فیزیک ۱
کار و انرژی جنبشی

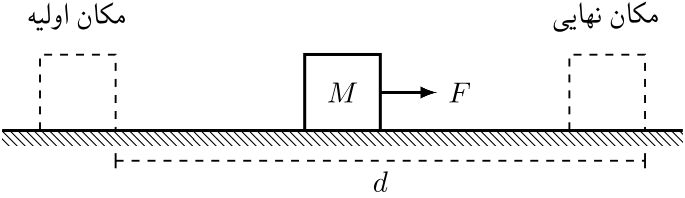
محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

کار نیروی ثابت

مطابق شکل ذره‌ای به جرم M تحت تاثیر نیروی ثابت افقی F بر روی سطح بدون اصطکاک به اندازه d جابجا می‌شود.



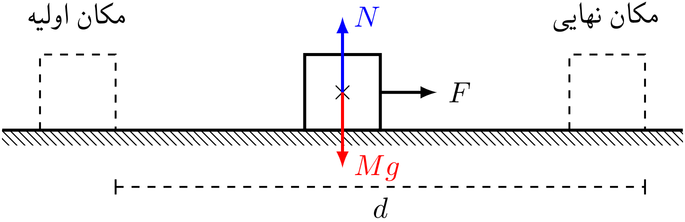
کار نیروی F وقتی جسم M به اندازه d در امتداد نیرو جابجا می‌شود، برابر است با

$$W_F = Fd > 0$$

کار نیروی ثابت

کار نیروی F وقتی جسم M به اندازه d در امتداد نیرو جابجا می‌شود، برابر است با

$$W_F = Fd$$



نبروی وزن Mg و نیروی عکس‌العمل سطح N هیچ نقشی بر جابجایی ذره در امتداد افق ندارند، بنابراین کاری بوسیله نیروهای وزن و عکس‌العمل سطح انجام نمی‌شود.

$$W_N = W_{Mg} = 0$$

کار نیروی ثابت

کار نیروی F وقتی جسم M به اندازه d در امتداد نیرو جابجا می‌شود، برابر است با

$$W_F = Fd$$

نیروی وزن Mg و نیروی عکس‌العمل سطح N هیچ نقشی بر جابجایی ذره در امتداد افق ندارند، بنابراین کاری بوسیله نیروهای وزن و عکس‌العمل سطح انجام نمی‌شود.

$$W_N = W_{Mg} = 0$$

از نتایج بالا می‌توان استدلال کرد که کار انجام شده بر روی یک ذره را می‌توان با ضرب نقطه‌ای نیرو در بردار جابجایی نمایش داد،

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\hat{i} \cdot d\hat{i} = Fd(\hat{i} \cdot \hat{i}) = Fd > 0$$

$$N = Mg : \quad W_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = Mg\hat{j} \cdot d\hat{i} = Mgd(\hat{j} \cdot \hat{i}) = 0$$

$$W_{Mg} = M\vec{g} \cdot \vec{d} = -Mg\hat{j} \cdot d\hat{i} = -Mgd(\hat{j} \cdot \hat{i}) = 0$$

کار نیروی ثابت

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\hat{i} \cdot d\hat{i} = Fd(\hat{i} \cdot \hat{i}) = Fd > 0$$

$$N = Mg: \quad W_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = Mg\hat{j} \cdot d\hat{i} = Mgd(\hat{j} \cdot \hat{i}) = 0$$

$$W_{Mg} = \vec{M}g \cdot \vec{d} = -Mg\hat{j} \cdot d\hat{i} = -Mgd(\hat{j} \cdot \hat{i}) = 0$$

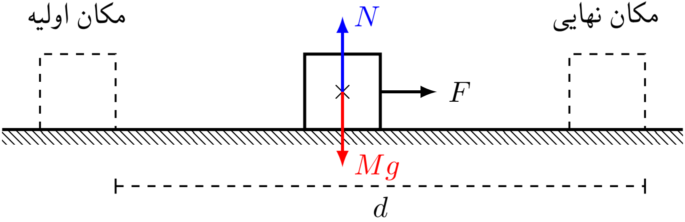
کار کمیتی اسکالر است و کار کل برابر است با جمع کار انجام شده‌ی تمامی نیروی وارد بر ذره می‌باشد.

$$W_{\text{کل}} = W_F + W_N + W_{Mg}$$
$$W_{\text{کل}} = Fd + 0 + 0$$
$$W_{\text{کل}} = Fd$$

کار نیروی ثابت

کار کمیتی اسکالر است و کار کل برابر است با جمع کار انجام شده‌ی تمامی نیروی وارد بر ذره می‌باشد.

$$W_{\text{کل}} = Fd$$



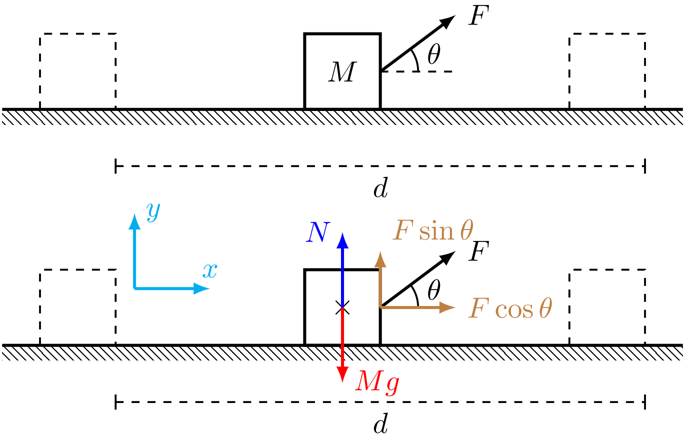
قانون دوم نیوتن

$$\sum F_x = Ma \Rightarrow F = Ma, \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N = Mg$$

$$W_{\text{کل}} = Fd = Mad$$

کار نیروی ثابت

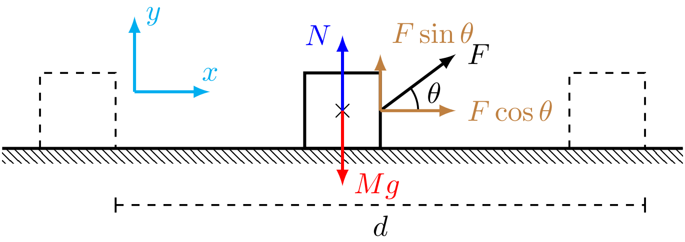
مسئله اول:



$$\vec{F} = \hat{i}F\cos\theta + \hat{j}F\sin\theta, \quad \vec{N} = \hat{j}(Mg - F\sin\theta), \quad \vec{M}g = -\hat{j}Mg$$

کار نیروی ثابت

مسئله اول:



$$\vec{F} = \hat{i}F\cos\theta + \hat{j}F\sin\theta, \quad \vec{N} = \hat{j}(Mg - F\sin\theta), \quad \vec{Mg} = -\hat{j}Mg, \quad \vec{d} = \hat{i}d$$

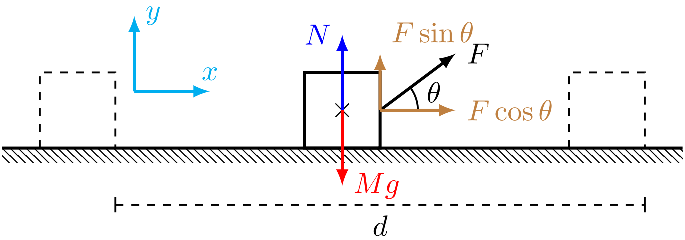
$$W_F = \vec{F}\cdot\vec{d} = (\hat{i}F\cos\theta + \hat{j}F\sin\theta)\cdot d\hat{i} = Fd\cos\theta > 0$$

$$N = Mg - F\sin\theta : \quad W_N = \vec{N}\cdot\vec{d} = \hat{j}(Mg - F\sin\theta)\cdot d\hat{i} = 0$$

$$W_{Mg} = \vec{Mg}\cdot\vec{d} = -Mg\hat{j}\cdot d\hat{i} = 0$$

کار نیروی ثابت

مسئله اول:



$$W_F = \vec{F}\cdot\vec{d} = (\hat{i}F\cos\theta + \hat{j}F\sin\theta)\cdot d\hat{i} = Fd\cos\theta > 0$$

$$N = Mg - F\sin\theta : \quad W_N = \vec{N}\cdot\vec{d} = \hat{j}(Mg - F\sin\theta)\cdot d\hat{i} = 0$$

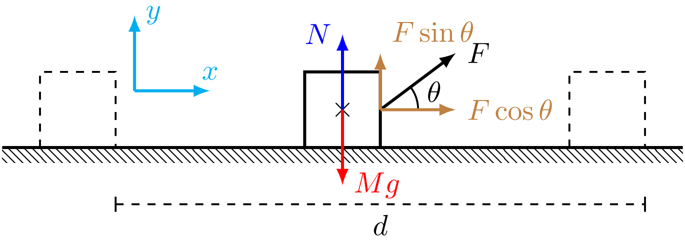
$$W_{Mg} = \vec{Mg}\cdot\vec{d} = -Mg\hat{j}\cdot d\hat{i} = 0$$

$$W_{\text{کل}} = W_F + W_N + W_{Mg} = Fd\cos\theta$$

کار نیروی ثابت

مسئله اول:

$$W_{\text{کل}} = W_F + W_N + W_{Mg} = Fd\cos\theta$$



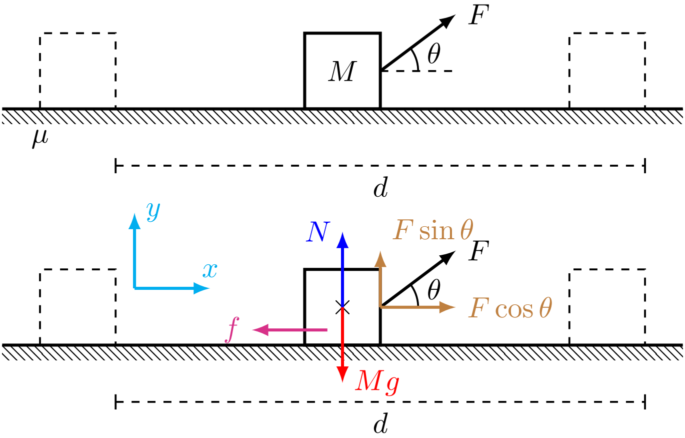
قانون دوم نیوتن

$$\sum F_x = Ma \Rightarrow F\cos\theta = Ma, \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N = Mg - F\sin\theta$$

$$W_{\text{کل}} = Fd\cos\theta = \left(\sum F_x\right) d = Mad$$

کار نیروی ثابت

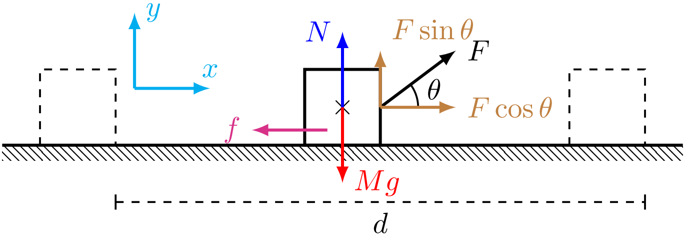
مسئله دوم:



$$\vec{F} = \hat{i}F\cos\theta + \hat{j}F\sin\theta,\ \ \vec{N} = \hat{j}(Mg - F\sin\theta),\ \ \vec{Mg} = -\hat{j}Mg,\ \ \vec{f} = -\mu N\hat{i}$$

کار نیروی ثابت

مسئله دوم:



$$\vec{F} = \hat{i}F\cos\theta + \hat{j}F\sin\theta,\ \vec{N} = \hat{j}(Mg - F\sin\theta),\ \vec{Mg} = -\hat{j}Mg,\ \vec{f} = -\mu N\hat{i}$$

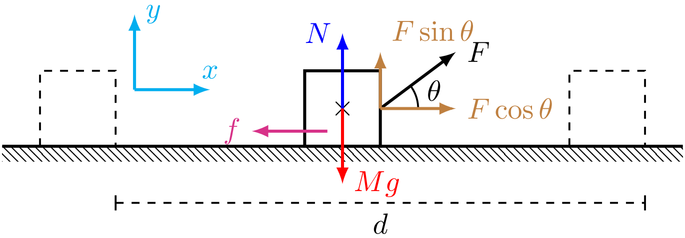
$$W_F = \vec{F}\cdot\vec{d} = (\hat{i}F\cos\theta + \hat{j}F\sin\theta)\cdot d\hat{i} = Fd\cos\theta > 0$$

$$W_N = \vec{N}\cdot\vec{d} = \hat{j}(Mg - F\sin\theta)\cdot d\hat{i} = 0, \quad W_{Mg} = \vec{Mg}\cdot\vec{d} = -Mg\hat{j}\cdot d\hat{i} = 0$$

$$W_f = \vec{f}\cdot\vec{d} = -\mu(Mg - F\sin\theta)d < 0$$

کار نیروی ثابت

مسئله دوم:



