فیزیک ۱

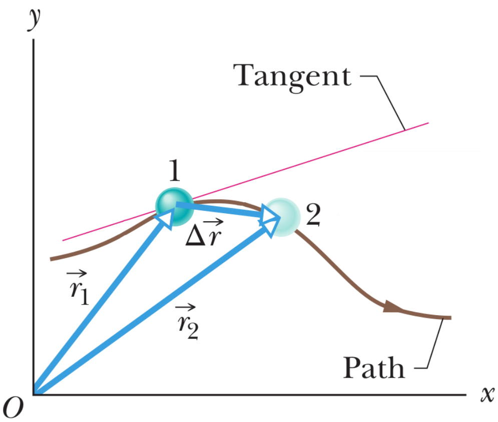
حرکت در دوبعد و سه‌بعد

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

حرکت در دوبعد و سه‌بعد



بردار جابجایی:

$$1:\ t_1,\quad \vec{r}_1$$

$$2:\ t_2,\quad \vec{r}_2$$

ذره در بازه‌ی زمانی

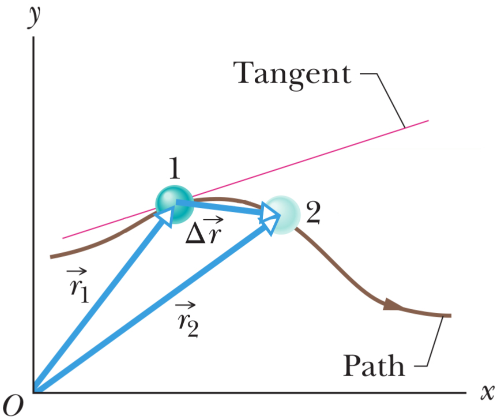
$$\Delta t = t_2 - t_1$$

جابجایی بصورت

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

دارد.

حرکت در دوبعد و سه‌بعد



بردار جابجایی:

$$1:\ t_1, \quad \vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$$

$$2:\ t_2, \quad \vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$$

ذره در بازه‌ی زمانی

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

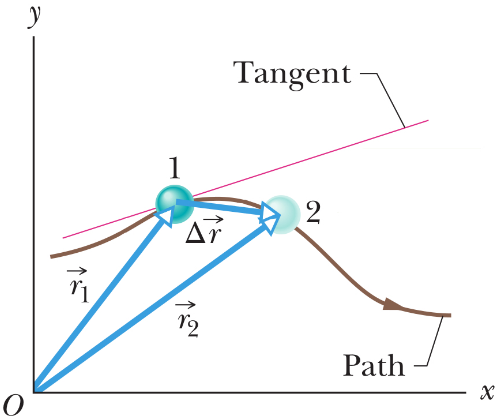
جابجایی بصورت

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

حرکت در دوبعد و سه‌بعد



سرعت متوسط:

$$\vec{v}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

سرعت لحظه‌ای:

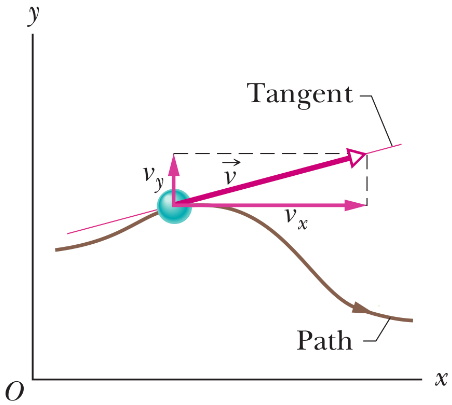
$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \vec{v}_{\text{متوسط}}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

حرکت در دوبعد و سه‌بعد

سرعت لحظه‌ای:



$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$v_x = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

بردار $\vec{v}$ مماس بر مسیر حرکت است.

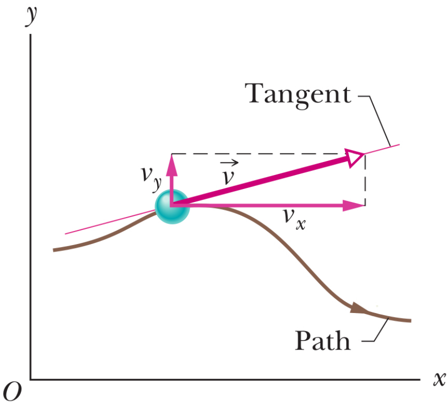
اندازه و جهت سرعت

$$v = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$+x$ زاویه‌ی سرعت با : $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$, $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v} = \hat{i}\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}} + \hat{j}\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$

حرکت در دوبعد و سه‌بعد

سرعت لحظه‌ای:



$$\vec{v} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$v_x = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$v_y = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

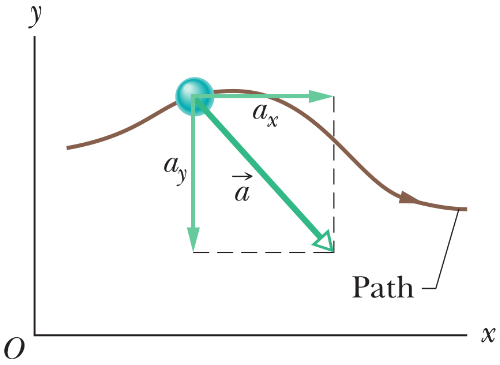
$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$$

بردار $\vec{v}$ مماس بر مسیر حرکت است.

سرعت لحظه‌ای در سه‌بعد

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}, \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}$$

حرکت در دوبعد و سه‌بعد



ذره در بازه‌ی زمانی

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

تغییر سرعتی بصورت

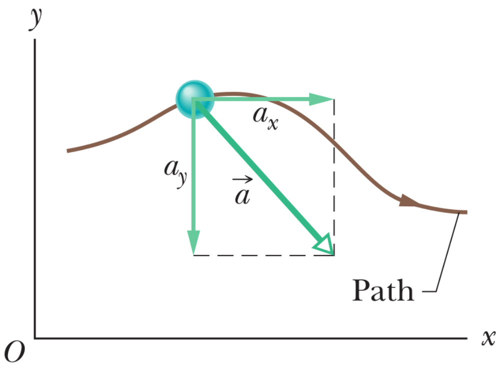
$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

$$\Delta \vec{v} = \Delta v_x \hat{i} + \Delta v_y \hat{j}$$

$$\Delta \vec{v} = (v_{x_2} - v_{x_1})\hat{i} + (v_{y_2} - v_{y_1})\hat{j}$$

دارد.

حرکت در دوبعد و سه‌بعد



شتاب متوسط:

$$\vec{a}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

شتاب لحظه‌ای:

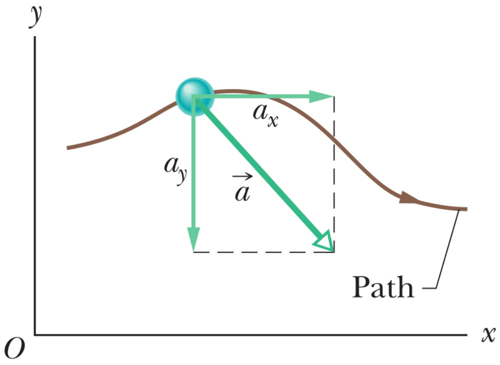
$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \vec{a}_{\text{متوسط}}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

حرکت در دوبعد و سه‌بعد

شتاب لحظه‌ای:



$$\vec{a} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$a_x = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$a_y = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

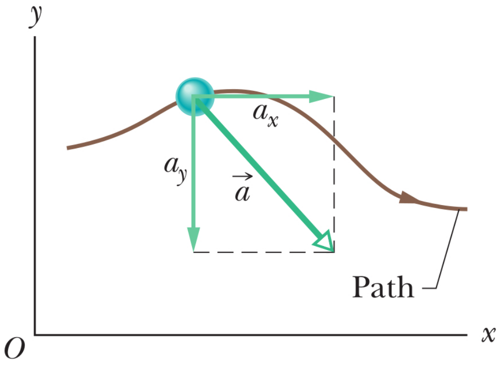
اندازه و جهت شتاب

$$a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$+x$ زاویه‌ی شتاب با : $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$, $\quad \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} = \hat{i}\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}} + \hat{j}\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2}}$

حرکت در دوبعد و سه‌بعد

شتاب لحظه‌ای:



$$\vec{a} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

$$a_x = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$$

$$a_y = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j}$$

شتاب لحظه‌ای در سه‌بعد

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\hat{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\hat{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}$$

مسئله–۱: چهارچرخه‌ای بر روی صفحه‌ی xy طوری کشیده می‌شود که مولفه‌های شتاب آن $a_x = 4\ \mathrm{m/s^2}$ و $a_y = -2\ \mathrm{m/s^2}$ است. مولفه سرعت اولیه آن $v_{0x} = 8\ \mathrm{m/s}$ و $v_{0y} = 12\ \mathrm{m/s}$ است. بر حسب بردار یکه، سرعت چهارچرخه را وقتی بدست آورید که به بیشترین مقدار مختصه‌ی y می‌رسد.

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = 4\hat{i} - 2\hat{j}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 4 \Rightarrow \mathrm{d}v_x = 4\mathrm{d}t \Rightarrow \int_8^{v_x} \mathrm{d}v_x = 4\int_0^t \mathrm{d}t \Rightarrow v_x = 8 + 4t$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -2 \Rightarrow \mathrm{d}v_y = -2\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{12}^{v_y} \mathrm{d}v_y = -2\int_0^t \mathrm{d}t \Rightarrow v_y = 12 - 2t$$

بیشترین مقدار مختصه‌ی y : $v_y = 0 \Rightarrow t = 6\ \mathrm{s}$

$$\vec{v} = v_x(t=6)\hat{i} = (32\ \mathrm{m/s})\hat{i}$$

مسئله–۲: شتاب ذره‌ی متحرکی بر روی صفحه افقی xy بصورت $\vec{a} = 3t\hat{i} + 4t\hat{j}$ است. a بر حسب متر بر مجذور ثانیه و t بر حسب ثانیه است. در لحظه‌ی $t = 0$ بردار مکان ذره $\vec{r} = (20\text{ m})\hat{i} + (40\text{ m})\hat{j}$ بردار سرعت اولیه آن $\vec{v} = (5\text{ m/s})\hat{i} + (2\text{ m/s})\hat{j}$ است. در لحظه‌ی $t = 4\text{ s}$ الف) بردار مکان ذره را بر حسب بردارهای یکه بدست آورید. ب) زاویه‌ی بین جهت حرکت و جهت مثبت محور x چقدر است؟

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = 3t\hat{i} + 4t\hat{j}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 3t \Rightarrow \mathrm{d}v_x = 3t\mathrm{d}t \Rightarrow \int_5^{v_x} \mathrm{d}v_x = 3\int_0^t t\mathrm{d}t \Rightarrow v_x = 5 + \frac{3}{2}t^2$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 4t \Rightarrow \mathrm{d}v_y = 4t\mathrm{d}t \Rightarrow \int_2^{v_y} \mathrm{d}v_y = 4\int_0^t t\mathrm{d}t \Rightarrow v_y = 2 + 2t^2$$

$$t = 4\text{ s}: \quad \tan\phi = \frac{v_y(t=4)}{v_x(t=4)} = \frac{34}{29} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{34}{29}\right)$$

