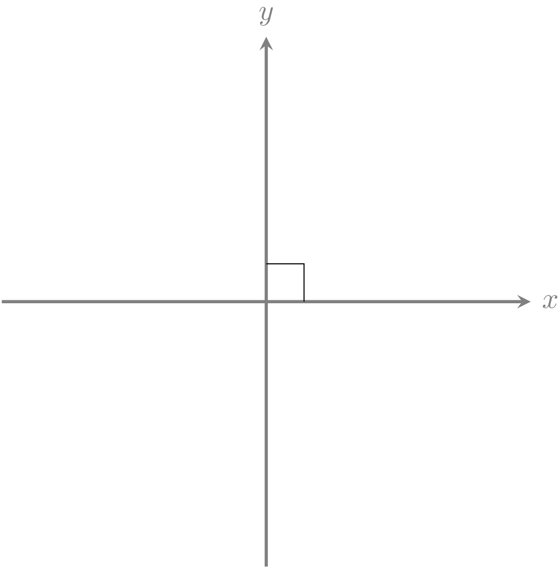




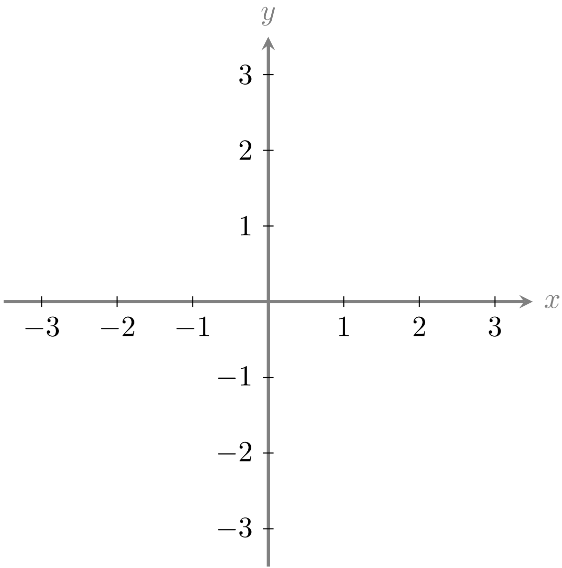
$$V = \frac{\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}|\vec{A}\times\vec{B}|$$

$$\boxed{V = \vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C}}$$

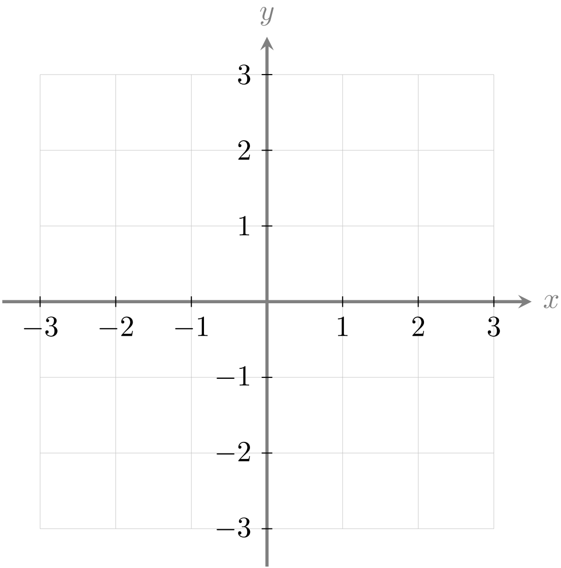
دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی



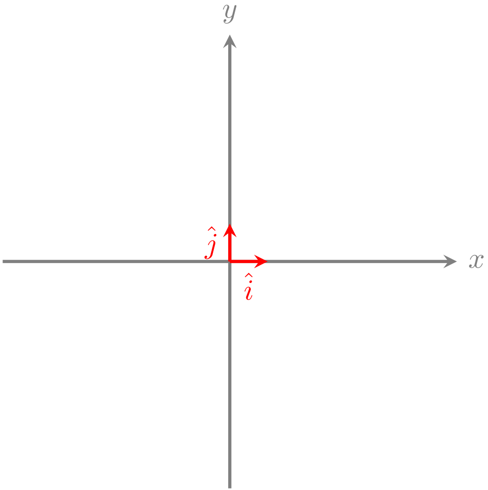
دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی



دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی



دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی

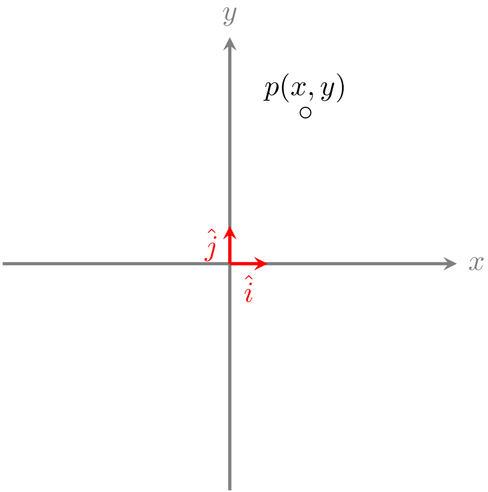


<u>بردار یکه</u>

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی

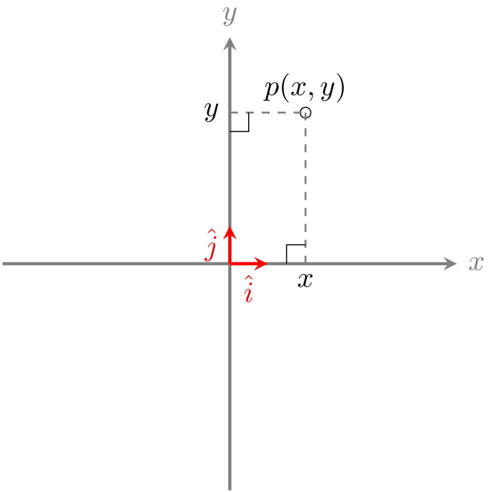


بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی

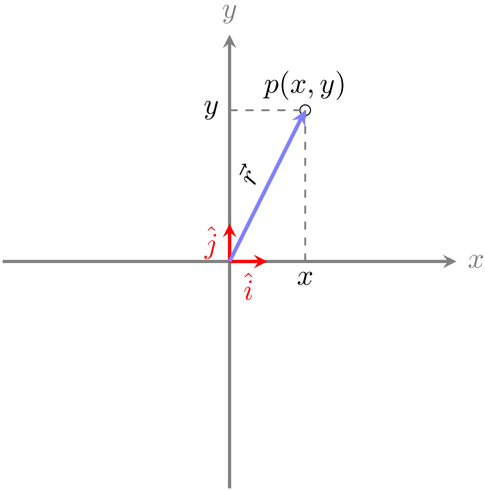


بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

دستگاه مختصات دوبعدی-دکارتی



بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

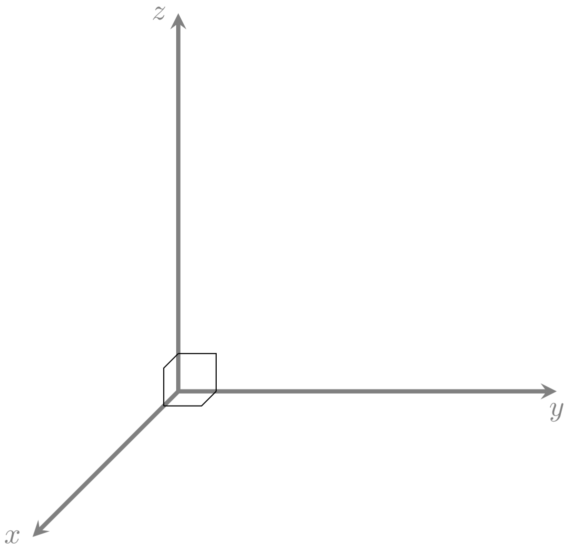
بردار مکان

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

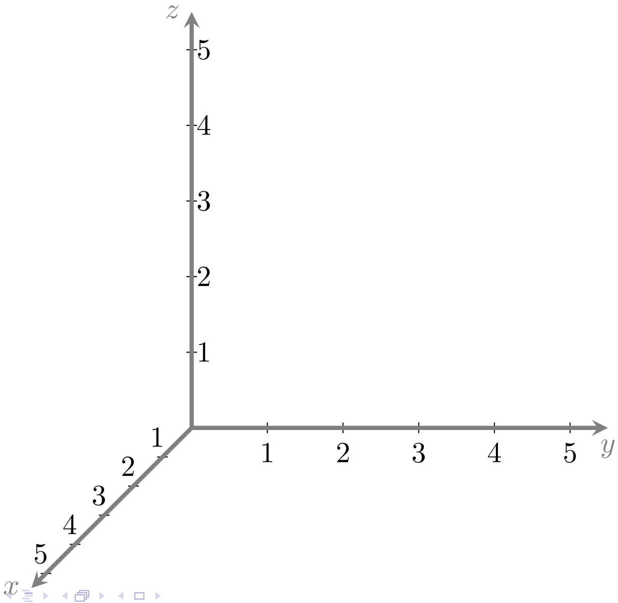
$$\hat{i} \cdot \vec{r} = x, \quad \hat{j} \cdot \vec{r} = y$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