$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = (\hat{i} F \cos\theta + \hat{j} F \sin\theta) \cdot d\hat{i} = F d \cos\theta > 0$$

$$W_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = \hat{j}(Mg - F\sin\theta) \cdot d\hat{i} = 0, \quad W_{Mg} = \vec{M}g \cdot \vec{d} = -Mg\hat{j} \cdot d\hat{i} = 0$$

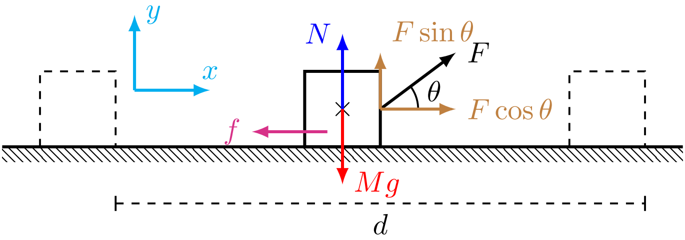
$$W_f = \vec{f} \cdot \vec{d} = -\mu(Mg - F\sin\theta) d < 0$$

$$W_{\text{کل}} = W_F + W_N + W_{Mg} + W_f = [F\cos\theta - \mu(Mg - F\sin\theta)]d$$

کار نیروی ثابت

مسئله دوم:

$$W_{\text{کل}} = W_F + W_N + W_{Mg} + W_f = [F\cos\theta - \mu(Mg - F\sin\theta)]d$$



قانون دوم نیوتن

$$\sum F_x = Ma \Rightarrow F\cos\theta - \mu(Mg - F\sin\theta) = Ma$$

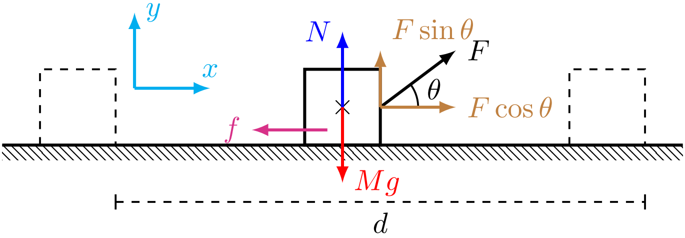
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = Mg - F\sin\theta$$

$$W_{\text{کل}} = [F\cos\theta - \mu(Mg - F\sin\theta)]d = \left(\sum F_x\right) d = Mad$$

کار نیروی ثابت

مسئله دوم:

$$W_{\text{کل}} = [F\cos\theta - \mu(Mg - F\sin\theta)]d = Mad$$



حالت خاص: اگر ذره با سرعت ثابت بین مکان اولیه تا مکان نهایی جابجا شود،

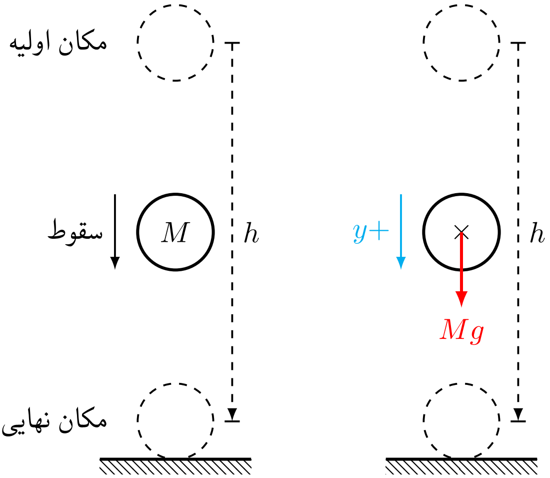
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F\cos\theta - \mu(Mg - F\sin\theta) = 0$$

و

$$W_{\text{کل}} = \left(\sum F_x\right) d = [F\cos\theta - \mu(Mg - F\sin\theta)]d = 0$$

کار نیروی ثابت

مسئله سوم:



$$\vec{Mg} = Mg\hat{j}$$

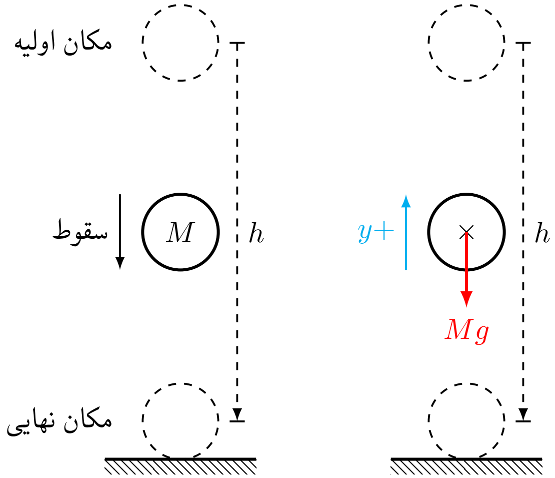
$$\vec{h} = h\hat{j}$$

$$W_{Mg} = \vec{Mg} \cdot \vec{h} = Mgh$$

$$W_{Mg} = Mgh$$

کار نیروی ثابت

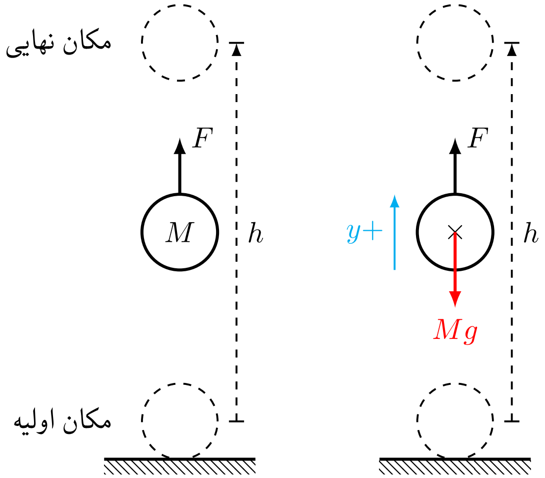
مسئله سوم:



$$\vec{Mg} = -Mg\hat{j}$$
$$\vec{h} = -h\hat{j}$$
$$W_{Mg} = \vec{Mg} \cdot \vec{h} = Mgh$$
$$W_{Mg} = Mgh$$

کار نیروی ثابت

مسئله چهارم:



$$\vec{F} = F\hat{j}$$

$$\vec{Mg} = -Mg\hat{j}$$

$$\vec{h} = h\hat{j}$$

$$W_F = \vec{F}\cdot\vec{h} = Fh$$

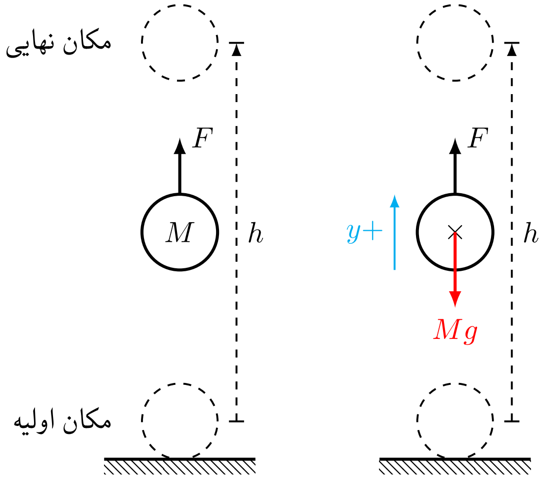
$$W_{Mg} = \vec{Mg}\cdot\vec{h} = -Mgh$$

$$W_{\text{کل}} = W_F + W_{Mg}$$

$$W_{\text{کل}} = (F - Mg)h$$

کار نیروی ثابت

مسئله چهارم:



$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{h} = Fh$$

$$W_{Mg} = \vec{M}g \cdot \vec{h} = -Mgh$$

$$W_{\text{کل}} = (F - Mg)h$$

قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_y = Ma$$

$$Ma = F - Mg$$

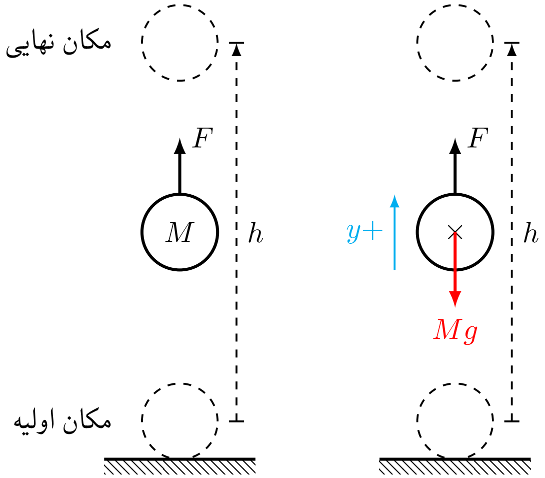
بنابراین

$$W_{\text{کل}} = (F - Mg)h = Mah$$

$$= \left(\sum F_y\right) h$$

کار نیروی ثابت

مسئله چهارم:



$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{h} = Fh$$

$$W_{Mg} = \vec{M}g \cdot \vec{h} = -Mgh$$

$$W_{\text{کل}} = (F - Mg)h = Mah$$

$$= \left(\sum F_y\right) h$$

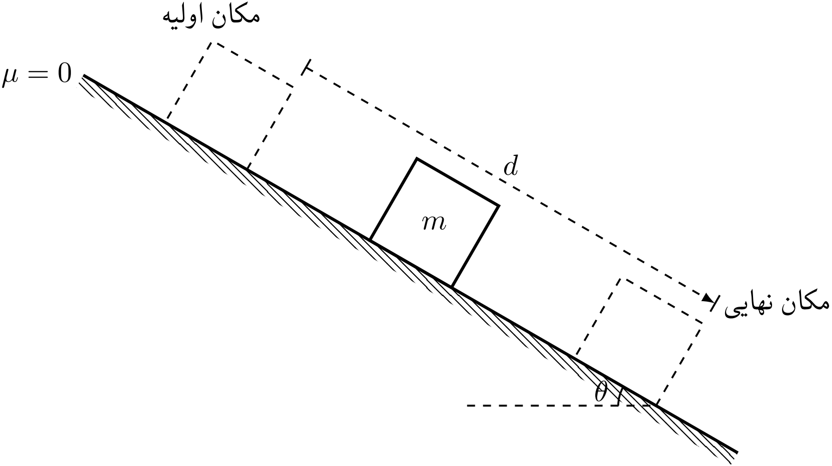
حالت خاص: اگر ذره با سرعت ثابت بطرف بالا حرکت کند،

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$W_{\text{کل}} = 0$$

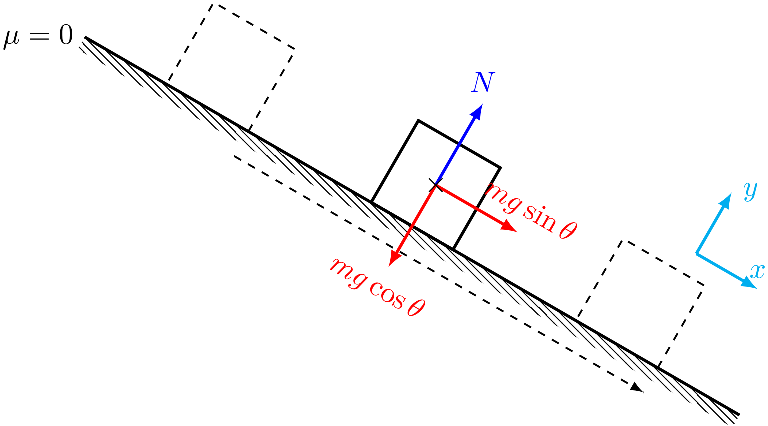
کار نیروی ثابت

مسئله پنجم:



کار نیروی ثابت

مسئله پنجم:



$$\vec{mg} = mg(\hat{i}\sin\theta - \hat{j}\cos\theta), \quad \vec{N} = \hat{j}mg\cos\theta, \quad \vec{d} = d\hat{i}$$

کار نیروی ثابت

مسئله پنجم:

$$\vec{mg} = mg(\hat{i}\sin\theta - \hat{j}\cos\theta), \quad \vec{N} = \hat{j}mg\cos\theta, \quad \vec{d} = d\hat{i}$$

$$W_{mg} = \vec{mg}\cdot\vec{d} = mgd(\hat{i}\sin\theta - \hat{j}\cos\theta)\cdot\hat{i} = mgd\sin\theta > 0$$

$$W_N = \vec{N}\cdot\vec{d} = mgd\cos\theta(\hat{j}\cdot\hat{i}) = 0$$

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N = mgd\sin\theta$$

قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg\sin\theta = ma \Rightarrow a = g\sin\theta$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

