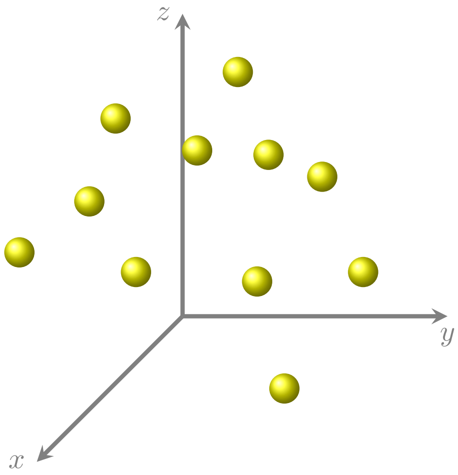
فیزیک ۱
مرکز جرم و تکانه خطی

محمدرضا مظفری

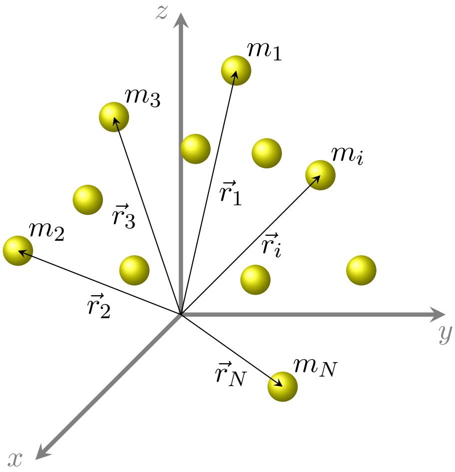
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

مرکز جرم-دستگاه ذرات

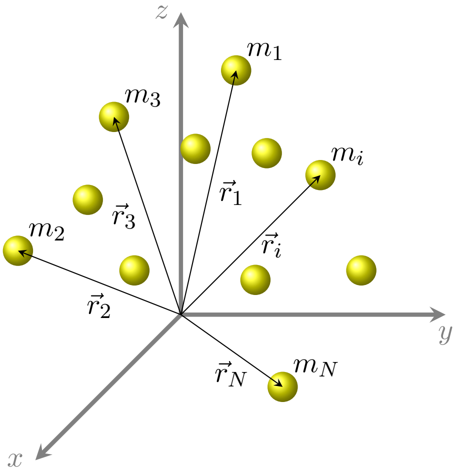


مرکز جرم-دستگاه ذرات



$$m_1 : \vec{r}_1$$
$$m_2 : \vec{r}_2$$
$$m_3 : \vec{r}_3$$
$$\vdots$$
$$m_i : \vec{r}_i$$
$$\vdots$$
$$m_N : \vec{r}_N$$

مرکز جرم-دستگاه ذرات

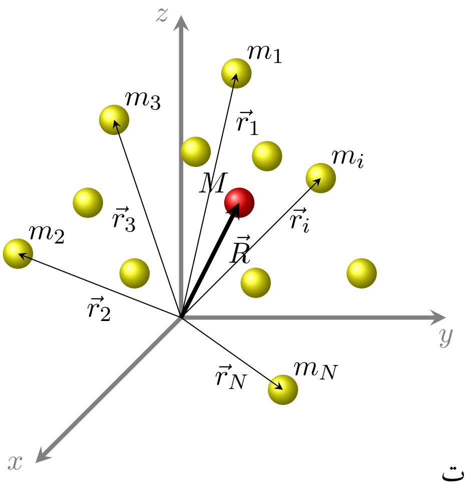


$$m_1 : \vec{r}_1$$
$$m_2 : \vec{r}_2$$
$$m_3 : \vec{r}_3$$
$$\vdots$$
$$m_i : \vec{r}_i$$
$$\vdots$$
$$m_N : \vec{r}_N$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_i + \cdots + m_N$$

تعریف مرکز جرم : $M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_i\vec{r}_i + \cdots + m_N\vec{r}_N$

مرکز جرم-دستگاه ذرات



$$
\begin{aligned}
m_1 &: \vec{r}_1\\
m_2 &: \vec{r}_2\\
m_3 &: \vec{r}_3\\
&\vdots\\
m_i &: \vec{r}_i\\
&\vdots\\
m_N &: \vec{r}_N
\end{aligned}
$$

نمایش دیگر برای مرکز جرم در دستگاه ذرات

$$M = \sum_i m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$$

مرکز جرم-دستگاه ذرات

مرکز جرم در دستگاه ذرات

$$M = \sum_i m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

مولفه‌های مرکز جرم

$$\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$$

$$X = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i$$

$$Y = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i$$

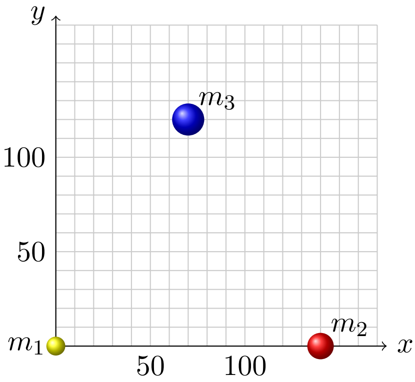
$$Z = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i$$

$$\begin{aligned}
m_1 &: \vec{r}_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}\\
m_2 &: \vec{r}_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}\\
m_3 &: \vec{r}_3 = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\hat{k}\\
&\vdots\\
m_i &: \vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}\\
&\vdots\\
m_N &: \vec{r}_N = x_N\hat{i} + y_N\hat{j} + z_N\hat{k}
\end{aligned}$$

مرکز جرم-دستگاه ذرات

$$M = \sum_i m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

مسئله-۱: مرکز جرم دستگاه سه ذره‌ای زیر را پیدا کنید.

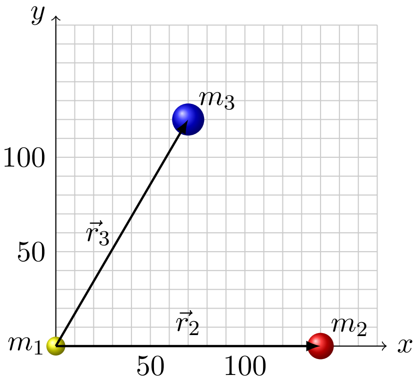


$$m_1 = 1.2\,\mathrm{kg}$$
$$m_2 = 2.5\,\mathrm{kg}$$
$$m_3 = 3.4\,\mathrm{kg}$$

مرکز جرم-دستگاه ذرات

$$M = \sum_i m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

مسئله-۱: مرکز جرم دستگاه سه ذره‌ای زیر را پیدا کنید.



$$m_1 = 1.2\,\text{kg} : \ \vec{r}_1 = 0$$

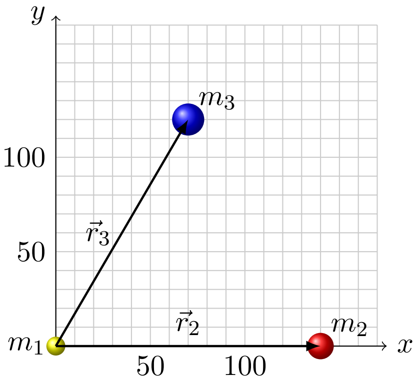
$$m_2 = 2.5\,\text{kg} : \ \vec{r}_2 = (140\hat{i})\ \text{cm}$$

$$m_3 = 3.4\,\text{kg} : \ \vec{r}_2 = (70\hat{i} + 120\hat{j})\ \text{cm}$$

مرکز جرم-دستگاه ذرات

$$M = \sum_i m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

مسئله-۱: مرکز جرم دستگاه سه ذره‌ای زیر را پیدا کنید.



$$m_1 = 1.2\,\text{kg} : \ \vec{r}_1 = 0$$

$$m_2 = 2.5\,\text{kg} : \ \vec{r}_2 = (140\hat{i})\ \text{cm}$$

$$m_3 = 3.4\,\text{kg} : \ \vec{r}_2 = (70\hat{i} + 120\hat{j})\ \text{cm}$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3 = 7.1\,\text{kg}$$

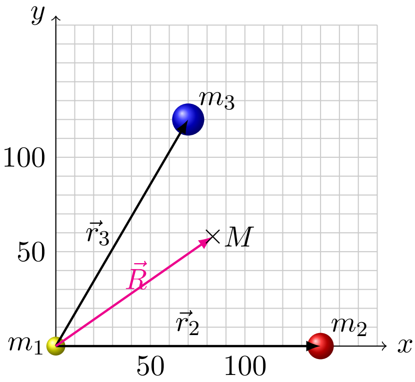
$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} = 83\ \text{cm}$$

$$Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} = 58\ \text{cm}$$

مرکز جرم-دستگاه ذرات

$$M = \sum_i m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

مسئله-۱: مرکز جرم دستگاه سه ذره‌ای زیر را پیدا کنید.

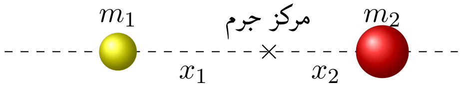


$$X = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{M} = 83 \text{ cm}$$

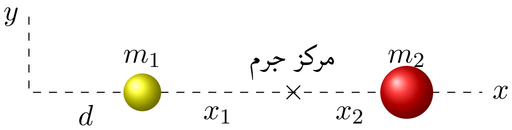
$$Y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{M} = 58 \text{ cm}$$

$$\vec{R} = (83\hat{i} + 58\hat{j}) \text{ cm}$$

مسئله-۲: نشان دهید نسبت فاصله‌ی x_1 و x_2 دو ذره از مرکز جرم آنها برابر با عکس نسبت جرمهای آنها است، یعنی $x_1/x_2 = m_2/m_1$.



انتخاب دستگاه مختصات

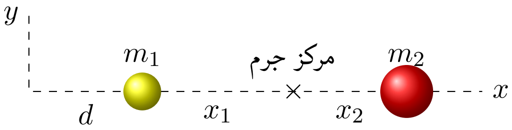


تعریف مرکز جرم نسبت به دستگاه مختصات

$$x_1 + d = \frac{m_1 d + m_2(d + x_1 + x_2)}{m_1 + m_2}$$

مرکز جرم-دستگاه ذرات

مسئله-۲:



تعریف مرکز جرم نسبت به دستگاه مختصات

$$x_1 + d = \frac{m_1 d + m_2(d + x_1 + x_2)}{m_1 + m_2}$$

$$(x_1 + d)(m_1 + m_2) = m_1 d + m_2(d + x_1 + x_2)$$

$$m_1 x_1 = m_2 x_2 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

دستگاه ذرات

$$M = \sum_i m_i, \quad \vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{R} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$$

$$X = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i, \quad Y = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i, \quad Z = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i$$

از محیط گسسته به محیط پیوسته

$$\sum_i m_i \to \int \mathrm{d}m$$

که $\mathrm{d}m$ **المان جرم** نامیده می‌شود.

$$\text{جرم جسم صلب}: \; M = \int \mathrm{d}m$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m, \quad Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m, \quad Z = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m$$

مرکز جرم-اجسام صلب

$$M = \int \mathrm{d}m$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m, \quad Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m, \quad Z = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m$$

اجسام طولی

$$\mathrm{d}m = \text{چگالی طولی} \times \mathrm{d}l = \lambda\, \mathrm{d}l$$

که $\mathrm{d}l$ المان طول نامیده می‌شود.

- وقتی جرم در واحد طول بطور **یکنواخت** توزیع شده باشد،

$$\text{چگالی طولی}: \;\; \lambda = \frac{M}{L} \Rightarrow \mathrm{d}m = \frac{M}{L}\mathrm{d}l$$

که M جرم جسم و L طول جسم است

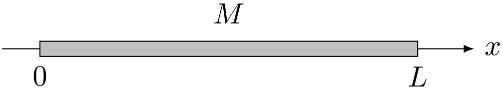
- وقتی جرم در واحد طول بطور **غیریکنواخت** توزیع شده باشد،

$$\text{چگالی طولی}: \;\; \lambda = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}l} \Rightarrow \mathrm{d}m = \lambda\mathrm{d}l$$

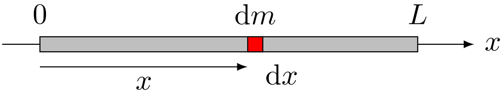
مرکز جرم–اجسام صلب

مسئله–۳: مرکز جرم میله نازک به طول L و جرم M که جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است.

قدم اول: انتخاب دستگاه مختصات مناسب



قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$

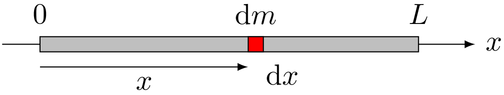


$$\lambda = \frac{M}{L}, \quad \mathrm{d}l = \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l = \frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}m = \int_0^L \frac{M}{L}\mathrm{d}x = \frac{M}{L}\int_0^L \mathrm{d}x = \frac{M}{L}[x]_0^L = \frac{M}{L}(L-0) = M$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲: مرکز جرم میله نازک به طول L و جرم M که جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است.