مسئله–۲:

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = (5 + \frac{3}{2}t^2)\hat{i} + (2 + 2t^2)\hat{j}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (5 + \frac{3}{2}t^2) \Rightarrow \mathrm{d}x = (5 + \frac{3}{2}t^2)\mathrm{d}t$$

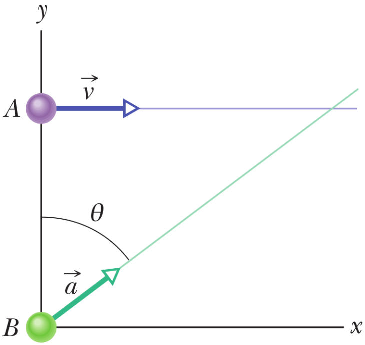
$$\int_{20}^{x} \mathrm{d}x = \int_{0}^{t} (5 + \frac{3}{2}t^2)\mathrm{d}t \Rightarrow x = 20 + 5t + \frac{1}{2}t^3$$

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (2 + 2t^2) \Rightarrow \mathrm{d}y = (2 + 2t^2)\mathrm{d}t$$

$$\int_{40}^{y} \mathrm{d}y = \int_{0}^{t} (2 + 2t^2)\mathrm{d}t \Rightarrow y = 40 + 2t + \frac{2}{3}t^3$$

$$\vec{r}(t = 4) = x(t = 4)\hat{i} + y(t = 4)\hat{j}$$

مسئله–۳: در شکل، ذره‌ی A در امتداد خط $y = 30\ \mathrm{m}$ با سرعت ثابت $\vec{v}$ به اندازه‌ی $3\ \mathrm{m/s}$ به موازات محور x حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که ذره‌ی A از محور y می گذرد، ذره‌ی B از مبدا با تندی اولیه صفر و شتاب ثابت $\vec{a}$ به بزرگی $0.4\ \mathrm{m/s^2}$ شروع به حرکت می‌کند. جهت حرکت ذره‌ی B با مثبت محور y چقدر باشد تا با A برخورد کند.



مسئله–۳:

$$\vec{v}_A = 3\hat{i}$$

$$\vec{r}_A = 3t\hat{i} + 30\hat{j}$$

$$\vec{a}_B = (0.4\sin\theta)\hat{i} + (0.4\cos\theta)\hat{j}$$

$$\vec{v}_B = \hat{i}(0.4\sin\theta)\int_0^t \mathrm{d}t + \hat{j}(0.4\cos\theta)\int_0^t \mathrm{d}t = (0.4t\sin\theta)\hat{i} + (0.4t\cos\theta)\hat{j}$$

$$\vec{r}_B = \hat{i}(0.4\sin\theta)\int_0^t t\mathrm{d}t + \hat{j}(0.4\cos\theta)\int_0^t t\mathrm{d}t = (0.2t^2\sin\theta)\hat{i} + (0.2t^2\cos\theta)\hat{j}$$

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B \Rightarrow \begin{cases} 0.2t^2\sin\theta = 3t & \text{۱} \\ 0.2t^2\cos\theta = 30 & \text{۲} \end{cases}$$

$$\text{۱} : \ 0.2t^2\sin\theta = 3t \Rightarrow t = \frac{15}{\sin\theta} \quad \text{۳}$$

مسئله-۳:

$$\vec{r}_A = 3t\hat{i} + 30\hat{j}$$

$$\vec{r}_B = (0.2t^2 \sin\theta)\hat{i} + (0.2t^2 \cos\theta)\hat{j}$$

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B \Rightarrow \begin{cases} 0.2t^2 \cos\theta = 30 \quad (۲) \\ t = 15/\sin\theta \quad (۳) \end{cases}$$

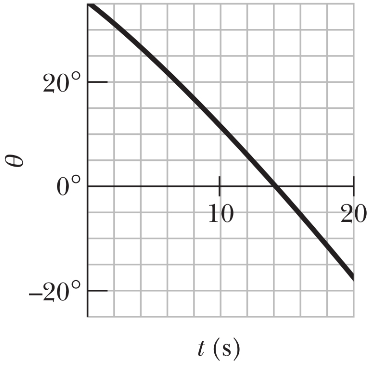
$$1.5\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} = 1 \Rightarrow 1.5\cos\theta = \sin^2\theta = (1-\cos^2\theta)$$

$$\cos^2\theta + 1.5\cos\theta - 1 = 0$$

$$\cos\theta = -2 \text{ غیرقابل قبول}, \quad \cos\theta = 1/2$$

$$\theta = 60^\circ$$

مسئله–۴: بردار مکان $\vec{r} = 5t\hat{i} + (et + ft^2)\hat{j}$، مکان ذره‌ای را برحسب زمان مشخص می‌کند. بردار $\vec{r}$ بر حسب متر، t بر حسب ثانیه و ضرایب e و f ثابت‌اند. شکل زاویه‌ی θ جهت حرکت ذره را بر حسب تابعی از زمان می‌دهد (θ نسبت به جهت مثبت محور x اندازه‌گیری شده است). ضرایب e و f را بدست آورید.



مسئله–۴:

$$\vec{r} = 5t\hat{i} + (et + ft^2)\hat{j}$$

برای بررسی جهت حرکت، بردار سرعت را از معادله حرکت بدست می‌آوریم

$$\vec{v} = 5\hat{i} + (e + 2ft)\hat{j}$$

جهت حرکت

$$\tan\theta = \frac{e + 2ft}{5} \Rightarrow e + 2ft = 5\tan\theta$$

طبق نمودار

$$\theta(t = 0) = 35^\circ : \quad e = 5\tan 35^\circ$$

و

$$\theta(t = 14) = 0^\circ : \quad e + 28f = 0 \Rightarrow f = -\frac{5}{28}\tan 35^\circ$$

مسئله–۵: باد ملایمی ریگ کوچکی را بر صفحه‌ی افقی xy با شتاب ثابت $\vec{a} = 5\ \mathrm{m/s^2}\hat{i} + 7\ \mathrm{m/s^2}\hat{j}$ حرکت می‌دهد. در لحظه‌ی $t = 0$ سرعت ریگ $(4\ \mathrm{m/s})\hat{i}$ است. الف) بزرگی و ب) زاویه‌ی سرعت ریگ را وقتی بدست آوردید که $12\ \mathrm{m}$ به موازات محور x جابجا می‌شود.

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 7\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 5 \Rightarrow \mathrm{d}v_x = 5\mathrm{d}t \Rightarrow \int_4^{v_x} \mathrm{d}v_x = 5\int_0^t \mathrm{d}t \Rightarrow v_x = 4 + 5t$$
$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 7 \Rightarrow \mathrm{d}v_y = 7\mathrm{d}t \Rightarrow \int_0^{v_y} \mathrm{d}v_y = 7\int_0^t \mathrm{d}t \Rightarrow v_y = 7t$$

$$\vec{v} = (4 + 5t)\hat{i} + 7t\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (4+5t) \Rightarrow \mathrm{d}x = (4+5t)\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t (4+5t)\mathrm{d}t \Rightarrow \Delta x = 4t + \frac{5}{2}t^2$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 7t \Rightarrow \mathrm{d}y = 7t\mathrm{d}t \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \mathrm{d}y = 7t\int_0^t \mathrm{d}t \Rightarrow \Delta y = \frac{7}{2}t^2$$

مسئله–۵:

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 7\hat{j}$$

$$\vec{v} = (4 + 5t)\hat{i} + 7t\hat{j}$$

$$\Delta\vec{r} = (4t + \frac{5}{2}t^2)\hat{i} + (\frac{7}{2}t^2)\hat{j}$$

فرض مسئله

$$\Delta x = 12 : \; 4t + \frac{5}{2}t^2 = 12$$

$$t_1 = -\frac{\sqrt{136} + 4}{5} \text{ غیرقابل قبول}, \quad t_2 = \frac{\sqrt{136} - 4}{5} = 1.53 \text{ s}$$

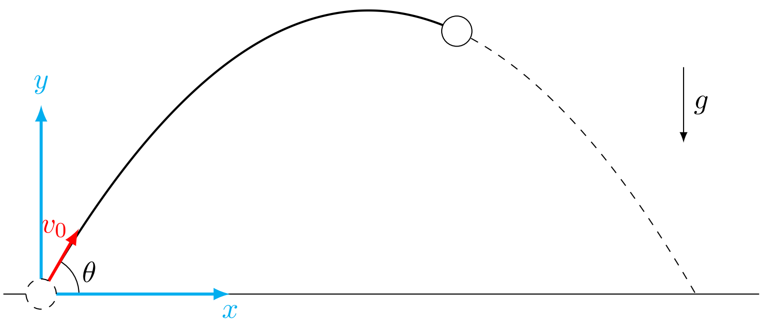
$$v = \sqrt{(4 + 5t_2)^2 + (7t_2)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{7t_2}{4 + 5t_2}$$

حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مکان و سرعت اولیه حرکت پرتابه در دستگاه مختصات دوبعدی:

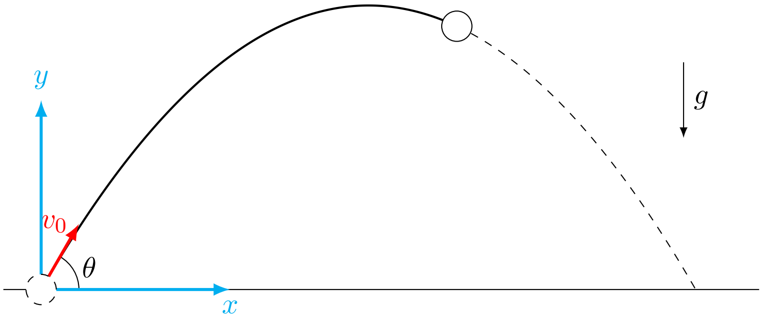
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} , \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases} , \begin{cases} a_x = 0 : \text{حرکت با سرعت ثابت} \\ a_y = -g : \text{حرکت با شتاب ثابت} \end{cases}$$



حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

معادله مکان حرکت پرتابه در دستگاه مختصات دوبعدی:

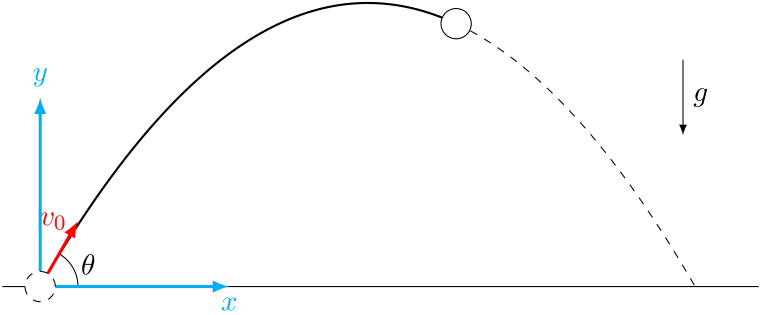
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t : \text{معادله خطی بر حسب زمان} \\ y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t : \text{درجه دو بر حسب زمان} \end{cases}$$



حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

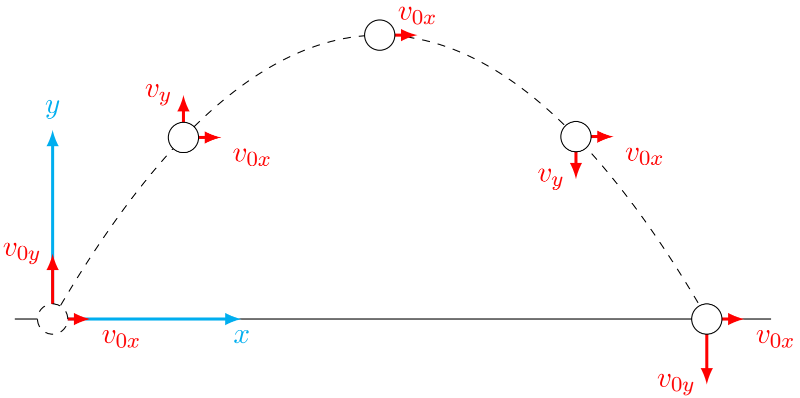
معادله مکان حرکت پرتابه در دستگاه مختصات دوبعدی:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\theta \\ v_{0y} = v_0 \sin\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} x = v_0 t \cos\theta \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$



معادله سرعت حرکت پرتابه بر حسب زمان در دستگاه مختصات دوبعدی:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\theta \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases} , \begin{cases} v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0 \cos\theta = v_{0x} = \text{ثابت} \\ v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -gt + v_0 \sin\theta = \text{تابع خطی از زمان} \end{cases}$$



حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

معادله سرعت حرکت پرتابه بر حسب زمان

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta$$

اندازه بردار سرعت در هر لحظه

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\theta + (-gt + v_0 \sin\theta)^2}$$

بردار سرعت در هر لحظه مماس بر مسیر حرکت در صفحه‌ی xy است
زاویه بردار سرعت با $+x$ در هر لحظه

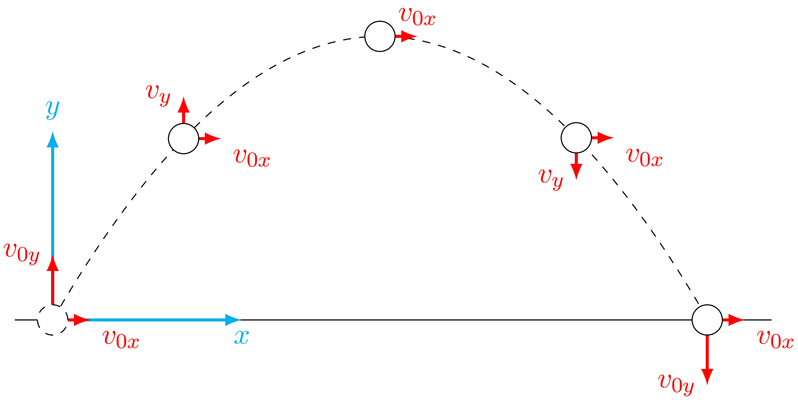
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-gt + v_0 \sin\theta}{v_0 \cos\theta}\right)$$

حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

زمان اوج حرکت پرتابه :

$$t = t_{\text{اوج}} : \; v_y(t = t_{\text{اوج}}) = 0 : \; -gt_{\text{اوج}} + v_0 \sin\theta = 0 \Rightarrow t_{\text{اوج}} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

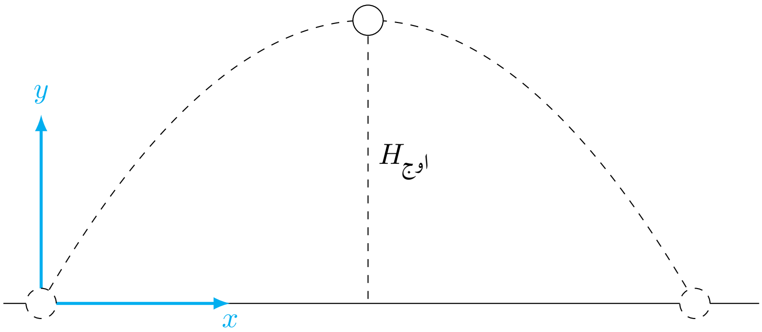


حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

ارتفاع اوج حرکت پرتابه :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta$$

$$H_{\text{اوج}} = y(t = t_{\text{اوج}}) = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

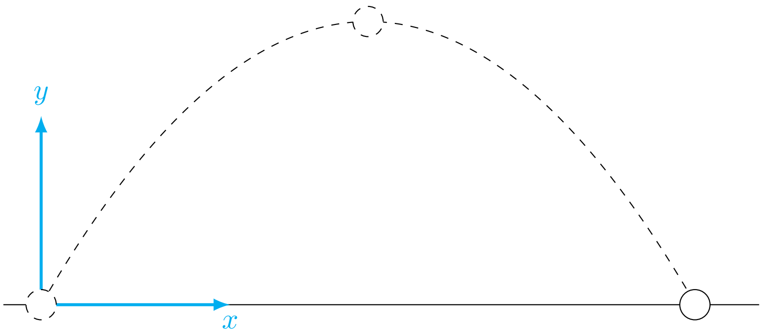


حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

زمان کل پرواز حرکت پرتابه :

<u>روش اول:</u>

$$t_{\text{کل}} = 2t_{\text{اوج}} \Rightarrow t_{\text{کل}} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$



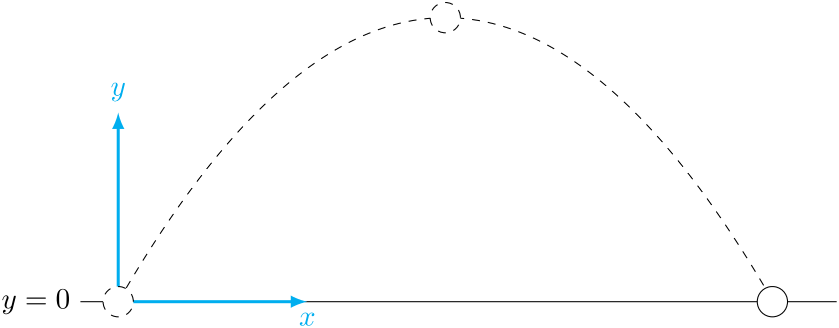
حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

زمان کل پرواز حرکت پرتابه :

روش دوم:

$$y = 0 : -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta = 0$$

$$t\left(-\frac{1}{2}gt + v_0 \sin\theta\right) = 0 \Rightarrow t = 0, \quad t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

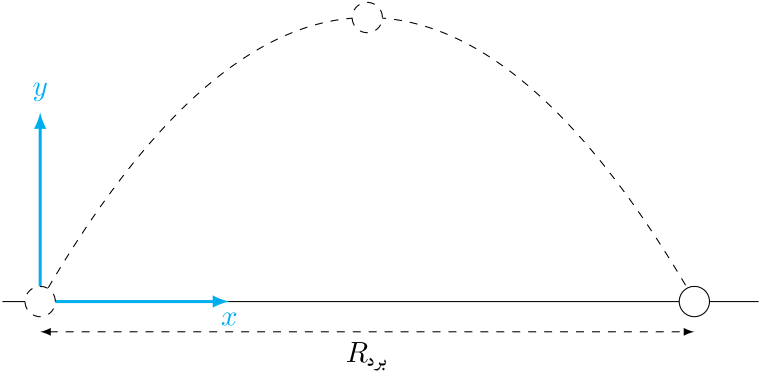


حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

بُرد حرکت پرتابه :

$$x = v_0 t \cos\theta$$

$$R_{\text{برد}} = x(t = t_{\text{کل}}) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$



حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

سرعت حرکت پرتابه در لحظه برخورد به زمین

$$t_{\text{کل}} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$$v_x(t_{\text{کل}}) = v_0 \cos\theta = \text{ثابت}$$

$$v_y(t_{\text{کل}}) = -g t_{\text{کل}} + v_0 \sin\theta = -v_0 \sin\theta$$

اندازه سرعت

$$v(t_{\text{کل}}) = \sqrt{v_x^2(t_{\text{کل}}) + v_y^2(t_{\text{کل}})} = v_0$$

جهت سرعت

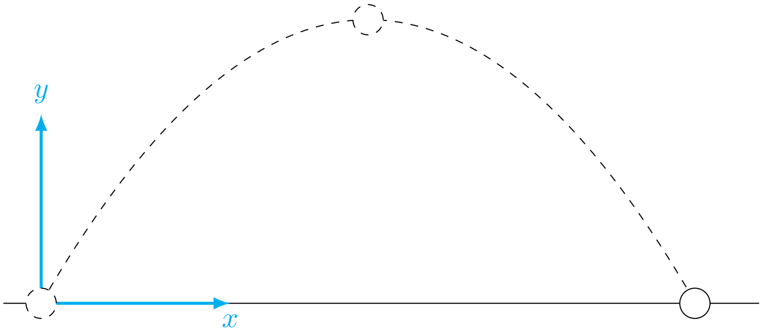
$$+x \text{ زاویه‌ی سرعت با } : \ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y(t_{\text{کل}})}{v_x(t_{\text{کل}})}\right)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}\right) = -\tan^{-1}\tan\theta \Rightarrow \phi = -\theta$$

حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

معادله مسیر حرکت پرتابه :

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\theta \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases} \quad , \qquad y = y(x) = ?$$



معادله مسیر حرکت پرتابه :

$$\begin{cases} ۱ : \ x = x_0 + v_0 t \cos\theta \\ ۲ : \ y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$

قسمت اول: محاسبه زمان از رابطه ۱

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta}, \quad ۳$$

قسمت دوم: قرار دادن زمان بدست آمده در رابطه ۳ در داخل رابطه ۲

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta} \right)^2 + v_0 \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta} \right) \sin\theta$$

معادله سهمی $\boxed{y = y_0 - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2\theta} + (x - x_0) \tan\theta,}$

حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

معادله مسیر حرکت پرتابه :

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 t \cos\theta \\ y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2} g \frac{(x - x_0)^2}{v_0^2 \cos^2\theta} + (x - x_0)\tan\theta$$

برای وقتی که پرتابه از مبدا مختصات پرتاب می‌شود، یعنی

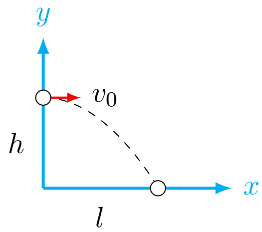
$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