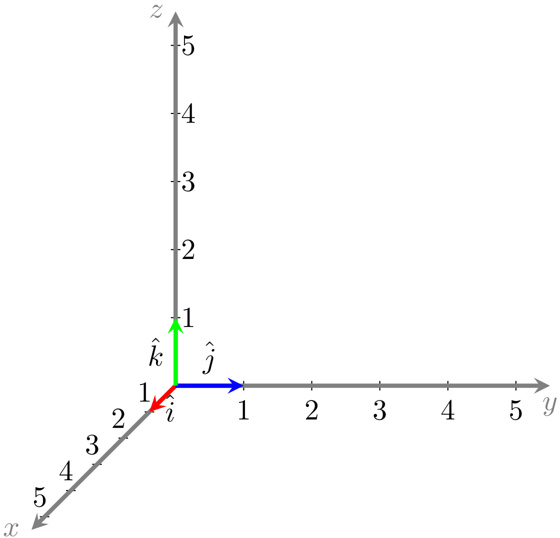
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



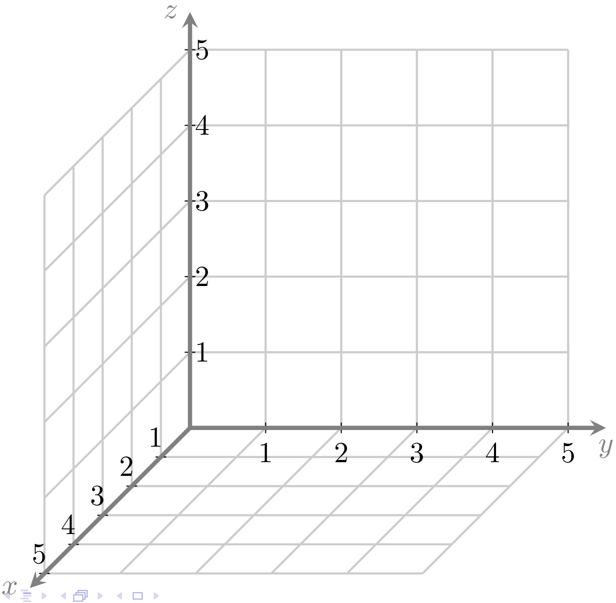
<u>بردار یکه</u>

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

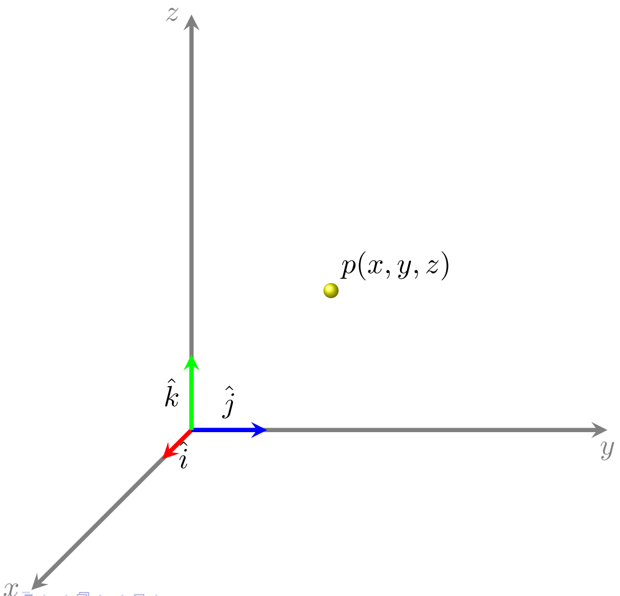
$$\begin{cases} \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0 \\ \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0 \\ \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j} \end{cases}$$

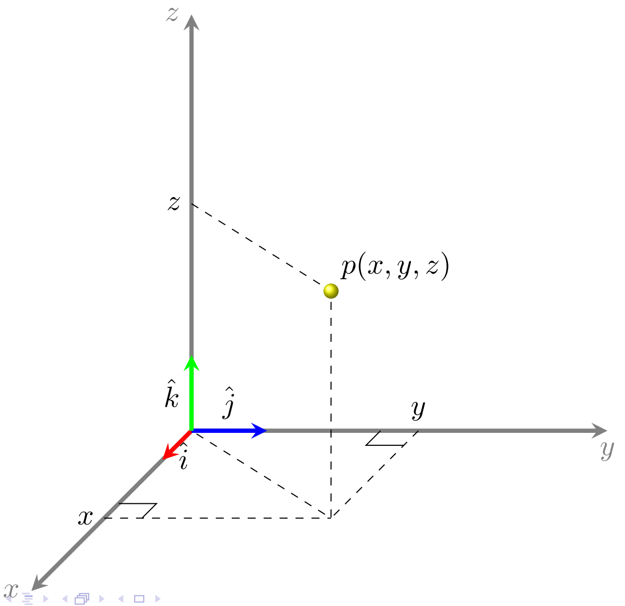
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



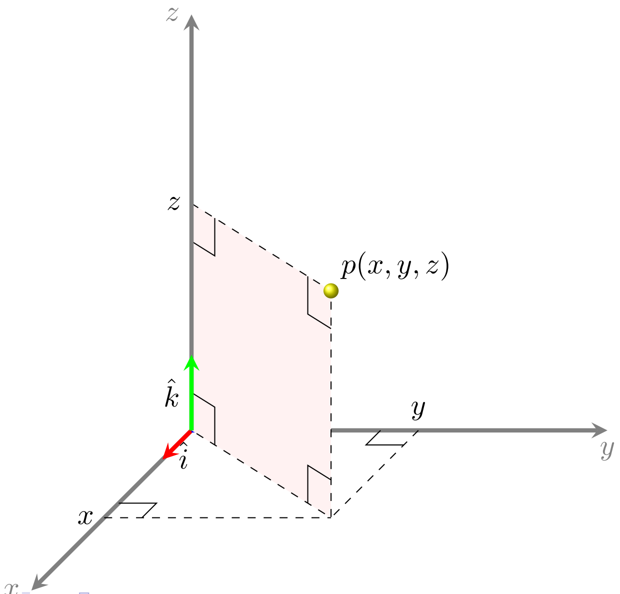
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



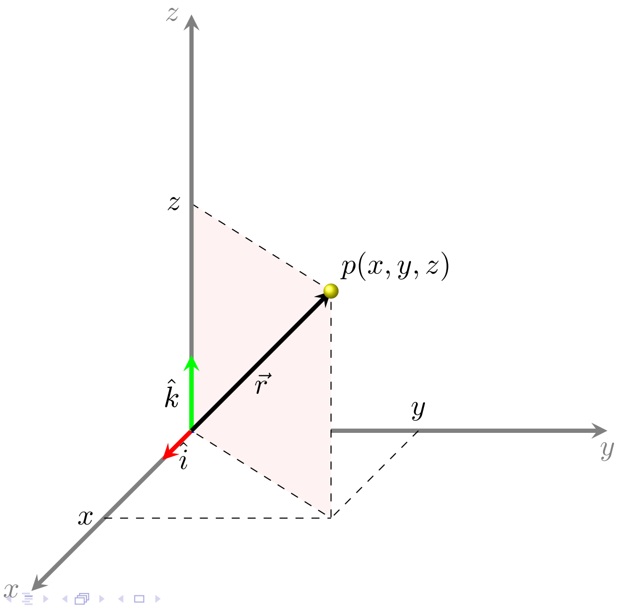
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