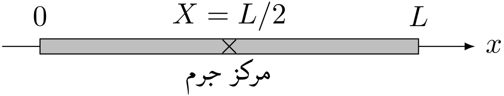


قدم سوم: حل انتگرال مرکز جرم

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

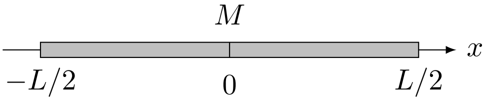
$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^L x\frac{M}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_0^L x\mathrm{d}x = \frac{1}{L}[\frac{1}{2}x^2]_0^L = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{2}L^2\right)$$

$$X = \frac{1}{2}L$$

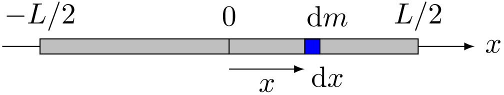


مسئله-۴: مرکز جرم میله نازک به طول L و جرم M که جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است.

قدم اول: انتخاب دستگاه مختصات مناسب (**دستگاه مختصات متقارن**)



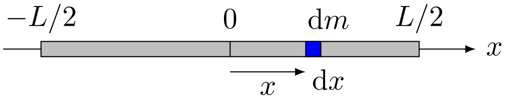
قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$



$$\lambda = \frac{M}{L}, \quad \mathrm{d}l = \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l = \frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}m = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L}\mathrm{d}x = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x = \frac{M}{L}[x]_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L}[L/2-(-L/2)] = M$$

مسئله–۴: مرکز جرم میله نازک به طول L و جرم M که جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است.



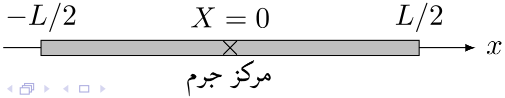
قدم سوم: حل انتگرال مرکز جرم

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_{-L/2}^{L/2} x\frac{M}{L}\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} x\mathrm{d}x = 0 \quad : \quad \boxed{\text{انتگرال یک تابع فرد را بازه‌ی متقارن برابر صفر است}}$$

$$X = 0$$

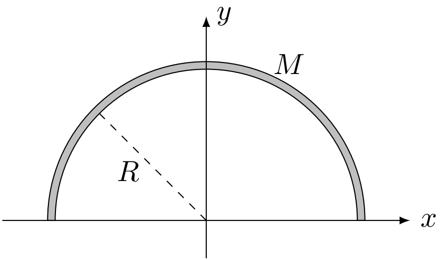


نکات کلیدی

- جواب نهایی مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است.
- اگر در مسئله دستگاه مختصات مشخص نباشد، انتخاب یک دستگاه مختصات متقارن معمولا یک انتخاب مناسب است.

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۵: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل نیم دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید.
جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.
قدم اول: انتخاب یک دستگاه مختصات مناسب



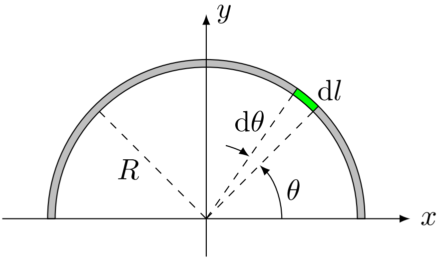
یک نتیجه هندسی، چون جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است و دستگاه مختصات انتخابی بصورت متقارن است، بدون انتگرالگیری در امتداد محور x می‌توان نتیجه گرفت که

$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = 0$$

و مرکز جرم فقط روی محور y قرار دارد.

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۵: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل نیم دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید.
جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.
قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$

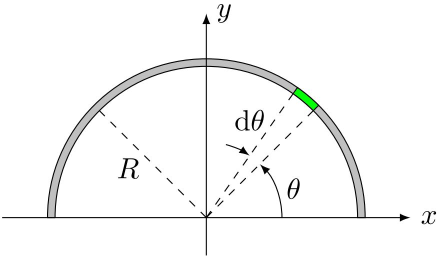


$$\lambda = \frac{M}{\pi R},\ \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta \Rightarrow \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l = \frac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\int \mathrm{d}m = \int_0^\pi \frac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{M}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta = M$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۵: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل نیم دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید.
جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.
قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن $X = 0$.

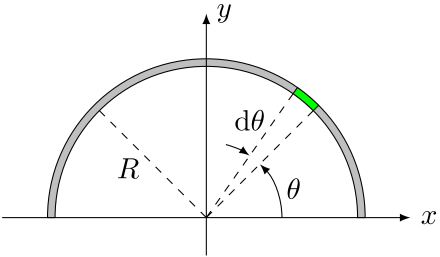
جهت تایید : $X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^\pi R\cos\theta \frac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \cos\theta\mathrm{d}\theta$

$$X = \frac{R}{\pi}[\sin\theta]_0^\pi = 0$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۵: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل نیم دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید. جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.

قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

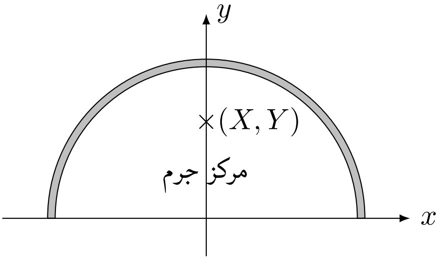
$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^\pi R\sin\theta\frac{M}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$Y = \frac{R}{\pi}[-\cos\theta]_0^\pi = \frac{R}{\pi}[-\cos\pi + \cos 0] = \frac{2R}{\pi}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۵:مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل نیم دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید. جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.

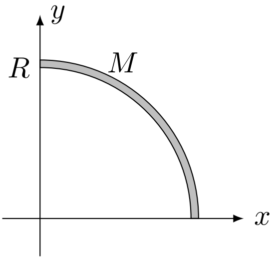
$$(X, Y) = (0, 2R/\pi)$$



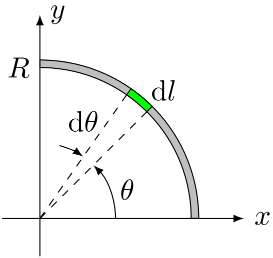
مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۶: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل ربع دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید. جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.

قدم اول: انتخاب یک دستگاه مختصات مناسب



قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$

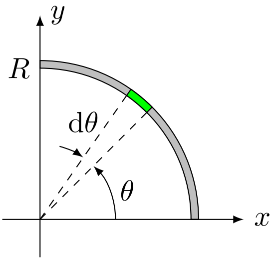


$$\lambda = \frac{2M}{\pi R},\ \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta \Rightarrow \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l = \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\int \mathrm{d}m = \int_0^{\pi/2} \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2M}{\pi}\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta = M$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۶: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل ربع دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید. جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.



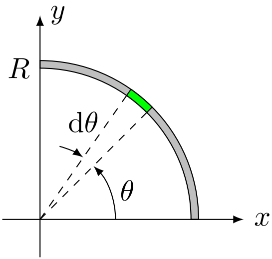
$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^{\pi/2} R\cos\theta\frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2R}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$X = \frac{2R}{\pi}[\sin\theta]_0^{\pi/2} = \frac{2R}{\pi}$$

مسئله-۶: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل ربع دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید. جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

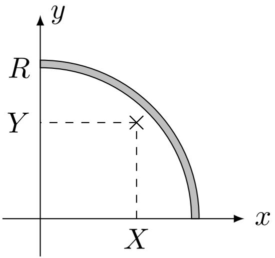
$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^{\pi/2} R\sin\theta \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2R}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$Y = \frac{2R}{\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi/2} = \frac{2R}{\pi}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۶: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل ربع دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید. جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.

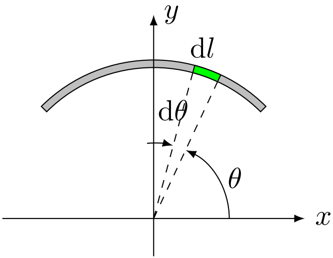
$$(X, Y) = \frac{2R}{\pi}(1, 1)$$



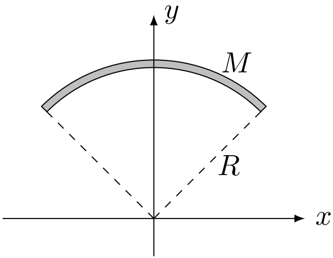
مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۷: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل ربع دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید. جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.

قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$



قدم اول: انتخاب یک دستگاه مختصات مناسب

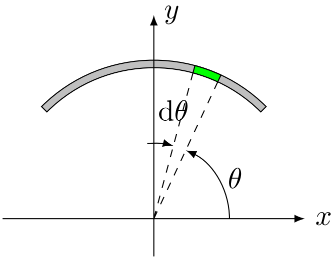


$$\lambda = \frac{2M}{\pi R},\ \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta \Rightarrow \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l = \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta, \quad \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$$

$$\int \mathrm{d}m = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2M}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\theta = M$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۷: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل ربع دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید. جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta, \quad \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

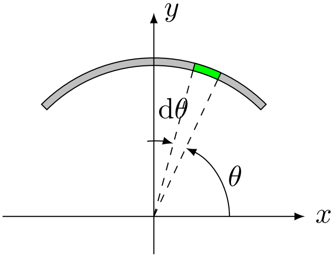
از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن $X = 0$.

جهت تایید : $X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} R\cos\theta\frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2R}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\cos\theta\mathrm{d}\theta$

$$X = \frac{2R}{\pi}[\sin\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4} = 0$$

مرکز جرم–اجسام صلب

مسئله–۷: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل ربع دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید. جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta, \quad \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

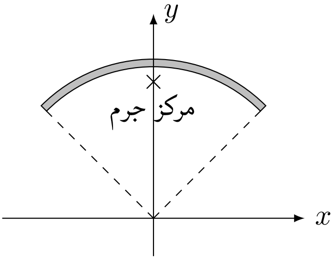
$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} R\sin\theta\frac{2M}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2R}{\pi}\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$Y = \frac{2R}{\pi}[-\cos\theta]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}R}{\pi}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۷: مرکز جرم میله نازک به جرم M وقتی به شکل ربع دایره‌ای به شعاع R است را پیداکنید. جرم در واحد طول میله بطور یکنواخت توزیع شده است.

$$(X, Y) = (0, 2\sqrt{2}R/\pi)$$



مرکز جرم–اجسام صلب

نکات کلیدی

- جواب نهایی مستقل از انتخاب دستگاه مختصات است.
- اگر در مسئله دستگاه مختصات مشخص نباشد، انتخاب یک دستگاه مختصات متقارن معمولا یک انتخاب مناسب است.
- مرکز جرم ممکن است بر روی جسم صلب قرار نگیرد.

مرکز جرم-اجسام صلب

$$M = \int \mathrm{d}m$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m, \quad Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m, \quad Z = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m$$

اجسام سطحی

$$\mathrm{d}m = \text{چگالی سطحی} \times \mathrm{d}s = \sigma\,\mathrm{d}s$$

که $\mathrm{d}s$ المان سطح نامیده می‌شود.

- وقتی جرم در واحد سطح بطور **یکنواخت** توزیع شده باشد،

$$\text{چگالی سطحی}:\ \sigma = \frac{M}{S} \Rightarrow \mathrm{d}m = \frac{M}{S}\mathrm{d}s$$

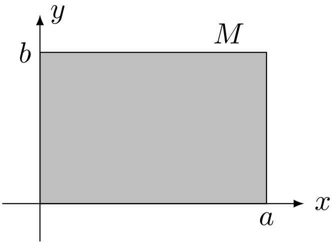
که M جرم جسم و S سطح جسم است

- وقتی جرم در واحد سطح بطور **غیریکنواخت** توزیع شده باشد،

$$\text{چگالی سطحی}:\ \sigma = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}s} \Rightarrow \mathrm{d}m = \sigma\mathrm{d}s$$

مسئله-۸: مرکز جرم صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و b و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

قدم اول: انتخاب دستگاه مختصات مناسب

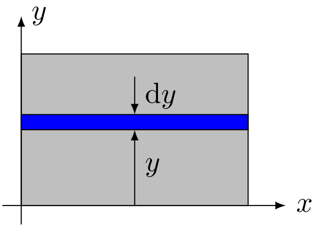


مرکز جرم–اجسام صلب

مسئله–۸: مرکز جرم صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و b و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$

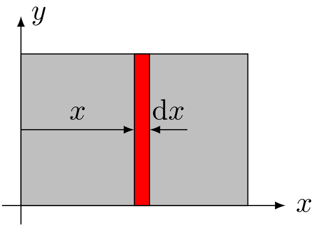
برای انتگرالگیری روی محور y



$$\sigma = \frac{M}{ab},\ \mathrm{d}s = a\mathrm{d}y,\ 0 \le y \le b$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{M}{b}\mathrm{d}y$$

برای انتگرالگیری روی محور x

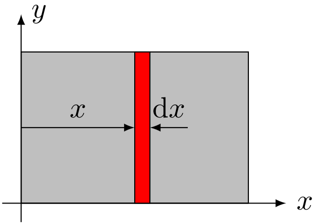


$$\sigma = \frac{M}{ab},\ \mathrm{d}s = b\mathrm{d}x,\ 0 \le x \le a$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{M}{a}\mathrm{d}x$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۸: مرکز جرم صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و b و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