کار نیروی ثابت

مسئله پنجم:

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N = mgd\sin\theta$$

قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg\sin\theta = ma \Rightarrow a = g\sin\theta$$

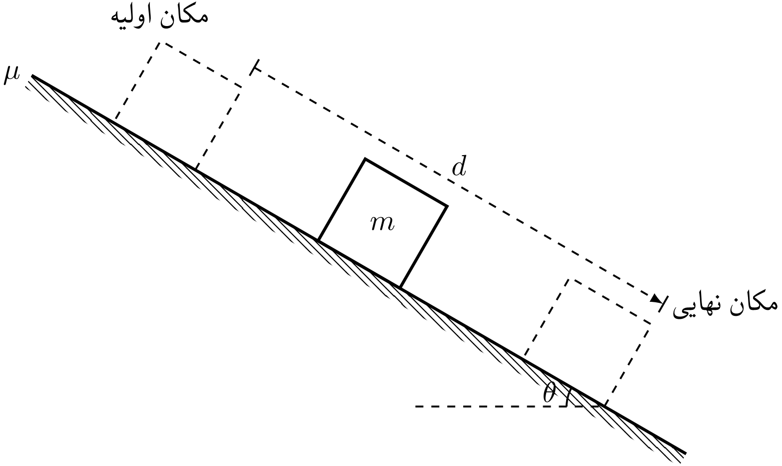
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

بنابراین

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N = mgd\sin\theta = \left(\sum F_x\right) d = mad$$

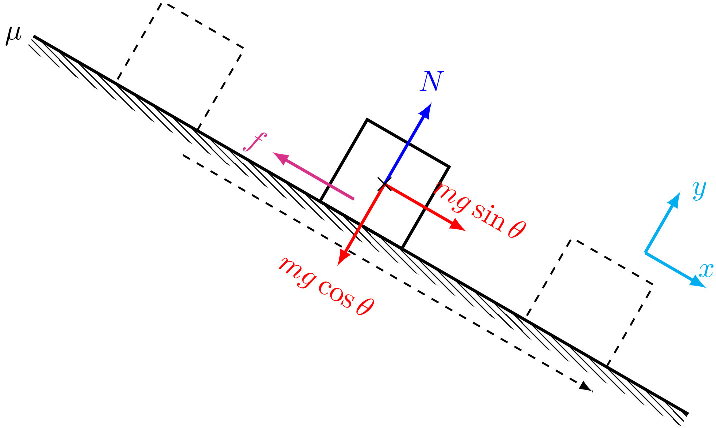
کار نیروی ثابت

مسئله ششم:



کار نیروی ثابت

مسئله ششم:



$$\vec{mg} = mg(\hat{i}\sin\theta - \hat{j}\cos\theta), \quad \vec{N} = \hat{j}mg\cos\theta, \quad \vec{f} = -\mu N\hat{i}, \quad \vec{d} = d\hat{i}$$

کار نیروی ثابت

مسئله ششم:

$$\vec{mg} = mg(\hat{i}\sin\theta - \hat{j}\cos\theta), \quad \vec{N} = \hat{j}mg\cos\theta, \quad \vec{f} = -\mu N\hat{i}, \quad \vec{d} = d\hat{i}$$

$$W_{mg} = \vec{mg}\cdot\vec{d} = mgd(\hat{i}\sin\theta - \hat{j}\cos\theta)\cdot\hat{i} = mgd\sin\theta > 0$$

$$W_N = \vec{N}\cdot\vec{d} = mgd\cos\theta(\hat{j}\cdot\hat{i}) = 0$$

$$W_f = \vec{f}\cdot\vec{d} = -\mu mgd\cos\theta(\hat{i}\cdot\hat{i}) = -\mu mgd\cos\theta < 0$$

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_f = mgd\sin\theta - \mu mgd\cos\theta = mg(\cos\theta - \mu\sin\theta)d$$

قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg(\cos\theta - \mu\sin\theta) = ma \Rightarrow a = g(\cos\theta - \mu\sin\theta)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

کار نیروی ثابت

مسئله ششم:

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_f = mg(\cos\theta - \mu\sin\theta)d$$

قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow mg(\cos\theta - \mu\sin\theta) = ma \Rightarrow a = g(\cos\theta - \mu\sin\theta)$$

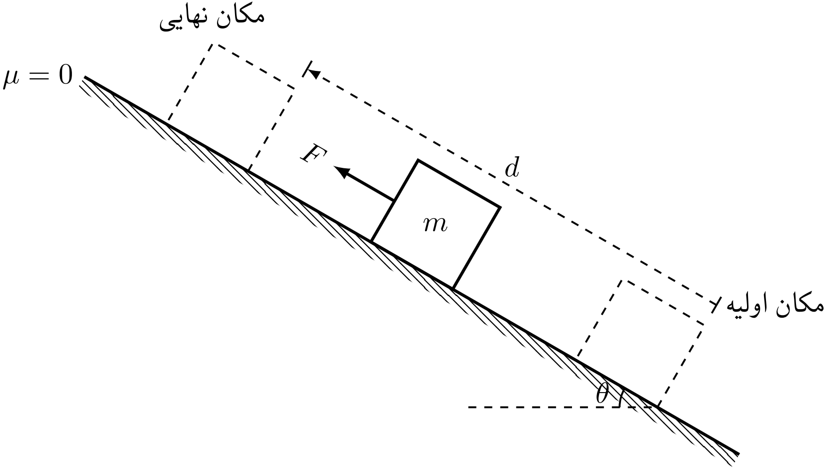
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

بنابراین

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_f = mg(\cos\theta - \mu\sin\theta)d = \left(\sum F_x\right)d = mad$$

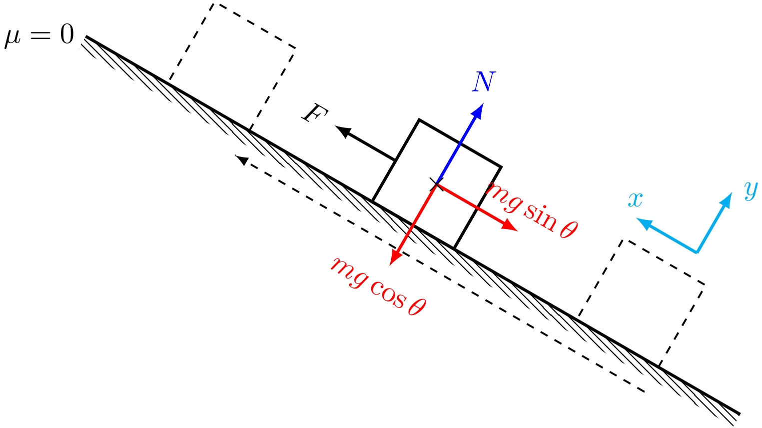
کار نیروی ثابت

مسئله هفتم:



کار نیروی ثابت

مسئله هفتم:



$$\vec{mg} = -mg(\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta), \quad \vec{N} = \hat{j}mg\cos\theta, \quad \vec{F} = F\hat{i}, \quad \vec{d} = d\hat{i}$$

کار نیروی ثابت

مسئله هفتم:

$$\vec{mg} = -mg(\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta), \quad \vec{N} = \hat{j}mg\cos\theta, \quad \vec{F} = F\hat{i}, \quad \vec{d} = d\hat{i}$$

$$W_{mg} = \vec{mg}\cdot\vec{d} = -mgd(\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)\cdot\hat{i} = -mgd\sin\theta < 0$$

$$W_N = \vec{N}\cdot\vec{d} = mgd\cos\theta(\hat{j}\cdot\hat{i}) = 0$$

$$W_F = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd(\hat{i}\cdot\hat{i}) = Fd > 0$$

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_F = -mgd\sin\theta + Fd = (F - mg\sin\theta)d$$

قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F - mg\sin\theta = ma \Rightarrow a = F/m - g\sin\theta$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

کار نیروی ثابت

مسئله هفتم:

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_F = (F - mg\sin\theta)d$$

قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F - mg\sin\theta = ma \Rightarrow a = F/m - g\sin\theta$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

بنابراین

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_F = (F - mg\sin\theta)d = \left(\sum F_x\right) d = mad$$

کار نیروی ثابت

مسئله هفتم:

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_F = (F - mg\sin\theta)d = \left(\sum F_x\right) d = mad$$

حالت خاص: اگر ذره با سرعت ثابت بطرف بالا حرکت کندیعنی

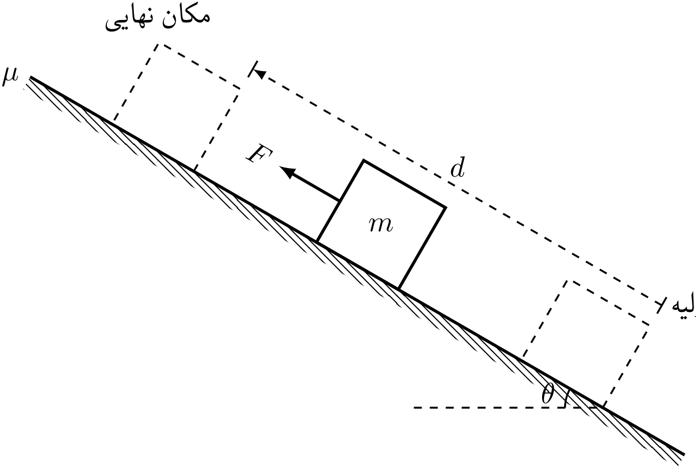
$$\sum F_x = F - mg\sin\theta = a = 0$$

و

$$W_{\text{کل}} = 0$$

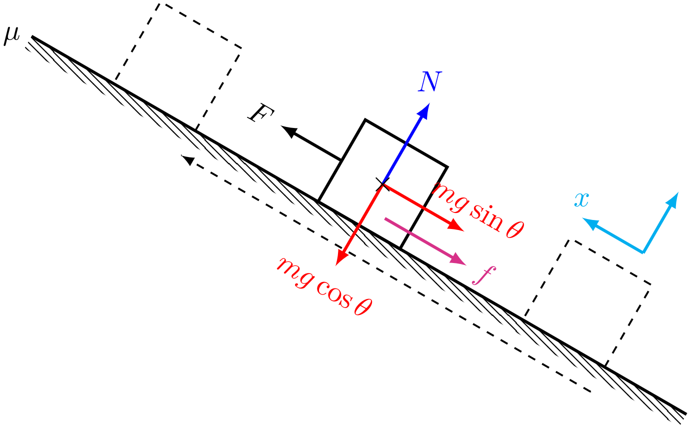
کار نیروی ثابت

مسئله هفتم:



کار نیروی ثابت

مسئله هفتم:



$$\vec{mg} = -mg(\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta), \quad \vec{N} = \hat{j}mg\cos\theta, \quad \vec{F} = F\hat{i}, \quad \vec{f} = -\mu N\hat{i}$$

مسئله هفتم:

$$\vec{mg} = -mg(\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta), \quad \vec{N} = \hat{j}mg\cos\theta, \quad \vec{F} = F\hat{i}$$
$$\vec{f} = -\mu N\hat{i}, \quad \vec{d} = d\hat{i}$$

$$W_{mg} = \vec{mg}\cdot\vec{d} = -mgd(\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta)\cdot\hat{i} = -mgd\sin\theta < 0$$

$$W_N = \vec{N}\cdot\vec{d} = mgd\cos\theta(\hat{j}\cdot\hat{i}) = 0$$

$$W_F = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd(\hat{i}\cdot\hat{i}) = Fd > 0$$

$$W_f = \vec{f}\cdot\vec{d} = -\mu mgd\cos\theta(\hat{i}\cdot\hat{i}) = -\mu mgd\cos\theta < 0$$

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_F + W_f = (F - mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta)d$$

کار نیروی ثابت

مسئله هفتم:

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_F + W_f = (F - mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta)d$$

قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F - mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma$$

$$a = F/m - g\sin\theta - \mu g\cos\theta$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_F + W_f = (F - mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta)d = \left(\sum F_x\right) d$$

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_F + W_f = \left(\sum F_x\right) d = mad$$

کار نیروی ثابت

مسئله هفتم:

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_F + W_f = (F - mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta)d = \left(\sum F_x\right) d$$

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_N + W_F + W_f = \left(\sum F_x\right) d = mad$$