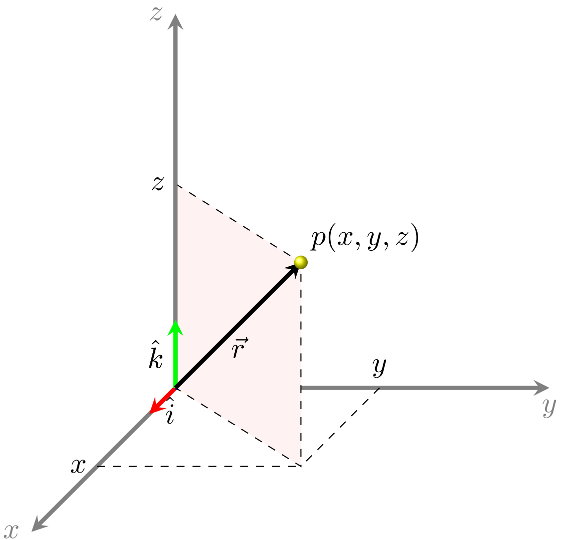
دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



دستگاه مختصات سه‌بعدی-دکارتی



بردار یکه

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$

بردار مکان

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z$$

$$x = \hat{i} \cdot \vec{r}$$

$$y = \hat{j} \cdot \vec{r}$$

$$z = \hat{k} \cdot \vec{r}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

جمع برداری (تحلیلی)

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

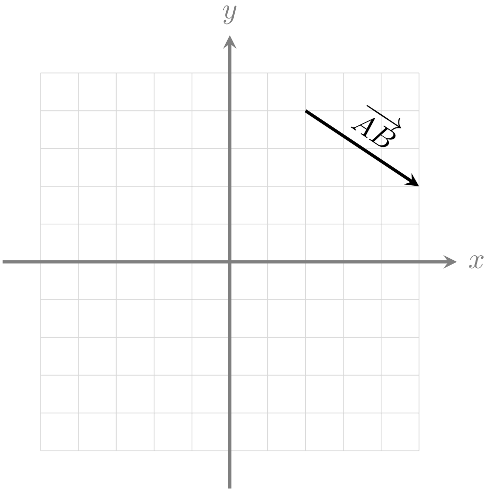
$$\vec{A}\pm\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\pm(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$\vec{A}\pm\vec{B} = (A_x\pm B_x)\hat{i} + (A_y\pm B_y)\hat{j} + (A_z\pm B_z)\hat{k}$$

حالت خاص: جمع دو بردار در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

$$\vec{A}\pm\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j})\pm(B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$
$$\vec{A}\pm\vec{B} = (A_x\pm B_x)\hat{i} + (A_y\pm B_y)\hat{j}$$

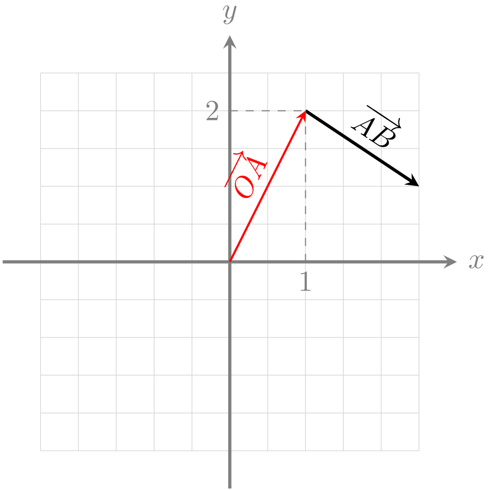
جمع برداری (تحلیلی)



بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

جمع برداری (تحلیلی)



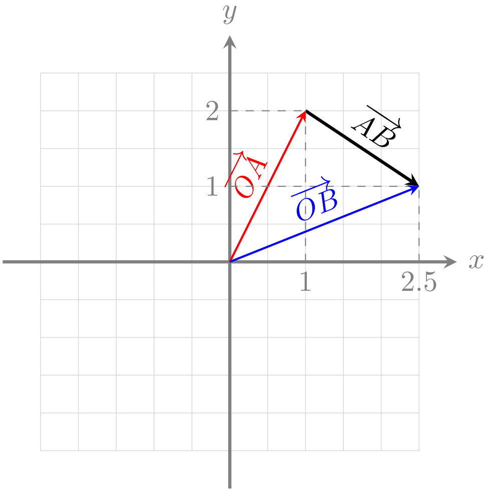
<u>بردار دلخواه</u>

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

<u>بردار مکان</u>

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

جمع برداری (تحلیلی)



<u>بردار دلخواه</u>

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

<u>بردار مکان</u>

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

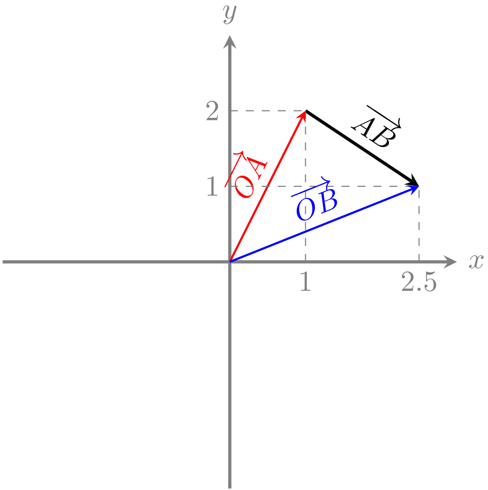
$$\overrightarrow{OB} = 2.5\hat{i} + \hat{j}$$

<u>جمع برداری بطور تحلیلی</u>

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

جمع برداری (تحلیلی)



<u>بردار مکان</u>

$$\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = 2.5\hat{i} + \hat{j}$$

<u>جمع برداری بطور تحلیلی</u>

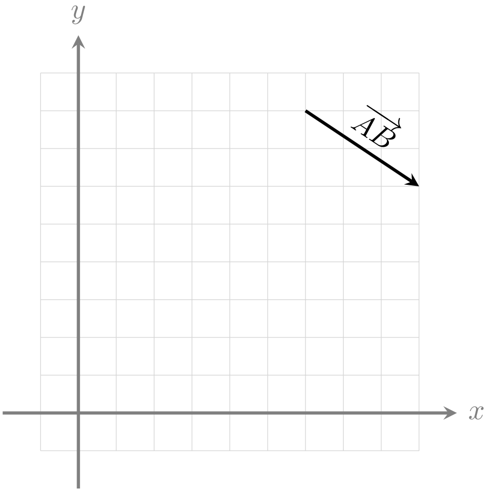
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (2.5\hat{i}+\hat{j}) - (\hat{i}+2\hat{j})$$

$$\overrightarrow{AB} = (2.5-1)\hat{i}+(1-2)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 1.5\hat{i} - \hat{j}$$

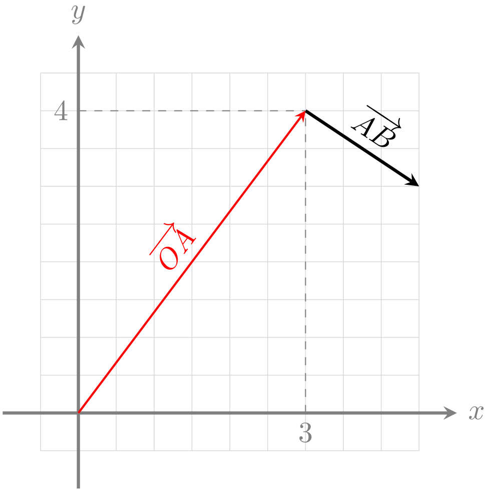
جمع برداری (تحلیلی)



بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

جمع برداری (تحلیلی)