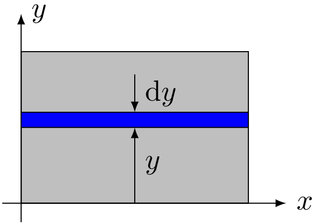


$$\mathrm{d}m = \frac{M}{a}\mathrm{d}x, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\int \mathrm{d}m = \int_0^a \frac{M}{a}\mathrm{d}x = \frac{M}{a}\int_0^a \mathrm{d}x = M$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^a x\frac{M}{a}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^a x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a$$

مسئله-۸: مرکز جرم صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و b و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



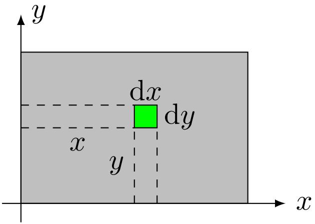
$$\mathrm{d}m = \frac{M}{b}\mathrm{d}y, \quad 0 \le y \le b$$

$$\int \mathrm{d}m = \int_0^b \frac{M}{b}\mathrm{d}y = \frac{M}{b}\int_0^b \mathrm{d}y = M$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^b y\frac{M}{b}\mathrm{d}y = \frac{1}{b}\int_0^b y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}b$$

مسئله-۹: مرکز جرم صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و b و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$ برای انتگرالگیری روی محور x و y



$$\sigma = \frac{M}{ab}, \ \mathrm{d}s = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$0 \leq x \leq a, \ 0 \leq y \leq b$$

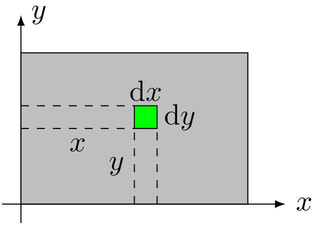
$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\int \mathrm{d}m = \int \frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{M}{ab}\left(\int_0^a \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b \mathrm{d}y\right)$$

$$\int \mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\left[x\right]_0^a\left[y\right]_0^b = M$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۹: مرکز جرم صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و b و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



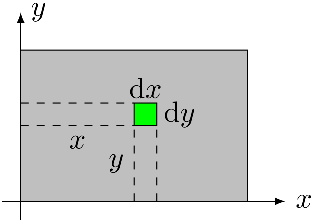
$$\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int x\frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{ab}\left(\int_0^a x\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b \mathrm{d}y\right)$$

$$X = \frac{1}{ab}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a [y]_0^b = \frac{1}{2}a$$

مسئله-۹: مرکز جرم صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و b و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b$$

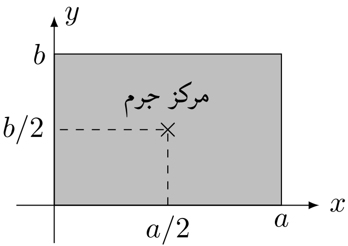
$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int y\frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{ab}\left(\int_0^a \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b y\mathrm{d}y\right)$$

$$Y = \frac{1}{ab}\left[x\right]_0^a \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^b = \frac{1}{2}b$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۹: مرکز جرم صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و b و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

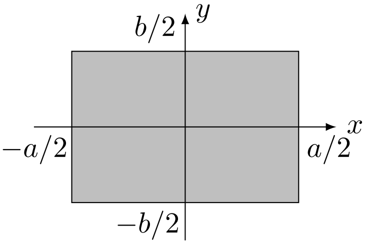
$$(X, Y) = (a/2, b/2)$$



مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۰: مرکز جرم صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و b و جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن $(X, Y) = (0, 0)$



$$\sigma = \frac{M}{ab}, \ \mathrm{d}s = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-a/2 \leq x \leq a/2, \ -b/2 \leq y \leq b/2$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

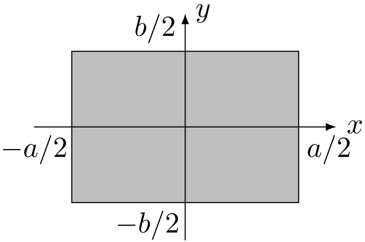
$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int x\frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{ab}\left(\int_{-a/2}^{a/2} x\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y\right) = 0$$

انتگرال تابع فرد در یک بازه متقارن برابر صفر است. $\int_{-a/2}^{a/2} x\mathrm{d}x = 0$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۰: مرکز جرم صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و b و جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن $(X, Y) = (0, 0)$



$$\sigma = \frac{M}{ab},\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$-a/2 \leq x \leq a/2,\ -b/2 \leq y \leq b/2$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int y\frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{ab}\left(\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2}y\mathrm{d}y\right) = 0$$

انتگرال تابع فرد در یک بازه متقارن برابر صفر است. $\int_{-b/2}^{b/2} y\mathrm{d}y = 0$

مرکز جرم-اجسام صلب

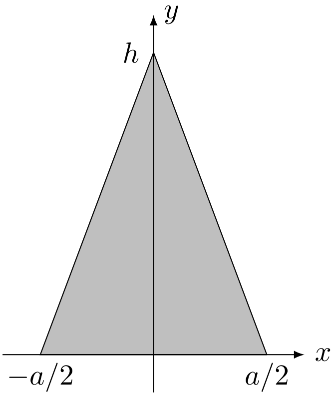
مسئله-۱۱: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل مثلث متساوی الساقین به قاعده a و ارتفاع h و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

بدین ترتیب مرکز جرم بر روی محور y قرار دارد.

قدم اول: انتخاب دستگاه مختصات مناسب



مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۱: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل مثلث متساوی الساقین به قاعده a و ارتفاع h و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

بدین ترتیب مرکز جرم بر روی محور y قرار دارد.

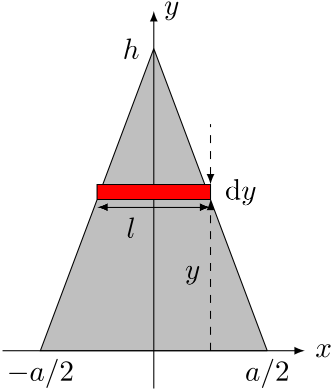
$$\sigma = \frac{2M}{ah},\ \mathrm{d}s = l\mathrm{d}y$$

تشابه مثلثها

$$\frac{l}{a} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow l = \frac{a}{h}(h-y)$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{2M}{h^2}(h-y)\mathrm{d}y$$

قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$



مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۱: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل مثلث متساوی الساقین به قاعده a و ارتفاع h و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{h^2}(h-y)\mathrm{d}y, \quad 0 \le y \le h$$

$$\int \mathrm{d}m = \int_0^h \frac{2M}{h^2}(h-y)\mathrm{d}y = \frac{2M}{h^2}\int_0^h (h-y)\mathrm{d}y$$

$$\int \mathrm{d}m = \frac{2M}{h^2}\left[hy - \frac{1}{2}y^2\right]_0^h = M$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۱: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل مثلث متساوی الساقین به قاعده a و ارتفاع h و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{h^2}(h-y)\mathrm{d}y, \quad 0 \leq y \leq h$$

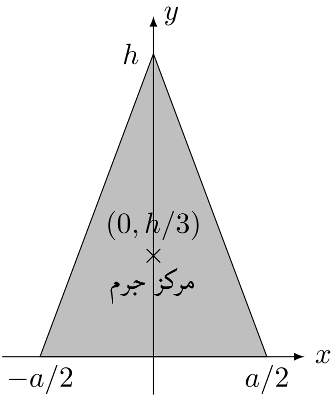
$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^h y\frac{2M}{h^2}(h-y)\mathrm{d}y = \frac{2}{h^2}\int_0^h y(h-y)\mathrm{d}y$$

$$Y = \frac{2}{h^2}\left[\frac{1}{2}hy^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^h = \frac{1}{3}h$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۱: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل مثلث متساوی الساقین به قاعده a و ارتفاع h و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

$$(X, Y) = (0, h/3)$$



مرکز جرم-اجسام صلب

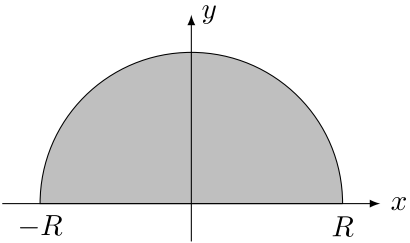
مسئله-۱۲: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل نیم‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

بدین ترتیب مرکز جرم بر روی محور y قرار دارد.

قدم اول: انتخاب دستگاه مختصات مناسب



مرکز جرم-اجسام صلب

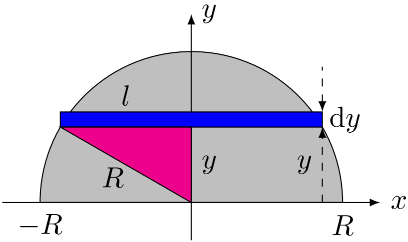
مسئله-۱۲: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل نیم‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

بدین ترتیب مرکز جرم بر روی محور y قرار دارد.

قدم دوم: مشخص کردن المان جرم $\mathrm{d}m$



$$\sigma = \frac{2M}{\pi R^2},\ \mathrm{d}s = 2l\mathrm{d}y = 2\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y,\ 0 \leq y \leq R$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{4M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۲: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل نیم‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

$$\mathrm{d}m = \frac{4M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y,\ 0 \le y \le R$$

$$\int \mathrm{d}m = \int_0^R \frac{4M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y = \frac{4M}{\pi R^2}\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y$$

تغییر متغییر : $y = R\sin\theta,\ \mathrm{d}y = R\cos\theta\mathrm{d}\theta$

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y = R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = R^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y = R^2\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = R^2\frac{\pi}{4}$$

$$\int \mathrm{d}m = \frac{4M}{\pi R^2}R^2\frac{\pi}{4} = M$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۲: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل نیم‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

$$\mathrm{d}m = \frac{4M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y,\ 0 \le y \le R$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{M}\int_0^R y\frac{4M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y = \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y$$

تغییر متغییر : $y = R\sin\theta,\ \mathrm{d}y = R\cos\theta\mathrm{d}\theta$

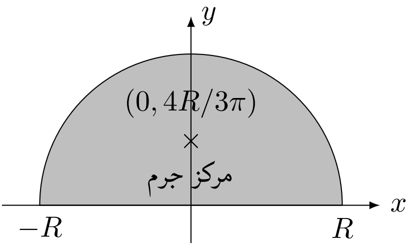
$$\int_0^R y\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y = R^3\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = R^3\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{R^3}{3}$$

$$Y = \frac{4}{\pi R^2}\frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۲: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل نیم‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.

$$(X, Y) = (0, 4R/3\pi)$$

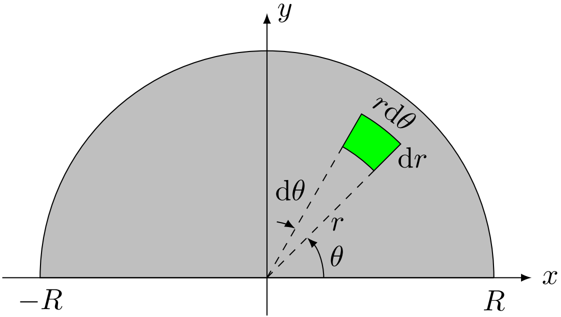


مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۳: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل نیم‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$



$$\sigma = \frac{2M}{\pi R^2}, \quad \mathrm{d}s = (r\mathrm{d}\theta)\mathrm{d}r = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le \pi$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۳: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل نیم‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

$$\sigma = \frac{2M}{\pi R^2}, \quad \mathrm{d}s = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{2M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\int \mathrm{d}m = \int \frac{2M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{2M}{\pi R^2} \left(\int_0^R r\mathrm{d}r \right) \left(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \right)$$

$$\int \mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi R^2} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R [\theta]_0^\pi = M$$

مسئله–۱۳: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل نیم‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

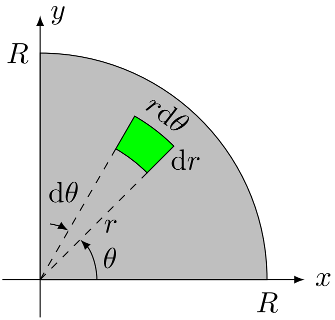
$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{2}{\pi R^2}\int (r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi R^2}\left(\int_0^R r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta\mathrm{d}\theta\right)$$

$$Y = \frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi = \frac{2}{\pi R^2} \times \frac{1}{3}R^3 \times 2$$

$$Y = \frac{4R}{3\pi}$$: منطبق با جواب روش المان چارگوش

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۴: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل ربع‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).



$$\sigma = \frac{4M}{\pi R^2}, \quad \mathrm{d}s = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le r \le R, \quad \boxed{0 \le \theta \le \pi/2}$$

مسئله-۱۴: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل ربع‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

$$\sigma = \frac{4M}{\pi R^2}, \quad \mathrm{d}s = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{4M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$$

$$\int \mathrm{d}m = \int \frac{4M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{2M}{\pi R^2}\left(\int_0^R r\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\right)$$

$$\int \mathrm{d}m = \frac{4M}{\pi R^2}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R [\theta]_0^{\pi/2} = M$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۴: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل ربع‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

$$\mathrm{d}m = \frac{4M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{4}{\pi R^2}\int (r\cos\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$X = \frac{4}{\pi R^2}\left(\int_0^R r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\right) = \frac{4}{\pi R^2}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R [\sin\theta]_0^{\pi/2}$$

$$X = \frac{4}{\pi R^2}\times\frac{1}{3}R^3\times 1 = \frac{4R}{3\pi}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۴: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل ربع‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

$$\mathrm{d}m = \frac{4M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{4}{\pi R^2}\int (r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