معادله مسیر حرکت پرتابه بصورت زیر داده می‌شود،

$$y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta} + x\tan\theta$$

حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله-۶: توپ کوچکی بطور افقی از لبه میزی به ارتفاع $h = 1.2\ \mathrm{m}$ می‌افتد. این توپ در فاصله افقی $l = 1.52\ \mathrm{m}$ از لبه‌ی میز به زمین می‌خورد. الف) توپ چه مدت در هوا است؟ ب)اندازه‌ی سرعت آن هنگام ترک میز چقدر است؟



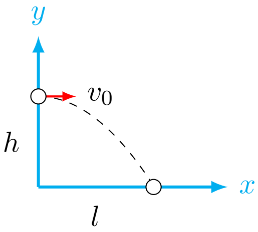
معادله حرکت پرتابه در امتداد افق $(\theta = 0)$

$$x = v_0 t, \quad y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

لحظه برخورد توپ به زمین

$$y = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

مسئله–۶:



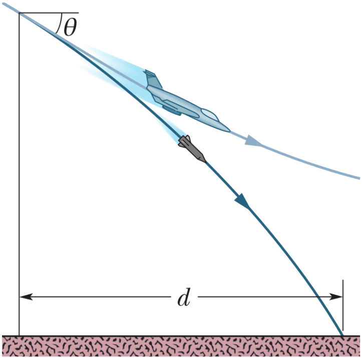
معادله مسیر حرکت پرتابه در امتداد افق $(\theta = 0)$

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2$$

در هنگاه برخورد توپ به زمین

$$y = 0, x = l \Rightarrow 0 = h - \frac{gl^2}{2v_0^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{gl^2}{2h}}$$

مسئله–۷: هواپیمایی با اندازه سرعت $290\ \mathrm{km}/h$ تحت زاویه‌ی $\theta = 30^\circ$ زیر افق شیرجه می رود و خلبان تله‌ی رادار را رها می کند. فاصله‌ی افقی بین پرتاب و نقطه‌ی برخورد تله با زمین $d = 700\ \mathrm{m}$ است. الف) تله چه مدت در هوا است. ب) ارتفاع نقطه رها شدن تله را بدست آورید.



حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله-۷:

معادله حرکت پرتابه زیر افق

$$x = v_0 t \cos\theta, \quad y = h - \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t \sin\theta$$

معادله مسیر حرکت

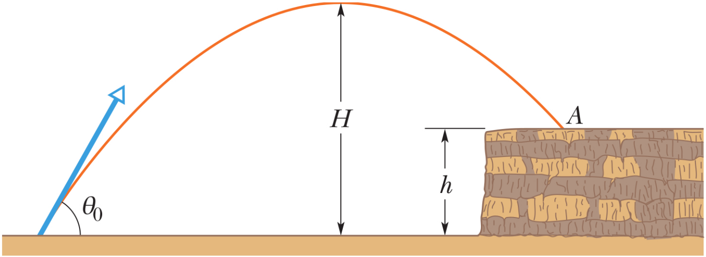
$$y = h - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 - x\tan\theta$$

مدت پرواز تله در هوا : $t_{\text{پرواز}} = \frac{x}{v_0\cos\theta} = \frac{d}{v_0\cos\theta} = \frac{700}{(290\times 1000/3600)(\sqrt{3}/2)}$

وقتی گلوله به زمین می‌رسد : $y = 0$ و $x = d : 0 = h - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}d^2 - d\tan\theta$

$$h = \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}d^2 + d\tan\theta = \frac{9.8\times 700^2}{2[(290\times 1000/3600)(\sqrt{3}/2)]^2} + 700(\sqrt{3}/3)$$

مسئله-۸: در شکل سنگی با اندازه‌ی سرعت اولیه‌ی $42\ \mathrm{m/s}$ تحت زاویه‌ی 60° بالا افق بطرف صخره‌ای به ارتفاع hپرتاب می‌شود. $5.5\ \mathrm{s}$ پس از برخورد سنگ به نقطه A برخورد می‌کند. الف) ارتفاع صخره h ب) اندازه سرعت سنگ درست قبل از برخورد با صخره در نقطه‌ی A ج) ارتفاع اوج سنگ H را نسبت به زمین را بدست آورید.



حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله-۸:

معادله حرکت

$$x = v_0 t\cos\theta, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta$$

$$y(t = 5.5\ \mathrm{s}) = h = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times 5.5^2 + 42 \times 5.5 \times \sin 60^\circ$$

معادله سرعت

$$v_x = v_0\cos\theta = 42 \times \cos 60^\circ$$

$$v_y = -gt + v_0\sin\theta = -9.8 \times 5.5 + 42 \times \sin 60^\circ$$

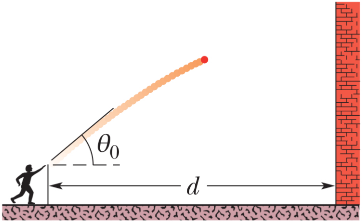
اندازه سرعت

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(42 \times \cos 60^\circ)^2 + (-9.8 \times 5.5 + 42 \times \sin 60^\circ)^2}$$

ارتفاع اوج

$$H = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} = \frac{42^2\sin^2 60^\circ}{2 \times 9.8}$$

مسئله–۹: توپی با اندازه سرعت $25\ \mathrm{m/s}$ تحت زاویه‌ی $40°$ بالای افق بطرف دیواری پرتاب می‌شود. دیوار در فاصله $d = 22\ \mathrm{m}$ از نقطه‌ی پرتاب توپ است. الف) در چه ارتفاعی از نقطه‌ی پرتاب توپ به دیوار برخورد می‌کند. ب) مولفه‌ي افقی و ج) مولفه‌ی قائم سرعت توپ را هنگام برخورد توپ به دیوار را بدست آورید. د) در لحظه‌ی برخورد توپ به دیوار، آیا توپ از نقطه اوج مسیرش عبور کرده است؟



حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله-۹:

معادله حرکت

$$x = v_0 t \cos\theta, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta$$

$$x = 25 t \cos 40^\circ, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 + 25 t \sin 40^\circ$$

معادله مسیر حرکت

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + x \tan\theta$$

$$y = -\frac{9.8}{2 \times 25^2 \cos^2 40^\circ} x^2 + x \tan 40^\circ$$

ارتفاع برخورد توپ

$$y = -\frac{9.8}{2 \times 25^2 \cos^2 40^\circ} \times 22^2 + 22 \tan 40^\circ$$

مسئله-۹:

معادله حرکت

$$x = v_0 t \cos\theta, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\theta$$

$$x = 25t\cos 40^\circ, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + 25t\sin 40^\circ$$

لحظه‌ی برخورد توپ به دیوار

$$x(t = t_1) = d \Rightarrow d = 25t_1\cos 40^\circ \Rightarrow t_1 = \frac{22}{25 \times \cos 40^\circ} = 1.15 \text{ s}$$

معادله سرعت

$$v_x = 25\cos 40^\circ, \quad v_y = -gt + 25\sin 40^\circ$$

سرعت توپ در لحظه‌ی برخورد به دیوار

$$v_x = 25\cos 40^\circ, \quad v_y = -9.8 \times t_1 + 25\sin 40^\circ$$

حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله-۹:

معادله حرکت

$$x = v_0 t\cos\theta, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\theta$$

$$x = 25t\cos 40^\circ, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + 25t\sin 40^\circ$$

لحظه‌ی برخورد توپ به دیوار

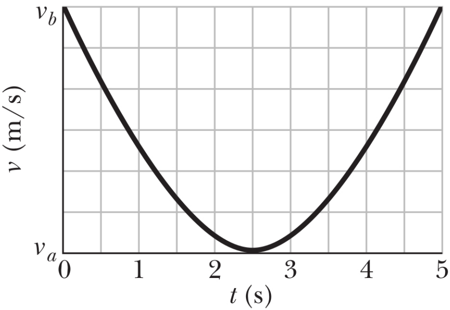
$$x(t = t_1) = d \Rightarrow d = 25t_1\cos 40^\circ \Rightarrow t_1 = \frac{22}{25\times\cos 40^\circ} = 1.15\ \mathrm{s}$$

زمان اوج

$$t_s = \frac{v_0\sin\theta}{g} = \frac{25\times\sin 40^\circ}{9.8} = 1.64\ \mathrm{s}$$

حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله-۱۰: در سطح زمین به توپ گلف ضربه‌ای زده می‌شود. شکل زیر اندازه‌ی سرعت توپ را بصورت تابعی از زمان نشان می‌دهد. لحظه‌ی $t = 0$ مربوط به نقطه‌ی ضربه به توپ است. در محور قائم $v_a = 19\ \mathrm{m/s}$ و $v_b = 31\ \mathrm{m/s}$ است. الف) قبل از بازگشت به زمین توپ چه مسافت افقی را طی می‌کند. ب) بیشنه ارتفاع توپ را نسبت به سطح زمین بدست آورید.



حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله–۱۰:

معادله‌ی سرعت پرتابه

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta$$

اندازه سرعت

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 g t \sin\theta}$$

کمینه در نمودار سرعت

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{2g^2t - 2v_0 g \sin\theta}{2\sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 g t \sin\theta}} = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin\theta}{g} = t_{\text{اوج}} = 2.5$$

$$v_0 \sin\theta = 24.5$$

سرعت در لحظه اوج فقط مولفه‌ی x دارد،

$$v(t_{\text{اوج}}) = v_0 \cos\theta = 19$$

مسئله-۱۰:
معادله‌ی سرعت پرتابه

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta$$

اندازه سرعت

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 gt\sin\theta}$$

$$v_0 \sin\theta = 24.5$$

$$v_0 \cos\theta = 19$$

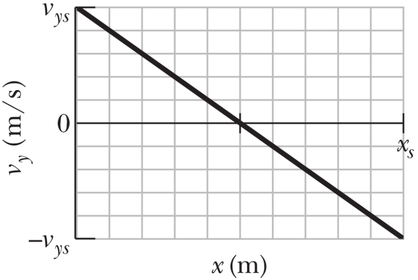
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{2(v_0\sin\theta)(v_0\cos\theta)}{g} = \frac{2\times 24.5\times 19}{9.8}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(v_0\sin\theta)^2}{2g} = \frac{24.5^2}{2\times 9.8}$$

حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله–۱۱: توپی از سطح زمین بطرف دیواری در فاصله افقی x پرتاب می‌شود. مولفه‌ی y سرعت توپ v_y را هنگام رسیدن به دیوار بصورت تابعی از x نشان می‌دهد.بر روی محورهای $v_{ys} = 5\ \mathrm{m/s}$ و $x_s = 20\ \mathrm{m}$ است. زاویه‌ی پرتاب چقدر است.