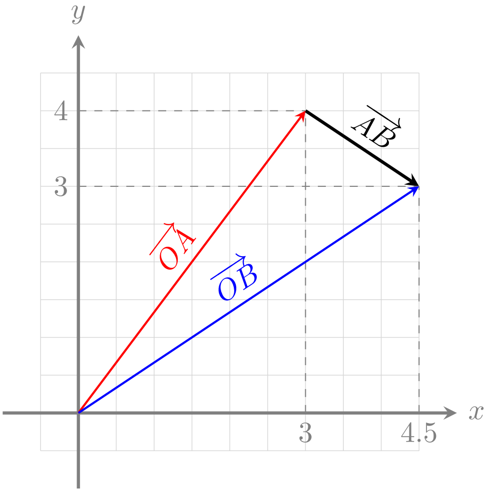
<u>بردار دلخواه</u>

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

<u>بردار مکان</u>

$$\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

جمع برداری (تحلیلی)



بردار دلخواه

$$\overrightarrow{AB} = ?$$

بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

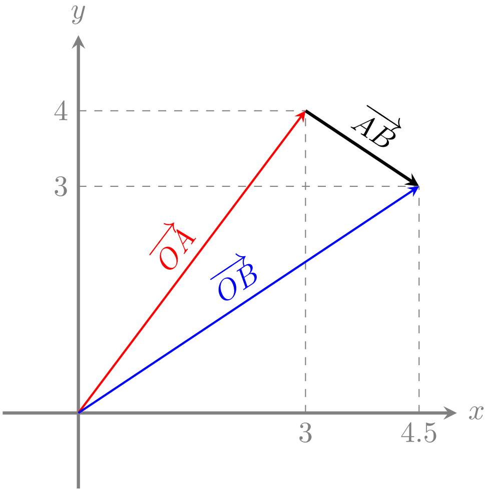
$$\overrightarrow{OB} = 4.5\hat{i} + 3\hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

جمع برداری (تحلیلی)



بردار مکان

$$\overrightarrow{OA} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\overrightarrow{OB} = 4.5\hat{i} + 3\hat{j}$$

جمع برداری بطور تحلیلی

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (4.5\hat{i}+3\hat{j})-(3\hat{i}+4\hat{j})$$

$$\overrightarrow{AB} = (4.5-3)\hat{i}+(3-4)\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 1.5\hat{i} - \hat{j}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

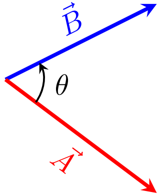
$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

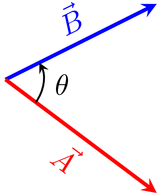
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} = {} & A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\cdot\hat{k} \\ & + A_yB_x\hat{j}\cdot\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\cdot\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\cdot\hat{k} \\ & + A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}\end{aligned}$$

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

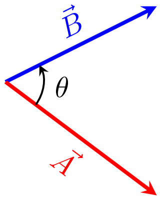
$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} = {} & A_xB_x\hat{i}\cdot\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\cdot\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\cdot\hat{k} \\ & + A_yB_x\hat{j}\cdot\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\cdot\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\cdot\hat{k} \\ & + A_zB_x\hat{k}\cdot\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\cdot\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\cdot\hat{k}\end{aligned}$$

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = 1, \quad \hat{i}\cdot\hat{j} = 0, \quad \hat{i}\cdot\hat{k} = 0$$
$$\hat{j}\cdot\hat{i} = 0, \quad \hat{j}\cdot\hat{j} = 1, \quad \hat{j}\cdot\hat{k} = 0$$
$$\hat{k}\cdot\hat{i} = 0, \quad \hat{k}\cdot\hat{j} = 0, \quad \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

حالت خاص: ضرب داخلی در دوبعد

$$\begin{cases} \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \\ \vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

- اندازه بردار

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

  - تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

  - تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

در اینصورت

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

حالت خاص: اندازه بردار در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

- بردار یکه‌ی بردار

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

- بردار یکه (هندسی)

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

در اینصورت

$$\hat{A} = \frac{1}{A}(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})$$

حالت خاص: بردار یکه در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$

$$\hat{A} = \frac{1}{A}(A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) \quad \text{که} \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

◂ زاویه‌ی بین دو بردار

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

▸ تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad \text{و} \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

▸ تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

در اینصورت

$$AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}}$$

ضرب داخلی (تحلیلی)

حالت خاص: زاویه بین دو بردار در دوبعد

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$$

- تعریف ضرب داخلی (هندسی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

که

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad \text{و} \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

- تعریف ضرب داخلی (تحلیلی)

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$$

در اینصورت

$$AB\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y \Rightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{A_xB_x + A_yB_y}{AB}}$$

تعریف ضرب خارجی

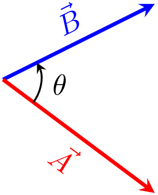
$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

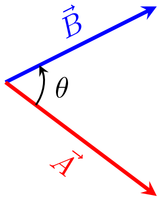
$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$



$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$\vec{A}\times\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$
$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} = {} & A_xB_x\hat{i}\times\hat{i} + A_xB_y\hat{i}\times\hat{j} + A_xB_z\hat{i}\times\hat{k} \\ & + A_yB_x\hat{j}\times\hat{i} + A_yB_y\hat{j}\times\hat{j} + A_yB_z\hat{j}\times\hat{k} \\ & + A_zB_x\hat{k}\times\hat{i} + A_zB_y\hat{k}\times\hat{j} + A_zB_z\hat{k}\times\hat{k}\end{aligned}$$

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A} \times \vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} = {} & A_x B_x \hat{i} \times \hat{i} + A_x B_y \hat{i} \times \hat{j} + A_x B_z \hat{i} \times \hat{k} \\ & + A_y B_x \hat{j} \times \hat{i} + A_y B_y \hat{j} \times \hat{j} + A_y B_z \hat{j} \times \hat{k} \\ & + A_z B_x \hat{k} \times \hat{i} + A_z B_y \hat{k} \times \hat{j} + A_z B_z \hat{k} \times \hat{k}\end{aligned}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = 0, \quad \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{j} = 0, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

ضرب خارجی (تحلیلی)

تعریف ضرب داخلی

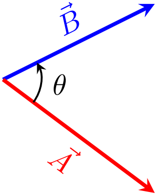
$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$

که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

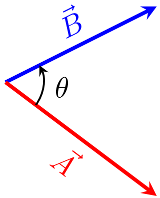


$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= A_xB_y\hat{k} - A_xB_z\hat{j} \\ &- A_yB_x\hat{k} + A_yB_z\hat{i} \\ &+ A_zB_x\hat{j} - A_zB_y\hat{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} \\ &+ (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j} \\ &+ (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}\end{aligned}$$

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

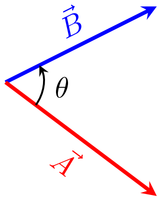
$$\theta = \angle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i}\\ &+ (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j}\\ &+ (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}}$$

تعریف ضرب خارجی

$$\boxed{|\vec{A}\times\vec{B}| = AB|\sin\theta|}$$



که

$$A = |\vec{A}|, \quad B = |\vec{B}|$$

و

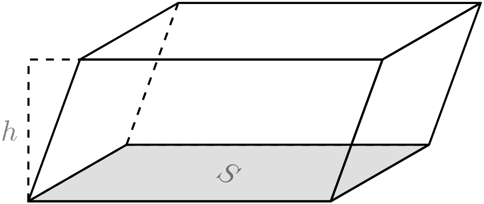
$$\theta = \angle(\vec{A},\vec{B})$$

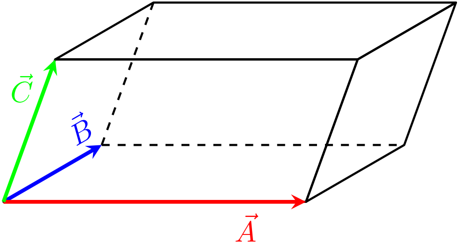
$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i}\\ + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{j}\\ + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} = -\vec{B}\times\vec{A}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح





$$V = \vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$$

$$V = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ضرب سه‌گانه‌ی اسکالر (تحلیلی)