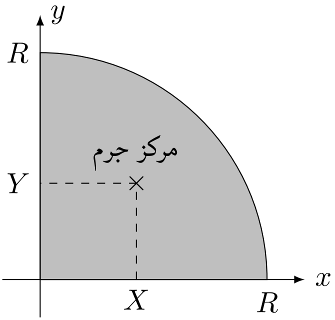
$$Y = \frac{4}{\pi R^2}\left(\int_0^R r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right) = \frac{4}{\pi R^2}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R [-\cos\theta]_0^{\pi/2}$$

$$Y = \frac{4}{\pi R^2}\times\frac{1}{3}R^3\times 1 = \frac{4R}{3\pi}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

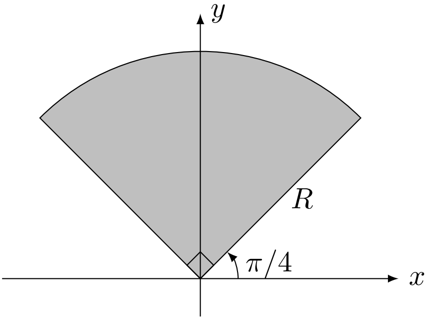
مسئله-۱۴: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل ربع‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

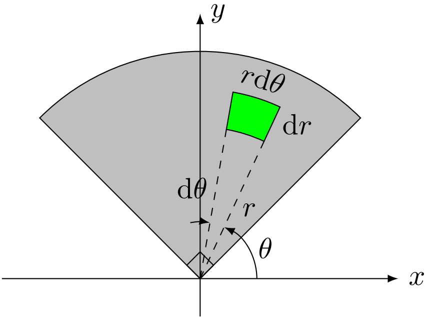
$$(X,Y)=\frac{4R}{3\pi}(1,1)$$



مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۵: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل ربع‌دایره به شعاع R و جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).





$$\sigma = \frac{4M}{\pi R^2},\ \mathrm{d}s = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le r \le R, \quad \boxed{\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4}$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{4M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le r \le R, \quad \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$$

مسئله-۱۵: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل ربع‌دایره به شعاع R و جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

$$\mathrm{d}m = \frac{4M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad 0 \leq r \leq R, \quad \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{4}{\pi R^2}\int (r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

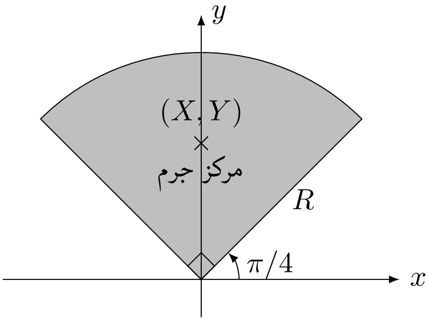
$$Y = \frac{4}{\pi R^2}\left(\int_0^R r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right) = \frac{4}{\pi R^2}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R\left[-\cos\theta\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$Y = \frac{4}{\pi R^2}\times\frac{1}{3}R^3\times\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}R}{3\pi}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

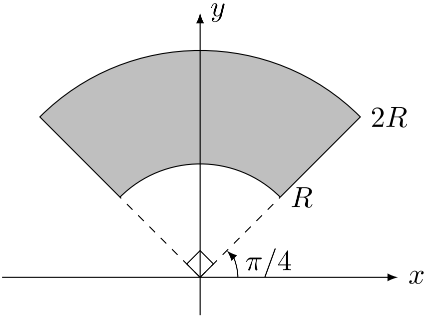
مسئله-۱۵: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل ربع‌دایره به شعاع R و جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

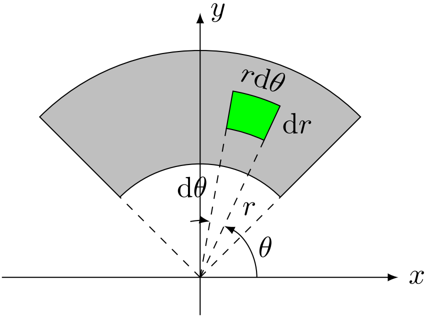
$$(X, Y) = (0, 4\sqrt{2}R/3\pi)$$



مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۶: مرکز جرم صفحه‌ای نازک شکل زیر به جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).





$$\sigma = \frac{4M}{3\pi R^2}, \; \mathrm{d}s = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad \boxed{R \le r \le 2R}, \quad \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{4M}{3\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad R \le r \le 2R, \quad \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4$$

مسئله-۱۶: مرکز جرم صفحه‌ای نازک شکل زیر به جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$X = 0$$

$$\mathrm{d}m = \frac{4M}{3\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta, \quad R \leq r \leq 2R, \quad \pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{4}{3\pi R^2}\int (r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

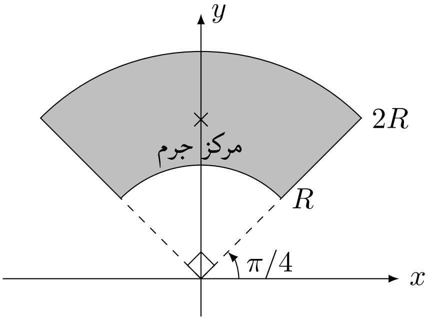
$$Y = \frac{4}{3\pi R^2}\left(\int_R^{2R} r^2\mathrm{d}r\right)\left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin\theta\mathrm{d}\theta\right) = \frac{4}{3\pi R^2}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_R^{2R}\left[-\cos\theta\right]_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$Y = \frac{4}{3\pi R^2}\times\frac{7}{3}R^3\times\sqrt{2} = \frac{28\sqrt{2}R}{9\pi}$$

مرکز جرم–اجسام صلب

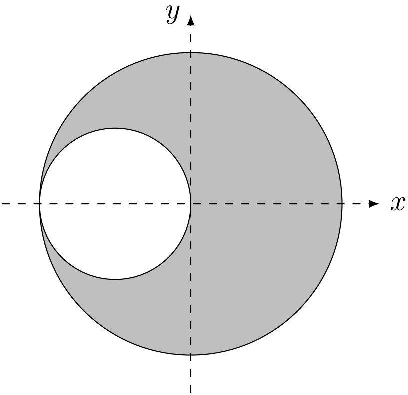
مسئله–۱۶: مرکز جرم صفحه‌ای نازک شکل زیر به جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).

$$(X, Y) = (0, 28\sqrt{2}R/9\pi)$$



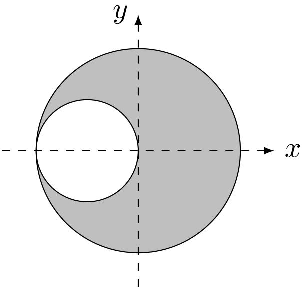
مرکز جرم-اجسام صلب

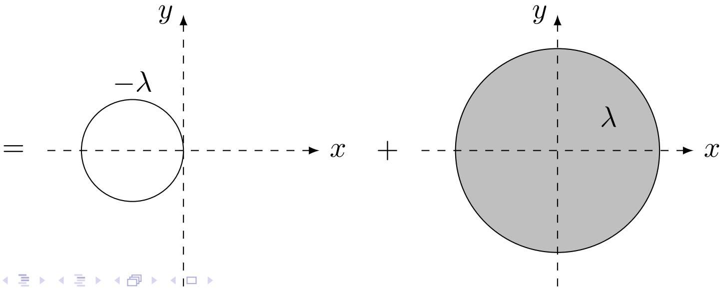
مسئله-۱۷: مرکز جرم صفحه‌ی دایره‌ای نازک به شعاع $2R$ که مطابق شکل حفره‌ای به شعاع R دارد را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



مرکز جرم-اجسام صلب

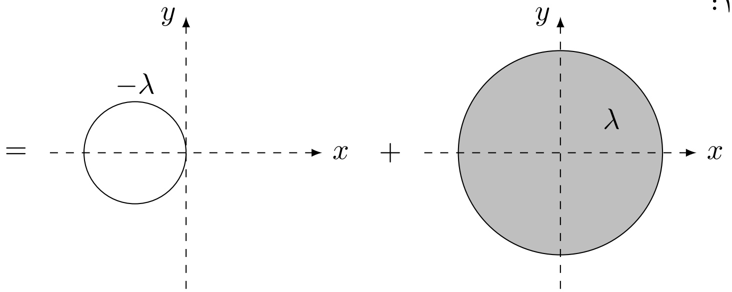
مسئله-۱۷:





مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۷:



$$X_1 = -R \qquad X_2 = 0$$

$$M_1 = -\lambda\pi R^2 \qquad M_2 = 4\lambda\pi R^2$$

$$X = \frac{M_1X_1 + M_2X_2}{M_1 + M_2} = \frac{(-\lambda\pi R^2)(-R) + 0}{(-\lambda\pi R^2) + (4\lambda\pi R^2)}$$

$$X = \frac{R}{3}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

$$M = \int \mathrm{d}m$$

$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m, \quad Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m, \quad Z = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m$$

اجسام حجمی

$$\mathrm{d}m = \text{چگالی حجمی} \times \mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}v$$

که $\mathrm{d}v$ المان حجم نامیده می‌شود.

- وقتی جرم در واحد حجم بطور **یکنواخت** توزیع شده باشد،

$$\text{چگالی حجمی} : \ \rho = \frac{M}{V} \Rightarrow \mathrm{d}m = \frac{M}{V}\mathrm{d}v$$

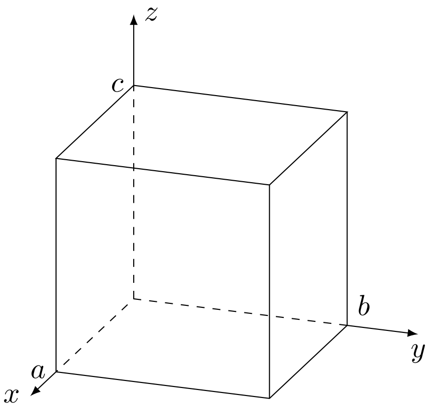
که M جرم جسم و V حجم جسم است

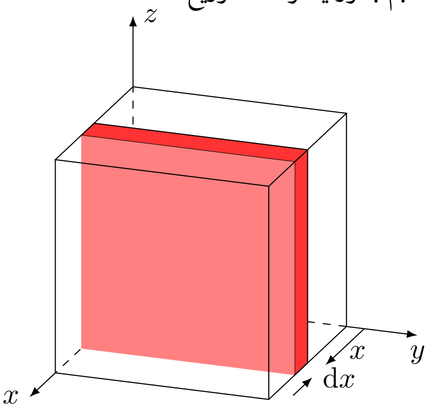
- وقتی جرم در واحد حجم بطور **غیریکنواخت** توزیع شده باشد،

$$\text{چگالی حجمی} : \ \rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v} \Rightarrow \mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}v$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۸: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.

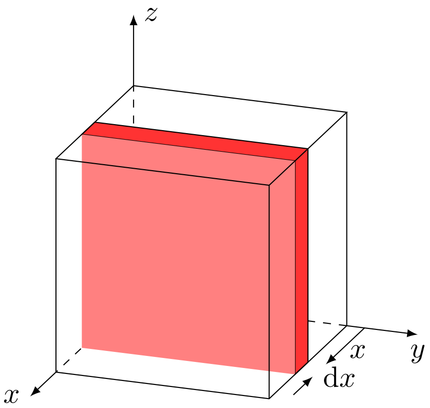




$$\rho = \frac{M}{abc},\ \mathrm{d}V = bc\mathrm{d}x,\ 0 \le x \le a \ \Rightarrow\ \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \frac{M}{a}\mathrm{d}x,\ 0 \le x \le a$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۸: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.



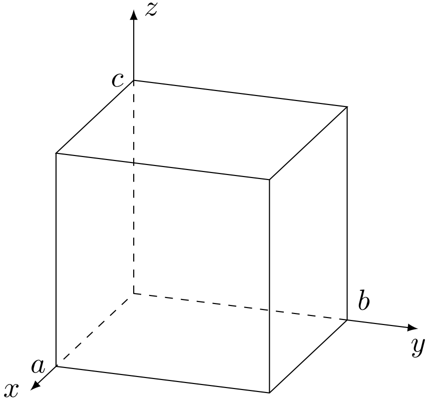
$$\mathrm{d}m = \frac{M}{a}\mathrm{d}x,\ 0 \le x \le a$$

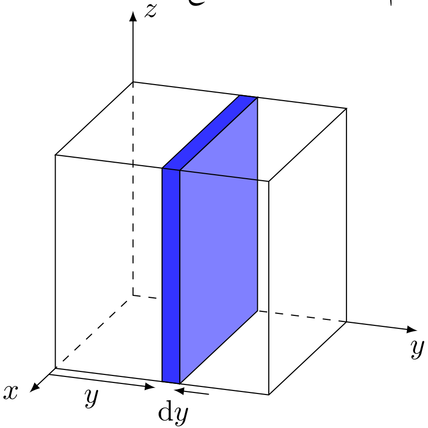
$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m = \frac{1}{a}\int_0^a x\mathrm{d}x$$

$$X = \frac{a}{2}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۸: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.