(a)



حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله-۱۱:

معادلات حرکت

$$x = v_0 t \cos\theta$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta$$

معادلات سرعت

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta$$

تابع v_y بر حسب x

$$v_y(x) = -\frac{g}{v_0 \cos\theta} x + v_0 \sin\theta$$

مطابق نمودار

$$v_y(x=0) = v_{ys} : \; v_0 \sin\theta = 5$$

مسئله-۱۱:
مطابق نمودار

$$v_y(x=10)=0:\ -\frac{10g}{v_0\cos\theta}+v_0\sin\theta=0 \Rightarrow -\frac{10g}{v_0\cos\theta}+5=0$$

$$v_0\cos\theta=2g$$

بنابراین

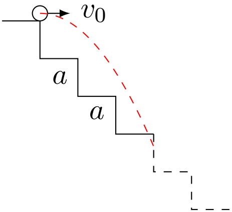
$$\begin{cases} v_0\sin\theta=5 \\ v_0\cos\theta=2g \end{cases}$$

$$\frac{v_0\sin\theta}{v_0\cos\theta}=\frac{5}{2g}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{5}{2g}$$

حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله–۱۲: توپی بطور افقی از بالای پلکانی می‌غلتد و با اندازه سرعت $1.52\ \mathrm{m/s}$ می‌افتد. ارتفاع هر پله 20.3 سانتیمتر و عرض هر پله 20.3 سانتیمتر است. توپ برای اولین بار با کدام پله برخورد می‌کند.



معادلات حرکت

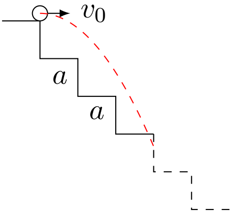
$$x = v_0 t, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2$$

معادلات مسیر حرکت

$$y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2}$$

حرکت در دوبعد: حرکت پرتابه

مسئله–۱۲:



معادلات مسیر حرکت

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$$

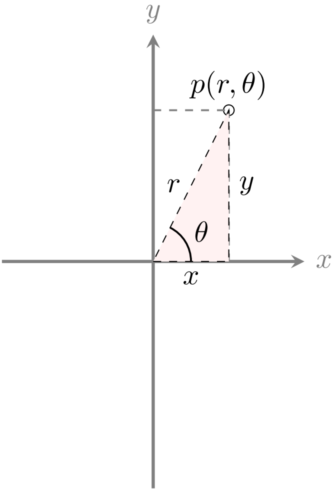
اگر ذره در روی پله‌ی nام فرود آید

$$y = -na, \quad x = na$$

$$-na = -\frac{g(na)^2}{2v_0^2} \Rightarrow 1 = \frac{gna}{2v_0^2} \Rightarrow n = \frac{2v_0^2}{ga} = 2.32$$

اولین بار به پله سوم برخورد می‌کند.

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی



اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

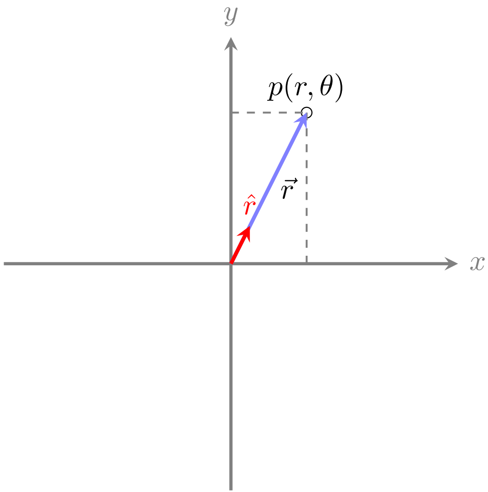
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y$$

$$\vec{r} = \hat{i}r\cos\theta + \hat{j}r\sin\theta$$

$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی



اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

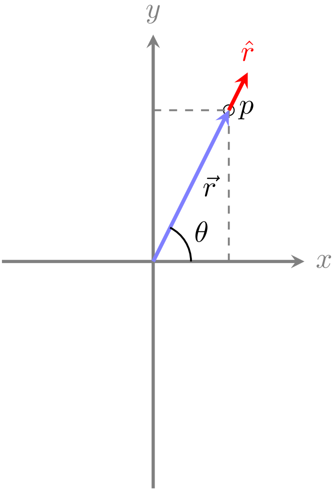
$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta}$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی



اندازه و جهت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

بردار مکان

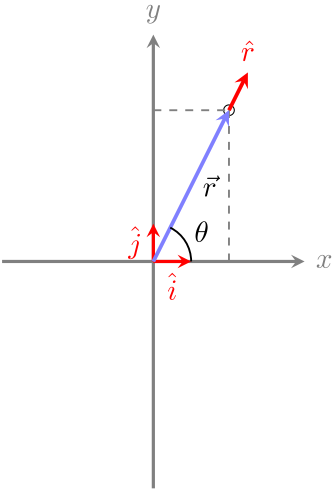
$$\vec{r} = r(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

$$\vec{r} = r\hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\boxed{\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta}$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی



بردار مکان

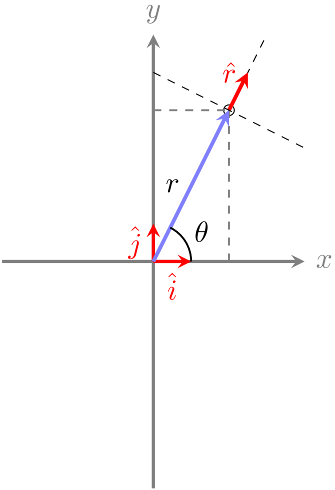
$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بطور کلی برای هر دستگاه مختصات دوبعدی دو بردار یکه وجود دارد. برای مثال، $\hat{i}$ و $\hat{j}$ ، در دستگاه مختصات دکارتی در دو بعد بردارهای یکه می‌باشند.
- به همین ترتیب برای دستگاه مختصات قطبی، علاوه بر بردار یکه $\hat{r}$، نیاز به یک بردار یکه دیگر نیز می‌باشد.

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی



بردار مکان

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

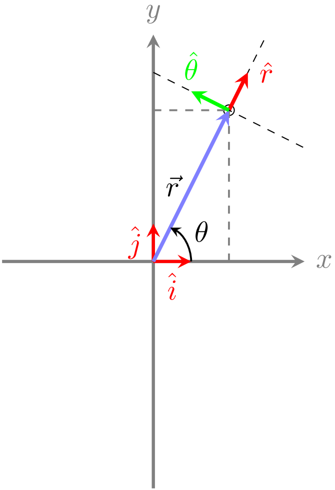
$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بردارهای یکه بر یکدیگر عمود هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ بر یکدیگر عمودند.

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

- به همین ترتیب برای دستگاه مختصات قطبی، بردار یکه‌ای وجود دارد که بر بردار یکه $\hat{r}$ عمود است.

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی



بردار مکان

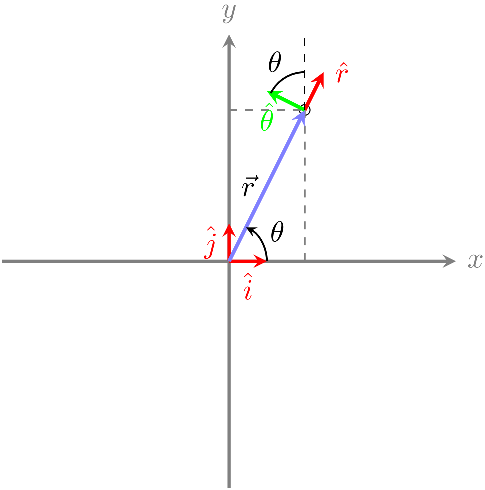
$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

- بردارهای یکه در امتداد مثبت تغییرات مختصات هستند. برای مثال در دستگاه مختصات دکارتی، بردار یکه $\hat{i}$ در امتداد مثبت تغییرات محور x است و بردار یکه $\hat{j}$ در امتداد مثبت تغییرات محور y است.
- در دستگاه مختصات قطبی، $\hat{r}$ در امتداد مثبت تغییرات بردار $\vec{r}$ است.

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی



بردار مکان

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta$$

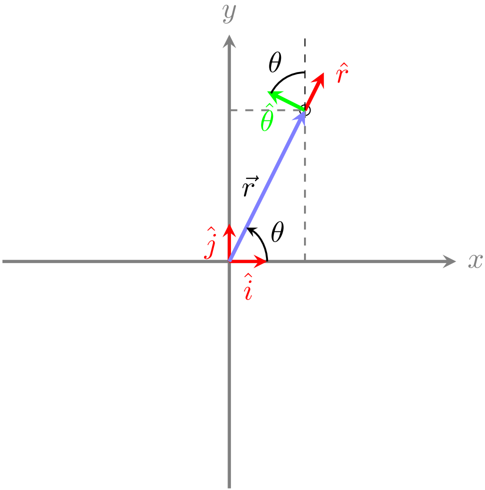
$$|\hat{\theta}| = 1$$

$$\sqrt{(-\sin\theta)^2 + \cos^2\theta} = 1$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

$$\cos\theta(-\sin\theta) + \cos\theta\sin\theta = 0$$

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی



بردار مکان

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad |\hat{r}| = 1$$

بردار یکه

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta,\ |\hat{r}| = 1$$

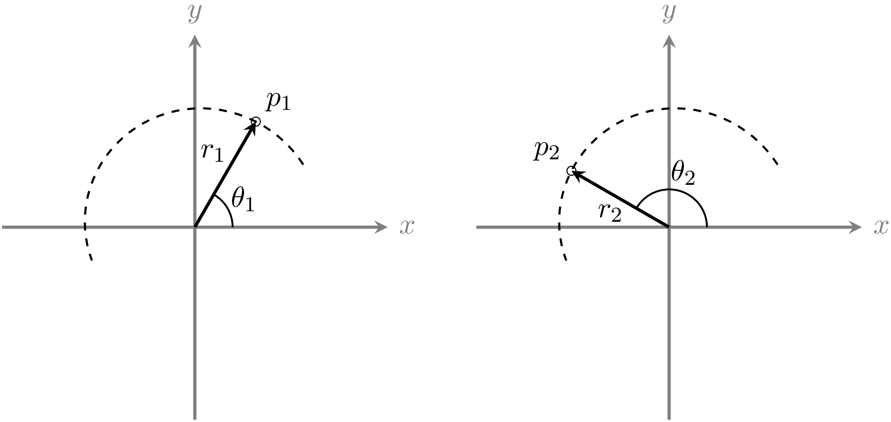
$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta,\ |\hat{\theta}| = 1$$

$$\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$$

اتحادهای مفید

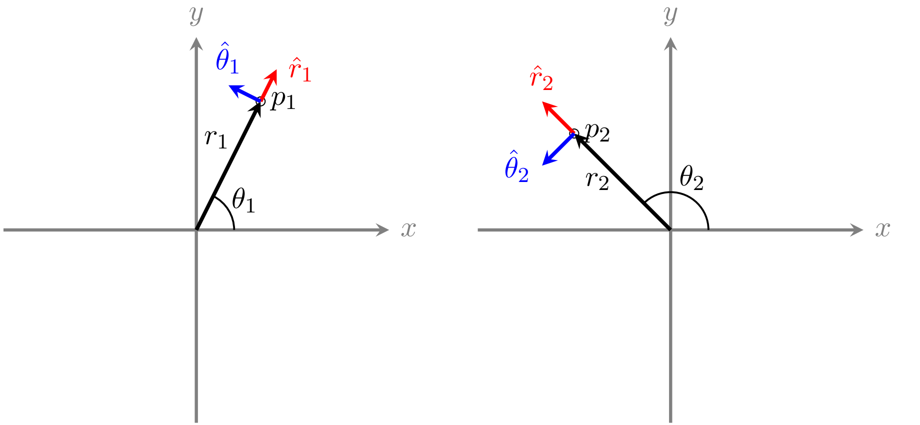
$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\hat{r}$$