حالت خاص: اگر ذره با سرعت ثابت بطرف بالا حرکت کندیعنی

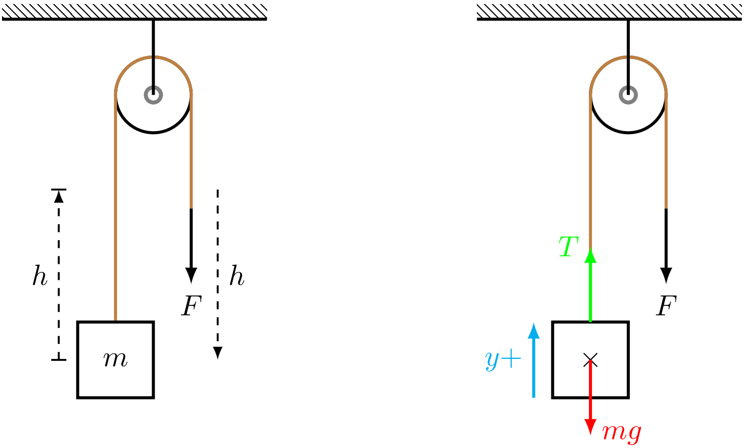
$$\sum F_x = F - mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = a = 0$$

و

$$W_{\text{کل}} = 0$$

کار نیروی ثابت

مسئله هشتم:



$$\vec{mg} = -mg\hat{j}, \quad \vec{T} = F\hat{j}, \quad \vec{h} = h\hat{j}$$

کار نیروی ثابت

مسئله هشتم:

$$\vec{mg} = -mg\hat{j}, \quad \vec{T} = F\hat{j}, \quad \vec{h} = h\hat{j}$$

$$W_{mg} = \vec{mg} \cdot \vec{h} = -mgh(\hat{j} \cdot \hat{j}) = -mgh < 0$$

$$W_T = \vec{T} \cdot \vec{h} = Fh(\hat{j} \cdot \hat{j}) = Fh > 0$$

$$W_F = (-F)\hat{j} \cdot (-h\hat{j}) = Fh(\hat{j} \cdot \hat{j}) = Fh > 0$$

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_T = (F - mg)h$$

قانون دوم نیوتن:

$$T = F$$

$$\sum F_y = ma \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow F - mg = ma$$

کار نیروی ثابت

مسئله هشتم:

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_T = (F - mg)h$$

$$\sum F_y = ma \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow F - mg = ma$$

بنابراین

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_T = (F - mg)h = \left(\sum F_y\right) h = mah$$

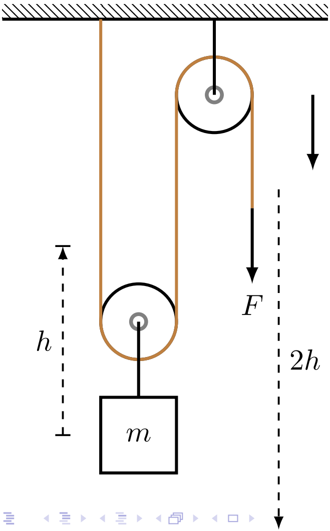
حالت خاص: اگر جرم m با سرعت ثابت ارتفاع h را طی کند،

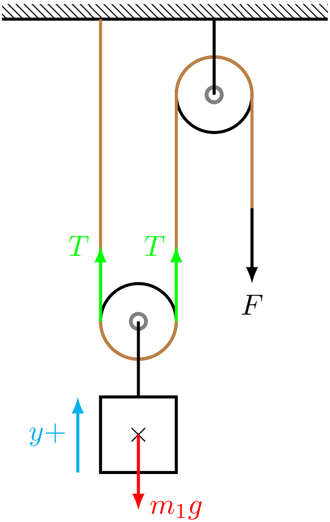
$$\sum F_y = ma = F - mg = 0$$

$$W_{\text{کل}} = 0$$

کار نیروی ثابت

مسئله نهم:





کار نیروی ثابت

مسئله نهم:

$$\vec{mg} = -mg\hat{j}, \quad 2\vec{T} = 2F\hat{j}, \quad \vec{h} = h\hat{j}, \quad 2\vec{h} = -2h\hat{j}, \quad \vec{F} = -F\hat{j}$$

$$W_{mg} = \vec{mg} \cdot \vec{h} = -mgh(\hat{j} \cdot \hat{j}) = -mgh < 0$$

$$W_{2T} = 2\vec{T} \cdot \vec{h} = 2Fh(\hat{j} \cdot \hat{j}) = 2Fh > 0$$

$$W_F = \vec{F} \cdot 2\vec{h} = (-F\hat{j}) \cdot (-2h\hat{j}) 2Fh(\hat{j} \cdot \hat{j}) = 2Fh > 0$$

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_{2T} = (2F - mg)h$$

قانون دوم نیوتن:

$$T = F$$

$$\sum F_y = ma \Rightarrow 2T - mg = ma \Rightarrow 2F - mg = ma$$

کار نیروی ثابت

مسئله نهم:

$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_{2T} = (2F - mg)h$$

$$\sum F_y = ma \Rightarrow 2T - mg = ma \Rightarrow 2F - mg = ma$$

بنابراین

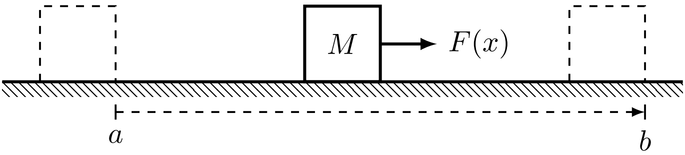
$$W_{\text{کل}} = W_{mg} + W_{2T} = (2F - mg)h = \left(\sum F_y\right) h = mah$$

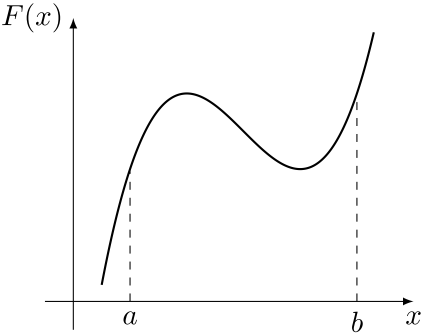
حالت خاص: اگر جرم m با سرعت ثابت ارتفاع h را طی کند،

$$\sum F_y = ma = 2F - mg = 0$$

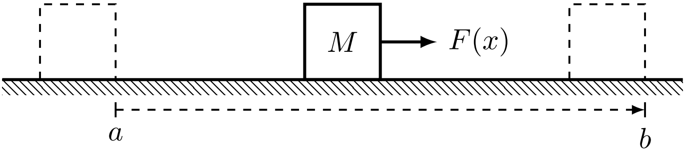
$$W_{\text{کل}} = 0$$

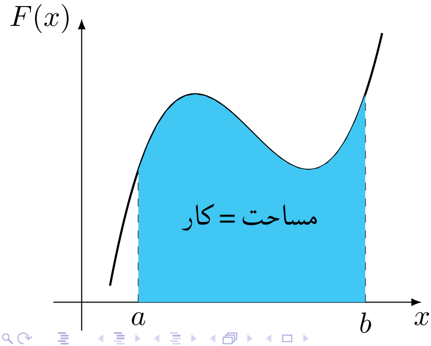
کار نیروی متغیر یک بعدی





کار نیروی متغیر یک بعدی



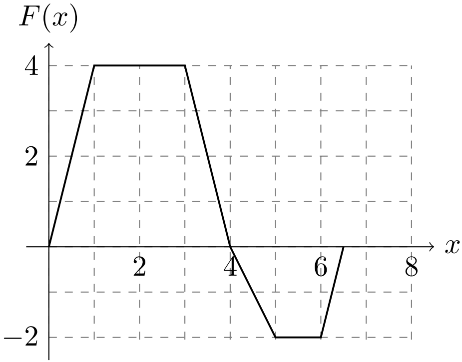


- کار نیروی $F(x)$ بین دو نقطه a و b برابر با مساحت زیر نمودار در بازه‌ی تحت بررسی است.
- مساحت زیر نمودار از نقطه نظر ریاضی برابر با انتگرال تابع $F(x)$ در بازه‌ی بین a تا b است،

$$\text{کار} = \text{مساحت} = W = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

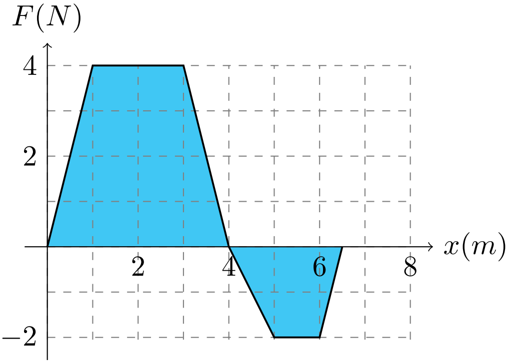
کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله دهم



$$W = \int_0^{6.5} F(x)\mathrm{d}x$$

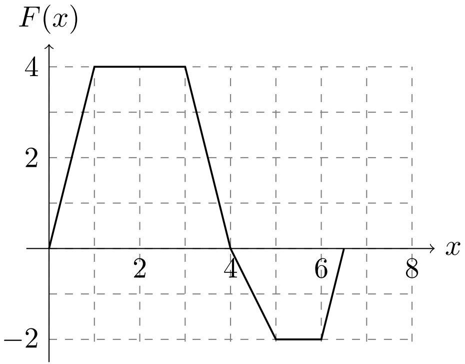
مسئله دهم



$$W=\int_0^{6.5}F(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{2}(4+2)+\frac{-2}{2}(2.5+1)=12-3.5=8.5\,J$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله دهم



$$1 \leq x \leq 3: \; F(x) = 4$$

$$3 \leq x \leq 4: \; F(x) = 4 - 4(x-3)$$

$$4 \leq x \leq 5: \; F(x) = -2(x-4)$$

$$5 \leq x \leq 6: \; F(x) = -2$$

$$0 \leq x \leq 1: \; F(x) = 4x$$

$$6 \leq x \leq 6.5: \; F(x) = -2 + 4(x-6)$$

مسئله دهم

$$W=\int_0^{6.5}F(x)\mathrm{d}x=\int_0^{1}F(x)\mathrm{d}x+\int_1^{3}F(x)\mathrm{d}x+\int_3^{4}F(x)\mathrm{d}x+\int_4^{5}F(x)\mathrm{d}x+\int_5^{6}F(x)\mathrm{d}x+\int_6^{6.5}F(x)\mathrm{d}x$$

$$0\leq x\leq 1:\ \ F(x)=4x$$

$$W_1=\int_0^1 4x\mathrm{d}x=4\int_0^1 x\mathrm{d}x=4[\frac{1}{2}x^2]_0^1=2$$

$$1\leq x\leq 3:\ \ F(x)=4$$

$$W_2=\int_1^3 4\mathrm{d}x=4\int_1^3 \mathrm{d}x=4[x]_1^3=8$$

مسئله دهم

$$3 \leq x \leq 4: \;\; F(x) = 4 - 4(x-3)$$

$$W_3 = \int_3^4 [4 - 4(x-3)]\mathrm{d}x = 4\int_3^4 (4-x)\mathrm{d}x = 4[4x - \frac{1}{2}x^2]_3^4 = 2$$

$$4 \leq x \leq 5: \;\; F(x) = -2(x-4)$$

$$W_4 = -2\int_4^5 (x-4)\mathrm{d}x = -2[\frac{1}{2}x^2 - 4x]_4^5 = -1$$

$$5 \leq x \leq 6: \;\; F(x) = -2$$

$$W_5 = -2\int_5^6 \mathrm{d}x = -2[x]_4^5 = -2$$

مسئله دهم

$$6 \leq x \leq 6.5: \; F(x) = -2 + 4(x-6) = 4x - 26$$

$$W_6 = \int_6^{6.5} [4x - 26]\mathrm{d}x = [2x^2 - 26x]_6^{6.5} = -0.5$$

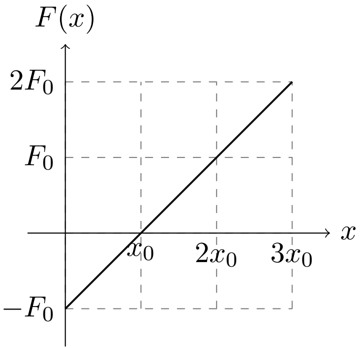
$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6$$

$$W = 2 + 8 + 2 - 1 - 2 - 0.5 = 8.5 \; J$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله یازدهم

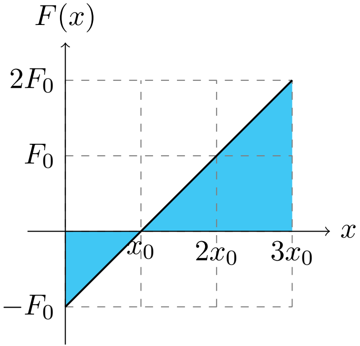
$$F(x) = F_0(x/x_0 - 1), \quad W_F = ?, \quad 0 \leq x \leq 3x_0$$



کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله یازدهم

$$F(x) = F_0(x/x_0 - 1), \quad W_F = ?, \quad 0 \le x \le 3x_0$$



$$W = -\frac{F_0}{2}x_0 + \frac{2F_0}{2}2x_0 = \frac{3}{2}F_0x_0$$

مسئله یازدهم

$$F(x) = F_0(x/x_0 - 1), \quad W_F = ?, \quad 0 \leq x \leq 3x_0$$

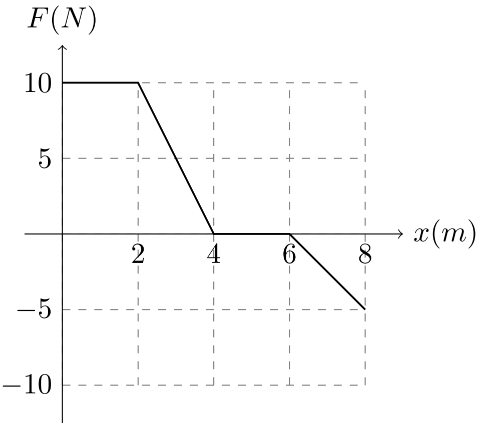
$$W = \int_0^{3x_0} F_0 \left(\frac{x}{x_0} - 1 \right) \mathrm{d}x$$

$$W = F_0 \left[\frac{x^2}{2x_0} - x \right]_0^{3x_0}$$

$$W = F_0 \left[\frac{9x_0}{2} - 3x_0 \right] = \frac{3}{2} F_0 x_0$$

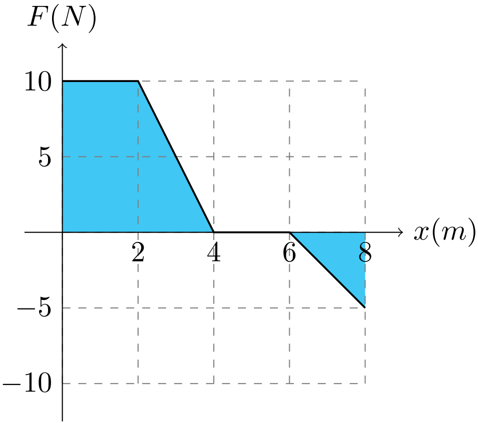
مسئله دوازدهم

$$W_F = ?, \quad 0 \le x \le 8$$



کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله دوازدهم



$$W = \frac{10}{2}(2+4) - \frac{5}{2}2 = 25 \text{ J}$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله دوازدهم

$$F(x) = \begin{cases} 10, & 0 \leq x \leq 2 \\ 20 - 5x, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & 4 \leq x \leq 6 \\ 15 - (5/2)x, & 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

$$W = \int_0^8 F(x)\mathrm{d}x$$

$$W = 10\int_0^2 \mathrm{d}x + \int_2^4 (20 - 5x)\mathrm{d}x + 0\int_4^6 \mathrm{d}x + \int_6^8 (15 + 5x/2)\mathrm{d}x$$

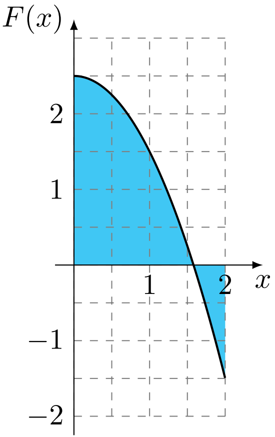
$$W = 10[x]_0^2 + [20x - \frac{5}{2}x^2]_2^4 + 0 + [15x - \frac{5}{4}x^2]_6^8$$

$$W = 20 + 10 + 0 - 5 = 25\,\mathrm{J}$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله سیزدهم

$$F(x) = 2.5 - x^2, \quad [x] = \mathrm{m}, \quad [F] = \mathrm{N}, \quad W = ?, \quad 0 \le x \le 2$$



کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله سیزدهم

$$F(x) = 2.5 - x^2, \quad [x] = \mathrm{m}, \quad [F] = \mathrm{N}$$

$$W = ?, \quad 0 \leq x \leq 2$$

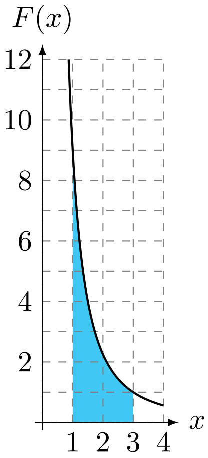
$$W = \int_0^2 (2.5 - x^2)\mathrm{d}x$$

$$W = \left[\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{7}{3}\ \mathrm{J}$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله پانزدهم

$$F(x) = 9/x^2, \quad [x] = \mathrm{m}, \quad [F] = \mathrm{N}, \quad W = ?, \quad 1 \leq x \leq 3$$



مسئله پانزدهم

$$F(x) = 9/x^2, \quad [x] = \mathrm{m}, \quad [F] = \mathrm{N}, \quad W = ?, \quad 1 \leq x \leq 3$$

$$W = ?, \quad 0 \leq x \leq 2$$

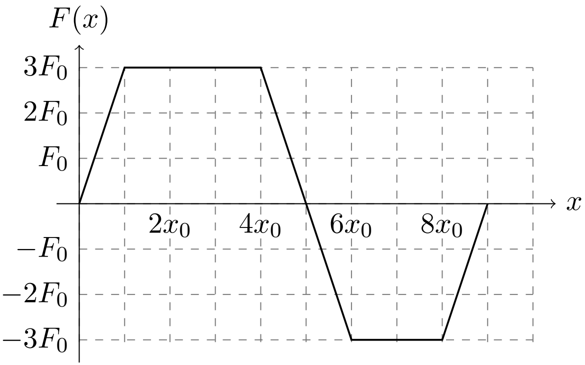
$$W = \int_1^3 \frac{9}{x^2} \mathrm{d}x$$

$$W = \left[-\frac{9}{x} \right]_1^3 = 6 \text{ J}$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

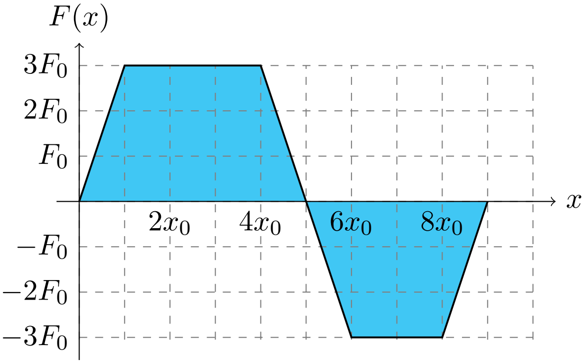
مسئله دهم

$$W_F = ?, \quad 0 \le x \le 9x_0$$



کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله دهم



$$W = \frac{3F_0}{2}(3x_0 + 5x_0) - \frac{3F_0}{2}(2x_0 + 4x_0) = 12F_0x_0 - 9F_0x_0 = 3F_0x_0$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله دهم

$$F(x)=\begin{cases}(3F_0/x_0)x, & 0\le x\le x_0\\ 3F_0, & x_0\le x\le 4x_0\\ 3F_0-(3F_0/x_0)(x-4x_0), & 4x_0\le x\le 6x_0\\ -3F_0, & 6x_0\le x\le 8x_0\\ -3F_0+(3F_0/x_0)(x-8x_0), & 8x_0\le x\le 9x_0\end{cases}$$

$$0\le x\le x_0: \quad W_1=(3F_0/x_0)\int_0^{x_0} x\mathrm{d}x=(3F_0/x_0)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{x_0}=\frac{3}{2}F_0x_0$$

$$x_0\le x\le 4x_0: \quad W_2=3F_0\int_{x_0}^{4x_0}\mathrm{d}x=9F_0x_0$$

$$4x_0\le x\le 6x_0: \quad W_3=3F_0\int_{4x_0}^{6x_0}\mathrm{d}x-(3F_0/x_0)\int_{4x_0}^{6x_0}(x-4x_0)\mathrm{d}x$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله دهم

$$4x_0 \le x \le 6x_0 : \quad W_3 = 3F_0 \int_{4x_0}^{6x_0} \mathrm{d}x - (3F_0/x_0) \int_{4x_0}^{6x_0} (x - 4x_0)\mathrm{d}x$$

$$W_3 = 3F_0[x]_{4x_0}^{6x_0} - (3F_0/x_0) \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x_0 x\right]_{4x_0}^{6x_0}$$

$$W_3 = 6F_0x_0 - (3F_0/2x_0) \left[36x_0^2 - 48x_0^2 - 16x_0^2 + 32x_0^2\right]$$

$$W_3 = 6F_0x_0 - (3F_0/2x_0)4x_0^2 = 0$$

$$6x_0 \le x \le 8x_0 : \quad W_4 = -3F_0 \int_{6x_0}^{8x_0} \mathrm{d}x = -3F_0 \left[x\right]_{6x_0}^{8x_0} = -6F_0x_0$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله دهم

$$8x_0 \le x \le 9x_0: \quad W_5 = -3F_0 \int_{8x_0}^{9x_0} \mathrm{d}x + (3F_0/x_0) \int_{8x_0}^{9x_0} (x - 8x_0)\mathrm{d}x$$

$$W_5 = -3F_0[x]_{8x_0}^{9x_0} + (3F_0/x_0) \left[\frac{1}{2}x^2 - 8x_0 x\right]_{8x_0}^{9x_0}$$

$$W_5 = -3F_0 x_0 + (3F_0/2x_0)[81x_0^2 - 144x_0^2 - 64x_0^2 + 128x_0^2]$$

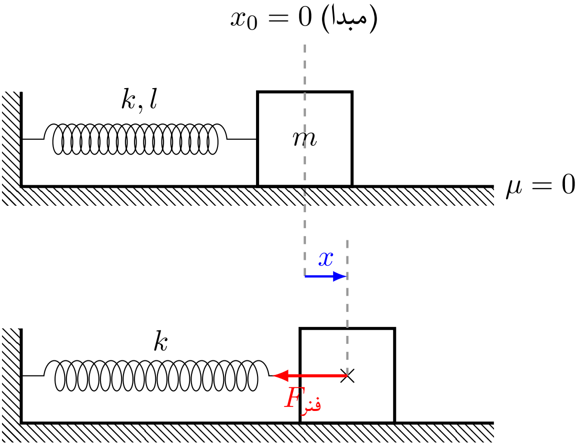
$$W_5 = -3F_0 x_0 + (3F_0/2x_0)x_0^2 = -3F_0 x_0/2$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 3F_0x_0/2 + 9F_0x_0 + 0 - 6F_0x_0 - 3F_0x_0/2$$

$$W = 3F_0 x_0$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

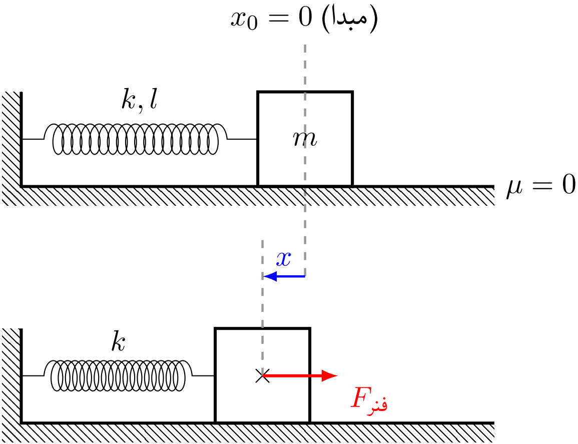
جرم و فنر



$$F_{\text{فنر}} = F_{\text{هوک}} = -kx, \quad [k] = N/m :$$ ثابت فنر

کار نیروی متغیر یک بعدی

جرم و فنر

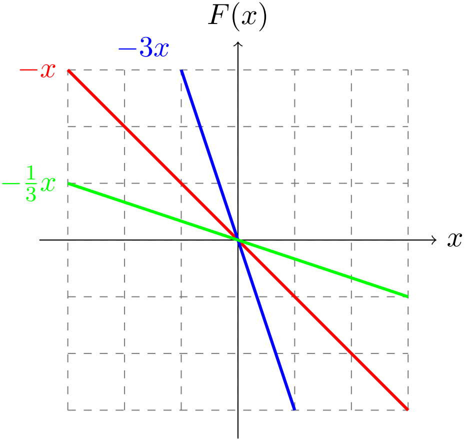


$$F_{\text{فنر}} = F_{\text{هوک}} = -kx$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