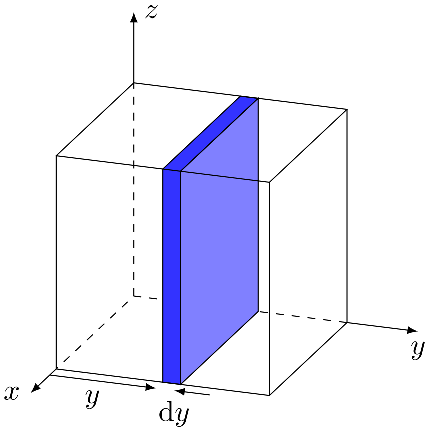




$$\rho = \frac{M}{abc},\ \mathrm{d}V = ac\mathrm{d}y,\ 0 \le y \le b\ \Rightarrow\ \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \frac{M}{b}\mathrm{d}y,\ 0 \le y \le b$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۸: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.



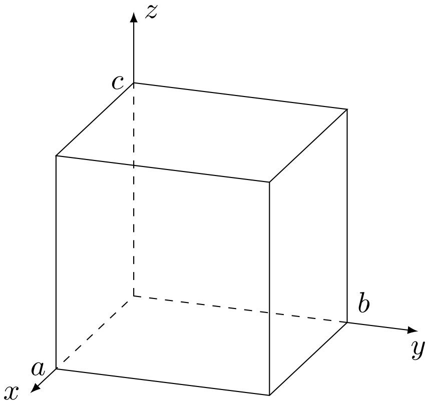
$$\mathrm{d}m = \frac{M}{b}\mathrm{d}y,\ 0 \leq y \leq b$$

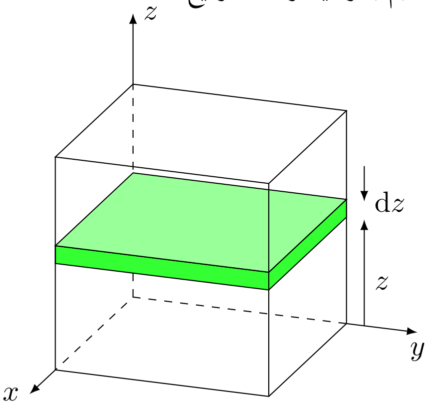
$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m = \frac{1}{b}\int_0^b y\mathrm{d}y$$

$$Y = \frac{b}{2}$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۸: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.

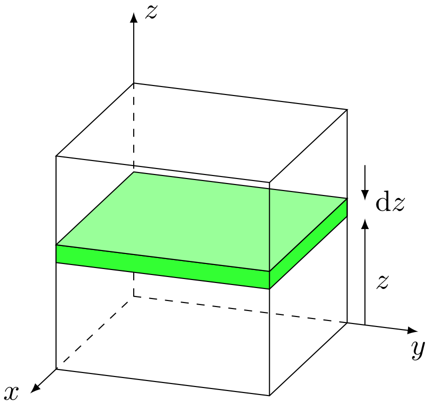




$$\rho = \frac{M}{abc},\ \mathrm{d}V = ab\mathrm{d}z,\ 0 \le z \le c \ \Rightarrow\ \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \frac{M}{c}\mathrm{d}z,\ 0 \le z \le c$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۸: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.

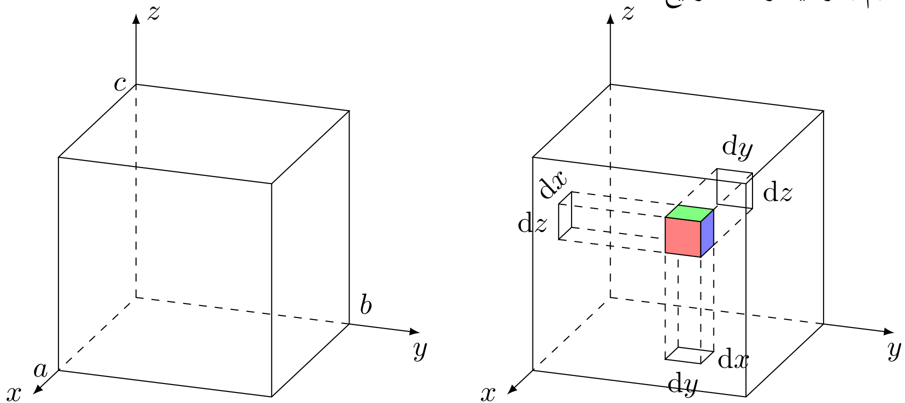


$$\mathrm{d}m = \frac{M}{c}\mathrm{d}z,\ 0 \le z \le c$$

$$Z = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m = \frac{1}{c}\int_0^c z\mathrm{d}z$$

$$Z = \frac{c}{2}$$

مسئله-۱۹: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.

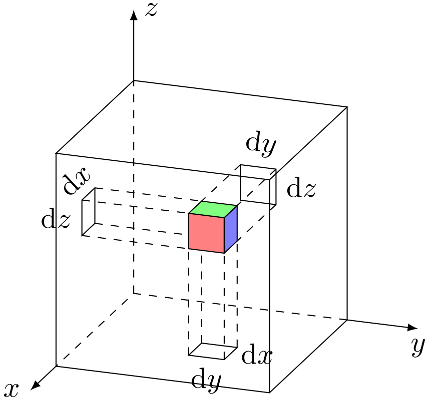


$$\rho = \frac{M}{abc},\ \mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \ \Rightarrow\ \mathrm{d}m = \rho\mathrm{d}V = \frac{M}{abc}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$0 \le x \le a,\ \ 0 \le y \le b,\ \ 0 \le z \le c$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۹: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{abc}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$0 \leq x \leq a$$

$$0 \leq y \leq b$$

$$0 \leq z \leq c$$

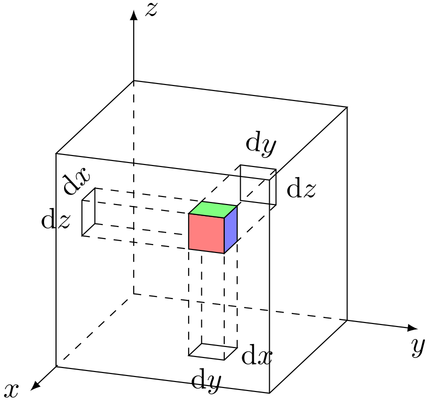
$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m$$

$$X = \frac{1}{abc}\int x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$X = \frac{1}{abc}\left(\int_0^a x\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^c \mathrm{d}z\right) = \frac{1}{abc} \times \frac{a^2}{2} \times b \times c = \frac{1}{2}a$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۹: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$dm = \frac{M}{abc} dx dy dz$$

$$0 \le x \le a$$

$$0 \le y \le b$$

$$0 \le z \le c$$

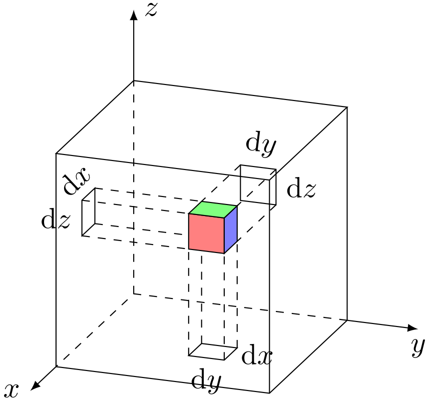
$$Y = \frac{1}{M} \int y dm$$

$$Y = \frac{1}{abc} \int y dx dy dz$$

$$Y = \frac{1}{abc} \left(\int_0^a dx \right) \left(\int_0^b y dy \right) \left(\int_0^c dz \right) = \frac{1}{abc} \times a \times \frac{b^2}{2} \times c = \frac{1}{2} b$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۱۹: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{abc}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$0 \le x \le a$$

$$0 \le y \le b$$

$$0 \le z \le c$$

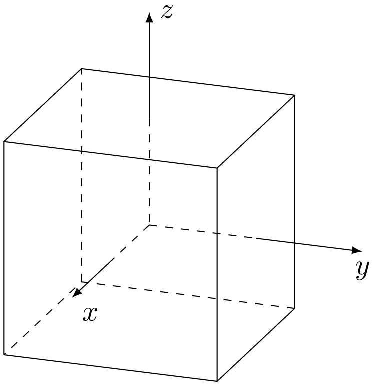
$$Z = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m$$

$$Z = \frac{1}{abc}\int z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$Z = \frac{1}{abc}\left(\int_0^a \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^c z\mathrm{d}z\right) = \frac{1}{abc} \times a \times b \times \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2}c$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۰: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.

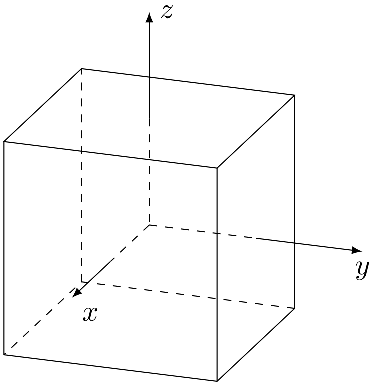


از نقطه نظر هندسی و بخاطر تقارن

$$(X, Y, Z) = (0, 0, 0)$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۰: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{abc}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$-a/2 \le x \le a/2$$

$$-b/2 \le y \le b/2$$

$$-c/2 \le z \le c/2$$

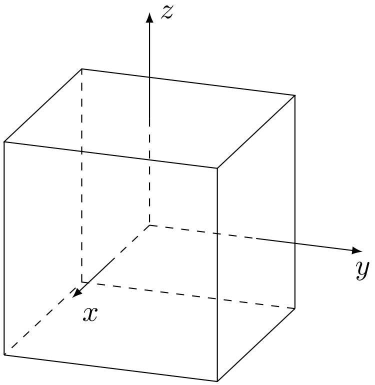
$$X = \frac{1}{M}\int x\mathrm{d}m$$

$$x = \frac{1}{abc}\int x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$X = \frac{1}{abc}\left(\int_{-a/2}^{a/2} x\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-c/2}^{c/2}\mathrm{d}z\right) = \frac{1}{abc}\times 0\times b\times c = 0$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۰: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{abc}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$-a/2 \leq x \leq a/2$$

$$-b/2 \leq y \leq b/2$$

$$-c/2 \leq z \leq c/2$$

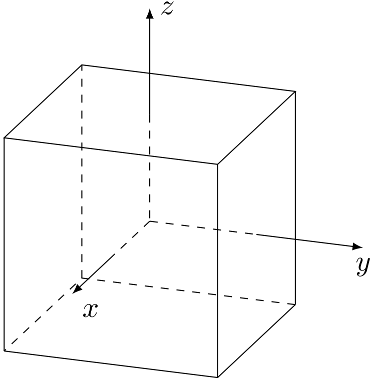
$$Y = \frac{1}{M}\int y\mathrm{d}m$$

$$Y = \frac{1}{abc}\int y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$Y = \frac{1}{abc}\left(\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2}y\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-c/2}^{c/2}\mathrm{d}z\right) = \frac{1}{abc}\times a\times 0\times c = 0$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۰: مرکز جرم مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c و جرم M را برای دستگاه مختصات داده شده پیدا کنید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{abc}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$-a/2 \leq x \leq a/2$$

$$-b/2 \leq y \leq b/2$$

$$-c/2 \leq z \leq c/2$$

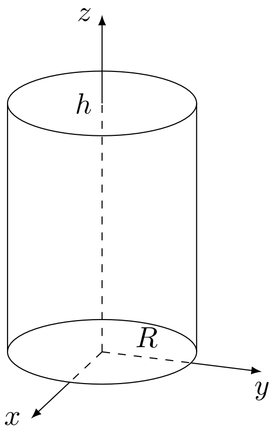
$$Z = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m$$

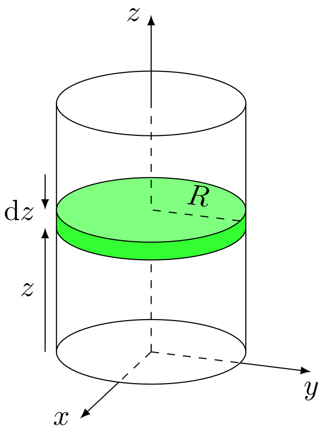
$$Z = \frac{1}{abc}\int z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$Z = \frac{1}{abc}\left(\int_{-a/2}^{a/2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y\right)\left(\int_{-c/2}^{c/2}z\mathrm{d}z\right) = \frac{1}{abc}\times a\times b\times 0 = 0$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۱: مرکز جرم استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع h و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بصورت یکنواخت توزیع شده است.

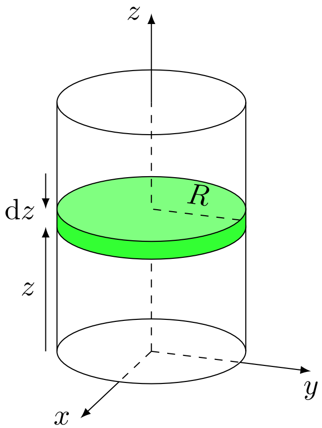




مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۱: مرکز جرم استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع h و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بصورت یکنواخت توزیع شده است.