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی



$$r = r(t),\ \theta = \theta(t):\quad \begin{cases} p_1 : r_1 = r(t_1),\ \ \theta_1 = \theta(t_1) \\ p_2 : r_2 = r(t_2),\ \ \theta_2 = \theta(t_2) \end{cases}$$

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی



$$r = r(t),\ \theta = \theta(t) : \quad \begin{cases} p_1 : r_1 = r(t_1),\ \theta_1 = \theta(t_1),\ \hat{r}_1 = \hat{r}(\theta_1),\ \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}(\theta_1) \\ p_2 : r_2 = r(t_2),\ \theta_2 = \theta(t_2),\ \hat{r}_2 = \hat{r}(\theta_2),\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}(\theta_2) \end{cases}$$

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\hat{r}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}$$

قاعده‌ی زنجیری

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\color{red}{\mathrm{d}\theta}}\frac{\color{red}{\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\hat{\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

قاعده زنجیری

$$\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\hat{r}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r\dot{\theta}\hat{\theta}\right)$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\color{red}{\mathrm{d}\theta}}\frac{\color{red}{\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\color{red}{\mathrm{d}\theta}}\frac{\color{red}{\mathrm{d}\theta}}{\mathrm{d}t}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\hat{r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}$$

اگر

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

حرکت در دوبعد: مختصات قطبی

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}^2\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}\end{aligned}}$$

$$\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{cases}$$

حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای با شعاع ثابت

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

حالتهای خاص ۱-حرکت بر مسیر دایره‌ای با شعاع ثابت R

$$r = R, \quad \theta = \theta(t)$$

$$\vec{r} = R\hat{r}$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

<u>بطور خلاصه</u>

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای با شعاع ثابت و سرعت زاویه‌ای ثابت

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}, \quad \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{\theta}, \quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{r}$$

حالتهای خاص ۲-حرکت بر مسیر دایره‌ای با شعاع ثابت R و سرعت زاویه‌ای ثابت ω

$$r = R, \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

$$\vec{r} = R\hat{r}$$

$$\vec{v} = R\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} = -R\omega^2\hat{r}$$

سرعت مماسی و شتاب شعاعی

<u>بطور خلاصه</u>

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t)$$

$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}$$

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

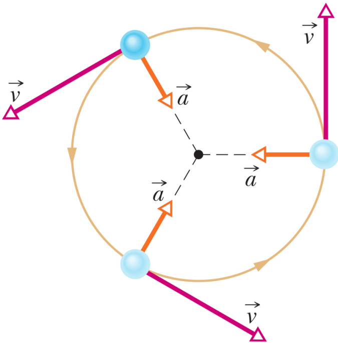
حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای با شعاع ثابت و سرعت زاویه‌ای ثابت

$$r = R, \quad \theta = \omega t + \theta_0$$

$$\vec{r} = R\hat{r} = R\cos\theta\hat{i} + R\sin\theta\hat{j}$$

سرعت مماسی : $\vec{v} = R\omega\hat{\theta} = -R\omega\sin\theta\hat{i} + R\omega\cos\theta\hat{j}$

شتاب شعاعی : $\vec{a} = -R\omega^2\hat{r} = -R\omega^2\cos\theta\hat{i} - R\omega^2\sin\theta\hat{j}$



حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای

مسئله–۱۳: شتاب جانب به مرکزی، مربوط به حرکت دایره‌ای یکنواخت با شعاع $r = 3\ \mathrm{m}$ را در نظر بگیرید. در یک لحظه، شتاب بصورت $\vec{a} = (6\ \mathrm{m/s^2})\hat{i} + (-4\ \mathrm{m/s^2})\hat{j}$ است. در این لحظه مطلوب است مقدار الف) $\vec{v}\cdot\vec{a}$ و ب) $\vec{r}\times\vec{a}$.

برای یک حرکت دایره ای با سرعت زاویه‌ای ثابت ω، بردار مکان، بردار سرعت و بردار شتاب بصورت زیر داده می شود،

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

$$\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r}$$

که

$$\begin{cases} \hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} \\ \hat{\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} \end{cases} \quad \Rightarrow \hat{\theta}\cdot\hat{r} = 0$$

در این شرایط

$$\vec{v}\cdot\vec{a} = -r^2\omega^3(\hat{\theta}\cdot\hat{r}) = 0, \quad \vec{r}\times\vec{a} = -r^2\omega^2(\hat{r}\times\hat{r}) = 0$$

حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای

مسئله–۱۳:

$$\vec{a} = -r\omega^2\hat{r}$$

$$\vec{a} = -3\omega^2\hat{r} = 6\hat{i} - 4\hat{j}$$

$$\vec{a} = -3\omega^2\hat{r} = -\sqrt{52}\left(-\frac{6}{\sqrt{52}}\hat{i} + \frac{4}{\sqrt{52}}\hat{j}\right)$$

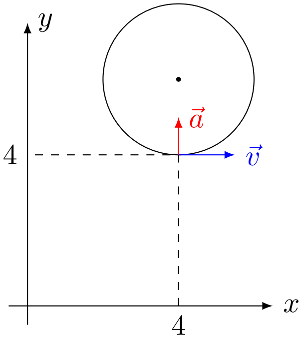
$$\hat{r} = \cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j} = -\frac{6}{\sqrt{52}}\hat{i} + \frac{4}{\sqrt{52}}\hat{j}$$

$$\begin{cases}\cos\theta = -6/\sqrt{52}\\ \sin\theta = 4/\sqrt{52}\end{cases} \Rightarrow \tan\theta = -\frac{2}{3} : \text{ناحیه‌ی دوم}$$

$$3\omega^2 = \sqrt{52} \Rightarrow \omega = 1.55\ \mathrm{Rad/s}$$

حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای

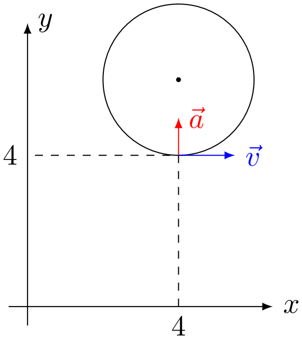
مسئله–۱۴: ذره‌ای بر روی صفحه‌ی xy حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. در لحظه‌ای، ذره از نقطه‌ای به مختصات $(4\ \mathrm{m}, 4\ \mathrm{m})$ با سرعت $(5\ \mathrm{m/s})\hat{i}$ و شتاب $(12.5\ \mathrm{m/s^2})\hat{j}$ عبور می‌کند. مختصه x و مختصه y مرکز مسیر دایره‌ای را بدست آورید.



حرکت پادساعتگرد است و کافی است بزرگی شعاع مسیر دایره‌ای را داشته باشید،

$$\text{بزرگی شتاب شعاعی}:\ a = R\omega^2, \quad \text{بزرگی سرعت مماسی}:\ v = R\omega \Rightarrow a = \frac{v^2}{R}$$

مسئله-۱۴:

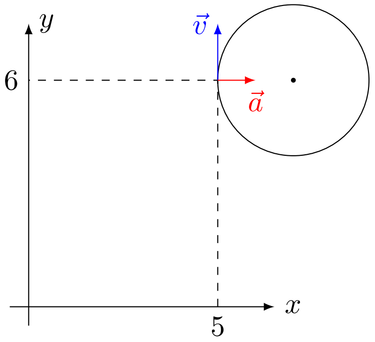


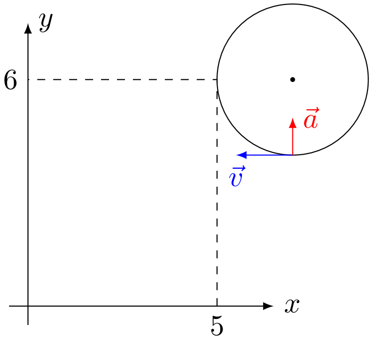
$$a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = 2\ \text{m}$$

بنابراین مختصات مرکز دایره برابر است با $(4, 6)$

حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای

مسئله–۱۵: ذره‌ای با اندازه سرعت ثابت بر روی مسیر دایره‌ای xy حرکت می‌کند. در لحظه‌ی $t_1 = 4 \text{ s}$ ذره در نقطه‌ی $(5 \text{ m}, 6 \text{ m})$ و سرعتش $(3 \text{ m/s})\hat{j}$ و شتاب آن در جهت مثبت محور x است. در لحظه‌ی $t_2 = 10 \text{ s}$ سرعتش $(-3 \text{ m/s})\hat{i}$ و شتاب آن در جهت مثبت محور y است. اگر $t_2 - t_1$ کوچکتر از یک دوره‌ی تناوب باشد، مختصه x و مختصه y مرکز مسیر دایره‌ای را بدست آورید.