محاسبه حجم متوازی السطوح

$$V = \vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B}$$

$$\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ C_x & C_y & C_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C} = \vec{B}\times\vec{C}\cdot\vec{A} = \vec{C}\times\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{C}\cdot\vec{A}\times\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C} = \vec{B}\cdot\vec{C}\times\vec{A}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

قاعده بک-کب

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_yC_z-B_zC_y & B_zC_x-B_xC_z & B_xC_y-B_yC_x\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})&=\hat{i}[A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)]\\&+\hat{j}[A_z(B_yC_z-B_zC_y)-A_x(B_xC_y-B_yC_x)]\\&+\hat{k}[A_x(B_zC_x-B_xC_z)-A_y(B_yC_z-B_zC_y)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})&=\hat{i}B_x(A_yC_y+A_zC_z)-\hat{i}C_x(B_yA_y+B_zA_z)\\&+\hat{j}B_y(A_zC_z+A_xC_x)-\hat{j}C_y(A_zB_z+A_xB_x)\\&+\hat{k}B_z(A_xC_x+A_yC_y)-\hat{k}C_z(A_xB_x+A_yB_y)\end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = {} & \hat{i}B_x(A_yC_y + A_zC_z) - \hat{i}C_x(B_yA_y + B_zA_z) \\ & + \hat{j}B_y(A_zC_z + A_xC_x) - \hat{j}C_y(A_zB_z + A_xB_x) \\ & + \hat{k}B_z(A_xC_x + A_yC_y) - \hat{k}C_z(A_xB_x + A_yB_y)\end{aligned}$$

اضافه و کم کردن $\hat{i}A_xB_xC_x$ به سطر اول، اضافه و کم کردن $\hat{j}A_yB_yC_y$ به سطر دوم و اضافه و کم کردن $\hat{k}A_zB_zC_z$ به سطر سوم،

$$\begin{aligned}\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = {} & \hat{i}B_x(A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z) - \hat{i}C_x(A_xB_x + B_yA_y + B_zA_z) \\ & + \hat{j}B_y(A_yC_y + A_zC_z + A_xC_x) - \hat{j}C_y(A_yC_y + A_zB_z + A_xB_x) \\ & + \hat{k}B_z(A_zC_z + A_xC_x + A_yC_y) - \hat{k}C_z(A_zB_zA_xB_x + A_yB_y)\end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})&=\hat{i}B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-\hat{i}C_x(A_xB_x+B_yA_y+B_zA_z)\\&+\hat{j}B_y(A_yC_y+A_zC_z+A_xC_x)-\hat{j}C_y(A_yC_y+A_zB_z+A_xB_x)\\&+\hat{k}B_z(A_zC_z+A_xC_x+A_yC_y)-\hat{k}C_z(A_zB_zA_xB_x+A_yB_y)\end{aligned}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C}=A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})&=\hat{i}B_x(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{i}C_x(\vec{A}\cdot\vec{B})\\&+\hat{j}B_y(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{j}C_y(\vec{A}\cdot\vec{B})\\&+\hat{k}B_z(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{k}C_z(\vec{A}\cdot\vec{B})\end{aligned}$$

ضرب سه‌گانه‌ی برداری (تحلیلی)

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

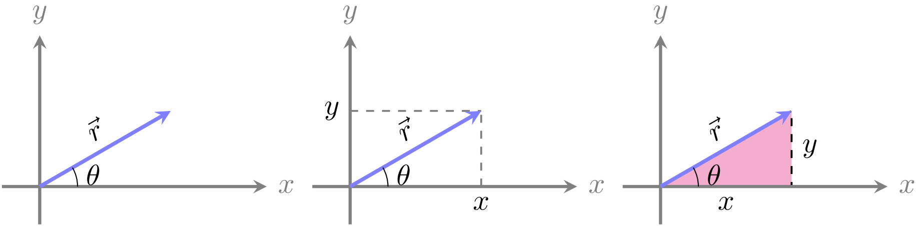
$$\begin{aligned}\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=&\,\hat{i}B_x(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{i}C_x(\vec{A}\cdot\vec{B})\\&+\hat{j}B_y(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{j}C_y(\vec{A}\cdot\vec{B})\\&+\hat{k}B_z(\vec{A}\cdot\vec{C})-\hat{k}C_z(\vec{A}\cdot\vec{B})\end{aligned}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\hat{i}B_x+\hat{j}B_y+\hat{k}B_z)(\vec{A}\cdot\vec{C})-(\hat{i}C_x+\hat{j}C_y+\hat{k}C_z)(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

$$\begin{aligned}\vec{B}&=\hat{i}B_x+\hat{j}B_y+\hat{k}B_z\\\vec{C}&=\hat{i}C_x+\hat{j}C_y+\hat{k}C_z\end{aligned}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

مسئله ۱- مطابق شکل بردار جابجایی $\vec{r}$ در صفحه‌ی xy دارای اندازه‌ی $15\ \mathrm{m}$ و جهت $\theta = 30^\circ$ است. الف) مولفه‌ی x و ب) مولفه‌ی y آنرا بدست آورید.



$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

مسئله ۲– الف) اگر $\vec{A} = (4\ \mathrm{m})\hat{i} + (3\ \mathrm{m})\hat{j}$ و $\vec{B} = (13\ \mathrm{m})\hat{i} + (7\ \mathrm{m})\hat{j}$ باشد. $\vec{A} + \vec{B}$ را بر حسب بردارهای یکه بدست آورید. ب) اندازه و ج) جهت $\vec{A} + \vec{B}$ را بدست آورید.

$$\vec{A} = (4\ \mathrm{m})\hat{i} + (3\ \mathrm{m})\hat{j}$$
$$\vec{B} = (13\ \mathrm{m})\hat{i} + (7\ \mathrm{m})\hat{j}$$

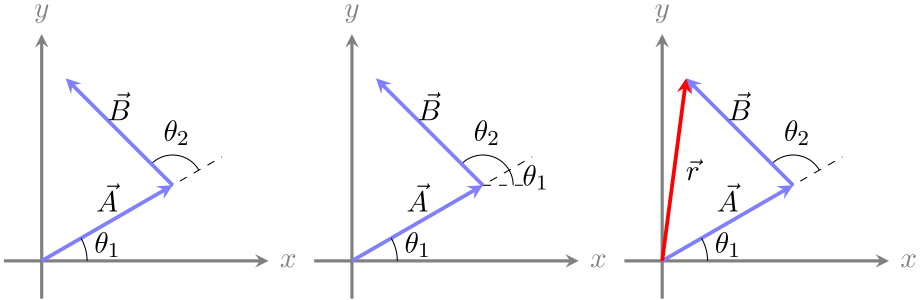
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = (17\ \mathrm{m})\hat{i} + (10\ \mathrm{m})\hat{j}$$

$$\boxed{\text{اندازه} : \ |\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}} \Rightarrow |\vec{C}| = \sqrt{17^2 + 10^2}\ \mathrm{m}$$

$$\boxed{\text{جهت} : \ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right)} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{10}{17}\right)\ \text{رادیان}$$

$$\boxed{\text{بردار یکه} : \ \hat{C} = \frac{\vec{C}}{|\vec{C}|} = \frac{C_x\hat{i} + C_y\hat{j}}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}} \Rightarrow \hat{C} = \frac{17}{\sqrt{17^2 + 10^2}}\hat{i} + \frac{10}{\sqrt{17^2 + 10^2}}\hat{j}$$

مسئله ۳- درشکل زیر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دارای اندازه مساوی $10\ \mathrm{m}$ و زاویه‌ی $\theta_1 = 30°$ و $\theta_2 = 105°$ هستند. مولفه‌ی الف) x ب) y بردار برآیند آنها $\vec{r}$ را بدست آورید. ج) اندازه و د) جهت $\vec{r}$ را نسبت به جهت مثبت محور x بدست آورید.