> بخاطر تقارن $X = Y = 0$



$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 h},\ dV = \pi R^2 \mathrm{d}z$$

$$0 \leq z \leq h$$

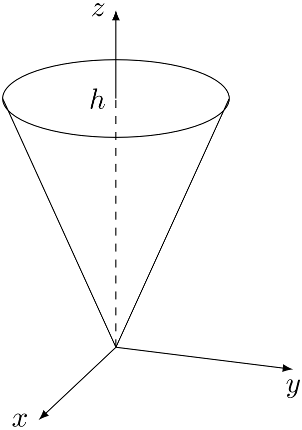
$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \frac{M}{h}\mathrm{d}z$$

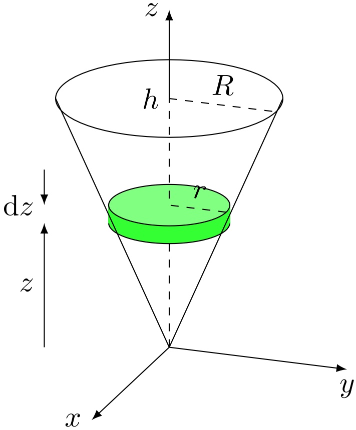
$$Z = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m = \frac{1}{h}\int_0^h z\mathrm{d}z$$

$$Z = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^h = \frac{1}{2}h$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۲: مرکز جرم مخروطی به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع h و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بصورت یکنواخت توزیع شده است.



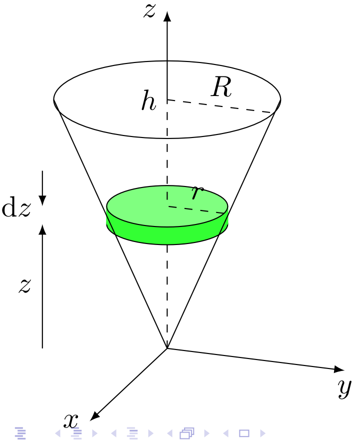


مسئله–۲۲: مرکز جرم مخروطی به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع h و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بصورت یکنواخت توزیع شده است.

< بخاطر تقارن $X = Y = 0$

در گام اول ابتدا حجم مخروط را بدست می‌آوریم

$$dV = \pi r^2 \mathrm{d}z,\ 0 \leq z \leq h$$



با استفاده از تشابه مثلثات

$$\frac{r}{R} = \frac{z}{h} \Rightarrow r = \frac{R}{h} z$$

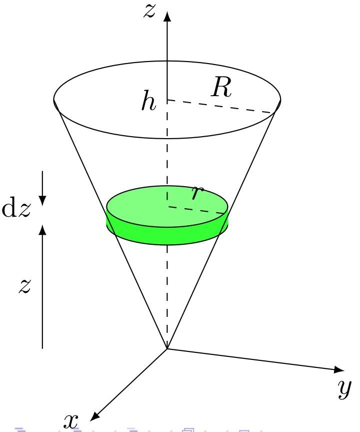
$$dV = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2 \mathrm{d}z$$

$$V = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۲: مرکز جرم مخروطی به شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع h و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بصورت یکنواخت توزیع شده است.

< بخاطر تقارن $X = Y = 0$



$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$$

$$\mathrm{d}m = \left(\frac{3M}{\pi R^2 h}\right)\left(\frac{\pi R^2}{h^2} z^2 \mathrm{d}z\right)$$

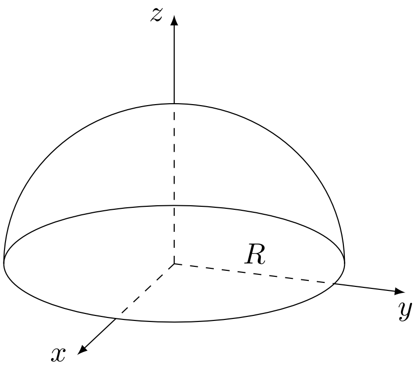
$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{h^3} z^2 \mathrm{d}z,\ 0 \le z \le h$$

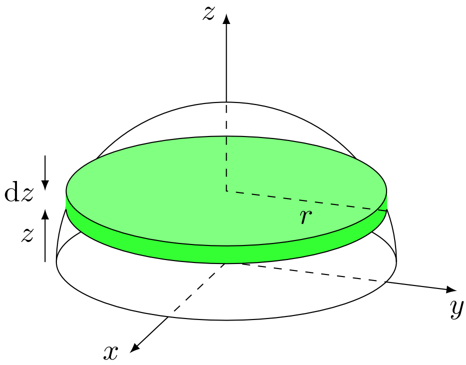
$$Z = \frac{1}{M}\int z \mathrm{d}m = \frac{3}{h^3}\int_0^h z^3 \mathrm{d}z$$

$$Z = \frac{3}{4} h$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۳: مرکز جرم نیمکره‌ای به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بصورت یکنواخت توزیع شده است.

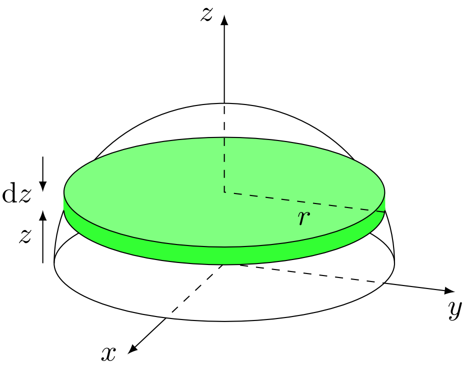




مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۳: مرکز جرم نیمکره‌ای به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بصورت یکنواخت توزیع شده است.

< بخاطر تقارن $X = Y = 0$
در گام اول ابتدا حجم مخروط را بدست می‌آوریم



$$dV = \pi r^2 \mathrm{d}z,\ 0 \leq z \leq R$$

$$r^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - z^2$$

$$dV = \pi (R^2 - z^2) \mathrm{d}z$$

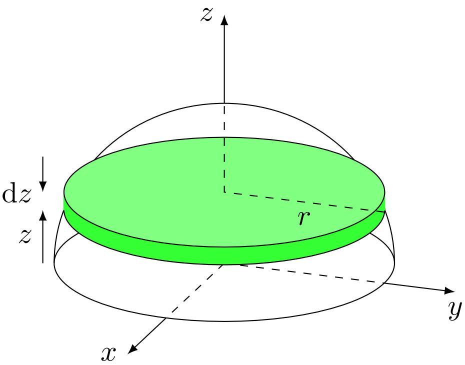
$$V = \pi \int_0^R (R^2 - z^2) \mathrm{d}z$$

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3$$

مرکز جرم-اجسام صلب

مسئله-۲۳: مرکز جرم نیمکره‌ای به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد حجم بصورت یکنواخت توزیع شده است.

< بخاطر تقارن $X = Y = 0$



$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$$

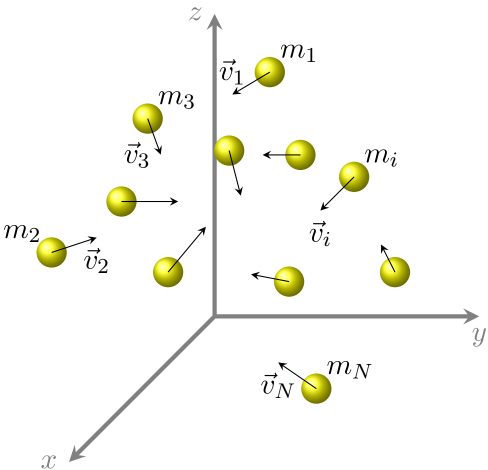
$$\mathrm{d}m = \left(\frac{2M}{3\pi R^3}\right)\pi(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{3R^3}(R^2 - z^2)\mathrm{d}z,\ 0 \leq z \leq R$$

$$Z = \frac{1}{M}\int z\mathrm{d}m$$

$$Z = \frac{2}{3R^3}\int_0^R z(R^2 - z^2)\mathrm{d}z = \frac{3R}{8}$$

دستگاه ذرات-پایستگی تکانه



$$m_1 : \vec{r}_1,\ \vec{v}_1$$
$$m_2 : \vec{r}_2,\ \vec{v}_2$$
$$m_3 : \vec{r}_3,\ \vec{v}_3$$
$$\vdots$$
$$m_i : \vec{r}_i,\ \vec{v}_i$$
$$\vdots$$
$$m_N : \vec{r}_N,\ \vec{v}_N$$

$$M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_i\vec{v}_i + \cdots + m_N\vec{v}_N = \sum_i m_i\vec{v}_i$$

دستگاه ذرات-پایستگی تکانه

$$M\vec{V} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_i\vec{v}_i + \cdots + m_N\vec{v}_N$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}M\vec{V} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_1\vec{v}_1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_2\vec{v}_2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_3\vec{v}_3 + \cdots + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_i\vec{v}_i + \cdots + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_N\vec{v}_N$$

اگر : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_1 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_2 = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_3 = 0, \cdots$

یعنی : $m_1 =$ مقدار ثابت, $\quad m_2 =$ مقدار ثابت, $\quad m_3 =$ مقدار ثابت, $\cdots$

$$M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{V} = m_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}_1 + m_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}_2 + m_3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}_3 + \cdots + m_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}_i + \cdots + m_N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}_N$$

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots + m_i\vec{a}_i + \cdots + m_N\vec{a}_N$$

دستگاه ذرات-پایستگی تکانه

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots + m_i\vec{a}_i + \cdots + m_N\vec{a}_N$$

قانون دوم نیوتن

$$\begin{aligned} m_1 &: \ \vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1 \\ m_2 &: \ \vec{F}_2 = m_2\vec{a}_2 \\ m_3 &: \ \vec{F}_3 = m_3\vec{a}_3 \\ &\vdots \\ m_i &: \ \vec{F}_i = m_i\vec{a}_i \\ &\vdots \\ m_N &: \ \vec{F}_N = m_N\vec{a}_N \end{aligned}$$

دستگاه ذرات-پایستگی تکانه

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots + m_i\vec{a}_i + \cdots + m_N\vec{a}_N$$

قانون دوم نیوتن

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_i + \cdots + \vec{F}_N$$

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i$$

نیروی وارد بر هر ذره شامل دو بخش **نیروی داخلی** و **نیروی خارجی** می‌شود،

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{داخلی}} + \vec{F}_i^{\text{خارجی}}$$

نیرویی که از طرف ذرات دیگر در دستگاه ذرات به ذره‌ی مورد نظر وارد می‌شود، **نیروی داخلی** می‌نامند. **نیروی خارجی** از بیرون از دستگاه ذرات به ذرات در داخل دستگاه ذرات وارد می‌شود

دستگاه ذرات-پایستگی تکانه

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_i(\vec{F}_i^{\text{داخلی}}+\vec{F}_i^{\text{خارجی}})=\sum_i\vec{F}_i^{\text{داخلی}}+\sum_i\vec{F}_i^{\text{خارجی}}$$

نیروهای خارجی
- اثر میدان الکتریکی
- اثر میدان مغناطیسی

نیروهای داخلی
- نیروی کولنی
- نیروی گرانشی

نیروهای داخلی، اثر نیروهای متقابل بین هر دو ذره می باشند. بنابراین جمع تمام نیروهای داخلی در دستگاه ذرات برابر صفر است،

$$\sum_i\vec{F}_i^{\text{داخلی}}=0$$

بنابراین

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\sum_i\vec{F}_i^{\text{خارجی}}$$

دستگاه ذرات-پایستگی تکانه

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{خارجی}} = \vec{F}^{\text{خارجی}}$$

اگر $\vec{F}^{\text{خارجی}} = 0$

$$M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$$

اگر مقدار ثابت $= M$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}MV = 0$$

تعریف تکانه خطی

$$P = MV$$

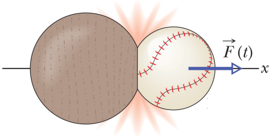
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P = 0 \Rightarrow P = \text{مقدار ثابت}$$

$$\text{پایستگی تکانه}: \quad \Delta P = 0 \Rightarrow P^{\text{حالت اولیه}} = P^{\text{حالت نهایی}}$$

برخورد–ضربه

برای بررسی مفهوم ضربه، برخورد یک توب به چوب در بازی بیسبال را بررسی می کنیم.

- نیروی وارد بر توب از طرف چوب بیسبال دارای اندازه‌ی بزرگ و مدت اثر کوتاه است.
- این نیروی متغیر، $\vec{F}(t)$، می‌تواند حرکت توپ را کُند، متوقف یا معکوس کند و تکانه خطی، $\vec{p}$، توپ را تغییر دهد.



اگر $\mathrm{d}t$ بازه زمانی تغییر تکانه باشد، با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}(t)\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}(t)\mathrm{d}t$$

از دوطرف رابطه‌ی بالا نسبت به زمان برای دو بازه‌ی زمانی t_i و t_f انتگرالگیری می‌کنیم.

