# فیزیک ۱
## انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی

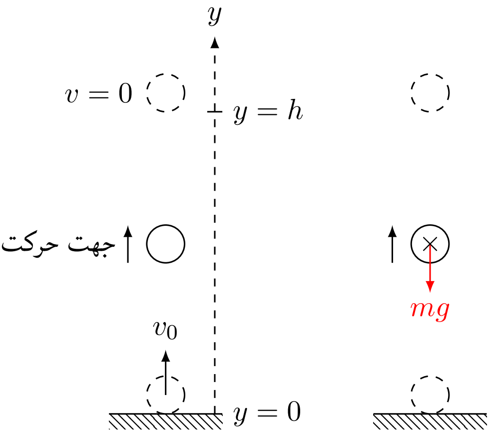
محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

مهر ۱۴۰۰

# نیروهای پایستار

کار نیروی گرانش در یک مسیر رفت:



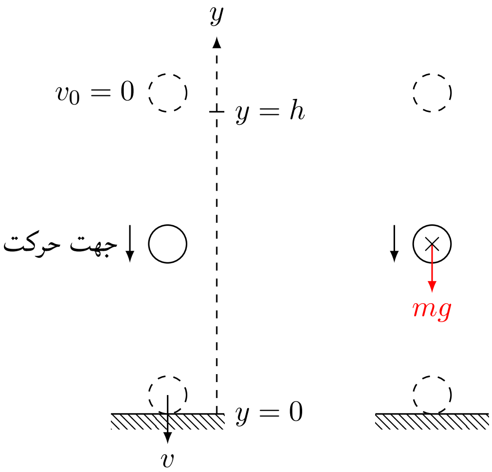

$$W_g = W_{\text{گرانش}} = -\int_0^h mg dy$$

$$W_g = -mg[y]_0^h = -mgh$$

$$W_g = -mgh$$

# پایستگی انرژی

کار نیروی گرانش در مسیر برگشت:



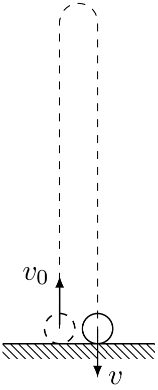

$$W_g = W_{\text{گرانش}} = -\int_h^0 mg\mathrm{d}y$$

$$W_g = -mg[y]_h^0 = mgh$$

$$W_g = mgh$$

# نیروهای پایستار

کار نیروی گرانش در یک مسیر رفت و برگشت:




$$W_g^{(1)} = -mgh \quad : \text{در مسیر رفت}$$

$$W_g^{(2)} = mgh \quad : \text{در مسیر برگشت}$$

$$W_g^{\text{کل}} = \left(-\int_0^h mg\mathrm{d}y\right) + \left(-\int_h^0 mg\mathrm{d}y\right)$$

$$W_g^{\text{کل}} = W_g^{(1)} + W_g^{(2)}$$

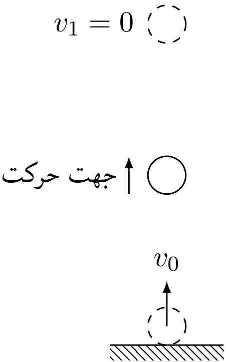
$$W_g^{\text{کل}} = -mgh + mgh = 0$$

$$W_g^{\text{کل}} = -\oint mg\mathrm{d}y = 0$$

کار نیروی گرانش در یک مسیر رفت و برگشت برابر صفر است. در این شرایط **نیروی گرانش** را **یک نیروی پایستار** می‌نامند.

# نیروهای پایستار

تعیین سرعت ذره در هنگاه پرتاب با استفاده از قضیه کار و انرژي :




$$\Delta K = W_g^{(1)}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W_g^{(1)} = -mgh$$

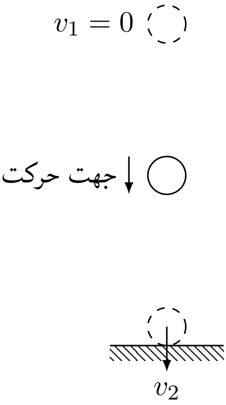
$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh$$

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

# نیروهای پایستار

تعیین سرعت ذره در هنگام بازگشت با استفاده از قضیه کار و انرژي :




$$\Delta K = W_g^{(2)}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

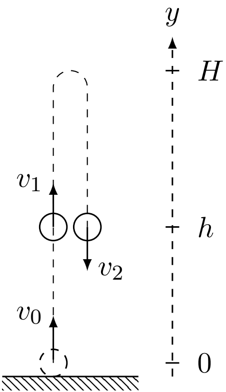
$$W_g^{(2)} = mgh$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -mgh$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = mgh$$

$v_2 = \sqrt{2gh},$ بطرف پایین

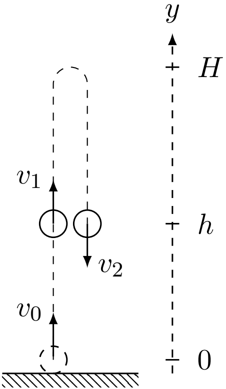
# نیروهای پایستار




$$W_g^{(1)} = -\int_0^h mg\mathrm{d}y = -mg[y]_0^h = -mgh$$

بطرف بالا $\Delta K = W_g^{(1)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh},$

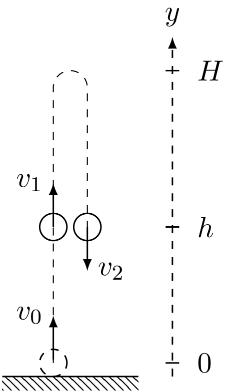
# نیروهای پایستار




$$W_g^{(2)} = -\int_0^H mg\mathrm{dy} - \int_H^h mg\mathrm{dy} = -mg[y]_0^H - mg[y]_H^h$$

$$W_g^{(2)} = (-mgH) + (-mgh + mgH) = -mgh$$

# نیروهای پایستار




$$W_g^{(2)} = -\int_0^H mg\mathrm{d}y - \int_H^h mg\mathrm{d}y = -mg[y]_0^H - mg[y]_H^h = -mgh$$

$$\Delta K = W_g^{(2)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2gh},$$ بطرف پایین

## نیروهای پایستار

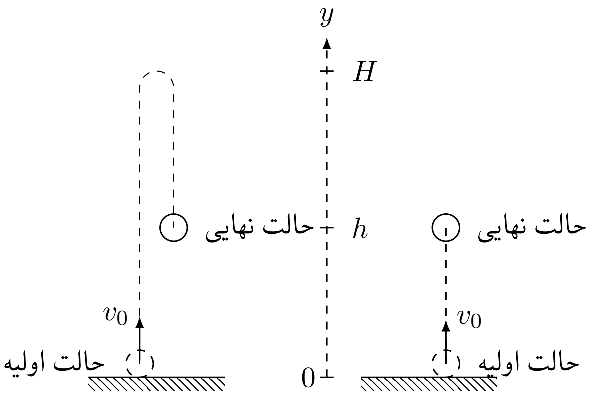
کار نیروی گرانش در یک مسیر رفت و برگشت برابر صفر است،

$$W_g^{\text{کل}} = 0$$

نیروی گرانش یک نیروی پایستار است.

**نتیجه‌ی اول:** سرعتهای ذره در هر نقطه از مسیر رفت و برگشت مساوی ودر خلاف جهت یکدیگرند.

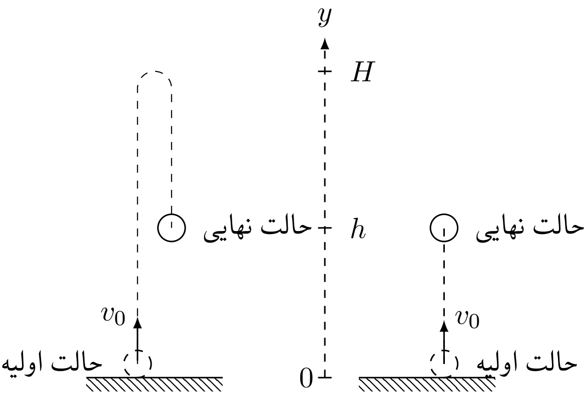
# نیروهای پایستار




$$W_g^{(1)} = -\int_0^H mg\mathrm{d}y - \int_H^h mg\mathrm{d}y = -mg[y]_0^H - mg[y]_H^h$$

$$W_g^{(1)} = (-mgH) + (-mgh + mgH) = -mgh$$

# نیروهای پایستار



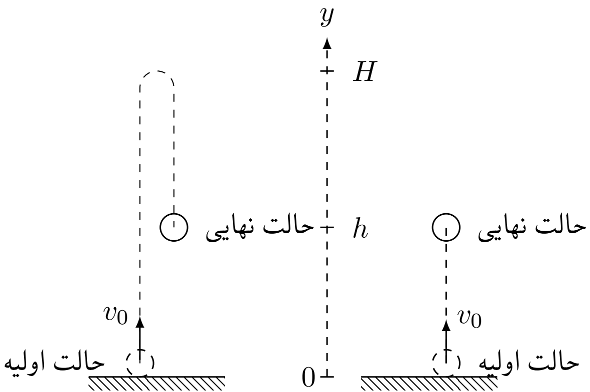

$$W_g^{(2)} = -\int_0^h mg\mathrm{d}y = -mg[y]_0^h$$

$$W_g^{(2)} = -mgh$$

# نیروهای پایستار

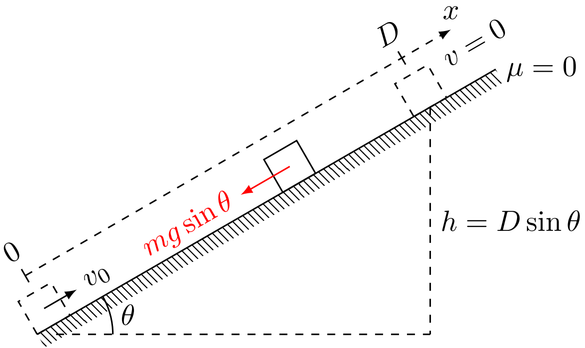
$$W_g^{(1)} = W_g^{(2)} = -mgh$$

**نتیجه‌ی دوم:** کار نیروی گرانش به مسیر بستگی ندارد و فقط به حالتهای اولیه و نهایی مسیر بستگی دارد.



## نیروهای پایستار

### مسئله

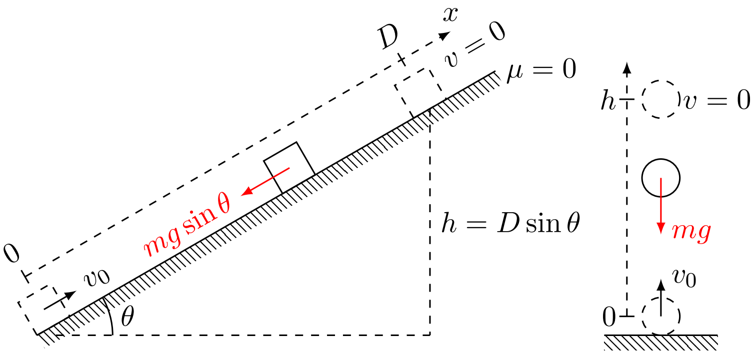



$$W_g = -mg\sin\theta \int_0^D \mathrm{d}x = -mgD\sin\theta$$

$$W_g = -mgh$$

# نیروهای پایستار

## مسئله

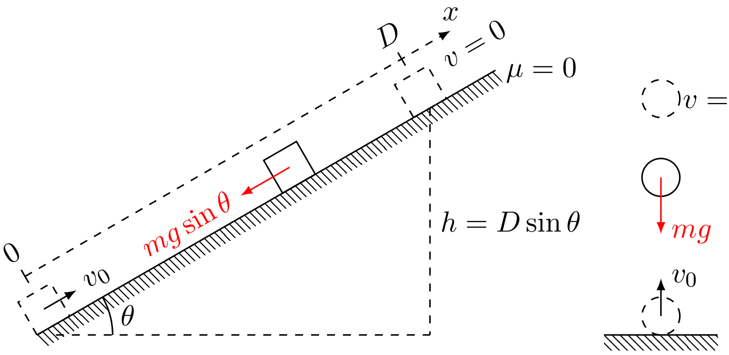



$$W_g = -mg\sin\theta \int_0^D \mathrm{d}x = -mgD\sin\theta$$

$$W_g = -mgh$$

# نیروهای پایستار

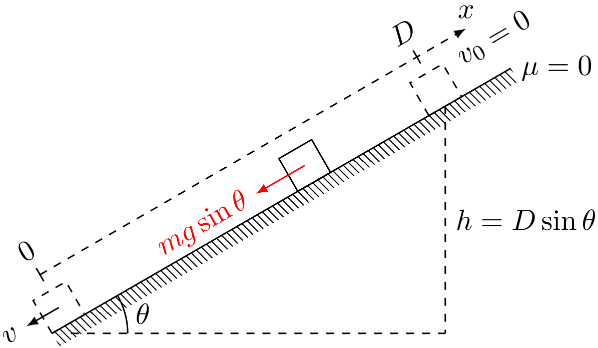
## مسئله




$$W_g = -mgh$$

$$\Delta K = W_g \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgh \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

مسئله

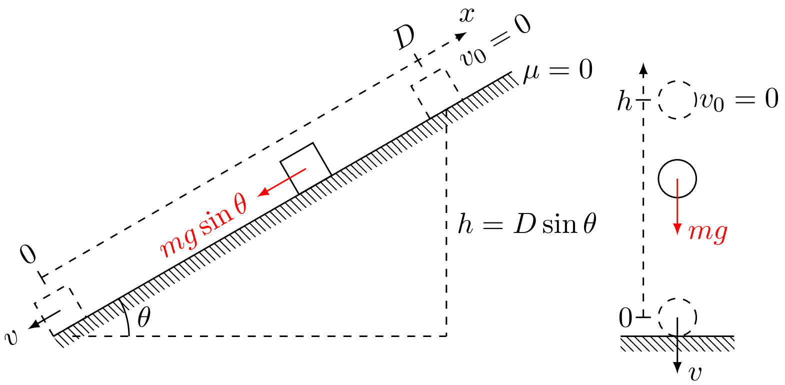



$$W_g = -mg\sin\theta \int_D^0 \mathrm{d}x = mgD\sin\theta$$

$$W_g = mgh$$

# نیروهای پایستار

مسئله

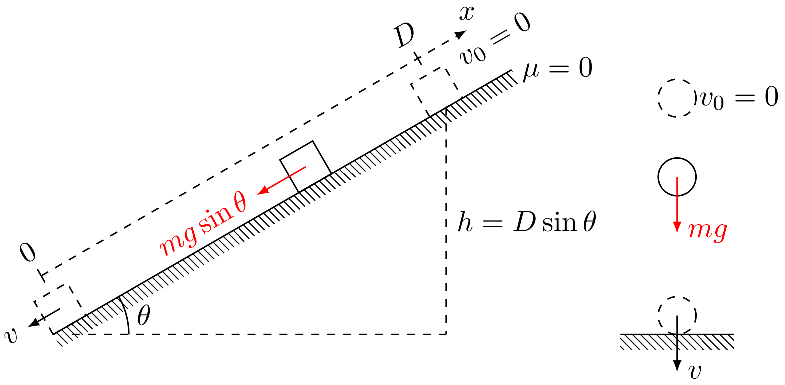



$$W_g = -mg\sin\theta \int_D^0 \mathrm{d}x = mgD\sin\theta$$

$$W_g = mgh$$

# نیروهای پایستار

مسئله

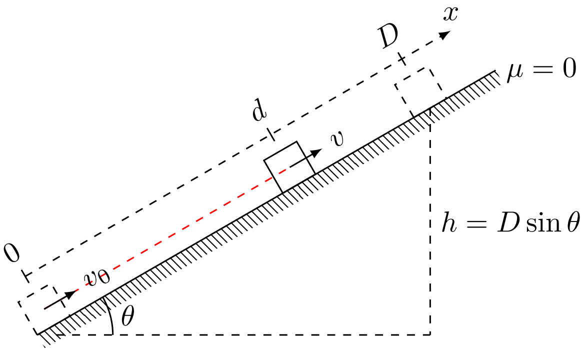



$$W_g = mgh$$

$$\Delta K = W_g \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

# نیروهای پایستار

مسئله

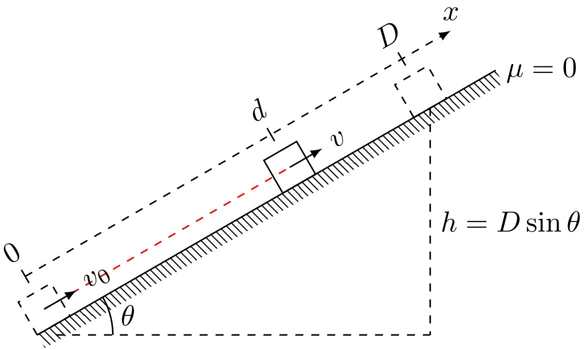



$$W_g = -mg\sin\theta\int_0^d \mathrm{d}x = -mg\sin\theta[x]_0^d$$

$$W_g = -mgd\sin\theta$$

# نیروهای پایستار

مسئله

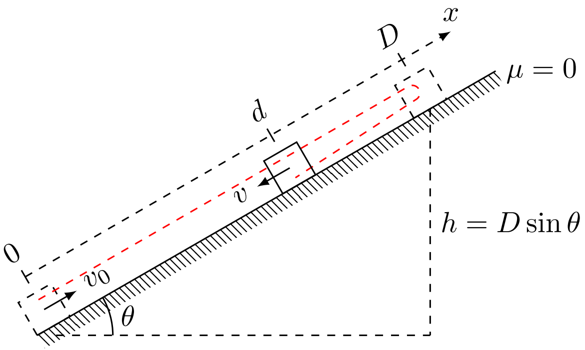



$$\Delta K = W_g \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgd\sin\theta$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gd\sin\theta}, \quad \text{بطرف بالا}$$