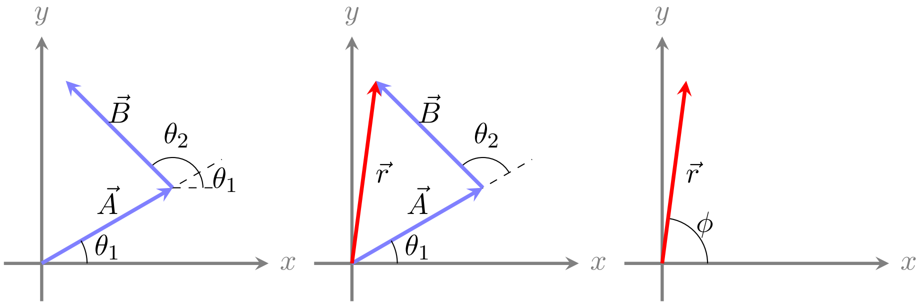


$$\vec{A} = A\cos\theta_1\hat{i} + A\sin\theta_1\hat{j}$$

$$\vec{B} = B\cos(\theta_1+\theta_2)\hat{i} + B\sin(\theta_1+\theta_2)\hat{j}$$

$$A = B$$

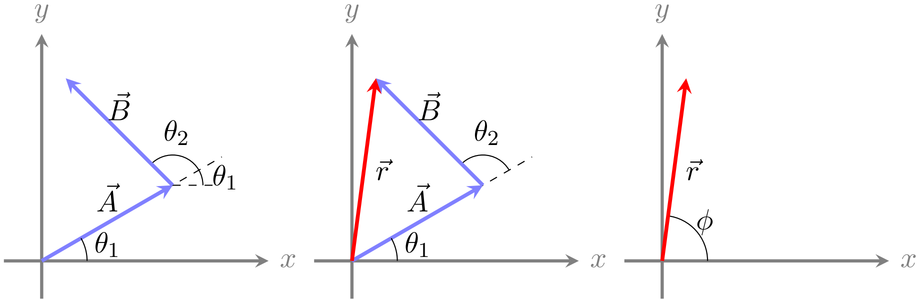
مسئله ۳- درشکل زیر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دارای اندازه مساوی $10\ \mathrm{m}$ و زاویه‌ی $\theta_1 = 30°$ و $\theta_2 = 105°$ هستند. مولفه‌ی الف) x ب) y بردار برآیند آنها $\vec{r}$ را بدست آورید. ج) اندازه و د) جهت $\vec{r}$ را نسبت به جهت مثبت محور x بدست آورید.



$$\vec{r} = \vec{A} + \vec{B} = A[\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]\hat{i} + A[\sin\theta_1 + \sin(\theta_1 + \theta_2)]\hat{j}$$

جهت : $\phi = \tan^{-1}[(\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2))/(\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2))]$

مسئله ۳– درشکل زیر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ دارای اندازه مساوی $10\ \mathrm{m}$ و زاویه‌ی $\theta_1 = 30^\circ$ و $\theta_2 = 105^\circ$ هستند. مولفه‌ی الف) x ب) y بردار برآیند آنها $\vec{r}$ را بدست آورید. ج) اندازه و د) جهت $\vec{r}$ را نسبت به جهت مثبت محور x بدست آورید.



$$\vec{r} = \vec{A} + \vec{B} = A[\cos\theta_1 + \cos(\theta_1+\theta_2)]\hat{i} + A[\sin\theta_1 + \sin(\theta_1+\theta_2)]\hat{j}$$

اندازه : $r = |\vec{r}| = A\sqrt{[\cos\theta_1 + \cos(\theta_1+\theta_2)]^2 + [\sin\theta_1 + \sin(\theta_1+\theta_2)]^2}$

بردارها

مسئله ۴– اگر بردار $\vec{B}$ با بردار $\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ جمع شود. بردار حاصل در جهت مثبت محور y و اندازه‌ی $\vec{C}$ است. اندازه‌ی بردار $\vec{B}$ را بدست آورید.

$$\vec{C} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$
$$C = |\vec{C}| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\vec{B} + \vec{C} = C\hat{j}$$

$$\vec{B} + (3\hat{i} + 4\hat{j}) = 5\hat{j}$$
$$\vec{B} = -3\hat{i} + \hat{j}$$

$$B = |\vec{B}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

مسئله ۵- بردار $\vec{A}$ در راستای محور x قرار دارد و با بردار $\vec{B}$ به اندازه‌ی $7\ \mathrm{m}$ جمع می‌شود. بردار حاصل جمع در جهت مثبت محور y قرار دارد و اندازه‌ی آن سه برابر بردار $\vec{A}$ است. اندازه‌ی بردار $\vec{A}$ را بدست آورید.

$$B = |\vec{B}| = 7$$

$$\begin{cases} \vec{A} = A\hat{i} \\ \vec{A} + \vec{B} = 3A\hat{j} \end{cases} \Rightarrow A\hat{i} + \vec{B} = 3A\hat{j}$$

$$\vec{B} = A\hat{i} + 3A\hat{j} \Rightarrow \vec{B} = A(\hat{i} + 3\hat{j})$$

$$B = |\vec{B}| = A\sqrt{1+9}$$

$$7 = A\sqrt{10} \Rightarrow A = \frac{7\sqrt{10}}{10}$$

مسئله ۶– زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\vec{B} = 2\hat{i} + 1\hat{j} + 3\hat{k}$ را بدست آورید.

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\vec{B} = 2\hat{i} + 1\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 6 + 3 + 9$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{27}$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{18}{\sqrt{27}\sqrt{14}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{18}{\sqrt{27}\sqrt{14}}\right) \text{ رادیان}$$

مسئله ۷– برای سه بردار $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ ، $\vec{B} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ و $\vec{C} = 7\hat{i} - 8\hat{j}$ حاصل را $3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B})$ بدست آورید.

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$$

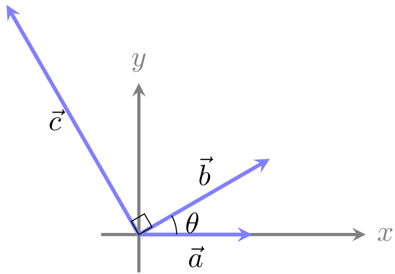
$$\vec{B} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{C} = 7\hat{i} - 8\hat{j}$$

$$3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} 3C_x & 3C_y & 3C_z \\ 2A_x & 2A_y & 2A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & -24 & 0 \\ 4 & 6 & -8 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$3\vec{C} \cdot (2\vec{A} \times \vec{B}) = 6\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 6 \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 7 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

مسئله ۸– بزرگی سه بردار نشان داده شده در شکل، $a = 3\ \mathrm{m}$ ، $b = 4\ \mathrm{m}$ و $c = 10\ \mathrm{m}$ و زاویه $\theta = 30^\circ$ است. مولفه‌های x و y هر سه بردار را بدست آورید. p و q را بگونه‌ای بدست آورید که رابطه‌ی $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ برقرار باشد.



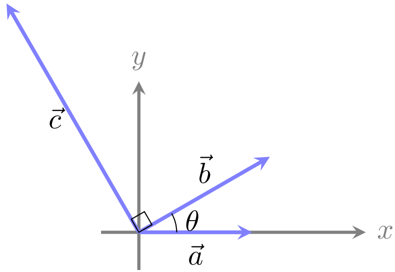
$$\vec{a} = a\hat{i}$$

$$\vec{b} = b\cos(\theta)\hat{i} + b\sin(\theta)\hat{j}$$

$$\vec{c} = c\cos(\theta + \pi/2)\hat{i} + c\sin(\theta + \pi/2)\hat{j} = -c\sin(\theta)\hat{i} + c\cos(\theta)\hat{j}$$

بردارها

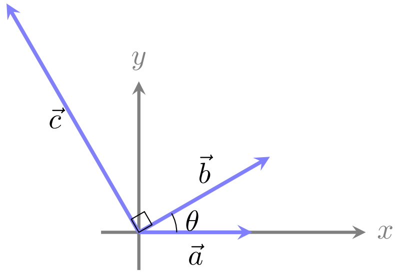
مسئله ۸– بزرگی سه بردار نشان داده شده در شکل، $a = 3\ \mathrm{m}$ ، $b = 4\ \mathrm{m}$ و $c = 10\ \mathrm{m}$ و زاویه $\theta = 30^\circ$ است. مولفه‌های x و y هر سه بردار را بدست آورید. p و q را بگونه‌ای بدست آورید که رابطه‌ی $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ برقرار باشد.