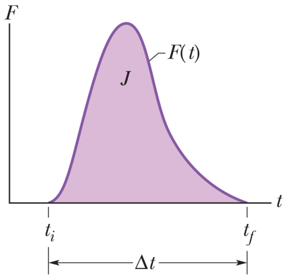
$$\int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$$

$$\text{تغییر تکانه} : \ \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\vec{p}$$

$$\text{تعریف ضربه} : \ \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{J}}$$

بزرگی ضربه برابر با اندازه تغییر تکانه قبل و بعد از برخورد است.



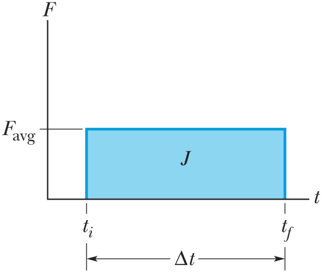
- مساحت زیر منحنی برابر با ضربه J است.
- مطابق قانون سوم نیوتن ضربه‌ی وارد بر چوب بیسبال همان اندازه‌ی ضربه‌ی وارد بر توپ در جهت مخالف است.

برخورد-ضربه

$$\text{تغییر تکانه} : \quad \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}\vec{p}$$

$$\text{تعریف ضربه} : \quad \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{J}}$$



بزرگی ضربه برابر با اندازه تغییر تکانه قبل و بعد از برخورد است.

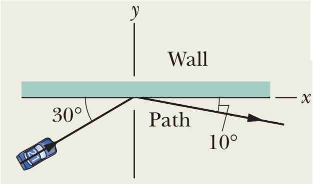
> در اکثر موارد شکل تابع نیرو برحسب زمان **معلوم نیست** ولی اندازه نیروی متوسط $F_{\text{متوسط}}$ و مدت زمان برخورد $\Delta t = t_f - t_i$ **معلوم است**.

> بنابراین می‌توان ضربه را بصورت

$$J = F_{\text{متوسط}} \Delta t$$

بدست آورد.

مسئله-۲۴: شکل زیر نمای بالا از مسیر طی شده توسط راننده‌ی خودروی را نشان می‌دهد که خودروی او با دیواره مسیر برخورد کرده است. درست قبل از برخورد او با اندازه سرعت $v_i = 70\ \mathrm{m/s}$ حرکت می کند و پس از برخورد با اندازه سرعت $v_f = 50\ \mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند. اگر جرم راننده $80\ \mathrm{kg}$ باشد، اندازه و جهت ضربه‌ی وارد بر راننده را بدست آورید.



$$\vec{p}_i = mv_i \cos(30)\hat{i} + mv_i \sin(30)\hat{j}$$

$$\vec{p}_f = mv_f \cos(10)\hat{i} - mv_f \sin(10)\hat{j}$$

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m(v_f \cos(10) - v_i \cos(30))\hat{i} + m(-v_f \sin(10) - v_i \sin(30))\hat{j}$$

$$\vec{J} = (-910\hat{i} - 3500\hat{j})\ \mathrm{kgm/s}, \quad J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = 3616\ \mathrm{kgm/s}$$

تکانه و انرژی جنبشی در برخوردها

برخورد اجسام با یکدیگر بطورکلی به دو بخش **کشسان** و **غیر کشسان** تقسیم می‌شوند.

- **برخورد کشسان**

  تکانه خطی و انرژی جنبشی قبل و بعد از برخورد یکسان می‌باشند (پایستگی تکانه و پایستگی انرژی جنبشی).

- **برخورد غیر کشسان**

فقط تکانه خطی قبل و بعد از برخورد یکسان می‌باشد (پایستگی تکانه). انرژی جنبشی کل کاهش پیدا می‌کند و به یکی از شکلهای گرمایی، نوری و صوتی تبدیل می‌شود.

  - **برخورد غیر کشسان کامل**

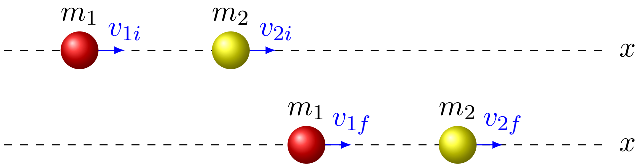
    بیشینه کاهش انرژی جنشی وقتی رخ می‌دهد که اجسام در اثر برخورد به هم بچسبند (مثل برخورد یک توده‌ی گِل با چوب بیسبال).

برخورد غیر کشسان در یک بعد

شکل کلی یک برخورد سر به سر غیر کشسان در یک بعد

حالت اولیه یا قبل از برخورد

حالت نهایی یا بعد از برخورد



پایستگی تکانه در برخورد غیر کشسان

$$\text{تکانه کل قبل از برخورد} = \text{تکانه کل بعد از برخورد}$$

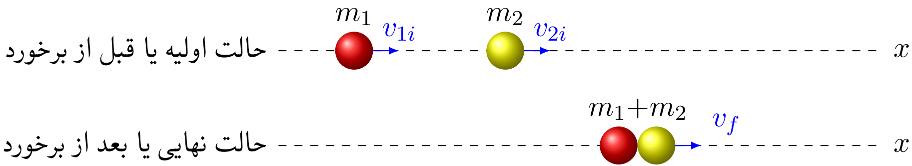
$$\vec{p}_i^{\,\text{کل}} = \vec{p}_f^{\,\text{کل}}$$

$$\text{در امتداد محور } x: \quad m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

اگر مقادیر جرمها و سرعتهای اولیه و یکی از سرعتهای نهایی معلوم باشد می‌شود سرعت دیگر را از رابطه بالا بدست آورد.

برخورد غیر کشسان کامل در یک بعد

شکل کلی یک برخورد سر به سر غیر کشسان کامل در یک بعد



پایستگی تکانه در برخورد غیر کشسان کامل

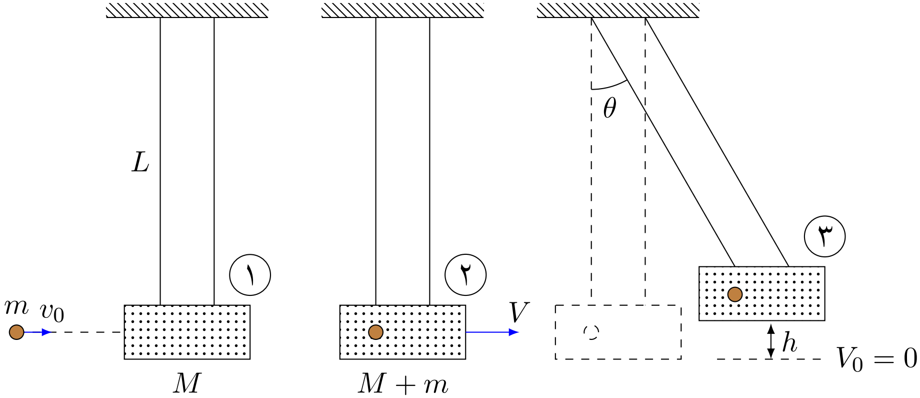
$$\text{تکانه کل بعد از برخورد} = \text{تکانه کل قبل از برخورد}$$

$$\vec{p}_i^{\,\text{کل}} = \vec{p}_f^{\,\text{کل}}$$

$$\text{در امتداد محور } x : \; m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$$

اگر مقادیر جرمها و سرعتهای اولیه معلوم باشد می‌شود سرعت نهایی دو ذره بهم چسبیده را از رابطه بالا بدست آورد.

برخورد غیر کشسان کامل در یک بعد–آونگ بالستیک



$$h = L(1 - \cos\theta)$$

برخورد غیر کشسان کامل در یک بعد-آونگ بالستیک

بخاطر قرار گرفتن گلوله در داخل کنده‌ی چوب فقط پایستگی تکانه برقرار است و پایستگی انرژی جنبشی برقرار نیست،

$$\text{تکانه کل بعد از برخورد} = \text{تکانه کل قبل از برخورد}$$

$$p_{①} = p_{②}$$

$$mv_0 = (M+m)V$$

$$V = \frac{m}{M+m}v_0$$

پایستگی انرژی

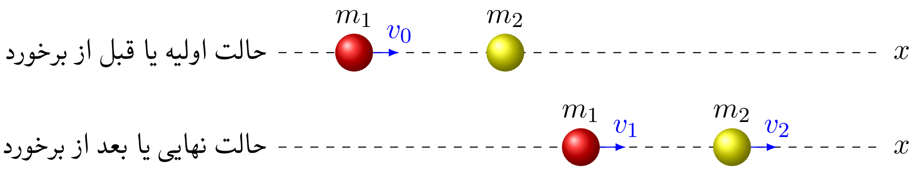
$$E_{②} = E_{③}$$

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh$$

$$h = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{یا} \quad v_0 = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$$

برخورد کشسان در یک بعد

شکل کلی یک برخورد سر به سر کشسان در یک بعد



پایستگی تکانه و پایستگی انرژی جنبشی در برخورد کشسان

تکانه کل بعد از برخورد = تکانه کل قبل از برخورد

$$\vec{p}_i^{\,\text{کل}} = \vec{p}_f^{\,\text{کل}}$$

در امتداد محور x : $m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$

انرژی جنبشی کل بعد از برخورد = انرژی جنبشی کل قبل از برخورد

$$K_i^{\text{کل}} = K_f^{\text{کل}}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2 \Rightarrow m_1(v_0 - v_1) = m_2v_2 \quad ۱$$

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \Rightarrow m_1(v_0^2 - v_1^2) = m_2v_2^2$$

$$m_1(v_0^2 - v_1^2) = m_1(v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = m_2v_2^2 \quad ۲$$

$$\begin{cases} ۱ \; \color{red}{m_1(v_0 - v_1)} = m_2v_2 \\ ۲ \; \color{red}{m_1(v_0 - v_1)}(v_0 + v_1) = m_2v_2^2 \end{cases}$$

$$m_2v_2(v_0 + v_1) = m_2v_2^2 \Rightarrow v_0 + v_1 = v_2 \quad ۳$$

$$\begin{cases} ۱ \; m_1(v_0 - v_1) = m_2v_2 \\ ۳ \; v_0 + v_1 = v_2 \end{cases}$$

برخوردهای کشسان در یک بعد

$$\begin{cases} ① \; m_1(v_0 - v_1) = m_2 v_2 \\ ③ \; v_0 + v_1 = v_2 \end{cases}$$

دستگاه دو معادله و دو مجهول،

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0 \\ v_1 - v_2 = -v_0 \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_1 > 0, & m_1 > m_2 \\ v_1 < 0, & m_1 < m_2 \end{cases}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 > 0$$

برخوردهای کشسان در یک بعد

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_1 > 0, & m_1 > m_2 \\ v_1 < 0, & m_1 < m_2 \end{cases}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 > 0$$

- حالت خاص ۱: اگر $m_1 = m_2$ در اینصورت

$$v_1 = 0, \quad v_2 = v_0$$

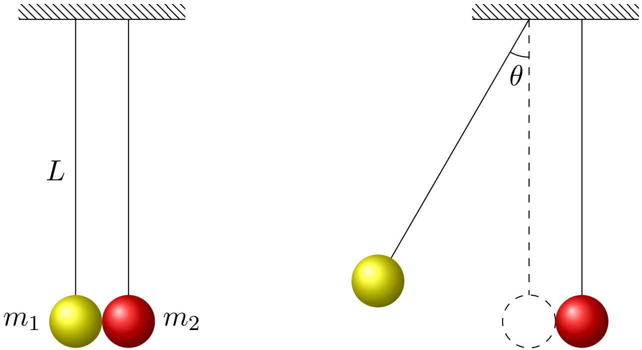
- حالت خاص ۲: اگر $m_1 \gg m_2$ در اینصورت

$$v_1 = v_0, \quad v_2 = 2v_0$$

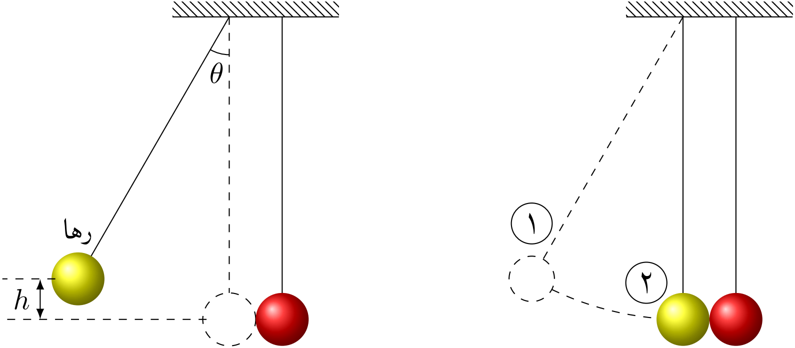
- حالت خاص ۳: اگر $m_1 \ll m_2$ در اینصورت

$$v_1 = -v_0, \quad v_2 = 0$$

برخوردهای کشسان دو آونگ



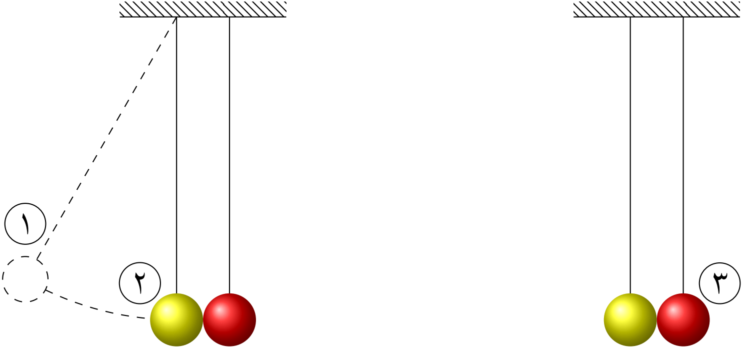
برخوردهای کشسان دو آونگ



پایستگی انرژی درست قبل از برخورد : $E_{①} = E_{②}$

$$m_1gh = \frac{1}{2}m_1v_2^2 \Rightarrow m_1gL(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}m_1v_1^2,$$ در لحظه‌ی برخورد افقی است v_1