# نیروهای پایستار

## مسئله

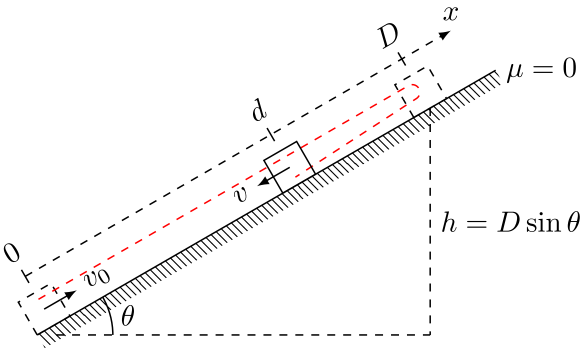



$$W_g = -mg\sin\theta\int_0^D \mathrm{d}x - mg\sin\theta\int_D^d \mathrm{d}x = -mg\sin\theta[x]_0^D - mg\sin\theta[x]_D^d$$

$$W_g = -mgd\sin\theta$$

# نیروهای پایستار

مسئله

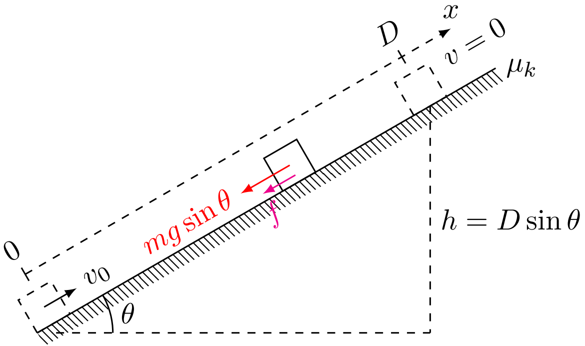



$$\Delta K = W_g \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mgd\sin\theta$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gd\sin\theta}, \quad \text{بطرف پایین}$$

# نیروهای پایستار

## مسئله

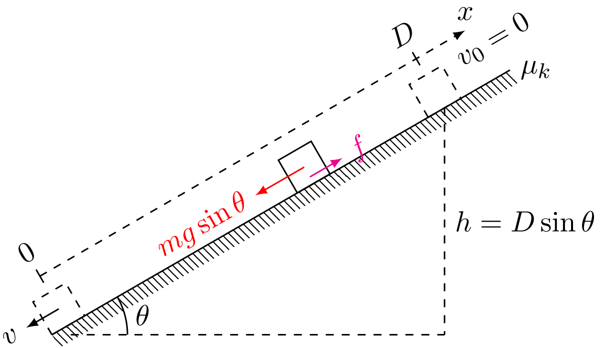



$$W_1^{(\text{کل})} = -mg(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)\int_0^D \mathrm{d}x = -mg(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)[x]_0^D$$

$$W_1^{(\text{کل})} = -mgD(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$$

# نیروهای پایستار

مسئله




$$W_2^{(\text{کل})} = -mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)\int_D^0 \mathrm{d}x = -mg(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)[x]_0^D$$

$$W_2^{(\text{کل})} = mgD(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

# نیروهای پایستار

مسئله

$$W_1^{(\text{کل})} = -mgD(\sin\theta + \mu_k \cos\theta) = -mgD\sin\theta - mg\mu_k D\cos\theta$$

$$W_1^{(\text{کل})} = -mgD\sin\theta - mg\mu_k D\cos\theta = W_1^g + W_1^f$$

$$W_2^{(\text{کل})} = mgD(\sin\theta - \mu_k \cos\theta) = mgD\sin\theta - mgD\mu_k\cos\theta$$

$$W_2^{(\text{کل})} = mgD\sin\theta - mgD\mu_k\cos\theta = W_2^g + W_2^f$$

کار کل در یک مسیر رفت و برگشت،

$$W^{\text{مسیر رفت و برگشت}} = W_1^{(\text{کل})} + W_2^{(\text{کل})}$$

$$W^{\text{مسیر رفت و برگشت}} = -2mgD\mu_k\cos\theta$$

## نیروهای پایستار

مسئله

کار کل در یک مسیر رفت و برگشت،

$$W^{\text{مسیر رفت و برگشت}} = W_1^{(\text{کل})} + W_2^{(\text{کل})}$$

$$W^{\text{مسیر رفت و برگشت}} = -2mgD\mu_k \cos\theta$$

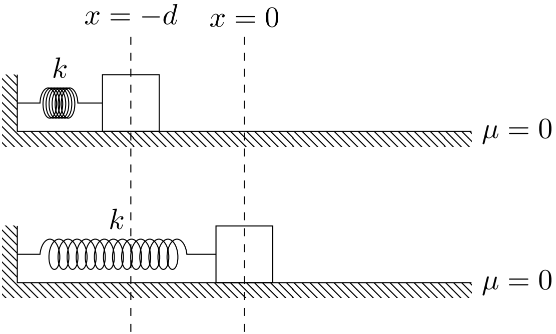
**کار نیروی گرانش** در یک مسیر رفت و برگشت **برابر صفر** می‌شود.

**کار نیروی اصطکاک** در یک مسیر رفت و برگشت **مخالف صفر** است.

**نیروی اصطکاک** برخلاف نیروی گرانش **یک نیروی پایستار نیست**.

# نیروهای پایستار

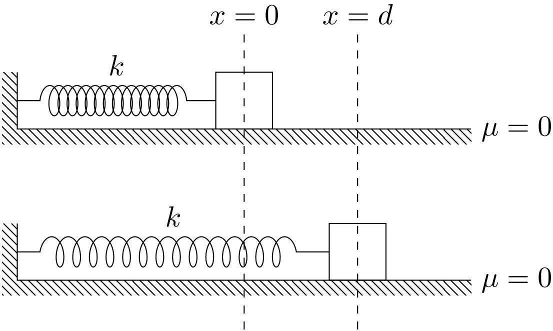
## کار نیروی فنر




$$W_{\text{فنر}} = W_s^{(1)} = -k \int_{-d}^{0} x \mathrm{d}x = -k \left[\frac{1}{2} x^2\right]_{-d}^{0} = \frac{1}{2} k d^2$$

# نیروهای پایستار

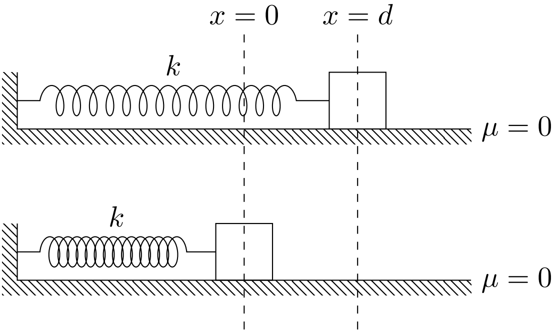
## کار نیروی فنر




$$W^{(2)}_{\text{فنر}} = W^{(2)}_{s} = -k\int_0^d x\,\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^d = -\frac{1}{2}kd^2$$

# نیروهای پایستار

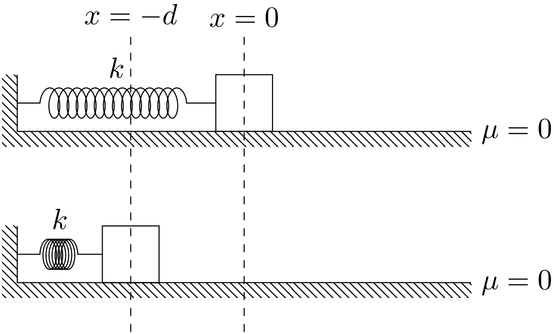
## کار نیروی فنر




$$W^{(3)}_{\text{فنر}} = W^{(3)}_s = -k\int_d^0 x\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_d^0 = \frac{1}{2}kd^2$$

# نیروهای پایستار

## کار نیروی فنر




$$W_{\text{فنر}} = W_s^{(4)} = -k\int_0^{-d} x\,\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{-d} = -\frac{1}{2}kd^2$$

# نیروهای پایستار

کار نیروی فنر در یک مسیر رفت و برگشت:

$$W_s^{(1)} = \frac{1}{2}kd^2$$

$$W_s^{(2)} = -\frac{1}{2}kd^2$$

$$W_s^{(3)} = \frac{1}{2}kd^2$$

$$W_s^{(4)} = -\frac{1}{2}kd^2$$

$$W_{\text{کل}} = -k\int_{-d}^{0} x\mathrm{d}x - k\int_{0}^{d} x\mathrm{d}x - k\int_{d}^{0} x\mathrm{d}x - k\int_{0}^{-d} x\mathrm{d}x$$

$$W_{\text{کل}} = W_s^{(1)} + W_s^{(2)} + W_s^{(3)} + W_s^{(4)}$$

$$W_{\text{کل}} = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kd^2 = 0$$

## نیروهای پایستار

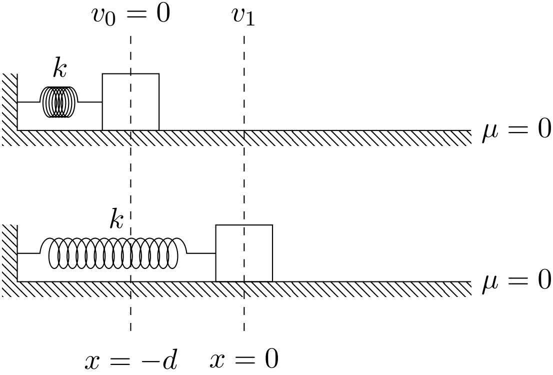
کار نیروی فنر در یک مسیر رفت و برگشت:

$$W^{\text{کل}} = -k \oint x \mathrm{d}x = 0$$

کار نیروی فنر در یک مسیر رفت و برگشت برابر صفر است. در این شرایط **نیروی فنر** را یک **نیروی پایستار** می‌نامند.

# نیروهای پایستار

## کار نیروی فنر

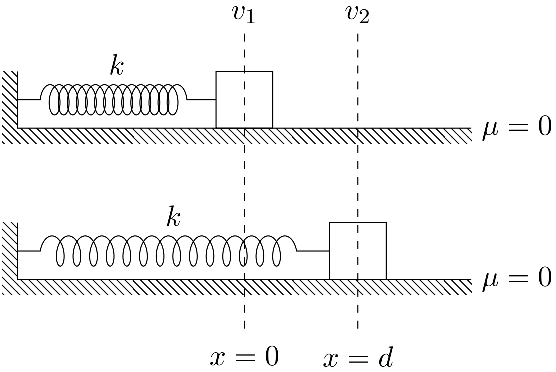



$$\Delta K = W_s^{(1)}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{kd^2}{m}}, \quad \text{بطرف راست}$$

# نیروهای پایستار

## کار نیروی فنر

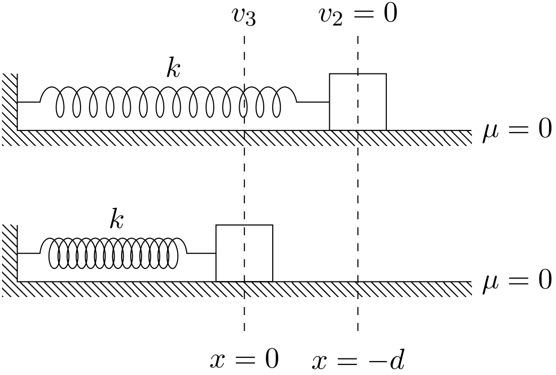



$$\Delta K = W_s^{(2)}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow v_2 = 0$$

# نیروهای پایستار

## کار نیروی فنر

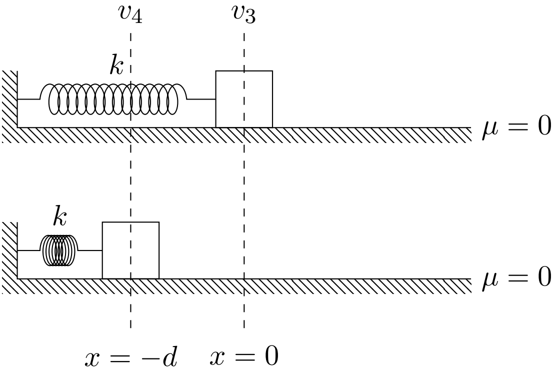



$$\Delta K = W_s^{(3)}$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{kd^2}{m}},$$ بطرف چپ

# نیروهای پایستار

کار نیروی فنر




$$\Delta K = W_s^{(4)}$$

$$\frac{1}{2}mv_4^2 - \frac{1}{2}mv_3^2 = -\frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_4^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow v_4 = 0$$

## نیروهای پایستار

کار نیروی فنر در یک مسیر رفت و برگشت برابر صفر است،

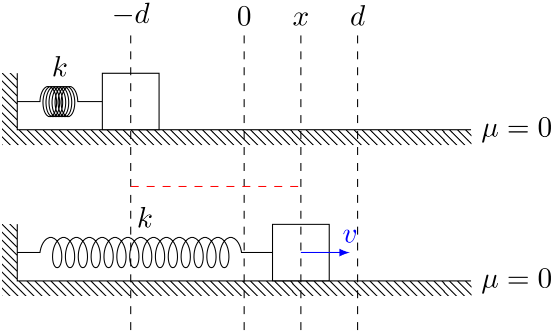
$$W_g^{\text{کل}} = 0$$

نیروی فنر یک نیروی پایستار است.

**نتیجه‌ی اول:** سرعتهای ذره در هر نقطه از مسیر رفت و برگشت مساوی ودر خلاف جهت یکدیگرند.

# نیروهای پایستار

## کار نیروی فنر

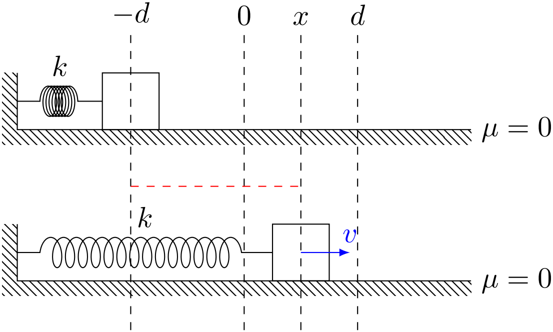



$$W_{\text{فنر}} = W_s^{(1)} = -k\int_{-d}^{x} x\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-d}^{x}$$

$$W_s^{(1)} = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

# نیروهای پایستار

کار نیروی فنر

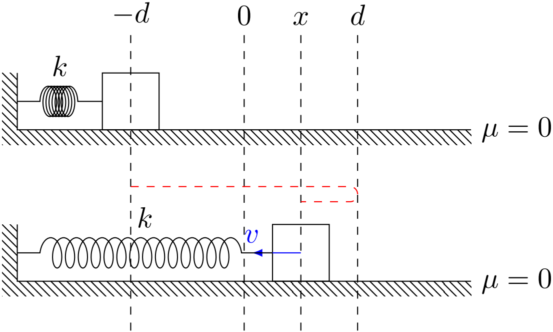



$$W_s^{(1)} = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

بطرف راست $\Delta K = W_s^{(1)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}(d^2 - x^2)},$

# نیروهای پایستار

## کار نیروی فنر

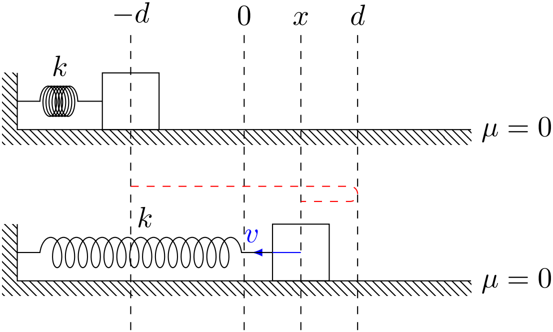



$$W_{\text{فنر}} = W_s^{(2)} = -k\int_{-d}^{d} x\mathrm{d}x - k\int_{d}^{x} x\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-d}^{d} - k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{d}^{x}$$

$$W_s^{(2)} = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

# نیروهای پایستار

کار نیروی فنر




$$W_s^{(1)} = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

بطرف چپ $\Delta K = W_s^{(1)} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}(d^2 - x^2)},$

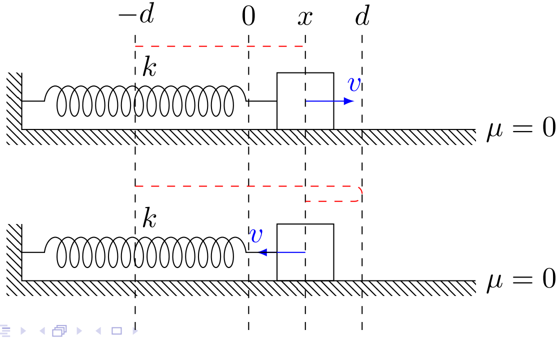
# نیروهای پایستار

کار نیروی فنر

$$W_s^{(1)} = W_s^{(2)} = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}kx^2, \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}(d^2 - x^2)}$$

**نتیجه‌ی اول:** سرعتهای ذره در هر نقطه از مسیر رفت و برگشت مساوی ودر خلاف جهت یکدیگرند.

**نتیجه‌ی دوم:** کار نیروی فنر به مسیر بستگی ندارد و فقط به حالتهای اولیه و نهایی مسیر بستگی دارد.



# انرژی پتانسیل

انرژي کل برای نیروهای پایستار (مانند گرانش و فنر)، علاوه بر انرژي جنبشی شامل بخش مهم دیگری بنام انرژی پتانسیل می‌باشند.