جرم و فنر

$$F(x) = -kx$$



کار نیروی متغیر یک بعدی

جرم و فنر

$$F_{\text{فنر}} = F_{\text{هوک}} = -kx, \quad [k] = N/m : \text{ ثابت فنر}$$

$$W_{\text{فنر}} = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\mathrm{d}x$$

$$W_{\text{فنر}} = -k\int_{x_i}^{x_f} x\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$W_{\text{فنر}} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

$$x_i = 0, \quad x_f = x$$

$$\boxed{W_{\text{فنر}}(x) = -\frac{1}{2}kx^2}$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

جرم و فنر

$$F_{\text{فنر}} = F_{\text{هوک}} = -kx, \quad [k] = N/m : \text{ ثابت فنر}$$

$$\boxed{W_{\text{فنر}}(x) = -\frac{1}{2}kx^2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0$$

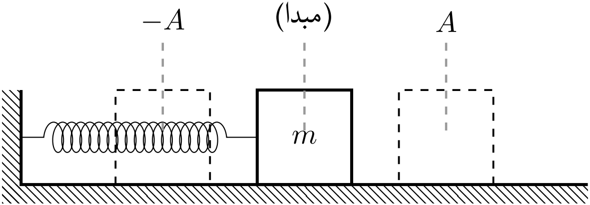
$$\xrightarrow{\div m} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

معادله دیفرانسیلی حرکت $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{یا} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0}$

کار نیروی متغیر یک بعدی

جرم و فنر

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0, \quad x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$



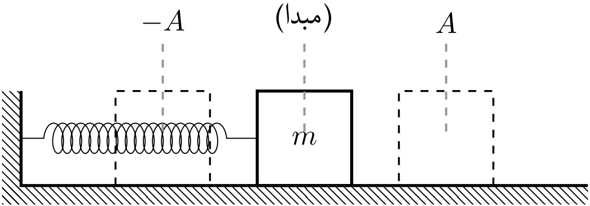
$$x = A\cos(\omega t + \alpha), \quad x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

$$t = 0: \begin{cases} x_0 = A\cos\alpha \\ v_0 = -A\omega\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \\ \alpha = -\tan^{-1}(v_0/x_0\omega) \end{cases}$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

جرم و فنر

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0,\quad x(t=0)=x_0,\quad v(t=0)=v_0$$

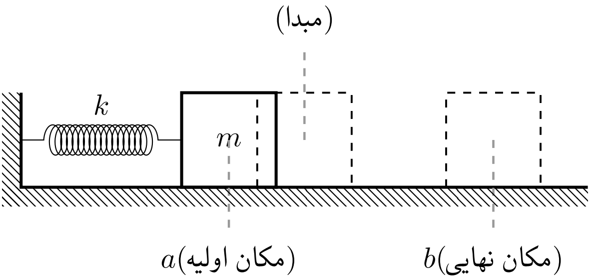


$$x=B\sin(\omega t+\beta),\quad x(t=0)=x_0,\quad v(t=0)=v_0$$

$$t=0:\ \begin{cases}x_0=B\sin\beta\\ v_0=B\omega\cos\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=\sqrt{x_0^2+(v_0/\omega)^2}\\ \beta=\tan^{-1}(x_0\omega/v_0)\end{cases}$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله یازدهم



کار نیروی فنر

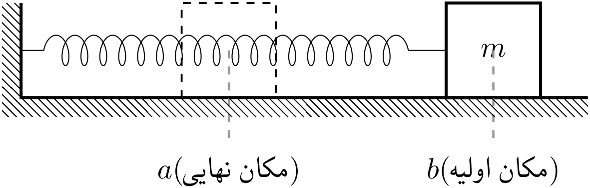
$$W_{a\to b} = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

$$W_{a\to b} = -k\int_a^b x\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b = -\left(\frac{1}{2}kb^2 - \frac{1}{2}ka^2\right) < 0$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله یازدهم

$$F(x) = -kx$$



کار نیروی فنر

$$W_{b\to a} = \int_b^a F(x)\mathrm{d}x$$

$$W_{b\to a} = -k\int_b^a x\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_b^a = -\left(\frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kb^2\right) > 0$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

مسئله یازدهم
کار نیروی فنر

$$W_{a\to b} = -\left(\frac{1}{2}kb^2 - \frac{1}{2}ka^2\right) < 0$$

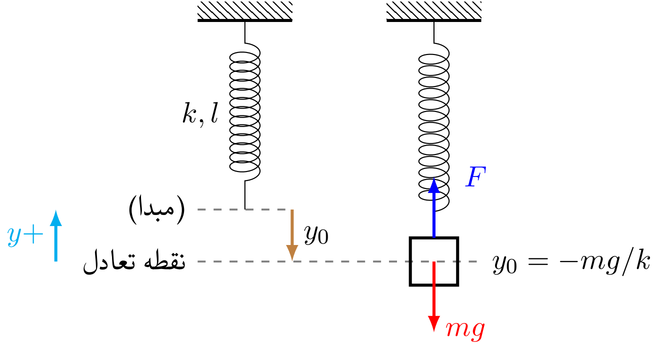
$$W_{b\to a} = -\left(\frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kb^2\right) > 0$$

$$W_{a\to b} + W_{b\to a} = 0$$

کار نیروی فنر در یک مسیر رفت و برگشت صفر است.

کار نیروی متغیر یک بعدی

جرم و فنر

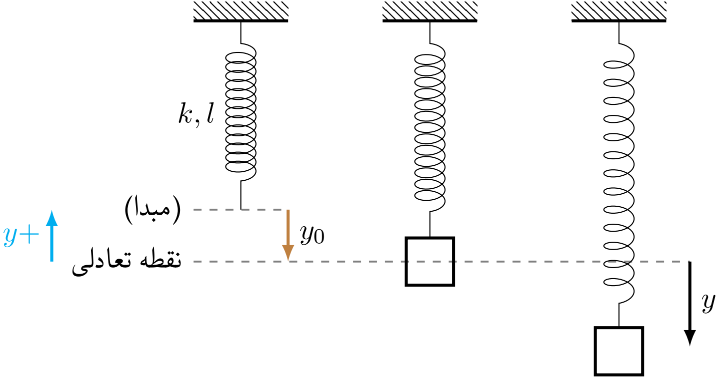


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -ky_0 - mg = 0$$

$$ky_0 = -mg \Rightarrow y_0 = -\frac{mg}{k}$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

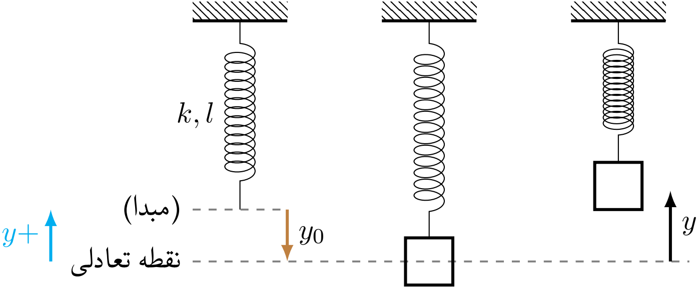
جرم و فنر



$$F = -k(y - y_0), \quad y_0 = -mg/k$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

جرم و فنر



$$F = -k(y - y_0), \quad y_0 = -mg/k$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

جرم و فنر

$$F = -k(y - y_0), \quad y_0 = -mg/k$$

$$W_{\text{فنر}} = \int_{y_0}^{y_0+y} F(y)\mathrm{d}y = -k\int_{y_0}^{y_0+y} (y - y_0)\mathrm{d}y$$

$$W_{\text{فنر}} = -k\left[\frac{1}{2}y^2 - y_0 y\right]_{y_0}^{y_0+y}$$

$$W_{\text{فنر}} = -k\left[\frac{1}{2}(y_0 + y)^2 - y_0(y_0 + y) - \frac{1}{2}y_0^2 + y_0^2\right]$$

$$\boxed{W_{\text{فنر}}(y) = -\frac{1}{2}ky^2}$$

کار نیروی متغیر یک بعدی

جرم و فنر

$$F = -k(y - y_0), \quad y_0 = -mg/k$$

$$\boxed{W_{\text{فنر}}(y) = -\frac{1}{2}ky^2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = F$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -k(y - y_0) \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + ky = ky_0 \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + ky = -mg$$

$$\xrightarrow{\div m} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}y = -g, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

معادله دیفرانسیلی حرکت $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 y = -g \quad \text{یا} \quad \ddot{y} + \omega^2 y = -g}$

کار نیروی متغیر دو و سه بعدی

$$W_F = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

در دو بعد:

$$\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = \hat{i}\mathrm{d}x + \hat{j}\mathrm{d}y$$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y$$

$$\vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i, \quad \vec{r}_f = \hat{i}x_f + \hat{j}y_f$$

$$W_F = \int_{(x_i,y_i)}^{(x_f,y_f)} F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y$$

کار نیروی متغیر دو و سه بعدی

$$W_F = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

در سه بعد:

$$\vec{F} = \hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z$$
$$\mathrm{d}\vec{r} = \hat{i}\mathrm{d}x + \hat{j}\mathrm{d}y + \hat{k}\mathrm{d}z$$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$

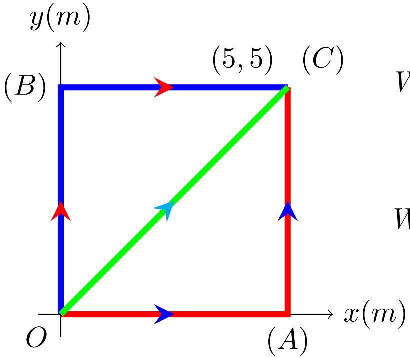
$$\vec{r}_i = \hat{i}x_i + \hat{j}y_i + \hat{k}z_i, \quad \vec{r}_f = \hat{i}x_f + \hat{j}y_f + \hat{k}z_f$$

$$W_F = \int_{(x_i,y_i,z_i)}^{(x_f,y_f,z_f)} F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z$$

کار نیروی متغیر دو و سه بعدی

مسئله چهاردهم

$$\vec{F} = (3\hat{i} + 4\hat{j})\mathrm{N}$$



$$W_{O\to A\to C} = \int_{O\to A} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{A\to C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

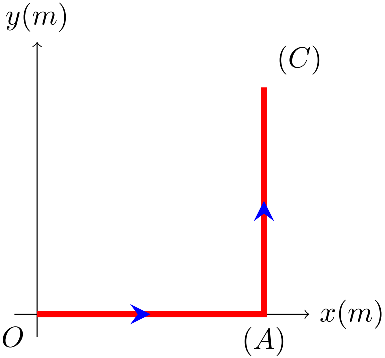
$$W_{O\to B\to C} = \int_{O\to B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{B\to C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W_{O\to C} = \int_{O\to C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

کار نیروی متغیر دو و سه بعدی

مسئله چهاردهم

$$\vec{F} = (3\hat{i} + 4\hat{j})\mathrm{N}$$



در امتداد $O \to A$

$$y = 0, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \hat{i}\mathrm{d}x$$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 3\mathrm{d}x$$

در امتداد $A \to C$

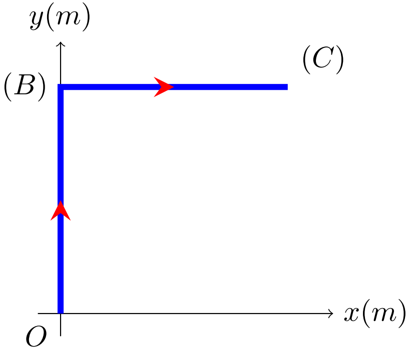
$$x = 5, \quad 0 \leq y \leq 5, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \hat{j}\mathrm{d}y$$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 4\mathrm{d}y$$

$$W_{O\to A\to C} = 3\int_0^5 \mathrm{d}x + 4\int_0^5 \mathrm{d}y = 35\ \mathrm{J}$$

کار نیروی متغیر دو و سه بعدی

مسئله چهاردهم



$$\vec{F} = (3\hat{i} + 4\hat{j})\mathrm{N}$$

در امتداد $O \to B$

$$x = 0, \quad 0 \le y \le 5, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \hat{j}\mathrm{d}y$$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 4\mathrm{d}y$$

در امتداد $B \to C$

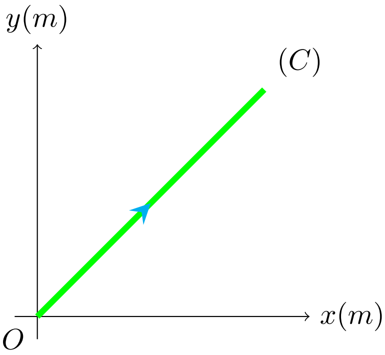
$$y = 5, \quad 0 \le x \le 5, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \hat{i}\mathrm{d}x$$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 3\mathrm{d}x$$

$$W_{O\to B\to C} = 4\int_0^5 \mathrm{d}y + 3\int_0^5 \mathrm{d}x = 35\ \mathrm{J}$$