$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$$

$$-c\sin\theta\hat{i} + c\cos\theta\hat{j} = pa\hat{i} + qb\cos\theta\hat{i} + qb\sin\theta\hat{j}$$

مسئله ۸– بزرگی سه بردار نشان داده شده در شکل، $a = 3\ \mathrm{m}$ ، $b = 4\ \mathrm{m}$ و $c = 10\ \mathrm{m}$ و زاویه $\theta = 30^\circ$ است. مولفه‌های x و y هر سه بردار را بدست آورید. p و q را بگونه‌ای بدست آورید که رابطه‌ی $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ برقرار باشد.



$$\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b} : \begin{cases} -c\sin\theta = pa + qb\cos\theta \\ c\cos\theta = qb\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -c/a\sin\theta \\ q = c\cos\theta/b\sin\theta \end{cases}$$

مسئله ۹- در رابطه‌ی $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ، مقادیر $q = 2$، $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ و $\vec{F} = 4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k}$ داده شده‌اند. اگر $B_x = B_y$ باشد، بردار $\vec{B}$ را بدست آورید.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = 2(2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}) \times \vec{B}$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = 2(2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$B_x = B_y = B$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = (4\hat{i} + 8\hat{j} + 12\hat{k}) \times (B\hat{i} + B\hat{j} + B_z\hat{k})$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 8 & 12 \\ B & B & B_z \end{vmatrix}$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = (8B_z - 12B)\hat{i} + (12B - 4B_z)\hat{j} + (-4B)\hat{k}$$

مسئله ۹- در رابطه‌ی $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ ، مقادیر $q = 2$، $\vec{v} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ و $\vec{F} = 4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k}$ داده شده‌اند. اگر $B_x = B_y$ باشد، بردار $\vec{B}$ را بدست آورید.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$4\hat{i} - 20\hat{j} + 12\hat{k} = (8B_z - 12B)\hat{i} + (12B - 4B_z)\hat{j} + (-4B)\hat{k}$$

$$\begin{cases} 8B_z - 12B = 4 \\ 12B - 4B_z = -20 \\ -4B = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8B_z + 36 = 4 \\ -36 - 4B_z = -20 \\ B = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_z = -4 \\ B = -3 \end{cases}$$

مسئله ۱۰- زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$ و $\vec{B} = 0.5\hat{i} + 4.5\hat{j}$ را بدست آورید.
دو بردار $\vec{C}$ و $\vec{D}$ به اندازه 5 در صفحه‌ی xy و عمود بر بردار $\vec{A}$ هستند. بردار $\vec{C}$ دارای مولفه‌ی x مثبت و بردار $\vec{D}$ دارای مولفه‌ی x منفی است. مولفه‌های بردار $\vec{C}$ و مولفه‌های بردار $\vec{D}$ را بدست آورید.

$$\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$$
$$\vec{B} = 0.5\hat{i} + 4.5\hat{j}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = 0.8 + 14.4 = 15.2$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 3.58, \quad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 4.53$$

$$\cos\theta = \frac{4.53}{20.5} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4.53}{20.5}\right) \text{ رادیان}$$

مسئله ۱۰- زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$ و $\vec{B} = 0.5\hat{i} + 4.5\hat{j}$ را بدست آورید.
دو بردار $\vec{C}$ و $\vec{D}$ به اندازه 5 در صفحه‌ی xy و عمود بر بردار $\vec{A}$ هستند. بردار $\vec{C}$ دارای مولفه‌ی x مثبت و بردار $\vec{D}$ دارای مولفه‌ی x منفی است. مولفه‌های بردار $\vec{C}$ و مولفه‌های بردار $\vec{D}$ را بدست آورید.

$$\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j}, \quad C = |\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 5$$

$$\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j}, \quad D = |\vec{D}| = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = 5$$

$$\begin{cases} \vec{C} \cdot \vec{A} = 0 \\ \vec{D} \cdot \vec{A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{C} = \vec{D} \ \text{يا} \ \boxed{\vec{C} = -\vec{D}}$$

$$\begin{cases} 1.6D_x + 3.2D_y = 0 \\ D_x^2 + D_y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_x = -2D_y \\ D_x^2 + D_y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_x = -2\sqrt{5} \\ D_y = \sqrt{5} \end{cases}$$

مسئله ۱۰- زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$ و $\vec{B} = 0.5\hat{i} + 4.5\hat{j}$ را بدست آورید.
دو بردار $\vec{C}$ و $\vec{D}$ به اندازه 5 در صفحه‌ی xy و عمود بر بردار $\vec{A}$ هستند. بردار $\vec{C}$ دارای مولفه‌ی x مثبت و بردار $\vec{D}$ دارای مولفه‌ی x منفی است. مولفه‌های بردار $\vec{C}$ و مولفه‌های بردار $\vec{D}$ را بدست آورید.

$$\vec{A} = 1.6\hat{i} + 3.2\hat{j}$$

$$\vec{C} = C_x\hat{i} + C_y\hat{j}, \quad C = |\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = 5$$

$$\vec{D} = D_x\hat{i} + D_y\hat{j}, \quad D = |\vec{D}| = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = 5$$

$$\begin{cases} \vec{C} \cdot \vec{A} = 0 \\ \vec{D} \cdot \vec{A} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{C} = -\vec{D}$$

$$\vec{D} = -2\sqrt{5}\hat{i} + \sqrt{5}\hat{j} \Rightarrow \vec{C} = 2\sqrt{5}\hat{i} - \sqrt{5}\hat{j}$$

مسئله ۱۱– اگر $A = 3.9$ و $B = 2.7$ و زاویه‌ی بین دو بردار 63° باشد، اندازه‌ی $\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})$ را بدست آورید.

$$\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A} - A^2\vec{B}$$

$$[\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})]\cdot[\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})] = [(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A} - A^2\vec{B}]\cdot[(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A} - A^2\vec{B}]$$

$$|\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})|^2 = -A^2(\vec{A}\cdot\vec{B})^2 + A^4B^2$$

$$|\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})| = A\sqrt{A^2B^2 - (\vec{A}\cdot\vec{B})^2}$$

$$|\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{B})| = A\sqrt{A^2B^2 - A^2B^2\cos^2 63^\circ} = A^2B|\sin 63^\circ|$$

مسئله ۱۲- اگر $\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ ، $\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ باشند. مولفه‌های بردار $\vec{r} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ را بدست آورید. زاویه‌ی $\vec{r}$ را با جهت مثبت محور z را بدست آورید. مولفه‌ی $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$ چقدر است؟ مولفه‌ی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟

$$\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$$
$$\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$
$$\vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{r} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C} = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}, \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{195}$$

زاویه‌ی $\vec{r}$ را با جهت مثبت محور z:

$$\vec{r} \cdot \hat{k} = r\cos\gamma, \quad \gamma = \angle(\vec{r}, \hat{k}) \Rightarrow \cos\gamma = \frac{-7}{\sqrt{195}}$$

مولفه‌ی $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$:

$$\vec{A} \cdot \hat{B} = (5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}) \cdot \frac{-2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{17}} = -\frac{20}{\sqrt{17}}$$

مسئله ۱۲- اگر $\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ ، $\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ و $\vec{C} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ باشند. مولههای بردار $\vec{r} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$ را بدست آورید. زاویهی $\vec{r}$ را با جهت مثبت محور z را بدست آورید. مولفهی $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$ چقدر است؟ مولفهی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحهی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟

$$\vec{A} = 5\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$\vec{B} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

مولفهی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحهی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$\vec{A} \times \vec{B}$: بردار عمود بر صفحهی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B})$: بردار عمود بر صفحهی دو بردار $\vec{A} \times \vec{B}$ و $\vec{B}$

$$\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = B^2\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{B}$$