بر خلاف انرژی جنبشی که تغییرات آن برابر با کار کل انجام شده می‌باشد،

$$\Delta K = W$$

$$\Delta K = K_{\text{حالت نهایی}} - K_{\text{حالت اولیه}} = \int_{\text{حالت اولیه}}^{\text{حالت نهایی}} F(x)\mathrm{d}x$$

تغییرات انرژی پتانسیل برابر با منفی کار نیروی پایستار می‌باشد،

$$\Delta U = -W_{\text{نیروی پایستار}}$$

$$\Delta U = U_{\text{حالت نهایی}} - U_{\text{حالت اولیه}} = -\int_{\text{حالت اولیه}}^{\text{حالت نهایی}} F_{\text{پایستار}}(x)\mathrm{d}x$$

## انرژی پتانسیل

– اگر ذره‌ای تحت تاثیر نیروی پایستار $F(x)$ حرکت کند، کار انجام شده بین دو نقطه‌ی مسیر حرکت بوسیله تابع تغییرات انرژی پتانسیل بصورت زیر تعریف می‌شود،

$$V(x) - V(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

– شکل دیفرانسیلی رابطه‌ی بالا بصورت زیر داده می‌شود،

$$\mathrm{d}V = -F(x)\mathrm{d}x$$

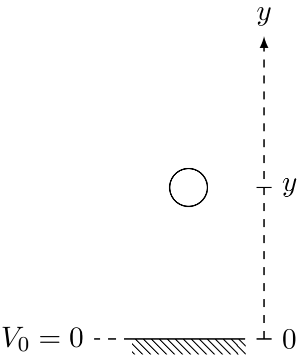
– بدین‌ترتیب در صورت در اختیار داشتن تابع انرژی پتانسیل $V(x)$ می‌توان نیروی را بصورت زیر بدست آورد،

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

# انرژی پتانسیل

انرژی پتانسبل نیروی وزن: حالت اولیه در تغییرات انرژی پتانسیل بصورت مرجع پتانسیل در نظر گرفته می‌شود که معمولا مقداری برابر صفر برای آن درنظر می‌گیرند،

$$V_0 = 0$$




$$V - V_0 = -\left(-mg\int_0^y \mathrm{d}y\right)$$

$$V - 0 = mg[y]_0^y$$

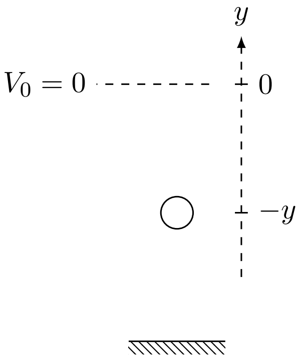
$$V(y) = mgy$$

وقتی ذره در ارتفاع $y$ بالای مرجع پتانسیل قرار داشته باشد، انرژي پتانسیل برابر $mgy$ است.

# انرژی پتانسیل

انرژی پتانسبل نیروی وزن: حالت اولیه در تغییرات انرژی پتانسیل بصورت مرجع پتانسیل در نظر گرفته می‌شود که معمولا مقداری برابر صفر برای آن درنظر می‌گیرند،

$$V_0 = 0$$




$$V - V_0 = -\left(-mg\int_0^{-y} \mathrm{d}y\right)$$

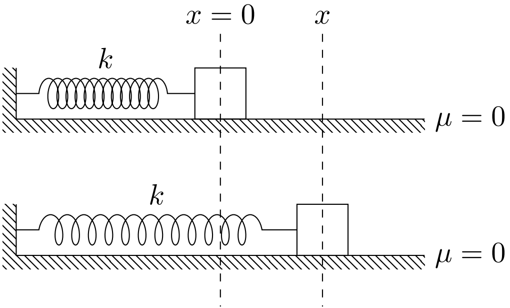
$$V - 0 = mg[y]_0^{-y}$$

$$V(y) = -mgy$$

وقتی ذره در ارتفاع $y$ پایین مرجع پتانسیل قرار داشته باشد، انرژي پتانسیل برابر $-mgy$ است.

# انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل نیروی فنر



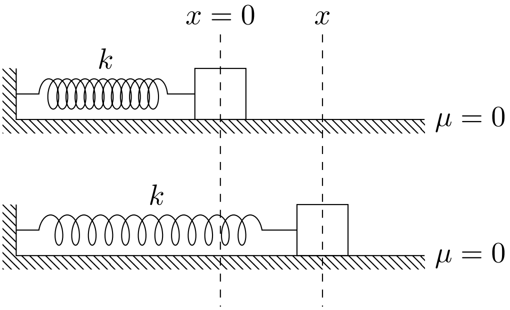

$$V(x) - V(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

مرجع پتانسیل را در طول طبیعی فنر انتخاب می‌کنیم، $V(0) = 0$

$$V(x) - 0 = -\int_{0}^{x} (-kx)\mathrm{d}x \Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

# انرژی پتانسیل

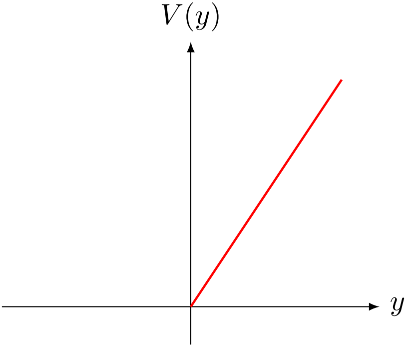
انرژی پتانسبل نیروی فنر

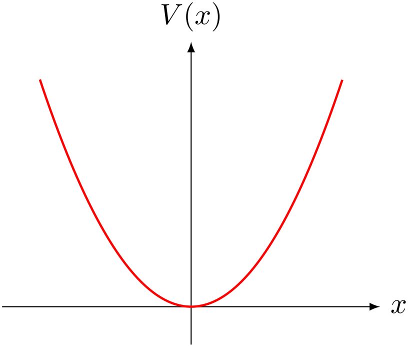



$$V(x)=\frac{1}{2}kx^2$$

$$F=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=-kx$$

# انرژی پتانسیل




$$V_0 = V(y=0) = 0$$

$$V(y) = mgy$$

$$V_0 = V(x=0) = 0$$

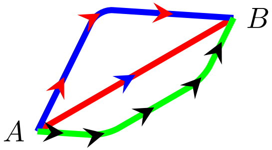
$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

# پایستگی انرژی

مبحث پایستگی انرژی برای نیروهای پایستار (مانند نیروی گرانش و نیروی فنر) است.
اختلاف انرژی پتانسیل و اختلاف انرژی با علامت منفی با یکدیگر برابرند،

$$\Delta K = -\Delta V = W_{\text{پایستار}}$$

کار نیروی پایسته مستقل از مسیر است و در آن اختلاف‌های انرژی جنبشی و پتانسیل فقط به حالتهای اولیه و نهایی (یا نقاط ابتدایی و انتهایی) بستگی دارد.




$$\begin{cases} \Delta K = K_B - K_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \\ \Delta V = V_B - V_A \end{cases} \Rightarrow K_B - K_A = -(V_B - V_A)$$

# پایستگی انرژی

مبحث پایستگی انرژی برای نیروهای پایستار (مانند نیروی گرانش و نیروی فنر) است.

$$\begin{cases} \Delta K = K_B - K_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \\ \Delta V = V_B - V_A \end{cases} \Rightarrow K_B - K_A = -(V_B - V_A)$$

$$K_B + V_B = K_A + V_A \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}mv_B^2 + V_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + V_A = \text{مقدار ثابت}}$$

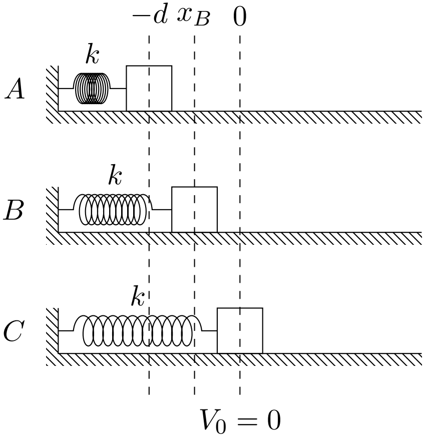
کمیت

$$\frac{1}{2}mv^2 + V$$

انرژي کل سیستم تحت بررسی $E$ می باشد که دارای مقدار یکسانی در حالتهای اولیه و نهایی (یا نقاط ابتدایی و انتهایی) $A$ و $B$ دارد که همان مفهوم پایستگی انرژی می‌باشد.

$$\begin{cases} E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + V_B \\ E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + V_A \end{cases} \Rightarrow \boxed{E_B = E_A = \text{مقدار ثابت}}$$

# پایستگی انرژی




$$A: \; E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

$$E_A = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

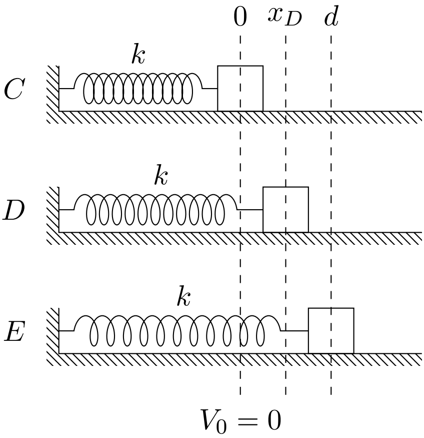
$$B: \; E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2$$

$$C: \; E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}kx_C^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + 0$$

$$E_A = E_B = E_C = E$$

# پایستگی انرژی




$$C:\ \ E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}kx_C^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + 0$$

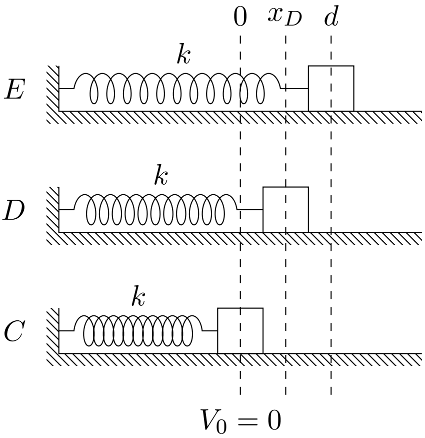
$$D:\ \ E_D = \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}kx_D^2$$

$$E:\ \ E_E = \frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2}kx_E^2$$

$$E_E = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$E_C = E_D = E_E = E$$

# پایستگی انرژی




$$E_E = E_D = E_C = E$$

$$E:\ \ E_E = \frac{1}{2}mv_E^2 + \frac{1}{2}kx_E^2$$

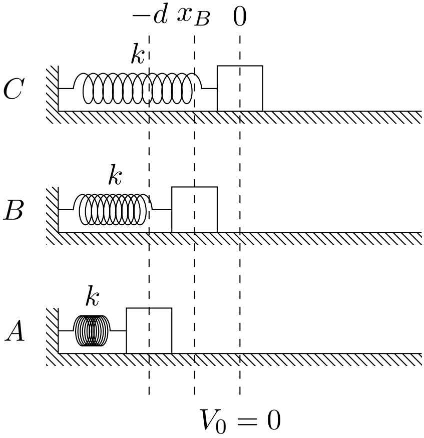
$$E_E = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$D:\ \ E_D = \frac{1}{2}mv_D^2 + \frac{1}{2}kx_D^2$$

$$C:\ \ E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}kx_C^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + 0$$

# پایستگی انرژی




$$E_C = E_B = E_A = E$$

$$C: \; E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}kx_C^2$$

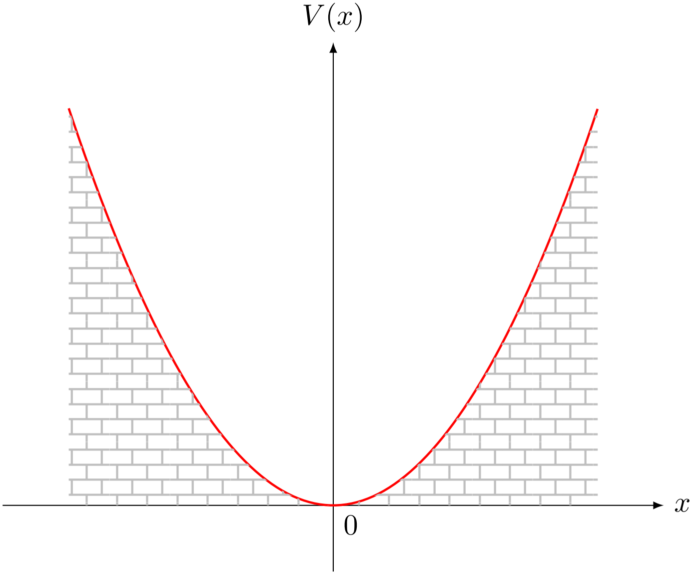
$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + 0$$

$$B: \; E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}kx_B^2$$

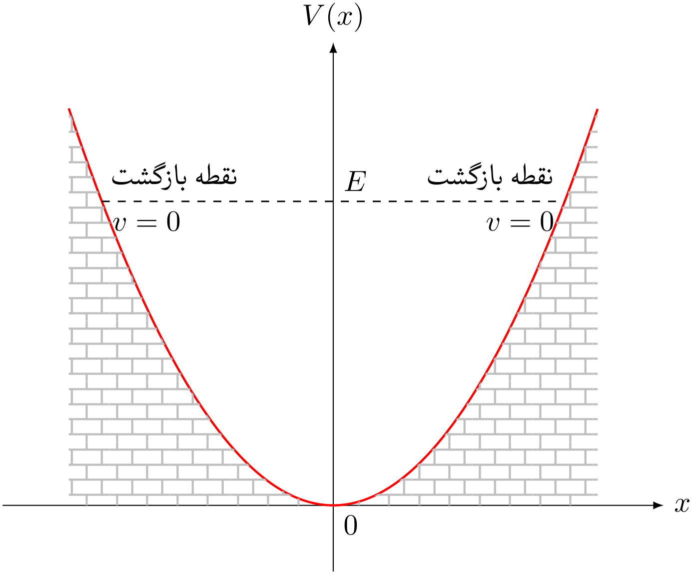
$$A: \; E_A = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$$

$$E_A = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

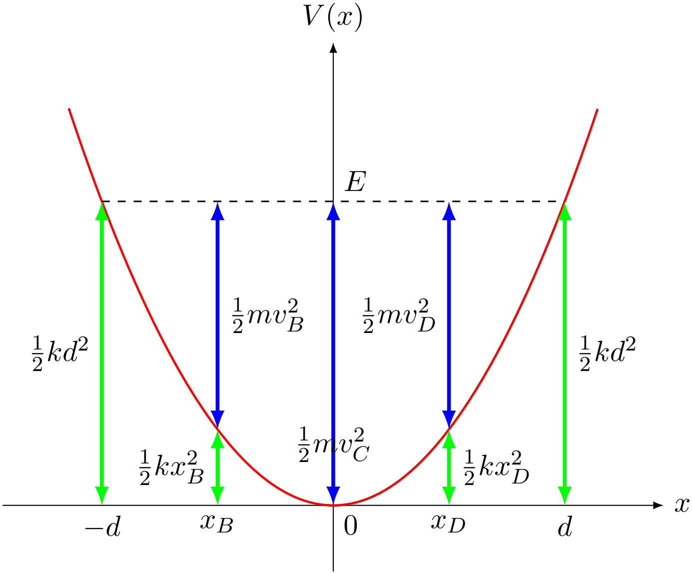
# پایستگی انرژی



# پایستگی انرژی

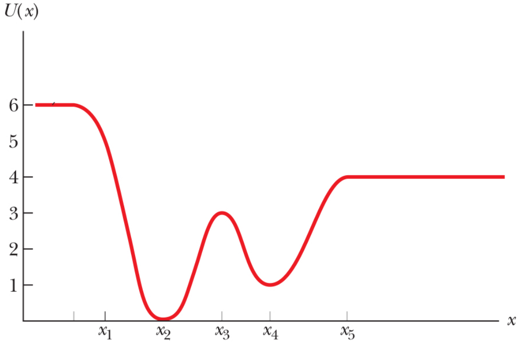


# پایستگی انرژی



# پایستگی انرژی

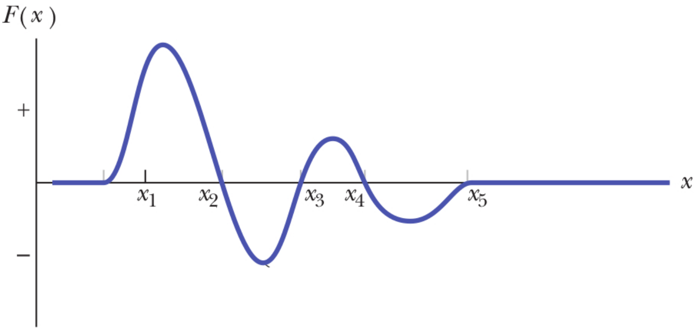
## تحلیل تابع انرژی پتانسیل




**نقاط تعادل** یا نقاط اکسترمم $x_2$ و $x_4$ (مینیمم) و $x_3$ (ماکزیمم) از برابر صفر قرار دادن مشتق تابع انرژي پتانسیل $V(x)$ نسبت به $x$ بدست می‌آید، یعنی

$$\text{نقاط اکسترمم یا نقاط تعادل} : \quad F = 0, \quad \text{یا} \quad \frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = 0$$