کار نیروی متغیر دو و سه بعدی

مسئله چهاردهم



$$\vec{F} = (3\hat{i} + 4\hat{j})\mathrm{N}$$

در امتداد $O \to C$

$$x = y = t, \quad 0 \leq t \leq 5$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j})\mathrm{d}t$$

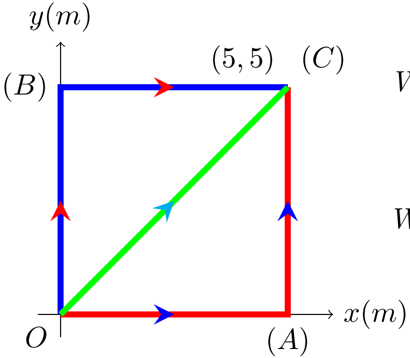
$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 7\mathrm{d}t$$

$$W_{O\to C} = 7\int_0^5 \mathrm{d}t = 35\ \mathrm{J}$$

کار نیروی متغیر دو و سه بعدی

مسئله چهاردهم

$$\vec{F} = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})\mathrm{N}$$



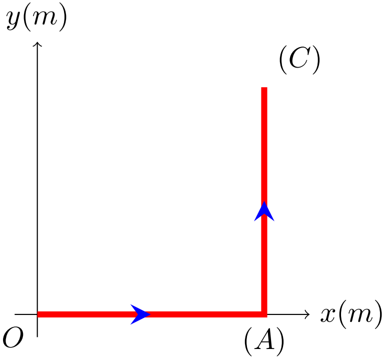
$$W_{O\to A\to C} = \int_{O\to A} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{A\to C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W_{O\to B\to C} = \int_{O\to B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{B\to C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$W_{O\to C} = \int_{O\to C} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

کار نیروی متغیر دو و سه بعدی

مسئله چهاردهم



$$\vec{F} = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})\mathrm{N}$$

در امتداد $O \rightarrow A$

$$y = 0, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \hat{i}\mathrm{d}x$$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

در امتداد $A \rightarrow C$

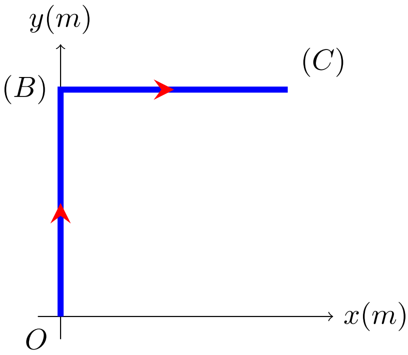
$$x = 5, \quad 0 \leq y \leq 5, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \hat{j}\mathrm{d}y$$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 25\mathrm{d}y$$

$$W_{O\rightarrow A\rightarrow C} = 25\int_0^5 \mathrm{d}y = 125 \text{ J}$$

کار نیروی متغیر دو و سه بعدی

مسئله چهاردهم



$$\vec{F} = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})\mathrm{N}$$

در امتداد $O \to B$

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq 5, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \hat{j}\mathrm{d}y$$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

در امتداد $B \to C$

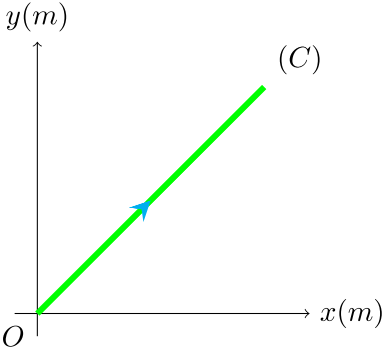
$$y = 5, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \hat{i}\mathrm{d}x$$

$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 10\mathrm{d}x$$

$$W_{O\to B\to C} = 10\int_0^5 \mathrm{d}x = 50\ \mathrm{J}$$

کار نیروی متغیر دو و سه بعدی

مسئله چهاردهم



$$\vec{F} = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})\mathrm{N}$$

در امتداد $O \to C$

$$x = y = t, \quad 0 \le t \le 5$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j})\mathrm{d}t$$

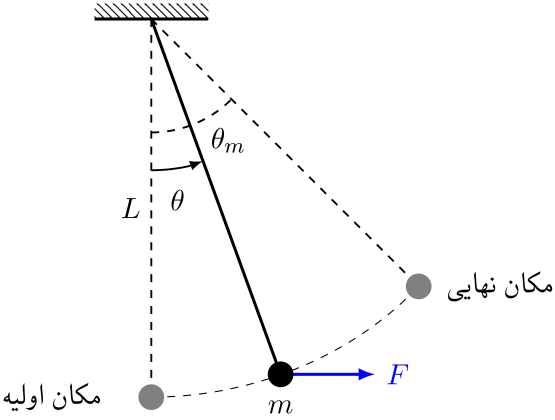
$$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = (2t + t^2)\mathrm{d}t$$

$$W_{O\to C} = \int_0^5 (2t + t^2)\mathrm{d}t$$

$$W_{O\to C} = \left[t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^5 = \frac{200}{3}\ \mathrm{J}$$

کار نیروی متغیر دو بعدی

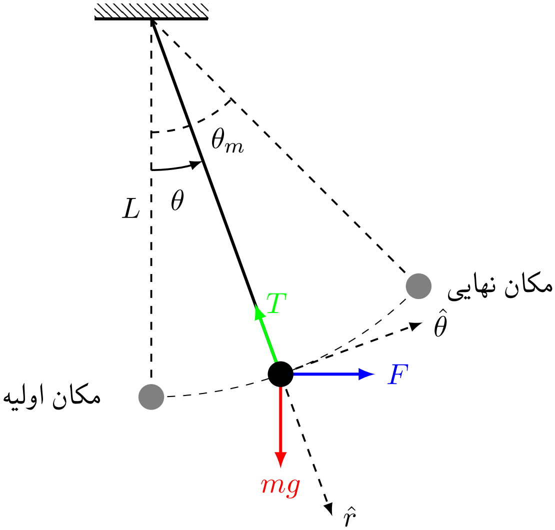
مسئله چهاردهم



فرض: جابجایی چنان آهسته انجام می‌شود که می‌توان سیستم را در هر لحظه در حالت تعادل فرض کرد.

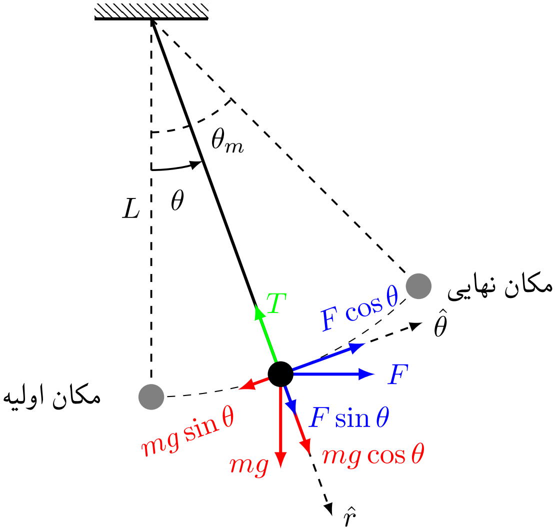
کار نیروی متغیر دو بعدی

مسئله چهاردهم



کار نیروی متغیر دو بعدی

مسئله چهاردهم



کار نیروی متغیر دو بعدی

مسئله چهاردهم

$$\sum F_\theta = 0 \Rightarrow F\cos\theta - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow F = mg\tan\theta$$

$$\sum F_r = 0 \Rightarrow mg\cos\theta + F\sin\theta - T = 0$$

$$\begin{cases} T = mg\cos\theta + F\sin\theta \\ F = mg\tan\theta \end{cases} \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$W_F = \int_0^{\theta_m} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

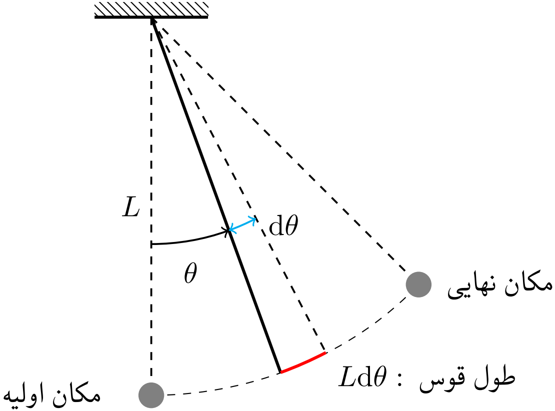
$$\vec{F} = \hat{r}F\sin\theta + \hat{\theta}F\cos\theta \quad F = mg\tan\theta$$

$$\vec{F} = \hat{r}mg\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \hat{\theta}mg\sin\theta$$

کار نیروی متغیر دو بعدی

مسئله چهاردهم

$$W_F = \int_0^{\theta_m} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \quad \vec{F} = \hat{r} mg \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \hat{\theta} mg \sin\theta, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \hat{\theta} L \mathrm{d}\theta$$



کار نیروی متغیر دو بعدی

مسئله چهاردهم

$$W_F = \int_0^{\theta_m} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}, \quad \vec{F} = \hat{r} mg \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \hat{\theta} mg \sin\theta, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \hat{\theta} L \mathrm{d}\theta$$

$$W_F = L \int_0^{\theta_m} F \cos\theta \mathrm{d}\theta = L \int_0^{\theta_m} mg \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

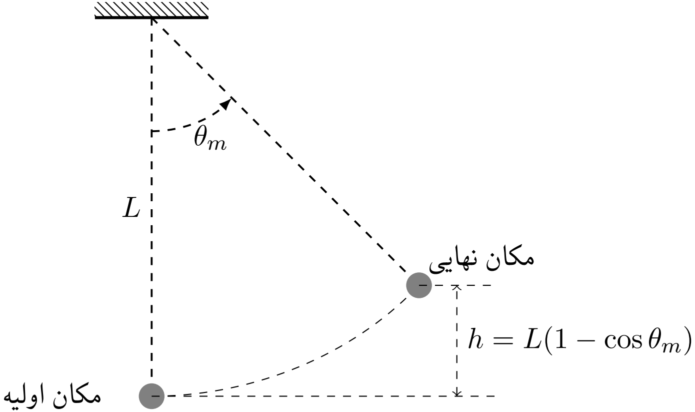
$$W_F = mgL \int_0^{\theta_m} \sin\theta \mathrm{d}\theta = mgL[-\cos\theta]_0^{\theta_m}$$

$$W_F = mgL(1 - \cos\theta_m)$$

کار نیروی متغیر دو بعدی

مسئله چهاردهم

$$W_F = mgL(1-\cos\theta_m) = mgh, h = L(1-\cos\theta_m)$$



قضیه کار و انرژي

قانون دوم نیوتن در یک‌بعد:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(x) = F_{\text{خارجی}}(x)$$

طرفین را در یک $\mathrm{d}x$ ضرب می‌کنیم،

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = F(x)\mathrm{d}x \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}v = F(x)\mathrm{d}x \Rightarrow mv\mathrm{d}v = F(x)\mathrm{d}x$$

بنابراین

$$mv\mathrm{d}v = F(x)\mathrm{d}x$$

انتگرالگیری از مکان اولیه x_iبا سرعت اولیه v_i به مکان نهایی x_fبا سرعت نهایی v_f،

$$m\int_{v_i}^{v_f} v\mathrm{d}v = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\mathrm{d}x \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\mathrm{d}x}$$

قضيه کار و انرژي

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\mathrm{d}x$$

تعریف انرژي جنبشی

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W_{i\to j} = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\mathrm{d}x$$

$$K_f - K_i = W_{i\to j}$$

$$\Delta K = W_{i\to j}$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که تغییرات انرژی جنبشی بین دو نقطه i و j برابر است با کار انجام شده بین دونقطه.