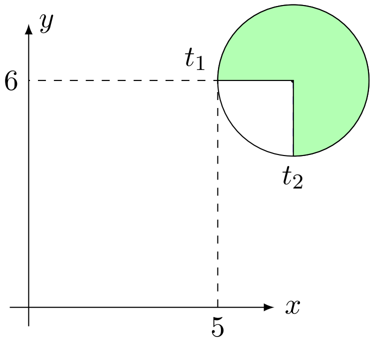




حرکت ساعتگرد است

حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای

مسئله-۱۵:



$$t_2 - t_1 = 3T/4 \Rightarrow T = 8 \text{ s}$$

$$\omega = 2\pi/T = \pi/4 \text{ Rad/s}$$

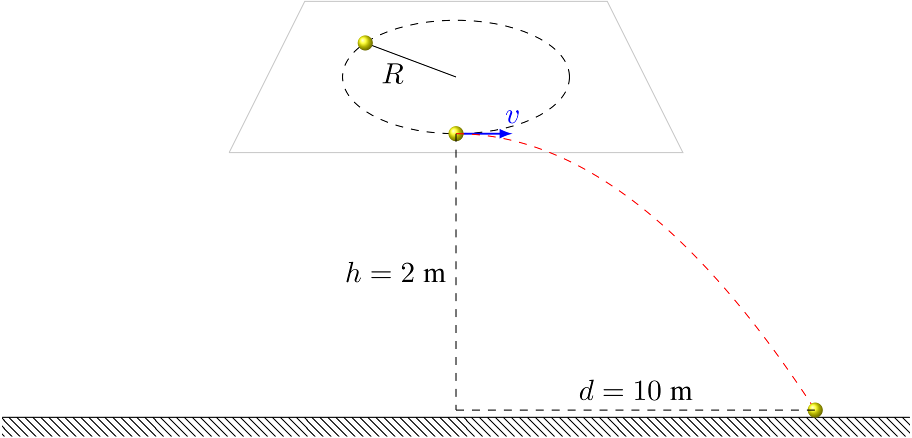
$$v = R\omega$$

$$3 = R(\pi/4) \Rightarrow R = 12/\pi$$

بنابراین مختصات مرکز دایره برابر است با

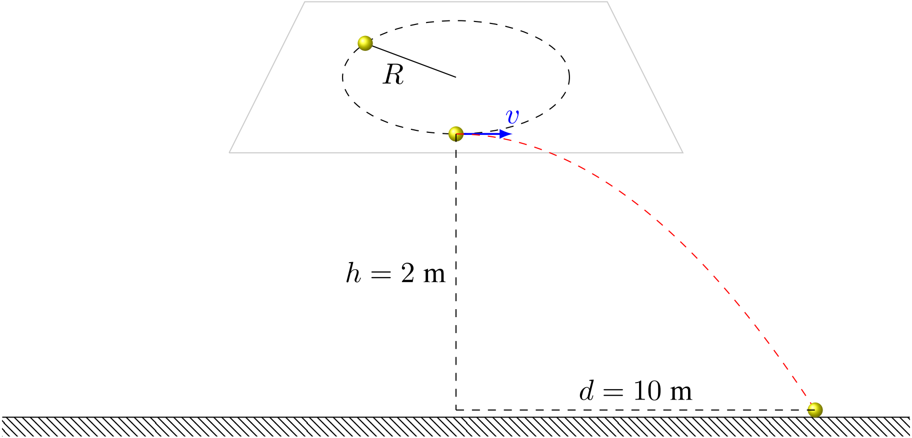
$$(5 + 12/\pi, 6)$$

مسئله–۱۶: کودکی به وسیله نخی، سنگی را بر روی دایره‌ای افقی به شعاع $1.5\ \mathrm{m}$ در ارتفاع $2\ \mathrm{m}$ بالای سطح زمین می‌چرخاند. نخ پاره می‌شود و سنگ بطور افقی پرتاب می‌شود و پس از طی مسافت افقی $10\ \mathrm{m}$ به زمین برخورد می‌کند. اندازه شتاب جانب به مرکز سنگ در طی حرکت دایره‌ای چقدر است؟



حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای

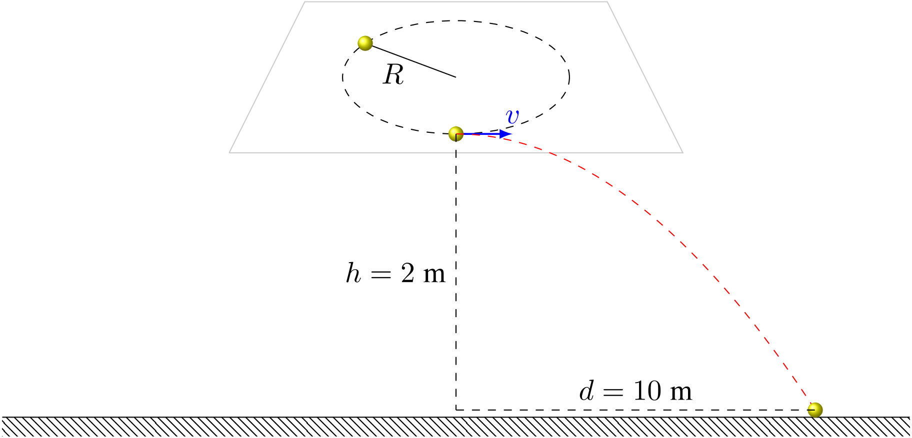
مسئله–۱۶:



$$x = vt, \quad y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = 10 - \frac{gx^2}{2v^2}$$

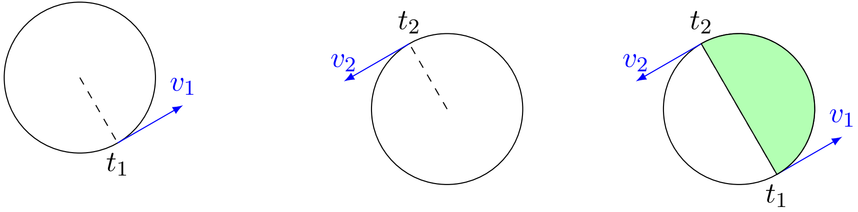
حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای

مسئله-۱۶:



$$(x=10, y=0): 0 = 2 - \frac{g10^2}{2v^2} \Rightarrow v^2 = 25g, \quad a = \frac{v^2}{R} = \frac{25g}{1.5}$$

مسئله–۱۷: گربه‌ای سوار بر چرخ و فلک افقی حرکت دایره‌ی یکنواخت دارد. در لحظه‌ی $t_1 = 2$ s نسبت به مختصات افقی xy سرعت گربه $\vec{v}_1 = (3\ \mathrm{m/s})\hat{i} + (4\ \mathrm{m/s})\hat{j}$ است. در لحظه‌ی $t_2 = 5$ s سرعت گربه $\vec{v}_2 = (-3\ \mathrm{m/s})\hat{i} + (-4\ \mathrm{m/s})\hat{j}$ است. اندازه‌ی شتاب جانب به مرکز را بدست آورید.

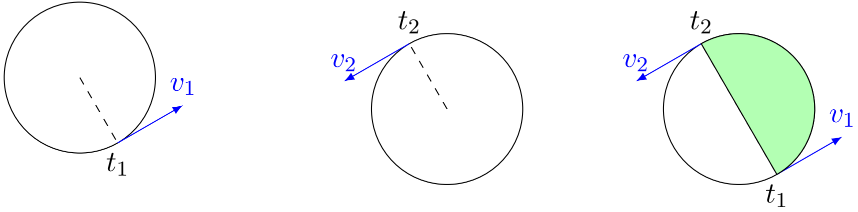


حرکت پادساعتگرد است.

$$v_1 = 3\hat{i} + 4\hat{j} = 5(\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}) = R\omega\hat{\theta} \Rightarrow R\omega = 5$$

$$v_2 = -3\hat{i} - 4\hat{j} = -5(\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}) = -R\omega\hat{\theta} \Rightarrow R\omega = 5$$

مسئله–۱۷: گربه‌ای سوار بر چرخ و فلک افقی حرکت دایره‌ی یکنواخت دارد. در لحظه‌ی $t_1 = 2\ \mathrm{s}$ نسبت به مختصات افقی xy سرعت گربه $\vec{v}_1 = (3\ \mathrm{m/s})\hat{i} + (4\ \mathrm{m/s})\hat{j}$ است. در لحظه‌ی $t_2 = 5\ \mathrm{s}$ سرعت گربه $\vec{v}_2 = (-3\ \mathrm{m/s})\hat{i} + (-4\ \mathrm{m/s})\hat{j}$ است. اندازه‌ی شتاب جانب به مرکز را بدست آورید.



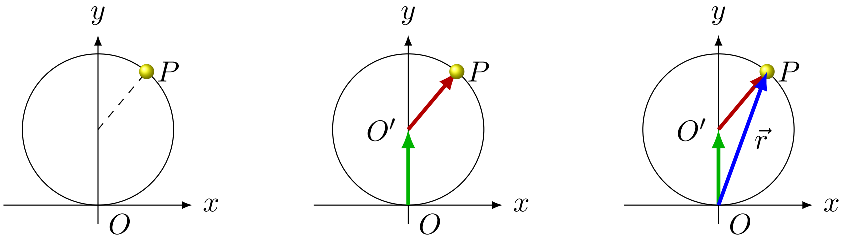
حرکت پادساعتگرد است.

$$R\omega = 5, \quad \begin{cases} t2 - t_1 = 3\ \mathrm{s} \\ t_2 - t_1 = T/2 \end{cases} \Rightarrow T = 6\ \mathrm{s} \Rightarrow \omega = \pi/3\ \mathrm{Rad/s}$$

$$R = 15/\pi\ \mathrm{m}, \quad a = R\omega^2 = 5\pi/3\ \mathrm{Rad/s^2}$$

حرکت در دوبعد: حرکت دایره‌ای

مسئله‌–۱۸: ذره‌ی P با اندازه‌ی سرعت ثابت بر روی دایره‌ای با شعاع ثابت $r = 3$ m حرکت می‌کند. در مدت 20 ثانیه یک دوره کامل می‌زند. ذره در لحظه‌ی $t = 0$ از نقطه‌ی O می گذرد. بردار مکان متحرک را نسبت دستگاه مختصات داده شده بدست آورید.



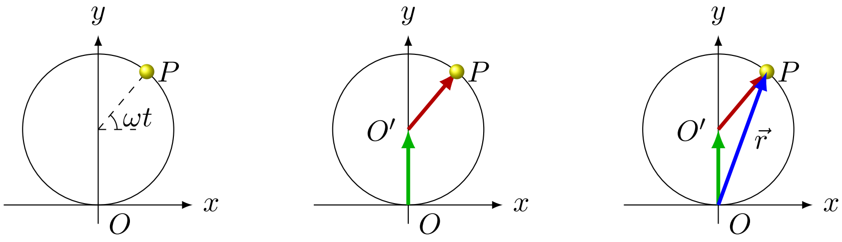
حرکت پادساعتگرد است.

$$OO' = 3\hat{j}$$

$$O'P = 3(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$$

$$\vec{r} = OO' + O'P = 3\cos\theta\hat{i} + 3(1+\sin\theta)\hat{j}$$

مسئله–۱۸: ذره‌ی P با اندازه‌ی سرعت ثابت بر روی دایره‌ای با شعاع ثابت $r = 3$ m حرکت می‌کند. در مدت 20 ثانیه یک دوره کامل می‌زند. ذره در لحظه‌ی $t = 0$ از نقطه‌ی O می گذرد. بردار مکان متحرک را نسبت دستگاه مختصات داده شده بدست آورید.



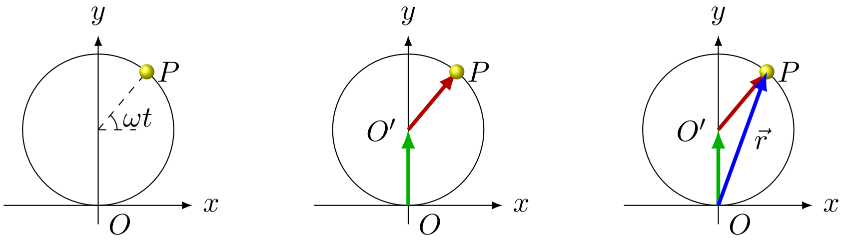
حرکت پادساعتگرد است.

$$\vec{r} = 3\cos\theta\hat{i} + 3(1+\sin\theta)\hat{j}$$

$$T = 20 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \text{ Rad/s}$$

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0 = (\pi/10)t - \pi/2$$

مسئله–۱۸: ذره‌ی P با اندازه‌ی سرعت ثابت بر روی دایره‌ای با شعاع ثابت $r = 3\ \mathrm{m}$ حرکت می‌کند. در مدت 20 ثانیه یک دوره کامل می‌زند. ذره در لحظه‌ی $t = 0$ از نقطه‌ی O می گذرد. بردار مکان متحرک را نسبت دستگاه مختصات داده شده بدست آورید.