تحلیل تابع انرژی پتانسیل

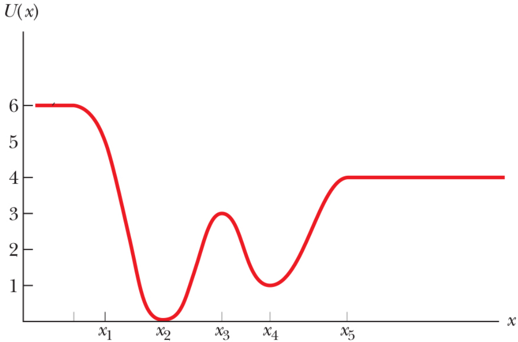



**نقاط تعادل** یا نقاط اکسترمم $x_2$ و $x_4$ (مینیمم) و $x_3$ (ماکزیمم) از برابر صفر قرار دادن مشتق تابع انرژي پتانسیل $V(x)$ نسبت به $x$ بدست می‌آید، یعنی

$$F = 0, \quad \text{یا} \quad \frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x} = 0$$

# پایستگی انرژی

## تحلیل تابع انرژی پتانسیل




تعیین علامت نقطه ماکزیمم در $x_3$

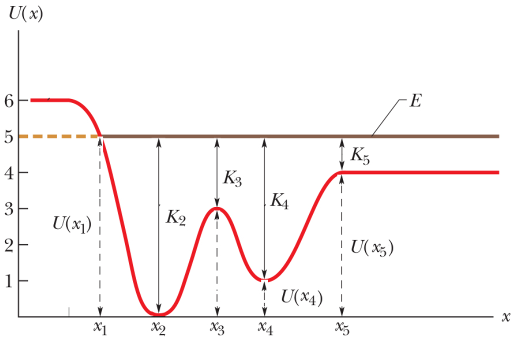
$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} < 0$$ : نقاط تعادل ناپایدار

تعیین علامت نقاط مینیمم در $x_2$ و $x_4$

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} > 0$$ : نقاط تعادل پایدار

# پایستگی انرژی

تحلیل تابع انرژی پتانسیل

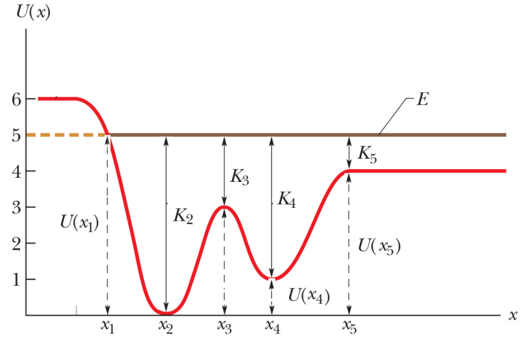



ذره‌ای با انرژي $E$ در خلاف جهت محور $x$ به نمودار پتانسیل را در $x_1$ برخورد می‌کند. نقطه‌ی $x_1$ بعنوان نقطه بازگشت شناخته می‌شود که در آن انرژی جنبشی یا سرعت ذره صفر می‌شود. ذره پس از برخورد به دیوار انرژی پتانسیل در جهت محور $x$ باز می‌گردد. در نقطه‌ی $x_1$، مقدار انرژی ذره برابر با انرژی پتانسیل می‌شود، یعنی

$$E = V(x_1)$$

# پایستگی انرژی

## تحلیل تابع انرژی پتانسیل




$$E = V(x_1)$$

$$E = K_2$$

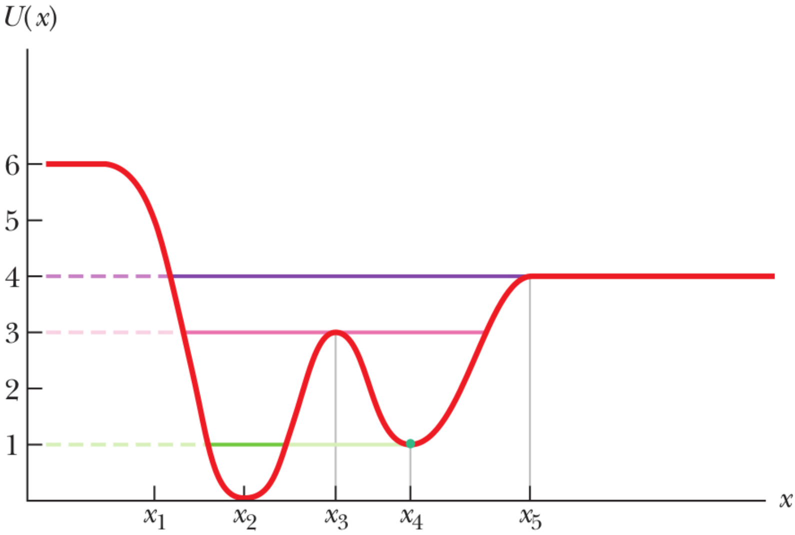
$$E = K_3 + V(x_3)$$

$$E = K_4 + V(x_4)$$

$$E = K_5 + V(x_5)$$

# پایستگی انرژی

## تحلیل تابع انرژی پتانسیل



# پایستگی انرژی

تغییر پایستگی انرژی در حضور نیروهای ناپیستار:

$$\text{قضیه کار و انرژی} : \ \Delta K = K_2 - K_1 = W^{\text{پایستار}} + W^{\text{ناپایستار}}$$

$$\text{تغییرات انرژی پتانسیل} : \ \Delta V = V_2 - V_1 = -W^{\text{پایستار}}$$

داریم

$$K_2 - K_1 = -(V_2 - V_1) + W^{\text{ناپیستار}}$$

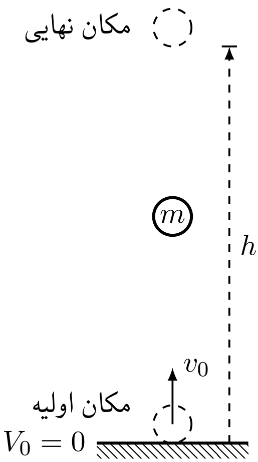
$$(K_2 + V_2) - (K_1 + V_1) = W^{\text{ناپیستار}}$$

$$E_2 - E_1 = W^{\text{ناپایستار}}$$

$$\Delta E = W^{\text{ناپایستار}}$$

حضور نیروهای ناپایستار باعث از بین رفتن پایستگی انرژی سیستم می‌شود.

# پایستگی انرژی



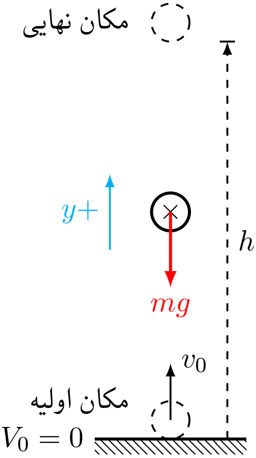

مسئله: جسمی با سرعت اولیه $v_0$ قائم بطرف بالا پرتاب می‌شود. ذره تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

$$E_{\text{مکان نهایی}} = E_{\text{مکان اولیه}} \;:\; \text{پایستگی انرژی}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

# پایستگی انرژی




مسئله:

قضیه کار و انرژی : $\Delta K = W_{mg}$

$$0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = (-mg)h$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

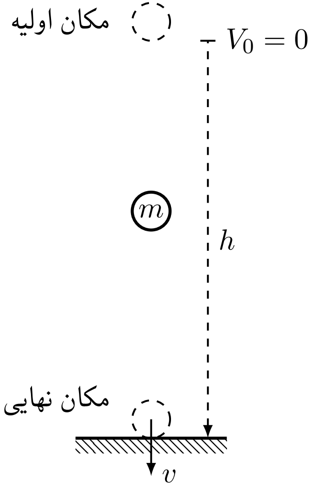
قانون دوم نیوتن : $\sum F_y = ma$

$$a = -g$$

معادله مستقل از زمان : $v^2 - v_0^2 = 2ad$

$$0 - v_0^2 = -2gh \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g}$$

# پایستگی انرژی



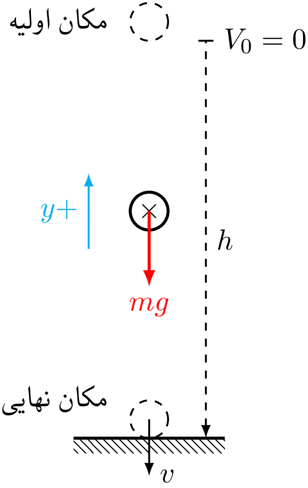

مسئله: جسمی از ارتفاع $h$ در امتدا قائم رها می‌شود. ذره تب چه سرعتی به سطح زمین می‌رسد؟

$$E_{\text{مکان اولیه}} = E_{\text{مکان نهایی}}$$ : پایستگی انرژی

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

# پایستگی انرژی




مسئله:

قضیه کار و انرژی : $\Delta K = W_{mg}$

$$\frac{1}{2}m_v^2 - 0 = (-mg)(-h)$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

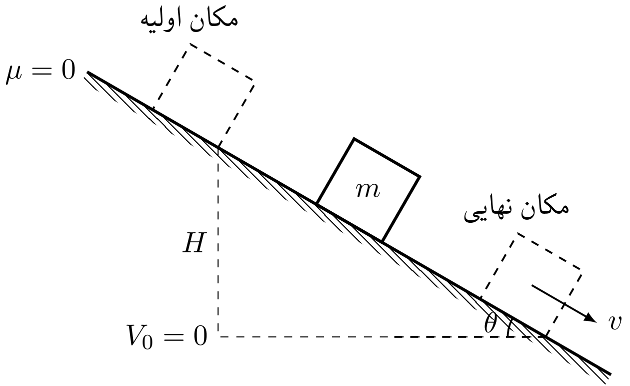
قانون دوم نیوتن : $\sum F_y = ma$

$$a = -g$$

معادله مستقل از زمان : $v^2 - v_0^2 = 2ad$

$$v^2 - 0 = 2(-g)(-h) \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

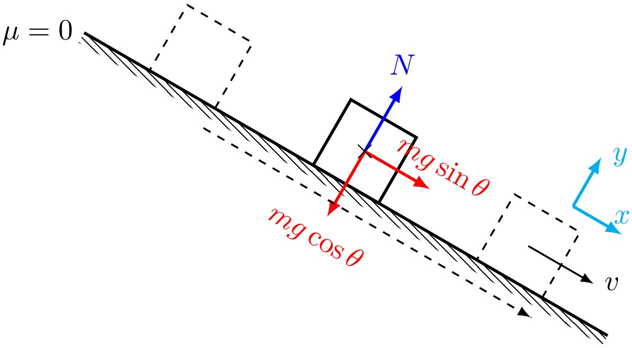
مسئله: جسمی از بالای سطح شیبداری بدون اصطکاکی رها می شود. سرعت آنرا وقتی به ارتفاع $H$ پایین می‌آید را بدست آوردید.




$$\text{پایستگی انرژی}: \quad E_{\text{مکان اولیه}} = E_{\text{مکان نهایی}} \Rightarrow mgH = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gH}$$

# پایستگی انرژی

مسئله:

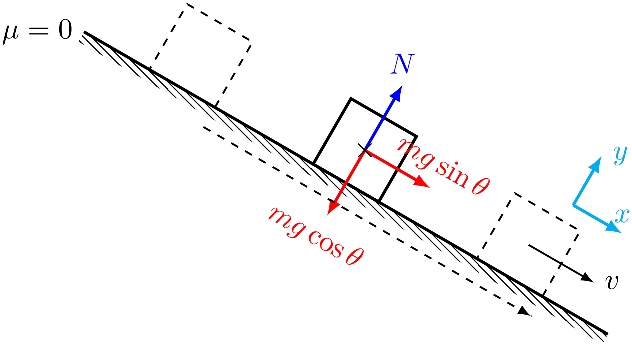



$$\text{قضیه کار و انرژی} : \ \Delta K = W_{mg} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - 0 = (mg\sin\theta)\frac{H}{\sin\theta}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH \Rightarrow v = \sqrt{2gH}$$

# پایستگی انرژی

مسئله:

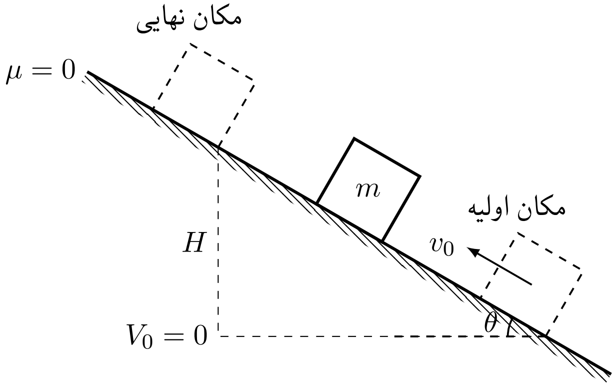



$$\sum F_x = ma \Rightarrow a = g\sin\theta$$ : قانون دوم نیوتن

$$v^2 - v_0^2 = 2ad \Rightarrow v^2 = 2(g\sin\theta)\frac{H}{\sin\theta} \Rightarrow v = \sqrt{2gH}$$ : معادله مستقل از زمان

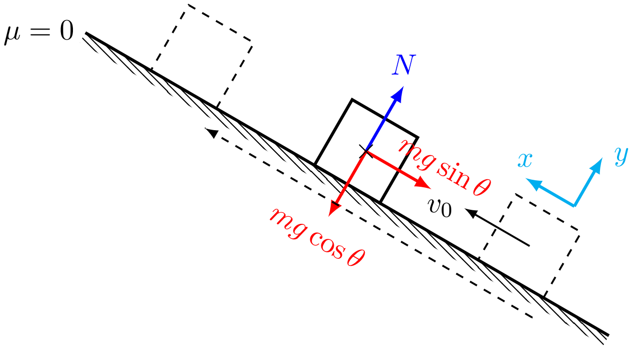
## پایستگی انرژی

مسئله: جسمی از پایین سطح شیبداری بدون اصطکاکی بطرف بالا پرتاب می‌شود. جسم تا ارتفاع $H$ از سطح شیبدار بالا می‌رود. سرعت اولیه‌ی جسم را بدست آورید.




$$\text{پایستگی انرژی} : E_{\text{مکان اولیه}} = E_{\text{مکان نهایی}} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = mgH \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH}$$

مسئله:

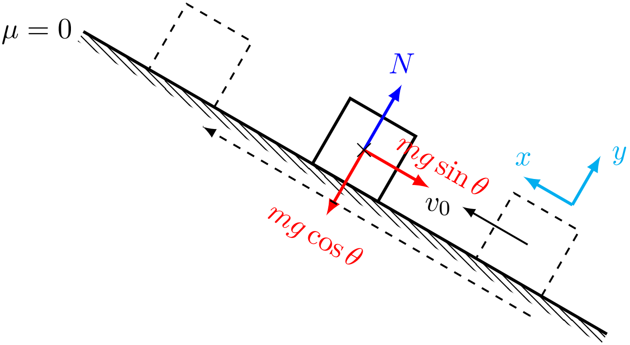



$$\text{قضیه کار و انرژی}:\quad \Delta K = W_{mg} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = (-mg\sin\theta)\frac{H}{\sin\theta}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH}$$

# پایستگی انرژی

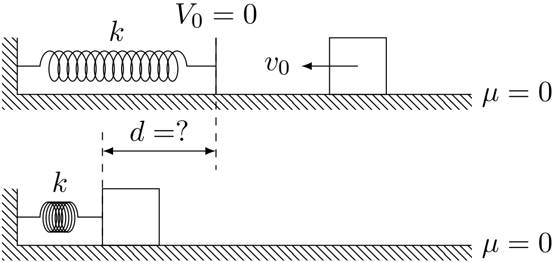
مسئله:




$$\text{قانون دوم نیوتن} : \sum F_x = ma \Rightarrow a = -g\sin\theta$$

$$\text{معادله مستقل از زمان} : v^2 - v_0^2 = 2ad \Rightarrow 0 - v_0^2 = 2(-g\sin\theta)\frac{H}{\sin\theta} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gH}$$

مسئله: جسمی با سرعت $v_0$ به فنری با ثابت $k$ برخورد می‌کند. حداکثر فشردگی فنر را بدست آورید.