قضيه کار و انرژي

قانون دوم نیوتن در سه‌بعد:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}_{\text{خارجی}}(\vec{r})$$

قاعده‌ی زنجیری:

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=F(x)\cdot\mathrm{d}\vec{r}\Rightarrow m\mathrm{d}\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=F(x)\cdot\mathrm{d}\vec{r}\Rightarrow m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=F(x)\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

انتگرالگیری از مکان اولیه $\vec{r}_i$ با سرعت اولیه $\vec{v}_i$ به مکان نهایی $\vec{r}_f$ با سرعت نهایی $\vec{v}_f$،

$$m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f}\vec{F}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{v}=\hat{i}v_x+\hat{j}v_y+\hat{k}v_z,\quad \mathrm{d}\vec{v}=\hat{i}\mathrm{d}v_x+\hat{j}\mathrm{d}v_y+\hat{k}\mathrm{d}v_z$$

$$m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v}=m\left(\int_{v_{xi}}^{v_{xf}}v_x\mathrm{d}v_x+\int_{v_{yi}}^{v_{yf}}v_y\mathrm{d}v_y+\int_{v_{zi}}^{v_{zf}}v_z\mathrm{d}v_z\right)$$

قضیه کار و انرژي

$$m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{v} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{v} = \hat{i}v_x + \hat{j}v_y + \hat{k}v_z, \quad \mathrm{d}\vec{v} = \hat{i}\mathrm{d}v_x + \hat{j}\mathrm{d}v_y + \hat{k}\mathrm{d}v_z$$

$$m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{v} = \left(m\int_{v_{xi}}^{v_{xf}} v_x\mathrm{d}v_x + m\int_{v_{yi}}^{v_{yf}} v_y\mathrm{d}v_y + m\int_{v_{zi}}^{v_{zf}} v_z\mathrm{d}v_z\right)$$

$$\begin{aligned} m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{v} &= \left(\frac{1}{2}mv_{xf}^2 - \frac{1}{2}mv_{xi}^2\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2}mv_{yf}^2 - \frac{1}{2}mv_{yi}^2\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2}mv_{zf}^2 - \frac{1}{2}mv_{zi}^2\right) \end{aligned}$$

قضیه کار و انرژي

$$m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{v} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\begin{aligned} m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{v} &= \left(\frac{1}{2}mv_{xf}^2 - \frac{1}{2}mv_{xi}^2\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2}mv_{yf}^2 - \frac{1}{2}mv_{yi}^2\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2}mv_{zf}^2 - \frac{1}{2}mv_{zi}^2\right) \\ &= \left[\frac{1}{2}m(v_{xf}^2 + v_{yf}^2 + v_{zf}^2)\right] - \left[\frac{1}{2}m(v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2)\right] \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}v_i^2 = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

قضیه کار و انرژي

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

تعریف انرژي جنبشی

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

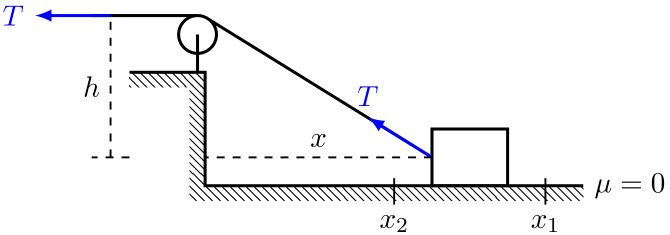
$$W_{i\to j} = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

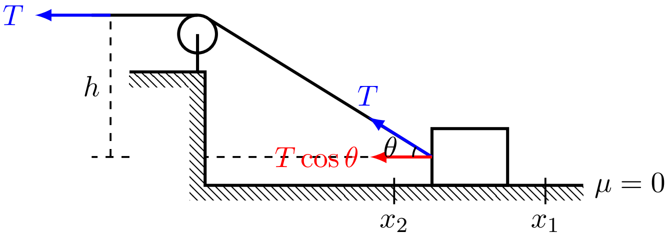
$$K_f - K_i = W_{i\to j}$$

$$\Delta K = W_{i\to j}$$

رابطه بالا نشان می‌دهد که تغییرات انرژی جنبشی در دوبعد یا سه‌بعد بین دو نقطه i و j برابر است با کار انجام شده بین دونقطه.

مسئله

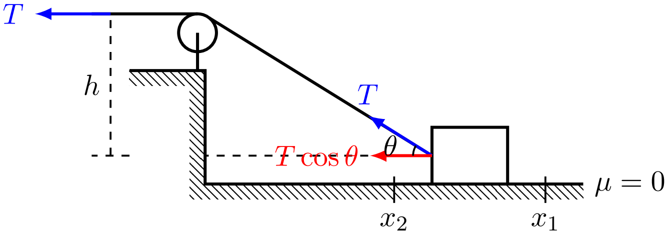




$$\Delta K = K_2 - K_1 = W_T = \int_{x_1}^{x_2} \vec{T} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} T\cos\theta \mathrm{d}x$$

قضيه کار و انرژي

مسئله



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W_T = \int_{x_1}^{x_2} T\cos\theta \mathrm{d}x$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

$$\Delta K = T\int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\mathrm{d}x$$

قضیه کار و انرژي

مسئله

$$\Delta K = T\int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\mathrm{d}x$$

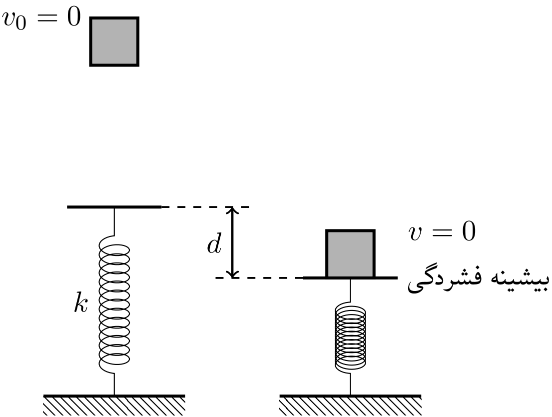
$$u = x^2+h^2, \quad \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_{u_1}^{u_2} u^{-1/2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-1/2}\left[u^{1-1/2}\right]_{u_1}^{u_2} \\ &= \left[\sqrt{x^2+h^2}\right]_{x_1}^{x_2} = \sqrt{x_2^2+h^2}-\sqrt{x_1^2+h^2}\end{aligned}$$

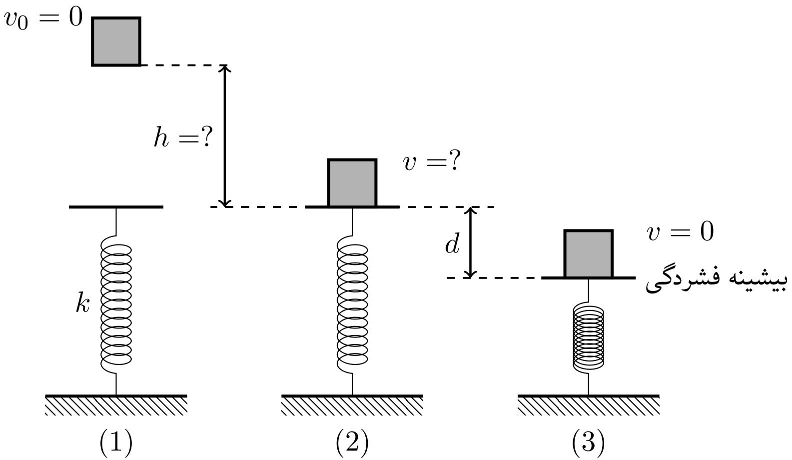
$$\Delta K = T(\sqrt{x_2^2+h^2}-\sqrt{x_1^2+h^2})$$

قضیه کار و انرژي

مسئله



مسئله



قضیه کار و انرژي

مسئله

قضیه کار و انرژی بین دو حالت (1) و حالت (2):

$$K_2 - K_1 = W_{mg}^{12}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{mg}^{12}, \quad v_0 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = W_{mg}^{12} = mgh$$

قضیه کار و انرژی بین دو حالت (2) و حالت (3):

$$K_3 - K_2 = W_{mg}^{23} + W_F$$

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = mgd - \frac{1}{2}kd^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2 - mgd$$

قضيه کار و انرژي

مسئله

$$\frac{1}{2}mv^2 = W_{mg}^{12} = mgh$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2 - mgd$$

در نتیجه

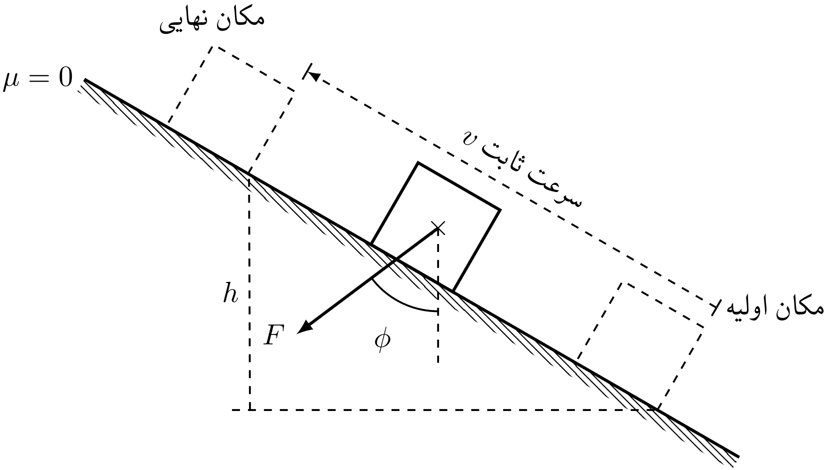
$$v = \sqrt{kd^2/m - 2gd}$$

$$W_{mg}^{12} = \frac{1}{2}kd^2 - mgd$$

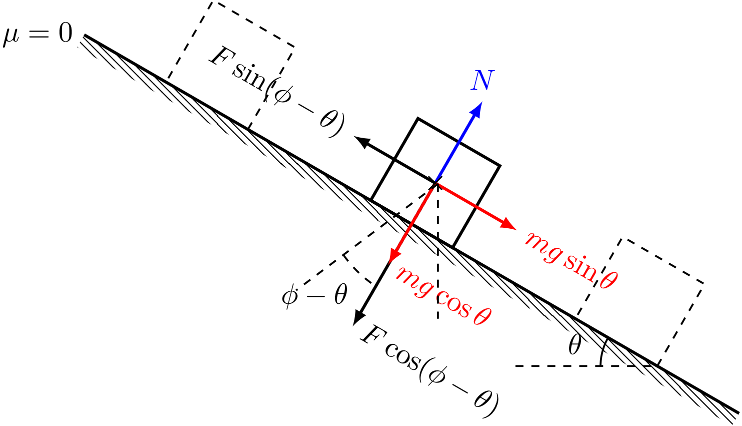
$$W_{mg}^{12} = mgh = \frac{1}{2}kd^2 - mgd \Rightarrow h = \frac{kd^2}{mg} - d$$

قضیه کار و انرژي

مسئله



مسئله


$\mu = 0$
$F\sin(\phi-\theta)$
N
$mg\sin\theta$
$mg\cos\theta$
$\phi-\theta$
$F\cos(\phi-\theta)$
θ

قضیه کار و انرژي

با توجه به سرعت ثابت ذره بر روی سطح شیبدار و از قانون دوم نیوتن داریم،

$$\sum F_x = a = 0 \Rightarrow W_{\text{کل}} = 0$$

با توجه به سرعت ثابت ذره بر روی سطح شیبدار و از قضیه کار و انرژي داریم،

$$\Delta = 0 \Rightarrow W_{\text{کل}} = 0$$

از قانون دوم نیوتن

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F\sin(\phi-\theta) = mg\sin\theta$$

کار نیروی F:

$$W_F = \int_{\text{مکان اولیه}}^{\text{مکان نهایی}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\hat{i}, \quad \vec{F} = F\sin(\phi-\theta)\hat{i} - F\cos(\phi-\theta)\hat{j}$$

قضیه کار و انرژي

$$W_{\text{کل}} = 0$$

$$F\sin(\phi-\theta) = mg\sin\theta$$

کار نیروی F:

$$W_F = \int_{\text{مکان اولیه}}^{\text{مکان نهایی}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}, \quad \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\hat{i}, \quad \vec{F} = F\sin(\phi-\theta)\hat{i} - F\cos(\phi-\theta)\hat{j}$$

$$W_F = \int_{\text{مکان اولیه}}^{\text{مکان نهایی}} F\sin(\phi-\theta)\mathrm{d}x$$

$$W_F = F\sin(\phi-\theta)(\text{مکان نهایی} - \text{مکان اولیه})$$

$$\sin\theta = \frac{h}{\text{مکان نهایی} - \text{مکان اولیه}} \Rightarrow \text{مکان نهایی} - \text{مکان اولیه} = \frac{h}{\sin\theta}$$

قضيه کار و انرژي

$$W_{\text{کل}} = 0$$

$$F\sin(\phi-\theta) = mg\sin\theta$$

$$W_F = F\sin(\phi-\theta)(\text{مکان اولیه} - \text{مکان نهایی})$$

$$\sin\theta = \frac{h}{\text{مکان اولیه} - \text{مکان نهایی}} \Rightarrow \text{مکان اولیه} - \text{مکان نهایی} = \frac{h}{\sin\theta}$$

$$W_F = F\sin(\phi-\theta)\frac{h}{\sin\theta} = mg\sin\theta\frac{h}{\sin\theta} = mgh$$

$$W_{\text{کل}} = W_F + W_{mg} = 0 \Rightarrow W_{mg} = -W_F = -mgh$$