مسئله ۱۲– اگر $\vec{A}=5\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ ، $\vec{B}=-2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ و $\vec{C}=4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ باشند. مولفه‌های بردار $\vec{r}=\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}$ را بدست آورید. زاویه‌ی $\vec{r}$ را با جهت مثبت محور z را بدست آورید. مولفه‌ی $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$ چقدر است؟ مولفه‌ی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟

$$\vec{A}=5\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$$

$$\vec{B}=-2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$$

مولفه‌ی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$\vec{A}\times\vec{B}$: بردار عمود بر صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$e=\dfrac{\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{B})}{|\vec{B}\times(\vec{A}\times\vec{B})|}$: بردار یکه عمود بر صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}\times\vec{B}$ و $\vec{B}$

$$\hat{e}=\frac{B^2\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{|B^2\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}|}=\frac{B^2\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{B}}{B\sqrt{A^2B^2-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2}}$$

مسئله ۱۲- اگر $\vec{A}=5\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ ، $\vec{B}=-2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ و $\vec{C}=4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ باشند. مولههای بردار $\vec{r}=\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}$ را بدست آورید. زاویه‌ی $\vec{r}$ را با جهت مثبت محور z را بدست آورید. مولفه‌ی $\vec{A}$ در راستای $\vec{B}$ چقدر است؟ مولفه‌ی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چقدر است؟

$$\vec{A}=5\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$$

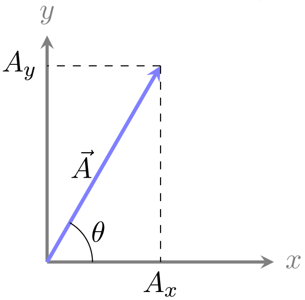
$$\vec{B}=-2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$$

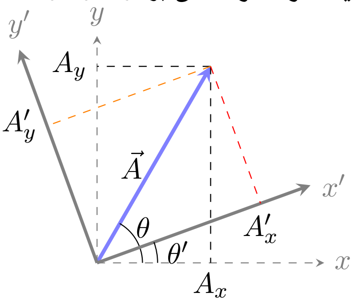
مولفه‌ی $\vec{A}$ عمود بر جهت $\vec{B}$ در صفحه‌ی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$$\hat{e}\cdot\vec{A}=\frac{B^2A^2-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2}{B\sqrt{A^2B^2-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2}}=\frac{\sqrt{B^2A^2-(\vec{A}\cdot\vec{B})^2}}{B}$$

$$\hat{e}\cdot\vec{A}=\sqrt{A^2-(\vec{A}\cdot\hat{B})^2}$$

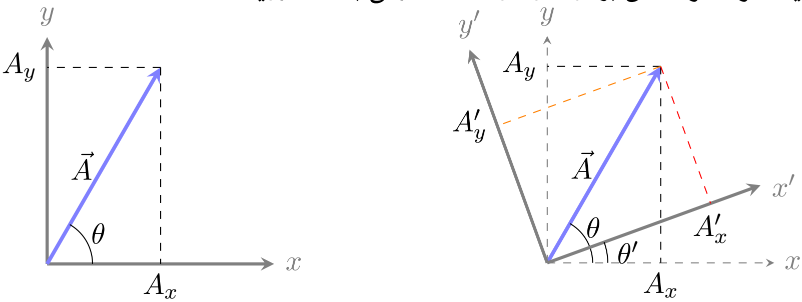
مسئله ۱۳– در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ به اندازه‌ی 2 متر و زاویه‌ی $\theta = 60^\circ$ قرار دارد. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را بدست آورید. اگر دستگاه دومی پاد ساعتگرد نسبت به دستگاه اولی به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta' = 30^\circ$ چرخیده شود. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را در دستگاه دومی بدست آورید.





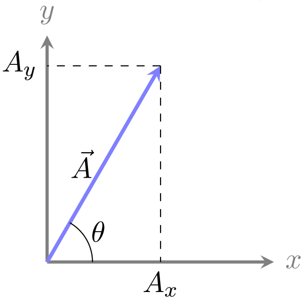
$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} A'_x = A\cos(\theta-\theta') \\ A'_y = A\sin(\theta-\theta') \end{cases}$$

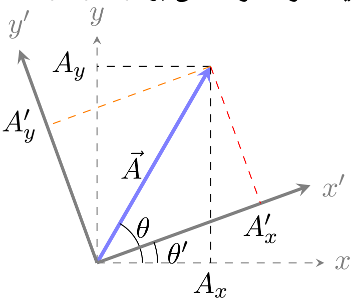
مسئله ۱۳– در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ به اندازه‌ی 2 متر و زاویه‌ی $\theta = 60^\circ$ قرار دارد. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را بدست آورید. اگر دستگاه دومی پاد ساعتگرد نسبت به دستگاه اولی به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta' = 30^\circ$ چرخیده شود. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را در دستگاه دومی بدست آورید.



$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases} , \quad \begin{cases} A'_x = A\cos(\theta-\theta') = A\cos\theta\cos\theta' + A\sin\theta\sin\theta' \\ A'_y = A\sin(\theta-\theta') = A\sin\theta\cos\theta' - A\cos\theta\sin\theta' \end{cases}$$

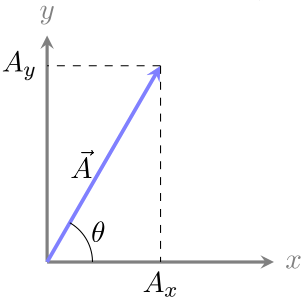
مسئله ۱۳– در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ به اندازه‌ی 2 متر و زاویه‌ی $\theta = 60°$ قرار دارد. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را بدست آورید. اگر دستگاه دومی پاد ساعتگرد نسبت به دستگاه اولی به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta' = 30°$ چرخیده شود. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را در دستگاه دومی بدست آورید.

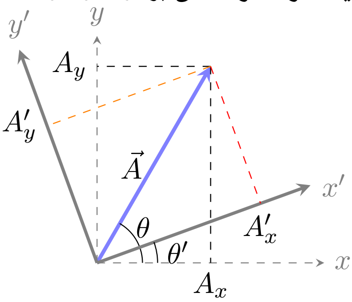




$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases} , \quad \begin{cases} A'_x = A_x\cos\theta' + A_y\sin\theta' \\ A'_y = A_y\cos\theta' - A_x\sin\theta' \end{cases}$$

مسئله ۱۳– در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ به اندازه‌ی 2 متر و زاویه‌ی $\theta = 60^\circ$ قرار دارد. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را بدست آورید. اگر دستگاه دومی پاد ساعتگرد نسبت به دستگاه اولی به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta' = 30^\circ$ چرخیده شود. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را در دستگاه دومی بدست آورید.

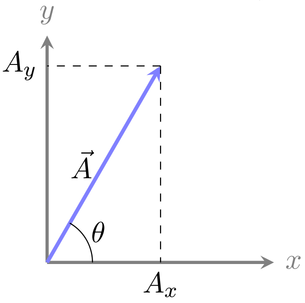


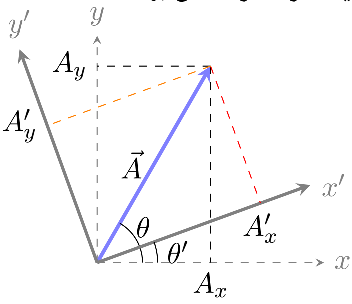


$$\begin{cases} A'_x = A_x \cos\theta' + A_y \sin\theta' \\ A'_y = -A_x \sin\theta' + A_y \cos\theta' \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

بردارها

مسئله ۱۳– در شکل زیر، بردار $\vec{a}$ به اندازه‌ی 2 متر و زاویه‌ی $\theta = 60^\circ$ قرار دارد. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را بدست آورید. اگر دستگاه دومی پاد ساعتگرد نسبت به دستگاه اولی به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta' = 30^\circ$ چرخیده شود. مولفه‌های بردار $\vec{a}$ را در دستگاه دومی بدست آورید.





$$R'_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta' & \sin\theta' \\ -\sin\theta' & \cos\theta'\end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix}A'_x\\ A'_y\end{bmatrix} = R_{\theta'}\begin{bmatrix}A_x\\ A_y\end{bmatrix}$$