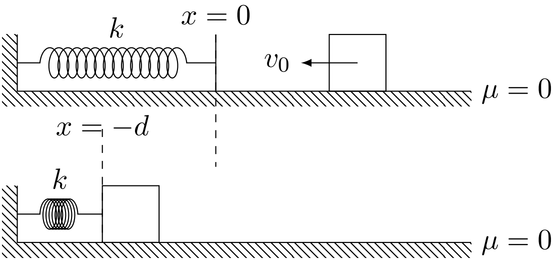

$$E_{\text{لحظه‌ی حداکثر فشردگی}} = E_{\text{قبل از تماس جرم با فنر}} \quad : \text{پایستگی انرژی}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

$$d = \sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




$$W_{\text{فنر}} = K_{\text{قبل از تماس جرم با فنر}} - K_{\text{لحظه‌ی حداکثر فشردگی}} = \Delta K \;:\; \text{قضیه کار و انرژی}$$

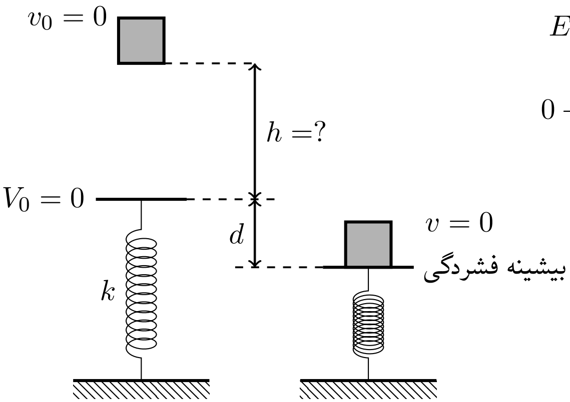
$$0-\frac{1}{2}mv_0^2=-k\int_0^{-d}x\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2}mv_0^2=-\frac{1}{2}kd^2 \Rightarrow d=\sqrt{\frac{mv_0^2}{k}}$$

# قضیه کار و انرژی

مسئله: در اثر سقوط جسمی بر روی فنر در امتداد قائم، فنر به اندازه $d$ فشرده شده و سرعت جسم بطور لحظه‌ای برابر صفر می‌شود. ارتفاعی که از آن جسم سقوط کرده را بدست آورید.

پایستگی انرژی



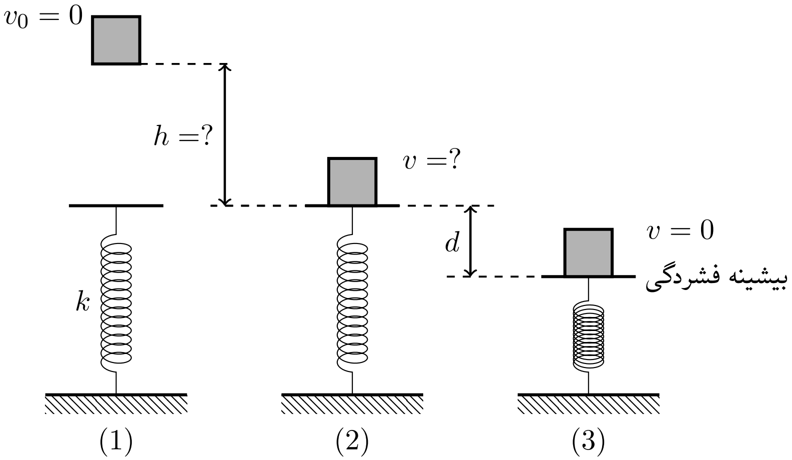

$$E_{\text{قبل از سقوط}} = E_{\text{لحظه‌ی حداکثر فشردگی}}$$

$$0 + mgh = 0 - mgd + \frac{1}{2}kd^2$$

$$h = -d + \frac{kd^2}{mg}$$

# پایستگی انرژی

مسئله



# پایستگی انرژی

مسئله

قضیه کار و انرژی بین دو حالت (1) و حالت (2):

$$K_2 - K_1 = W_{mg}^{12}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W_{mg}^{12}, \quad v_0 = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

قضیه کار و انرژی بین دو حالت (2) و حالت (3):

$$K_3 - K_2 = W_{mg}^{23} + W_F$$

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = mgd - \frac{1}{2}kd^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2 - mgd$$

# پایستگی انرژی

مسئله

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh : \quad ۱$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kd^2 - mgd : \quad ۲$$

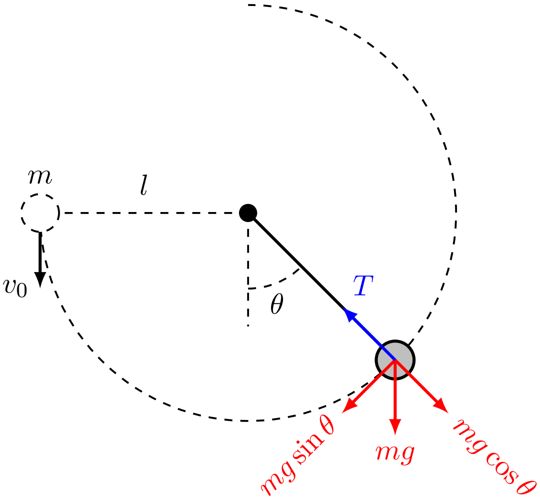
در نتیجه

$$۲ : \quad v = \sqrt{kd^2/m - 2gd}$$

$$۲ : \quad mgh = \frac{1}{2}kd^2 - mgd \Rightarrow h = \frac{kd^2}{mg} - d$$

# پایستگی انرژی

مسئله: کشش میله را وقتی مطابق شکل با امتداد قائم زاویه‌ی $\theta$ می‌سازد، بدست آورید




$$\sum F_r = -m\frac{v^2}{l}$$

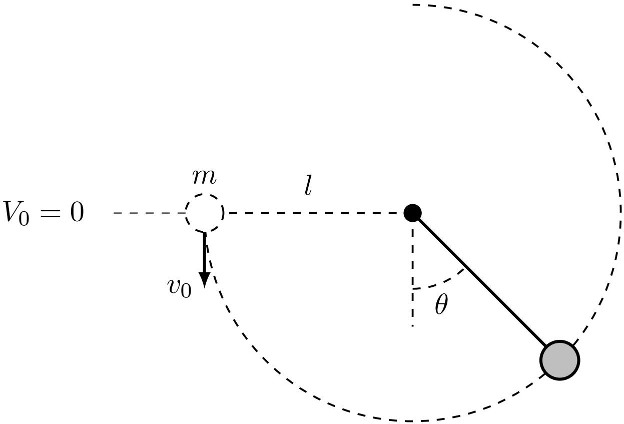
$$mg\cos\theta - T = -m\frac{v^2}{l}$$

$$T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l}$$

$$v = ?$$

# پایستگی انرژی

مسئله:

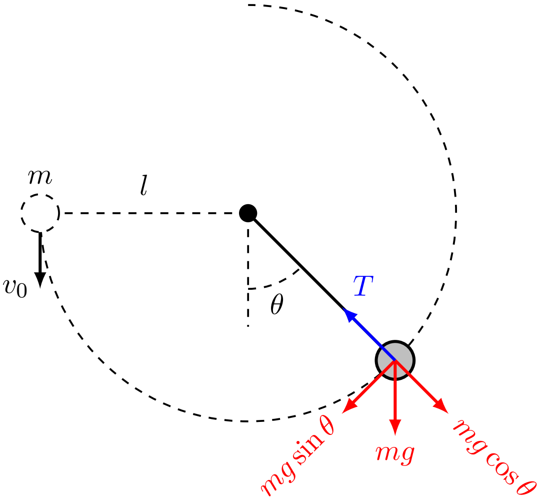



$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgl\cos\theta \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gl\cos\theta \quad (۱)$$

# پایستگی انرژی

مسئله: کشش میله را وقتی مطابق شکل با امتداد قائم زاویه‌ی $\theta$ می‌سازد، بدست آورید




$$\sum F_r = -m\frac{v^2}{l}$$

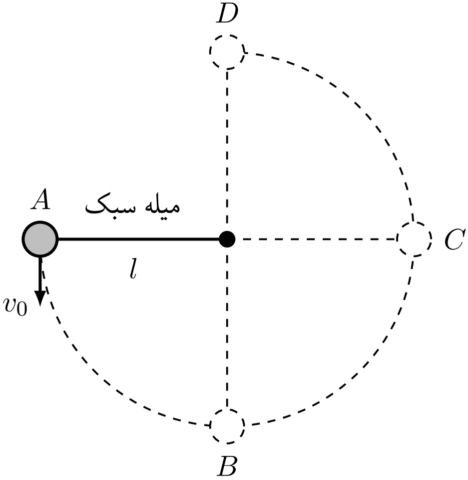
$$mg\cos\theta - T = -m\frac{v^2}{l}$$

$$T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{l}$$

با استفاده از رابطه ۱ داریم

$$T = 3mg\cos\theta + \frac{mv_0^2}{l}$$

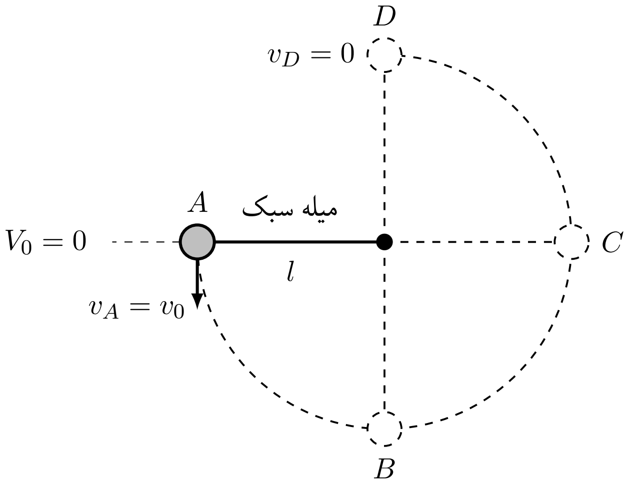
# پایستگی انرژی




مسئله: میله ای صلب بدون جرم بطول $L$ از یک انتها به توپی به جرم $m$ متصل است. انتهای دیگر میله، طوری لولا شده که میله می‌تواند دایره قائم حرکت کند. دستگاه از مکان افقی $A$ با سرعت اولیه $v_0$بطرف پایین پرتاب می‌شود. توب به نقطه $D$ می‌رسد و می‌ایستد. الف) برحسب $L$، $m$ و $g$ عبارتی برای $v_0$ پیدا کنید. ب)وقتی توپ از $B$عبور می‌کند کشش میله چقدر است؟

# پایستگی انرژی

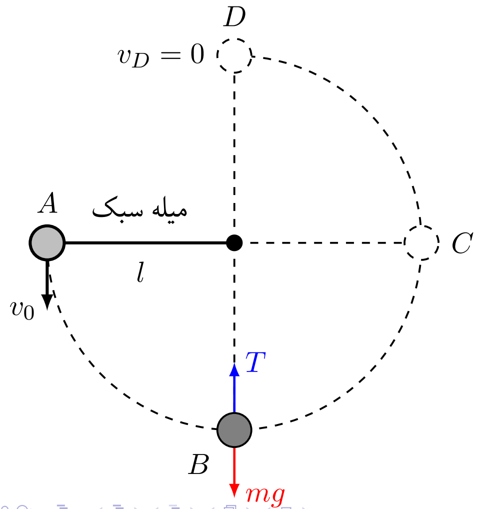
مسئله:




پایستگی انرژی : $E_A = E_D \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgl \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gl}$

# پایستگی انرژی

مسئله:



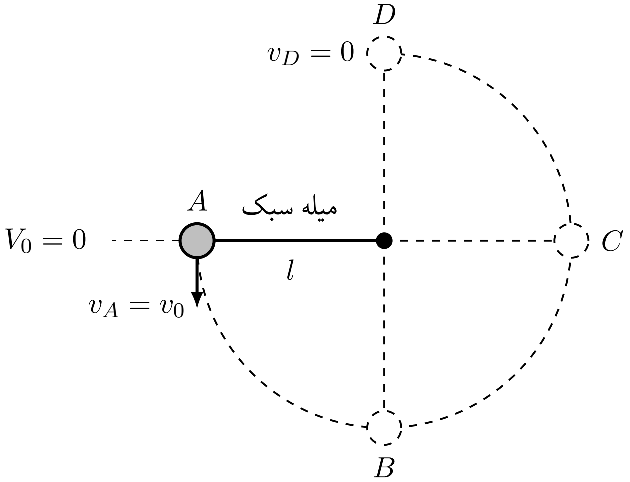

$$\sum F_r = -m\frac{v_B^2}{l}$$

$$mg - T = -\frac{mv_B^2}{l}$$

$$v_B = ?$$

## پایستگی انرژی

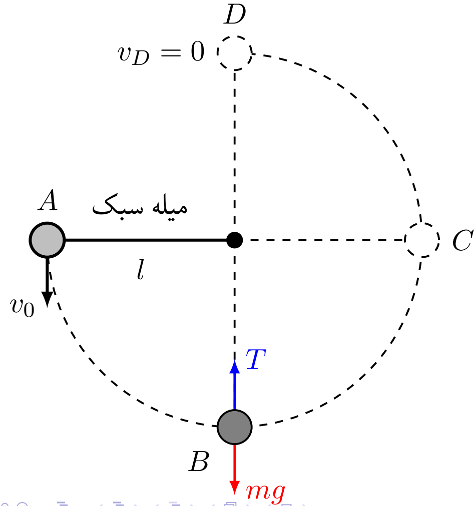
مسئله:




$$\text{پایستگی انرژی} : \; E_A = E_B \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgl \Rightarrow v_B = 2\sqrt{gl} \quad (1)$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




$$\sum F_r = -m\frac{v_B^2}{l}$$

$$mg - T = -\frac{mv_B^2}{l}$$

با استفاده از رابطه ۱

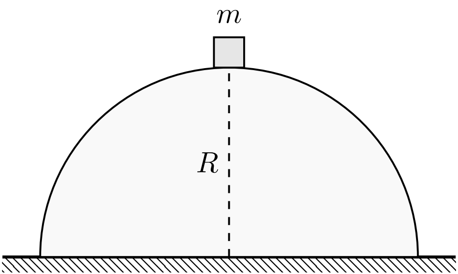
$$mv_B^2 = 4mgl$$

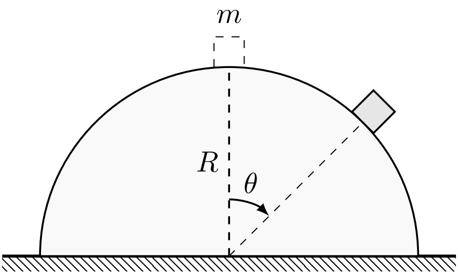
$$mg - T = -4mg$$

$$T = 5mg$$

# پایستگی انرژی

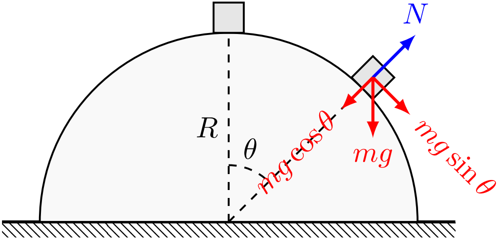
مسئله: پسر بچه‌ای ابتدا در بالای تپه‌ی یخی به شکل نیمکره‌ای به شعاع $R$ نشسته است. او به اندازه‌ی سرعت اولیه ناچیز شروع به سر خوردن می کند. سطح یخ را بدون اصطکاک در نظر بگیرید. در چه ارتفاعی، تماس پسر بچه با یخ قطع می‌شود؟



# پایستگی انرژی

مسئله:




نکته کلیدی: وقتی شخص از سطح جدا می‌شود که $N = 0$

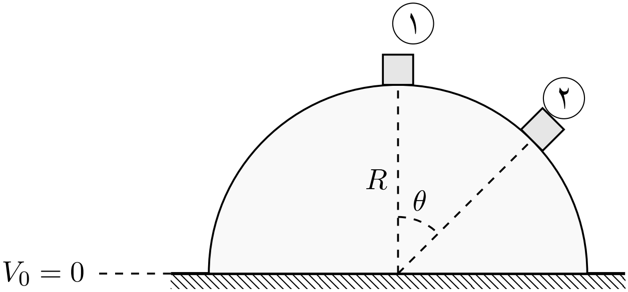
$$\sum F_r = -m\frac{v^2}{R}$$

$$N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

$$v = ?$$

# پایستگی انرژی

مسئله:



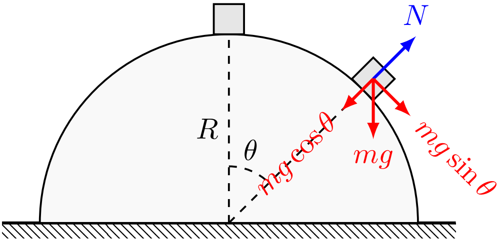

$$E_1 = E_2$$

$$0 + mgR = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta)$$

$$v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




$$\sum F_r = -m\frac{v^2}{R}$$

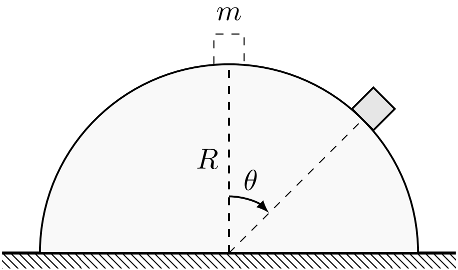
$$N - mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}, \qquad v^2 = 2gR(1-\cos\theta)$$

$$N - mg\cos\theta = -2mg(1-\cos\theta) \Rightarrow N = mg(-2+3\cos\theta)$$

لحظه‌ای که پسر سطح یخی را ترک می‌کند : $N = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$

# پایستگی انرژی

مسئله:

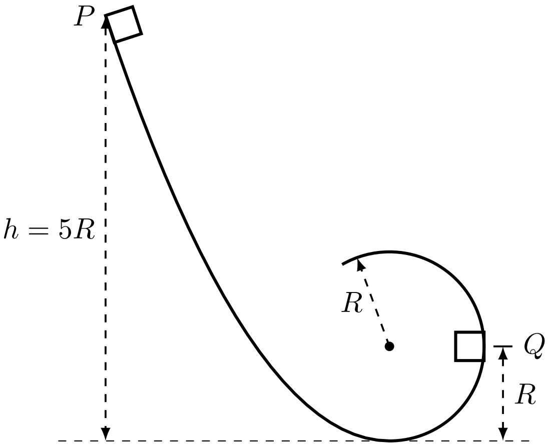



زاویه‌ای که پسر سطح یخی را ترک می‌کند : $\cos\theta = \dfrac{2}{3} \qquad \theta = \cos^{-1}(2/3)$

ارتفاعی که پسر سطح یخی را ترک می‌کند : $\cos\theta = \dfrac{h}{R} \Rightarrow h = R\cos\theta \Rightarrow h = 2R/3$

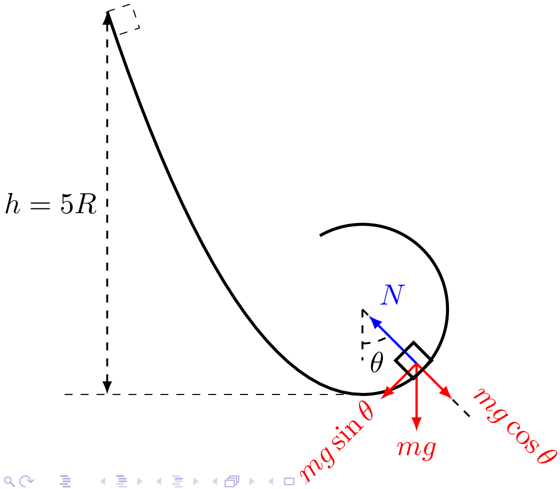
# پایستگی انرژی

مسئله: الف) مولفه‌ی افقی و قائم نیروی برآیند را در نقطه $Q$ بدست آورید. ب) جسم از چه ارتفاعی $h$ رها شود تا در بالای حلقه در آستانه‌ی جدا شدن از حلقه باشد؟



# پایستگی انرژی

مسئله: قسمت الف




$$\sum F_r = -m\frac{v^2}{R}$$

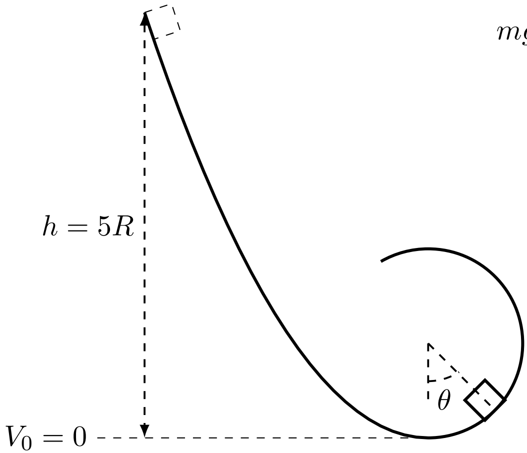
$$-N + mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}$$

$$v = ?$$

# پایستگی انرژی

مسئله: قسمت الف




$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

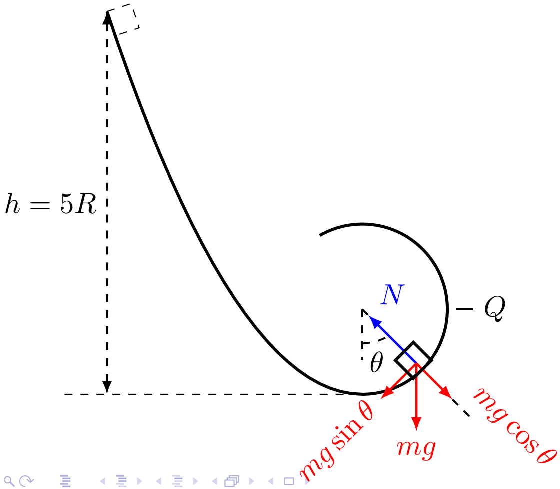
$$h = 5R$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(4 + \cos\theta)$$

$$v^2 = 2gR(4 + \cos\theta)$$

# پایستگی انرژی

مسئله: قسمت الف




$$\sum F_r = -m\frac{v^2}{R}$$

$$-N + mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}$$

$$v^2 = 2gR(4+\cos\theta)$$

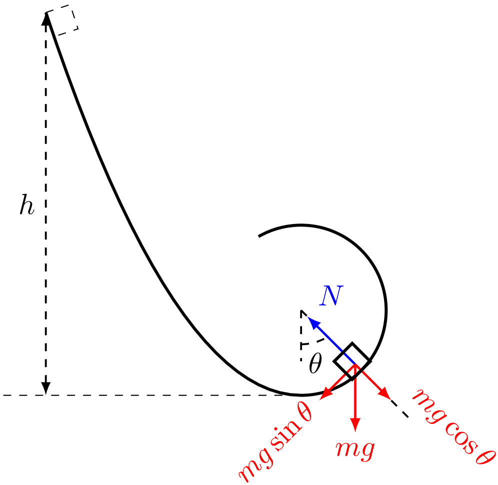
$$N = mg(8+3\cos\theta)$$

در نقطه‌ی $Q$ : $\theta = \pi/2$

$$N = 8mg$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




نکته کلیدی: در بالاترین نقطه حلقه
$N = 0$

$$\sum F_r = -m\frac{v^2}{R}$$

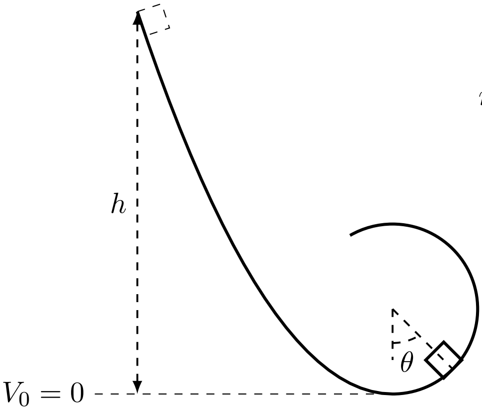
$$-N + mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}$$

$$v = ?$$

# پایستگی انرژی

مسئله: قسمت ب



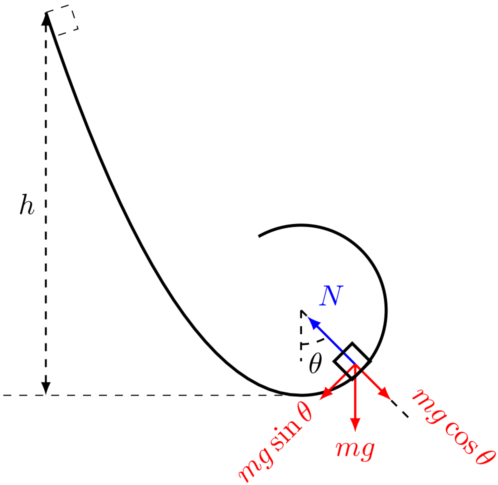

$$E_1 = E_2$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1-\cos\theta)$$

$$mv^2 = -2mgh + 2mgR(1-\cos\theta)$$

# پایستگی انرژی

مسئله: قسمت ب




$$\sum F_r = -m\frac{v^2}{R}$$

$$-N + mg\cos\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

$$N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}$$

$$N = -2mg+3mg\cos\theta+\frac{2mgh}{R}$$

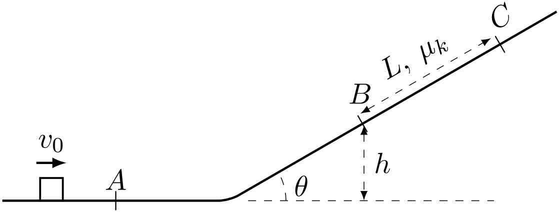
در نقطه‌ی $p$ : $N(\theta=\pi)=0$

$$0 = -5mg + \frac{2mgh}{R}$$

$$h = \frac{5}{2}R$$

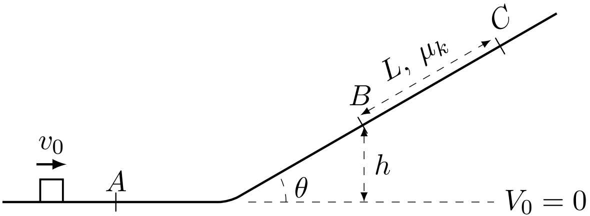
# پایستگی انرژی

مسئله: جسمی بر روی مسیر بدون اصطکاک می لغزد تا به قسمتی با طول $L = 0.75\mathrm{m}$ با ارتفاع $h = 2\mathrm{m}$ بر روی سطح شیبداری به زاویه‌ی شیب $\theta = 30^\circ$ می‌رسد. در این قسمت ضریب اصطکاک لغزشی $\mu_k = 0.4$ است. جسم از نقطه‌ی $A$ با سرعت $8/\mathrm{m/s}$عبور می‌کند. اگر جسم به نقطه‌ی $C$ برسد اندازه‌ی سرعت آن چقدر است؟ و اگر نتواند بیشترین ارتفاع بالاتر از $A$ چقدر است؟



# پایستگی انرژی

مسئله:




$$E_A = E_B \quad : \text{با استفاده از پایستگی انرژی}$$

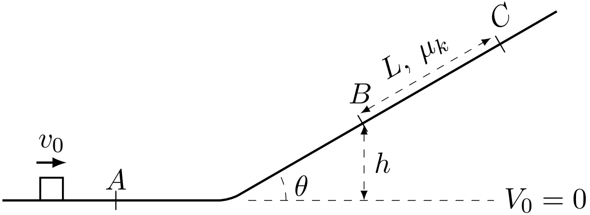
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh$$

$$K_C - K_B = W_{\text{کل}} \quad : \text{با استفاده از قضیه کار و انرژی}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -mgL(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh$$

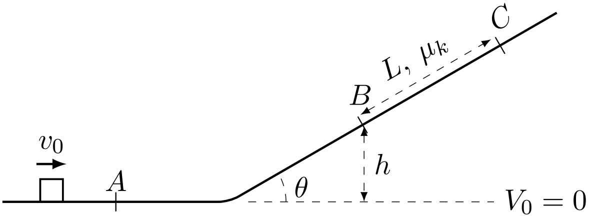
$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -mgL(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$$

از جمع دو عبارت بالا داریم

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh - mgL(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




$$v_C^2 = v_0^2 - 2gh - 2gL(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)$$

برای اینکه ذره به نقطه‌ی $C$ برسد یا از آن عبور کند، باید عبارت سمت راست بالا بترتیب مساوی یا بزرگتر از صفر باشد،

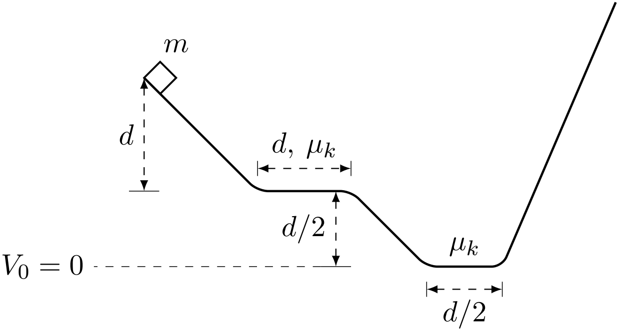
$$v_C^2 = v_0^2 - 2gh - 2gL(\sin\theta + \mu_k \cos\theta) \geq 0 \Rightarrow v_C^2 = 12.36 > 0$$

بنابراین جسم از نقطه‌ی $C$ عبور می‌کند

$$v_C = 3.52 \mathrm{m/s}$$

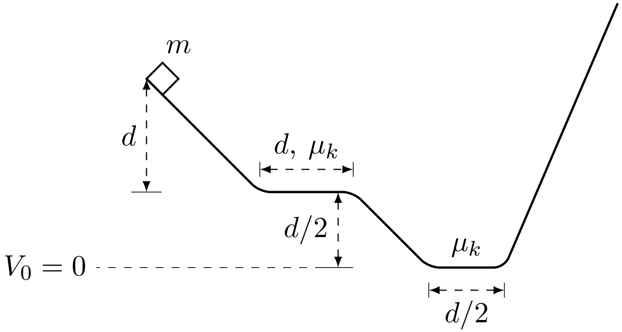
# پایستگی انرژی

مسئله: جسمی از حالت سکون از ارتفاع $d = 40\text{cm}$ رها شده و بروی سطح شیبدار بدون اصطکاک می‌لغزد تا به اولین سطح افقی با طول $d$ و ظریب اصطکاک لغزشی $\mu_k = 0.5$ برسد. اگر جسم متوقف نشوداز روی سطح شیبدار دوم بدون اصطکاک با ارتفاع $d/$ می‌لغزد تا به سطح افقی دوم با طول $d/2$ و ضریب اصطکاک $\mu_k = 0.5$ برسد. اگر جسم هنوز حرکت می‌کند از سطح شیبدار دیگری بالا می‌رود تا موقتا بایستد. جسم تا چه ارتفاعی نسبت به پایین ترین سطح بالا می‌رود؟



# پایستگی انرژی

مسئله:




استفاده از پایستگی انرژي روی سطح شیبدار اول

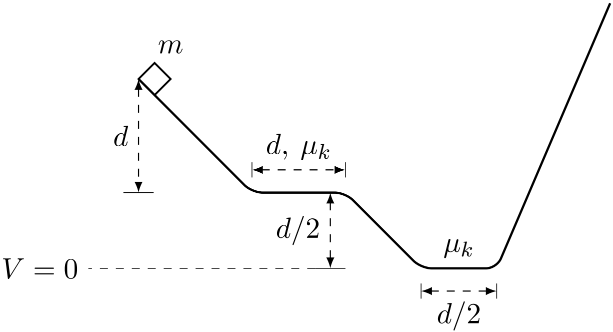
$$E_{\text{بالای سطح شیبدار}} = E_{\text{پایین سطح شیبدار}}$$

$$3mgd/2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgd/2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 = mgd \quad (۱)$$

که $v_1$ سرعت در پایین سطح شیبدار اول است.

# پایستگی انرژی

مسئله:




استفاده از قضیه کار و انرژي روی سطح افقی اول

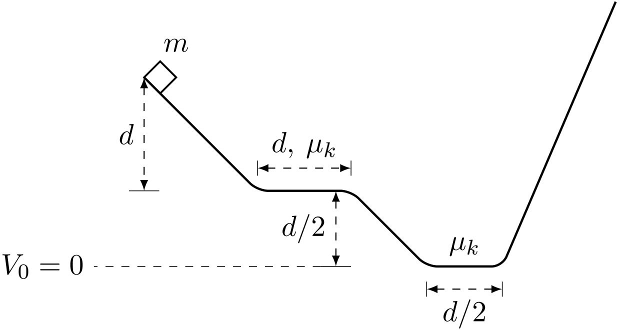
$$K_{\text{انتهای سطح افقی}} - K_{\text{ابتدای سطح افقی}} = W_f$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\mu_k mgd \quad ۲$$

که $v_2$ سرعت در انتهای سطح افقی اول است.