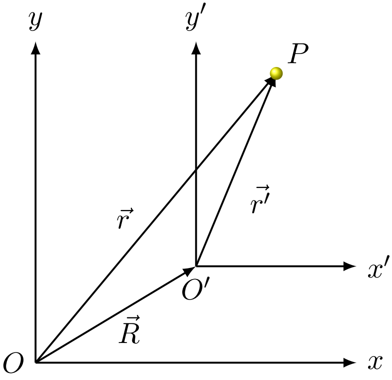
حرکت پادساعتگرد است.

$$\vec{r} = 3\cos[(\pi/10)t - \pi/2]\hat{i} + 3(1 + \sin[(\pi/10)t - \pi/2])\hat{j}$$

$$\text{انتظار داریم} : \ \vec{r}(t=0) = 0$$

$$\vec{r}(t=0) = 3\cos[-\pi/2]\hat{i} + 3(1 + \sin[-\pi/2])\hat{j} = 0$$

حرکت در دوبعد: حرکت نسبی



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$$

مکان

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r'}(t)$$

سرعت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{R} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r'}$$

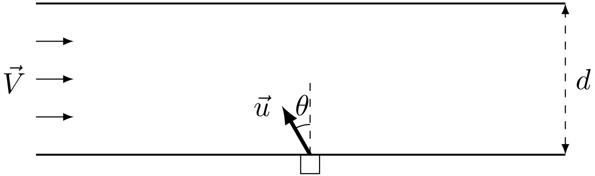
$$\vec{v}(t) = \vec{V}(t) + \vec{v'}(t)$$

شتاب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{V} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v'}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{A}(t) + \vec{a'}(t)$$

مسئله-۱۹: از رودخانه‌ای به عرض 200 متر، آب با سرعت ثابت 2 متر بر ثانیه بطرف شرق جریان دارد. قایقی با سرعت 8متر بر ثانیه نسبت به آب، ساحل جنوبی را ترک می‌کند و در جهت 30 درجه شمال غربی حرکت می‌کند. الف) اندازه و جهت سرعت قایق نسبت به زمین را بدست آورید. ب) چقدر طول می‌کشد تا قایق عرض رودخانه را طی کند؟



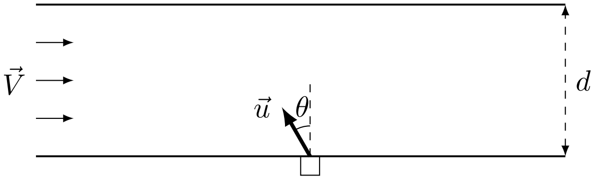
$$\text{سرعت آب رودخانه نسبت به ساحل} : \vec{V} = 2\hat{i}$$

$$\text{سرعت قایق نسبت به آب رودخانه} : \vec{u} = 8(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}) = 8(-\frac{1}{2}\hat{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j})$$

$$\text{سرعت قایق نسبت به ساحل} : \vec{v} = \vec{V} + \vec{u} = -2\hat{i} + 4\sqrt{3}\hat{j}$$

حرکت در دوبعد: حرکت نسبی

مسئله–۱۹:



$$\text{سرعت قایق نسبت به ساحل} : \ \vec{v} = \vec{V} + \vec{u} = -2\hat{i} + 4\sqrt{3}\hat{j}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{52} = 7.2 \text{ m/s}, \quad \tan\phi = -2\sqrt{3}$$

$$\tan(\pi - \phi) = -\tan\phi$$

$$\pi - \phi = \tan^{-1} 2\sqrt{3} \Rightarrow \phi = 106^\circ$$

$$y = v_y t \Rightarrow 200 = 4\sqrt{3}t \Rightarrow t = \frac{50}{\sqrt{3}} = 29 \text{ s}$$

حرکت در دوبعد: حرکت نسبی

مسئله-۲۰: آسانسوری بدون سقف با سرعت 10 متر بر ثانیه بالا می‌رود. پسری داخل آسانسور، توپی را مستقیما بطرف بالا پرتاب می‌کند. ارتفاع اولیه‌ی توپ 2 متر بالاتر از کف آسانسور و کف آسانسور 28 متر بالاتر از سطح زمین است. سرعت اولیه توپ نسبت به آسانسور 20 متر بر ثانیه است. الف) ارتفاع اوج توپ نسبت به زمین را بدست آورید. ب)چقدر طول می‌کشد تا توپ به کف آسانسور برگردد.

$$\text{سرعت آسانسور نسبت به زمین} : \ \vec{V} = 10\hat{j}$$

$$\text{سرعت اولیه توپ نسبت به آسانسور} : \ \vec{u} = 20\hat{j}$$

$$\text{سرعت اولیه توپ نسبت به زمین} : \ \vec{v} = \vec{V} + \vec{u} = 30\hat{j}$$

معادله حرکت توپ نسبت به زمین

$$y_{\text{توپ}} = -\frac{1}{2}gt^2 + 30t + 30$$

معادله آسانسور نسبت به زمین

$$y_{\text{آسانسور}} = 10t + 28$$

حرکت در دوبعد: حرکت نسبی

مسئله- ۲۰:

$$\vec{V} = 10\hat{j} \quad : \text{سرعت آسانسور نسبت به زمین}$$

$$\vec{u} = 20\hat{j} \quad : \text{سرعت اولیه توپ نسبت به آسانسور}$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{u} = 30\hat{j} \quad : \text{سرعت اولیه توپ نسبت به زمین}$$

معادله حرکت توپ نسبت به زمین

$$y_{\text{توپ}} = -\frac{1}{2}gt^2 + 30t + 30$$

معادله آسانسور نسبت به زمین

$$y_{\text{آسانسور}} = 10t + 28$$

در اوج

$$v_{\text{توپ}} = 0 \Rightarrow -gt_s + 30 = 0 \Rightarrow t_s = \frac{30}{g} = 3.1 \text{ s}$$

$$H = y(t = t_s) = -\frac{1}{2}\frac{30^2}{g} + \frac{30^2}{g} + 30 = \frac{1}{2}\frac{30^2}{g} + 30 = 76 \text{ m}$$

حرکت در دوبعد: حرکت نسبی

مسئله- ۲۰:

$$\vec{V} = 10\hat{j} \; : \text{سرعت آسانسور نسبت به زمین}$$

$$\vec{u} = 20\hat{j} \; : \text{سرعت اولیه توپ نسبت به آسانسور}$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{u} = 30\hat{j} \; : \text{سرعت اولیه توپ نسبت به زمین}$$

معادله حرکت توپ نسبت به زمین

$$y_{\text{توپ}} = -\frac{1}{2}gt^2 + 30t + 30$$

معادله آسانسور نسبت به زمین

$$y_{\text{آسانسور}} = 10t + 28$$

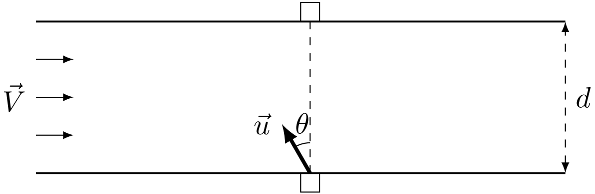
وقتی توب به کف آسانسور بر می‌گردد

$$y_{\text{توپ}} = y_{\text{آسانسور}}$$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + 30t + 30 = 10t + 28 \Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + 20t + 2 = 0 \Rightarrow t = 4.18 \text{ s}$$

حرکت در دوبعد: حرکت نسبی

مسئله–۲۱: شخصی می‌تواند با پارو زدن سرعت قایق را نسبت به آب ساکن 6.4 کیلومتر بر ساعت برساند. الف) در رودخانه‌ای طویل و مستقیم که سرعت جریان آب 3.2 کیلومتر بر ساعت است، بخواهد مستقیم بطرف نقطه مقابل در آن طرف رودخانه برود با چه زاویه‌ای باید حرکت کند. ب) اگر عرض رودخانه 6.4 کیلومتر باشد، چقدر طول می‌کشد تا عرض رودخانه را طی کند.



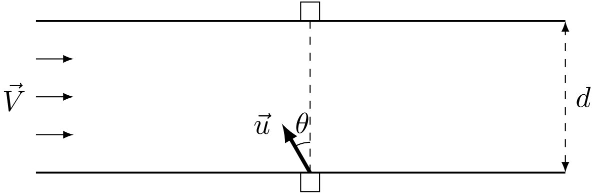
سرعت آب رودخانه نسبت به ساحل : $\vec{V} = 3.2\hat{i}$

سرعت قایق نسبت به آب رودخانه : $\vec{u} = 6.4(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$

سرعت قایق نسبت به ساحل : $\vec{v} = (3.2 - 6.4\sin\theta)\hat{i} + 6.4\cos\theta\hat{j}$

حرکت در دوبعد: حرکت نسبی

مسئله–۲۱:



$\vec{V} = 3.2\hat{i}$: سرعت آب رودخانه نسبت به ساحل

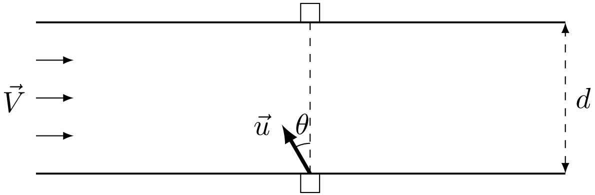
$\vec{u} = 6.4(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$: سرعت قایق نسبت به آب رودخانه

$\vec{v} = (3.2 - 6.4\sin\theta)\hat{i} + 6.4\cos\theta\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$: سرعت قایق نسبت به ساحل

اگر قایق بخواهد مستقیم به نقطه مقابل آن طرف رودخانه حرکت کند، باید مولفه‌ی افقی سرعت آن برابر صفر باشد،

$$v_x = 0 \Rightarrow 3.2 - 6.4\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

مسئله–۲۱:



$$\vec{V} = 3.2\hat{i}$$: سرعت آب رودخانه نسبت به ساحل

$$\vec{u} = 6.4(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$$: سرعت قایق نسبت به آب رودخانه

$$\vec{v} = 6.4\cos\theta\hat{j} = v_y\hat{j}$$: سرعت قایق نسبت به ساحل

با استفاده از مولفه‌ی قائم سرعت،

$$d = v_y t = 0 \Rightarrow 6.4 = (6.4\cos 30)t \Rightarrow t = 2/\sqrt{3} = 1.15 \text{ h}$$