# پایستگی انرژی

مسئله:




استفاده از پایستگی انرژي روی سطح شیبدار سوم

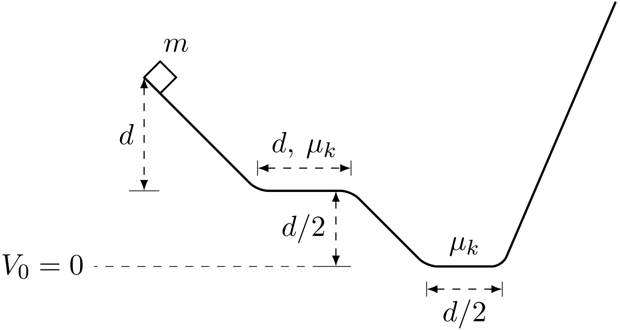
$$E_{\text{بالای سطح شیبدار}} = E_{\text{پایین سطح شیبدار}}$$

$$mgd/2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = mgd/2 \quad ③$$

که $v_3$ سرعت در پایین سطح شیبدار دوم است.

# پایستگی انرژی

مسئله:




استفاده از قضیه کار و انرژي روی سطح افقی دوم

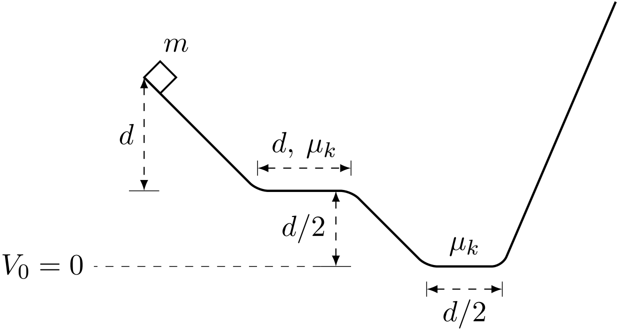
$$K_{\text{انتهای سطح افقی}} - K_{\text{ابتدای سطح افقی}} = W_f$$

$$\frac{1}{2}mv_4^2 - \frac{1}{2}mv_3^2 = -\mu_k mgd/2 \quad (۴)$$

که $v_4$ سرعت در انتهای سطح افقی دوم است.

# پایستگی انرژی

مسئله:




استفاده از پایستگی انرژي روی سطح شیبدار سوم

$$E_{\text{پایین سطح شیبدار}} = E_{\text{بر روی سطح شیدار}}$$

$$\frac{1}{2}mv_4^2 = \frac{1}{2}mv_5^2 + mgH \Rightarrow \frac{1}{2}mv_5^2 - \frac{1}{2}mv_4^2 = -mgH \quad ۵$$

که $v_5$ سرعت بر روی سطح شیبدار سوم تا ارتفاع $H$ است.

# پایستگی انرژی

مسئله:

$$\text{۱}: \ \frac{1}{2}mv_1^2 = mgd$$

$$\text{۲}: \ \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\mu_k mgd$$

$$\text{۳}: \ \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = mgd/2$$

$$\text{۴}: \ \frac{1}{2}mv_4^2 - \frac{1}{2}mv_3^2 = -\mu_k mgd/2$$

$$\text{۵}: \ \frac{1}{2}mv_5^2 - \frac{1}{2}mv_4^2 = -mgH$$

از جمع تمامی جملات سمت چپ و راست عبارتهای بالا با یکدیگر

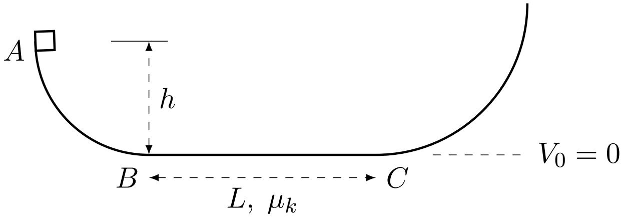
$$\frac{1}{2}mv_5^2 = -mgH + \frac{1}{2}mgd(3 - 3\mu_k)$$

وقتی که جسم بر روی سطح شیبدار سوم متوقف می‌شود،

$$v_5 = 0 \Rightarrow H = \frac{1}{2}d(3 - 3\mu_k) = \frac{3}{4}d = 30 \text{ cm}$$

# پایستگی انرژی

مسئله: ذره‌ای می‌تواند در امتداد مسیر شکل زیر بلغزد. طول قسمت مسطح $L = 40$ cm است. قسمتهای خمیده بدون اصطکاک هستند. ضریب اصطکاک لغزشی قسمت مسطح برابر $\mu_k = 0.2$ است. ذره از حالت سکون از ارتفاع $h = L/2$ رها می‌شود. ذره در چه فاصله‌ای از لبه‌ی طرف چپ قسمت مسطح می‌ایستد؟



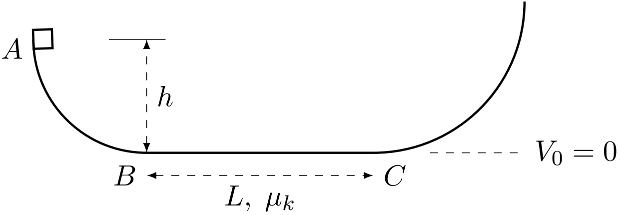

استفاده از پایستگی انرژي برای مسیر خمیده سمت چپ

$$E_A = E_B$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mgL$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




استفاده از قضیه کار و انرژي برای مسیر مسطح از **چپ به راست**

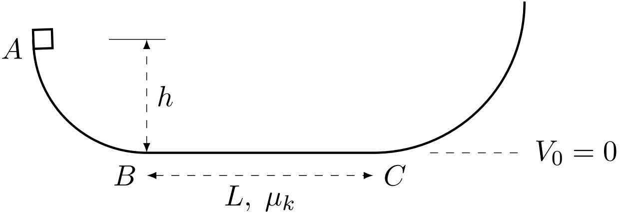
$$K_C - K_B = W_f$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu_k mgL \Rightarrow \frac{1}{2}mv_C^2 = mgL(1/2 - \mu_k)$$

از آنجایی که سطوح خمیده بدون اصطکاک هستند، ذره با هر سرعتی از آنها بالا برود با همان سرعت از آنها پایین می‌آید.

## پایستگی انرژی

مسئله:




استفاده از قضیه کار و انرژي برای مسیر مسطح از **راست به چپ**

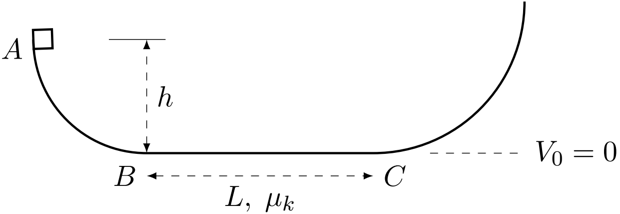
$$K_B - K_C = W_f$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = -\mu_k mgL \Rightarrow \frac{1}{2}mv_B^2 = mgL(1/2 - 2\mu_k)$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgL(1/2 - 2\mu_k) > 0$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




استفاده از قضیه کار و انرژي برای مسیر مسطح از **چپ به راست**

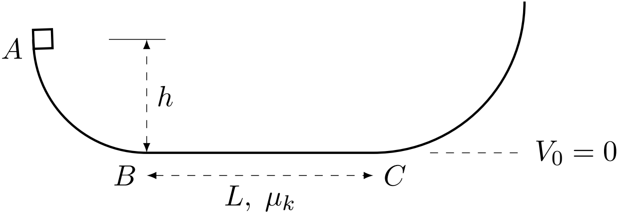
$$K_C - K_B = W_f$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu_k mgL \Rightarrow \frac{1}{2}mv_C^2 = mgL(1/2 - 3\mu_k) < 0$$

منفی شدن سمت راست رابطه بالا نشان می‌دهد که ذره به نقطه $C$ نمی‌رسد.

# پایستگی انرژی

مسئله:




استفاده از قضیه کار و انرژي برای مسیر مسطح از **چپ به راست** مسافت طی شده تا جایی که ذره متوقف شود، بنابراین

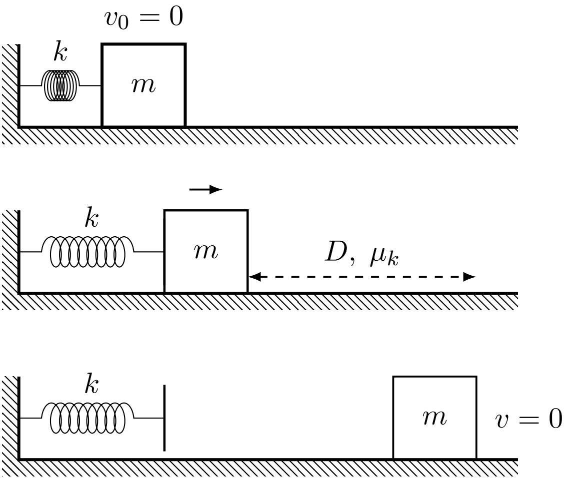
$$K_C - K_B = W_f$$

$$0 - \frac{1}{2}mv_B^2 = -\mu_k mgD \Rightarrow 0 = mgL(1/2 - 2\mu_k) - \mu_k mgD$$

$$D = L\left(\frac{1}{2\mu_k} - 2\right) = 20 \text{ cm}$$

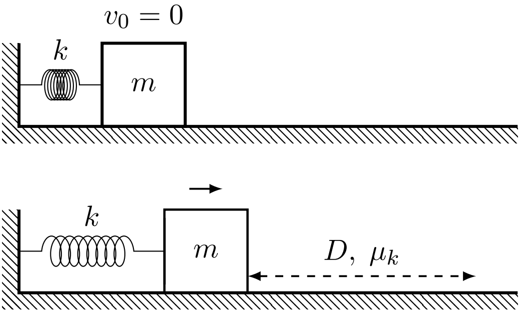
# پایستگی انرژی

مسئله: وقتی فنر بطول طبیعی می‌رسد جسم از فنر جدا می‌شود و بر روی سطح افقی با ضریب اصطکاک $\mu_k$ می‌شود. بیشینه فشردگی فنر را بدست آورید.



# پایستگی انرژی

مسئله:



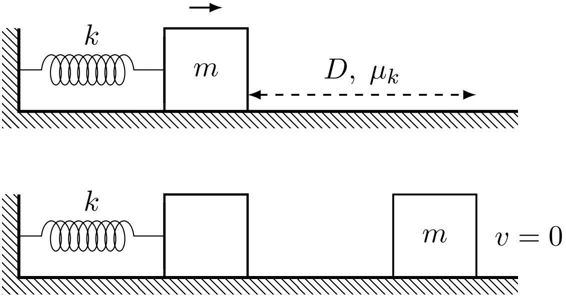

با استفاده از پایستگی انرژي

$$E_{\text{بیشنه فشردگی}} = E_{\text{طول طبیعی}}$$

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad (۱)$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




با استفاده از قضیه کار و انرژي

$$K - K_{\text{اولیه}} = W_f$$

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu_k mgD$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu_k mgD \quad ۲$$

# پایستگی انرژی

مسئله:

$$\text{۱} : \ \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\text{۲} : \ \frac{1}{2}mv^2 = \mu_k mgD$$

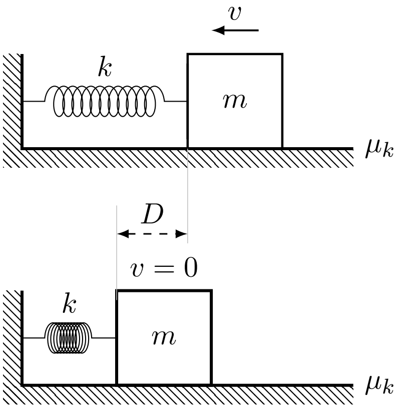
بنابراین

$$\frac{1}{2}kd^2 = \mu_k mgD$$

$$d = \sqrt{\frac{2\mu_k mgD}{k}} \quad \text{بیشینه فشردگی فنر}$$

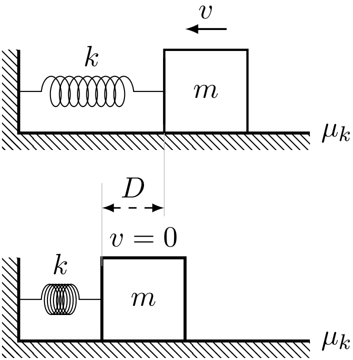
# پایستگی انرژی

مسئله: جسمی به جرم $m$ بطرف فنری با ثابت $k$ می‌لغزد. وقتی جسم می‌ایستد فنر به اندازه ی $d$ فشرده می‌شود. ضریب اصطکاک لغزشی بین جسم و سطح $\mu_k$ است. سرعت جسم در لحظه برخورد به فنر چقدر است؟



# پایستگی انرژی

مسئله:



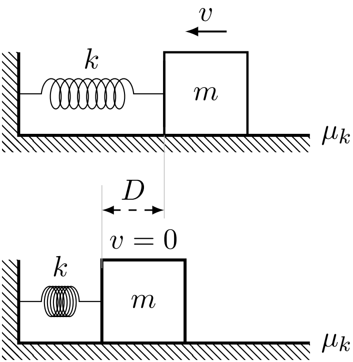

با استفاده از قضیه کار رو انرژي

$$K_{\text{بیشینه فشردگی}} - K_{\text{در لحظه برخورد به فنر}} = W_{\text{اصطکاک}} + W_{\text{فنر}}$$

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu_k mgD - \frac{1}{2}kD^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{kD^2}{m} + 2\mu_k gD}$$

# پایستگی انرژی

مسئله:



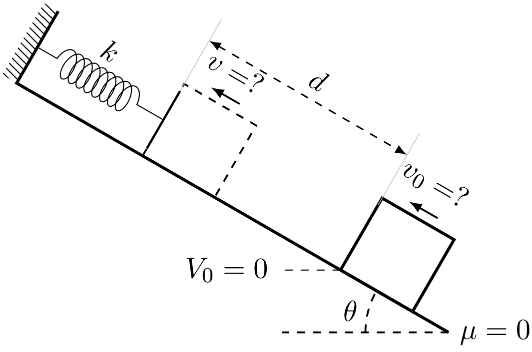

با استفاده از پایستگی انرژي در حضور انرژیهای اتلافی

$$E_{\text{بیشینه فشردگی}} + E_{\text{انرژی اتلاف شده}} = E_{\text{در لحظه برخورد به فنر}}$$

$$\frac{1}{2}kD^2 + \mu_k mgD = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{kD^2}{m} + 2\mu_k gD}$$

# پایستگی انرژی

مسئله:

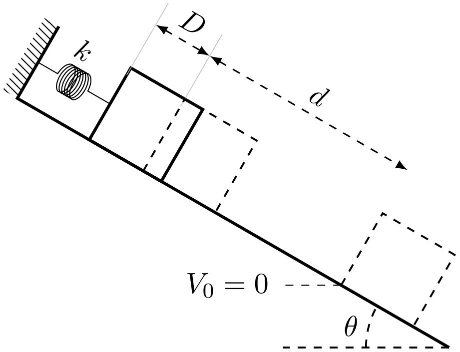



$$E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgd\sin\theta \quad (۱)$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




$$E_2 = E_3$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgd\sin\theta = mg(d+D)\sin\theta + \frac{1}{2}kD^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgD\sin\theta + \frac{1}{2}kD^2 \quad ۲$$

# پایستگی انرژی

مسئله:

$$\textcircled{۱}:\ \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgd\sin\theta$$

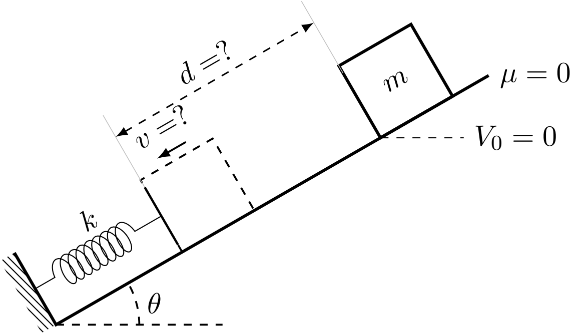
$$\textcircled{۲}:\ \frac{1}{2}mv^2 = mgD\sin\theta + \frac{1}{2}kD^2$$

$$\textcircled{۲}:\ v = \sqrt{2gD\sin\theta + \frac{kD^2}{m}}$$

$$\textcircled{۱}:\ v_0 = \sqrt{2g(D+d)\sin\theta + \frac{kD^2}{m}}$$

# پایستگی انرژی

مسئله: جسمی به جرم $m$ از بالای سطح شیبدار بدون اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta$ رها می‌شود. جسم در لحظه‌ای که فنر را به اندازه $D$ فشرده می‌کند، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. الف) در این لحظه جسم چه مسافتی را روی سطح شیبدار حرکت می‌کند؟ ب) سرعت جسم در لحظه‌ای که به فنر می‌رسد چقدرا است؟

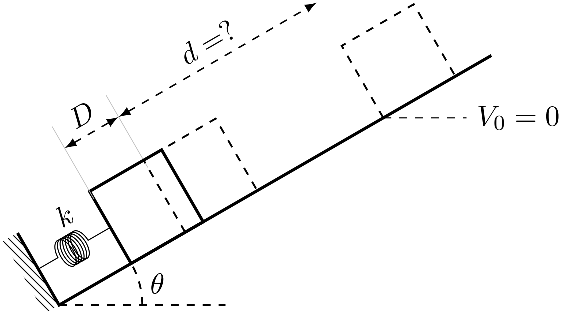



$$E_1 = E_2$$

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgd\sin\theta \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgd\sin\theta \quad ١$$

# پایستگی انرژی

مسئله:




$$E_2 = E_3$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgd\sin\theta = 0 - mg(D+d)\sin\theta + \frac{1}{2}kD^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = -mgD\sin\theta + \frac{1}{2}kD^2 \quad ۲$$

## پایستگی انرژی

مسئله:

$$\text{①}: \; \frac{1}{2}mv^2 = mgd\sin\theta$$

$$\text{②}: \; \frac{1}{2}mv^2 = -mgD\sin\theta + \frac{1}{2}kD^2$$

$$\text{①} = \text{②}: \; mgd\sin\theta = -mgD\sin\theta + \frac{1}{2}kD^2$$

$$d = -D + \frac{kD^2}{2mg\sin\theta}$$

$$\text{②}: \; v = \sqrt{-2gD\sin\theta + \frac{k}{m}D^2}$$

# پایستگی انرژی

مسئله: اندازه‌ی نیروی گرانشی میان ذره‌ای به جرم $m_1$ و ذره‌ای به جرم $m_2$

$$F(x) - G\frac{m_1 m_2}{x^2}$$

است که $G$ ثابت و $x$ فاصله بین دو ذره است. الف) تابع انرژی پتانسیل را بدست آورید و فرض کنید که در $x \to \infty$ داریم $V(\infty) \to 0$. ب) چقدر کار لازم است تا فاصله‌ی دو ذره را از $x = x_1$ به $x = x_1 + d$ افزایش دهیم.

قسمت الف)

$$\Delta V = -W_F \Rightarrow V(x) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{x} F(x)\mathrm{d}x$$

$$V(x) - 0 = -\int_{\infty}^{x} F(x)\mathrm{d}x = Gm_1m_2\int_{\infty}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = Gm_1m_2\left[-\frac{1}{x}\right]_{\infty}^{x}$$

$$V(x) = -Gm_1m_2\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\infty}\right] \Rightarrow V(x) = -G\frac{m_1m_2}{x}$$

# پایستگی انرژی

مسئله: قسمت الف)

$$V(x) = -G\frac{m_1 m_2}{x}$$

قسمت ب) کاری که شخص باید انجام دهد تا فاصله‌ی دو ذره را از $x = x_1$ به $x = x_1 + d$ افزایش یابد.

$$\text{وضعیت اولیه}:\ V(x_1) - V(\infty) = -G\frac{m_1 m_2}{x_1} = -\int_{\infty}^{x_1} F(x)\mathrm{d}x$$

$$\text{وضعیت نهایی}:\ V(x_1+d) - V(\infty) = -G\frac{m_1 m_2}{x_1+d} = -\int_{\infty}^{x_1+d} F(x)\mathrm{d}x$$

$$V_{\text{وضعیت نهایی}} - V_{\text{وضعیت اولیه}} = V(x_1+d) - V(x_1) = -G\frac{m_1 m_2}{x_1+d} + G\frac{m_1 m_2}{x_1}$$

$$V(x_1+d) - V(x_1) = -\int_{\infty}^{x_1+d} F(x)\mathrm{d}x + \int_{\infty}^{x_1} F(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1+d}^{x_1} F(x)\mathrm{d}x$$

# پایستگی انرژی

مسئله: قسمت الف)

$$V(x) = -G\frac{m_1 m_2}{x}$$

قسمت ب) کاری که شخص باید انجام دهد تا فاصله‌ی دو ذره را از $x = x_1$ به $x = x_1 + d$ افزایش یابد.

$$V_{\text{وضعیت نهایی}} - V_{\text{وضعیت اولیه}} = \boxed{V(x_1+d) - V(x_1) = -G\frac{m_1 m_2}{x_1+d} + G\frac{m_1 m_2}{x_1}}$$

$$V(x_1+d) - V(x_1) = \int_{x_1+d}^{x_1} F(x)\mathrm{d}x = W_F(x_1+d \to x_1)$$

$$\int_{x_1+d}^{x_1} F(x)\mathrm{d}x = -Gm_1m_2\int_{x_1+d}^{x_1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -Gm_1m_2\left[-\frac{1}{x}\right]_{x_1+d}^{x_1}$$

$$\boxed{\int_{x_1+d}^{x_1} F(x)\mathrm{d}x = \frac{Gm_1m_2}{x_1} - \frac{Gm_1m_2}{x_1+d}}$$

# پایستگی انرژی

مسئله: جسمی به جرم $1.18\,\mathrm{kg}$ تحت تاثیر نیروی پایستار

$$F(x) = -3x - 5x^2$$

قرار دارد. $F$ برحسب نیوتن و $x$ بر حسب متر است. الف) تابع انرژی پتانسیل را با فرض $V(0) = 0$ بدست آورید. ب) سرعت جسم در $x = 4.91\,\mathrm{m}$ برابر $4.13\,\mathrm{m/s}$ و در جهت منفی است. سرعت آن هنگامی که از $x = 1.77\,\mathrm{m}$ می‌گذرد چقدر است؟

قسمت الف

$$V(x) - V(0) = -\int_0^x F(x)\mathrm{d}x = \int_0^x (3x + 5x^2)\mathrm{d}x$$

$$V(x) = \left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3\right]_0^x \Rightarrow V(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3$$

# پایستگی انرژی

مسئله:

قسمت الف

$$V(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3$$

قسمت ب

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + V(x_1)$$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V(x_2)$$

$$m = 1.18\,\mathrm{kg}, \quad x_1 = 4.91\,\mathrm{m}, \quad x_2 = 1.77\,\mathrm{m}, \quad v_1 = 4.13\,\mathrm{m/s}$$

$$E_1 = E_2$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2(V(x_1) - V(x_2))}{m}}$$

## پایستگی انرژی

مسئله: یک نیروی پایستار $F(x)$ به ذره‌ای $1\ \mathrm{kg}$ متحرکی در امتداد محور $x$ وارد می‌شود. انرژی پتانسیل $V(x)$ وابسته به $F(x)$ بر حسب ژول بصورت $V(x) = -4xe^{-x/4}$ و $x$ برحسب متر است. در $x = 5\ \mathrm{m}$ انرژی جنبشی $2\ \mathrm{J}$ است. الف) انرژی مکانیکی دستگاه را بدست آورید. ب) منحنی $V(x)$ را بر حسب $x$ برای $0 \leq x \leq 10\ \mathrm{m}$ رسم کنید. ج) کمینه و بیشینه مقدار $x$ را بدست آورید. د) بیشینه انرژی جنبشی و $x$ که در آن اتفاق می‌افتد. ه) عبارتی برای $F(x)$ بصورت تابعی از $x$ بدست آورید. ی) برای کدام مقدار متناهی از مقدار $x$ مقدار $F(x)$ صفر می‌شود.

الف

$$\text{انرژی مکانیکی} :\ E = K + V(x) = -3.73\ \mathrm{J}$$

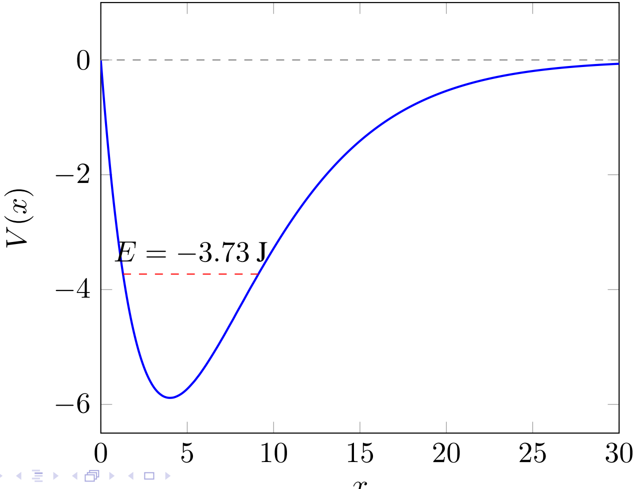
$$E = 2 + V(x = 5)$$

## پایستگی انرژی

مسئله: الف

$$E = 2 + V(x=5) = -3.73\,\mathrm{J}$$

ب)



# پایستگی انرژی

مسئله:

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -(-4+x)e^{-x/4}$$

نقطه تعادل : $F = 0 \Rightarrow (-4+x)e^{-x/4} = 0 \Rightarrow x = 4$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = \left[2 - \frac{x}{4}\right] e^{-x/4}$$

$x = 4$ نقطه تعادل پایدار : $\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}|_{x=4} > 0$

انرژي جنبشی ذره در نقطه تعادل $x = 4$ برابر صفر است و انرژی مکانیکی فقط شامل انرژی پتانسیل است. در $x = 0$ و $x = \infty$ انرژی پتانسیل برابر صفر است و انرژی مکانیکی فقط شامل انرژی جنبشی است.

$$V(x=0) = 0$$

$$x \to \infty : \ V(x) \to 0$$

# پایستگی انرژی

مسئله: انرژی پتانسیل یک مولکول دو اتمی (مانند $H_2$ و $O_2$ ) بصورت

$$V(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

است که $r$ فاصله‌ی بین دواتم و ثوابت $A$ و $B$ مثبت‌اند. الف) فاصله تعادلی بین اتمها را بدست آورید. ب) اگر فاصله‌ی جدایی بین اتمها کمتر یا بیشتر از فاصله تعادلی شان باشد، نیرو جاذب است یا دافع؟

$$F = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{12A}{r^{13}} - \frac{6B}{r^7}$$

$$\text{نقطه تعادل}: \quad F = \frac{12A}{r^{13}} - \frac{6B}{r^7} = 0$$

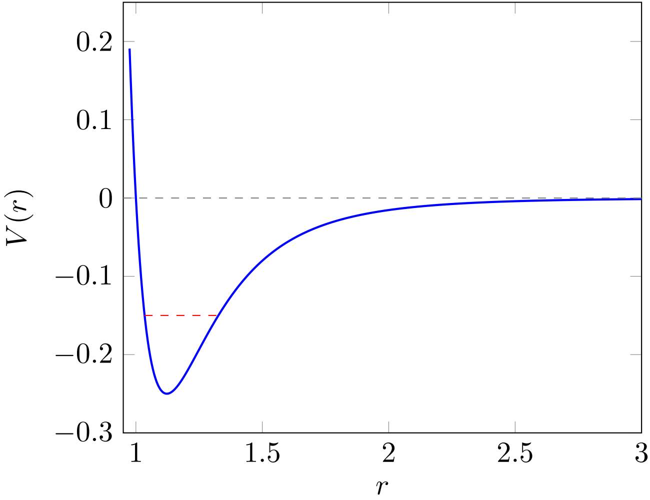
$$r = \sqrt[6]{\frac{2A}{B}}$$

ب) اگر فاصله بیشتر باشد نیروی جاذب است (چون پتانسیل شیب مثبت و نیروی شیب منفی دارد) و اگر کمتر باشد نیرو دافع است (چون پتانسیل شیب منفی و نیرو شیب مثبت دارد) که با رسم نمودار پتانسیل می‌توان آنرا مشخص کرد.

# پایستگی انرژی

مسئله:

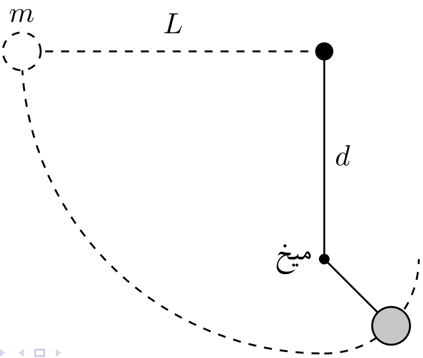
ب)



## پایستگی انرژی

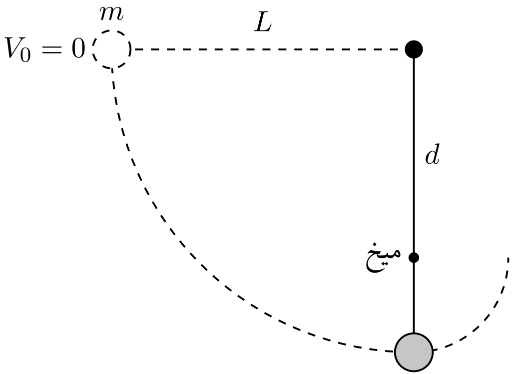
مسئله: در شکل زیر طول ریسمان برابر $L$ و فاصله نقطه آویز ریسمان تا میخ برابر $d$ است. گلوله از حالت سکون که در شکل مشخص است رها می‌شود. گلوله روی مسیر خط چین حرکت می کند. سرعت گلوله الف) در پایین ترین نقطه مسیر و ب) بالاترین نقطه مسیر پس از اینکه ریسمان دور میخ می پیچد را بدست آورید. ج) نشان دهید شرط لازم برای اینکه وزنه یک دور کامل دور میخ بچرخد و ریسمان شل نشود عبارت است از

$$d > 3L/5$$



# پایستگی انرژی

مسئله: الف) پایین ترین قسمت مسیر

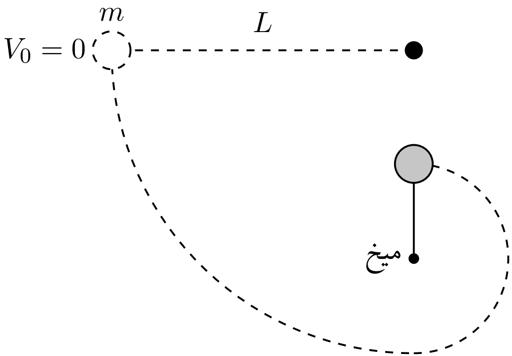



$$\text{پایستگی انرژی} : \quad E_1 = E_2$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgL \Rightarrow v_2 = \sqrt{2gL}$$

# پایستگی انرژی

مسئله: ب) بالاترین قسمت مسیر

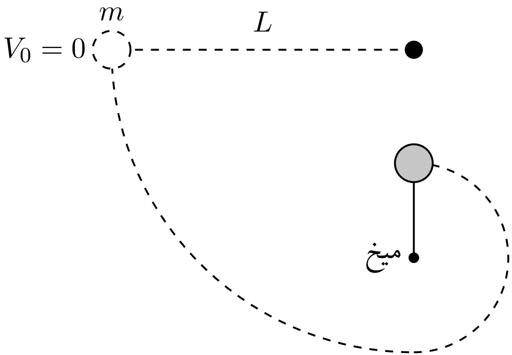



$$\text{پایستگی انرژی}: \quad E_1 = E_3$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}mv_3^2 - mg[L - 2(L - d)] \Rightarrow v_3 = \sqrt{2g(2d - L)}$$

# پایستگی انرژی

مسئله: ج) شرط کشش در بالاترین قسمت مسیر $T > 0$

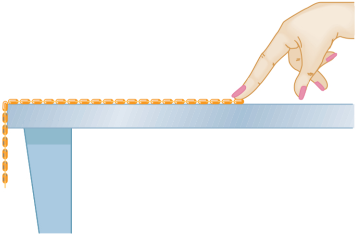



$$\sum F_r = -m\frac{v_3^2}{L-d} \Rightarrow -T - mg = -\frac{mv_3^2}{L-d} = -\frac{mg(4d-2L)}{L-d}$$

$$T = mg\left[\frac{5d-3L}{L-d}\right] > 0 \Rightarrow 5d - 3L > 0 \Rightarrow d > \frac{3}{5}L$$

# پایستگی انرژی

مسئله: زنجیری روی میز بدون اصطکاک نگه داشته شده است. چنانچه یک چهارم طول آن از لبه‌ی میز آویزان است. اگر طول زنجیر $L$ و جرم آن $M$ باشد، چقدر کار لازم است تا بخش آویزان زنجیر روی میز کشیده شود؟



وزن قسمت آویزان زنجیر قبل از کشیده شدن

$$mg = \frac{1}{4}Mg$$

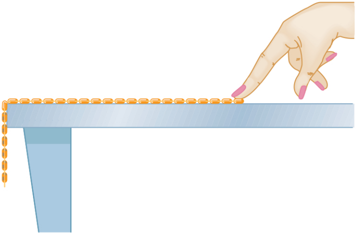
وزن قسمت آویزان زنجیر در جریان کشیده شدن

$$m(y)g = \left(\frac{M}{L}y\right)g$$

که $y$ طول قسمت آویزان است.

# پایستگی انرژی

مسئله:



در اینجا $y=0$ از لبه میز در نظر گرفته شده است،

$$\text{کار نیروی وزن}: \quad W_{mg} = -\int_{-L/4}^{0} m(y) g dy$$

$$W_{mg} = -\frac{Mg}{L}\int_{-L/4}^{0} y dy$$

$$W_{mg} = -\frac{Mg}{L}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-L/4}^{0}$$

$$W_{mg} = -\frac{Mg}{L}\left[0-\frac{1}{2}\frac{L^2}{16}\right]$$

$$W_{mg} = \frac{MgL}{32}$$

وزن قسمت آویزان زنجیر در جریان کشیده شدن

$$m(y)g = \frac{Mg}{L}y$$

که $y$ طول قسمت آویزان است.