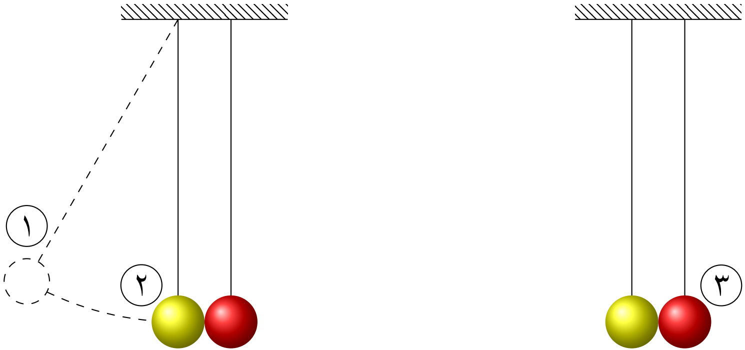
برخوردهای کشسان دو آونگ



انرژی جنبشی درست بعد از برخورد : $K_{\text{۲}} = K_{\text{۳}}$: انرژی جنبشی درست قبل از برخورد

u_1 و u_2 در لحظه‌ی برخورد افقی‌اند $\quad \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2,$

برخوردهای کشسان دو آونگ



تکانه درست بعد از برخورد : $p^{\text{افقی}}_{③} = p^{\text{افقی}}_{②}$: تکانه درست قبل از برخورد

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

برخوردهای کشسان دو آونگ

$$m_1 g L(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

$$\begin{cases} m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 \\ \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \end{cases}$$

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

برخوردهای کشسان دو آونگ

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

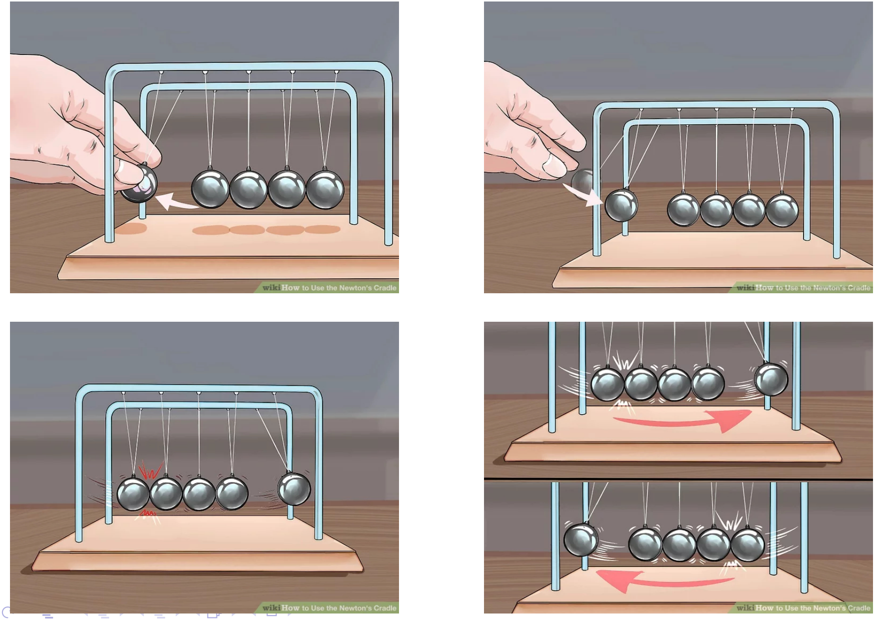
اگر جرم گوی‌های دو آونگ با هم برابر باشند،

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

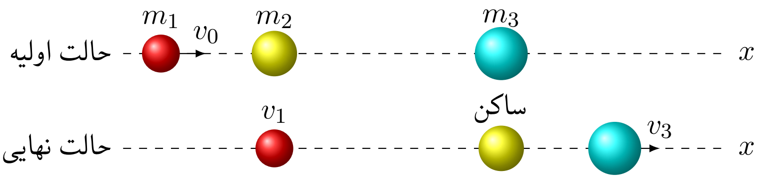
بدین ترتیب گوی آونگ اول پس از برخورد ساکن و گوی آونگ دوم پس از برخورد تا ارتفاع $L(1-\cos\theta)$ بالا می رود.

برخوردهای کشسان زنجیره‌ای در گهواره نیوتن



برخوردهای کشسان زنجیره‌ای

مسئله–۲۵: جسم ۱ با سرعت $v_0 = 10\ \mathrm{m/s}$ در راستای دو جسم ساکن به آنها نزدیک می‌شود. جسم ۱ با جسم ۲ برخورد می‌کند. سپس جسم ۲ با جسم ۳ به جرم $m_3 = 6\ \mathrm{kg}$ برخورد می کند. پس از برخورد دوم، جسم ۲ دوباره سکن باقی می‌ماند و جسم ۳ دارای سرعت $v_3 = 5\ \mathrm{m/s}$ است. جرم اجسام ۱ و ۲ چقدر است؟ سرعت نهایی v_1 جسم ۱ چقدر است؟



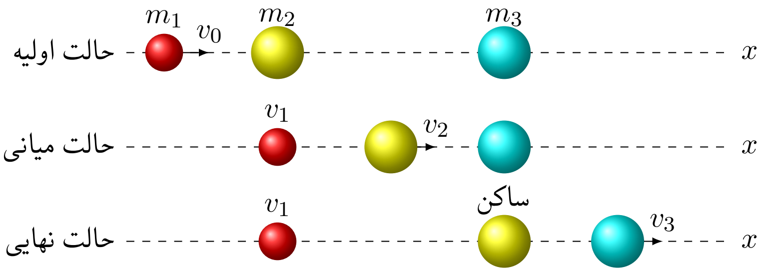
نکته: وقتی جسم ۲ در برخورد با جسم ۳ ساکن می‌شود. نتیجه می‌گیریم که جسم ۲ و ۳ جرمهای یکسانی دارند.

$$m_2 = m_3 = 6\ \mathrm{kg}$$

برخوردهای کشسان زنجیره‌ای

مسئله–۲۵:

$$m_2 = m_3 = 6\ \text{kg}$$



$$\text{تکانه کل حالت اولیه} = \text{تکانه کل حالت میانی} \ : \ m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2$$

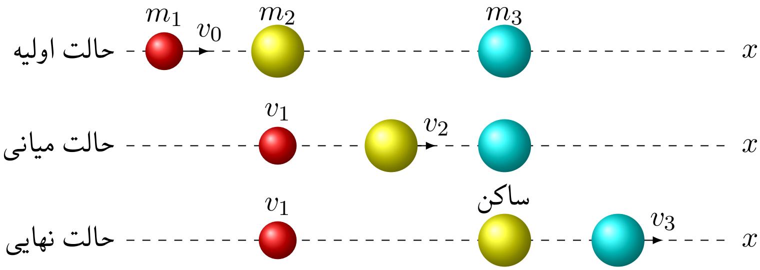
$$\text{تکانه کل حالت میانی} = \text{تکانه کل حالت نهایی} \ : \ m_2v_2 = m_3v_3 \Rightarrow v_2 = v_3$$

از دو رابطه بالا داریم

$$m_1v_0 = m_1v_1 + m_3v_3 \ : \ \text{تکانه کل حالت اولیه} = \text{تکانه کل حالت نهایی}$$

برخوردهای کشسان زنجیره‌ای

مسئله–۲۵:



انرژی جنبشی حالت اولیه = انرژی جنبشی حالت میانی : $\frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

انرژی جنبشی حالت میانی = انرژی جنبشی حالت نهایی : $\frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_3v_3^2 \Rightarrow v_2 = v_3$

از دو رابطه بالا داریم

انرژی جنبشی حالت نهایی = انرژی جنبشی حالت اولیه : $\frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2$

مسئله-۲۵:

$$m_2 = m_3 = 6 \text{ kg}$$

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_3 v_3 \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

$$(۱) \quad m_1 (v_0 - v_1) = m_3 v_3$$

$$m_1 (v_0^2 - v_1^2) = m_3 v_3^2 \Rightarrow m_1 (v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = m_3 v_3^2$$

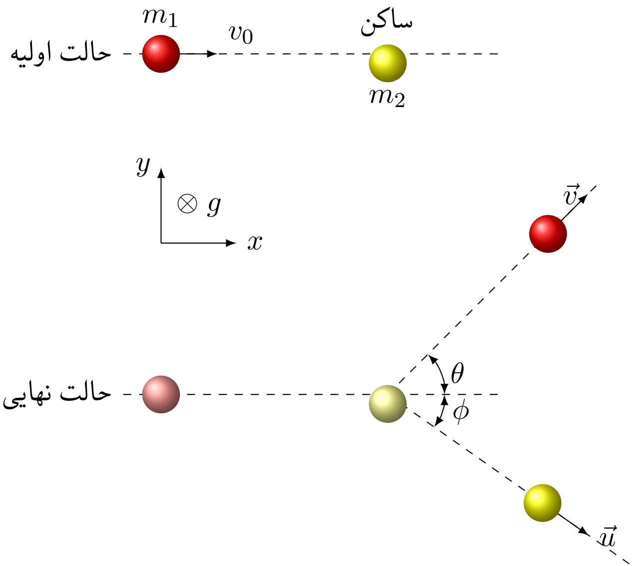
$$v_0 + v_1 = v_3 \quad (۲)$$

$$\begin{cases} (۱) \quad m_1 v_1 + m_3 v_3 = m_1 v_0 \\ (۲) \quad v_0 + v_1 = v_3 \end{cases}$$

$$(۲) \quad v_0 + v_1 = v_3 \Rightarrow v_1 = v_3 - v_0 = 5 - 10 = -5 \text{ m/s}$$

$$(۱) \quad m_1 = m_3 \frac{v_3}{v_0 - v_1} = 6 \frac{5}{10 - (-5)} = 2 \text{ kg}$$

برخوردهای کشسان در دو بعد



برخوردهای کشسان در دو بعد

پایستگی تکانه در دو امتداد

تکانه کل بعد از برخورد در امتداد محور x = تکانه کل قبل از برخورد در امتداد محور x

$$\sum p_{ix} = \sum p_{fx}$$

$$m_1 v_0 = m_1 v \cos\theta + m_2 u \cos\phi$$

تکانه کل بعد از برخورد در امتداد محور y = تکانه کل قبل از برخورد در امتداد محور y

$$\sum p_{iy} = \sum p_{fy}$$

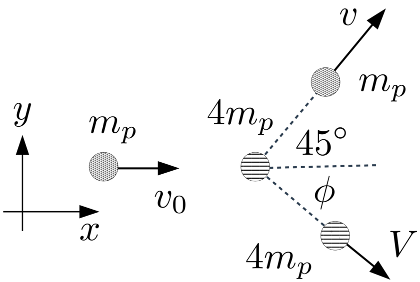
$$0 = m_1 v \sin\theta - m_2 u \sin\phi$$

پایستگی انرژی جنبشی

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 u^2$$

در اینجا سه معادله و چهار مجهول (θ، ϕ، u و v) وجود دارد. در آزمایشگاه معمولا یکی از زوایا معلوم است.

مسئله–۲۶: پروتونی به جرم m_p و با بردار سرعت اولیه‌ی $\vec{v}_0$ به اتم هلیوم، به جرم $4m_p$، که ابتدا در حال سکون است بطور کشسان برخورد می‌کند. اگر پروتون نقطه‌ی برخورد را در حالی ترک کند که با امتداد اولیه‌ی حرکتش زاویه‌ی 45° می‌سازد، الف) سرعت نهایی هر ذره را بیابید. ب) زاویه‌ی پراکندگی پروتون را در دستگاه مرکز جرم بیابید.



مسئله–۲۶: پایستگی تکانه خطی

$$p_x^i = p_x^f : \; m_p v_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} m_p v + 4 m_p V \cos\phi \Rightarrow v_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} v = 4V \cos\phi$$

$$p_y^i = p_y^f : \; 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} m_p v - 4 m_p V \sin\phi \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} v = 4V \sin\phi$$

طرفین را توان ۲ رسانده و با هم جمع می‌کنیم

$$\begin{cases} (v_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} v)^2 = 16 V^2 \cos^2\phi \\ \frac{1}{2} v^2 = 16 V^2 \sin^2\phi \end{cases} \Rightarrow v_0^2 - \sqrt{2} v_0 v + v^2 = 16 V^2$$

پایستگی انرژی

$$E^i = E^f \Rightarrow \frac{1}{2} m_p v_0^2 = \frac{1}{2} m_p v^2 + \frac{1}{2} 4 m_p V^2$$

$$v_0^2 - v^2 = 4V^2$$

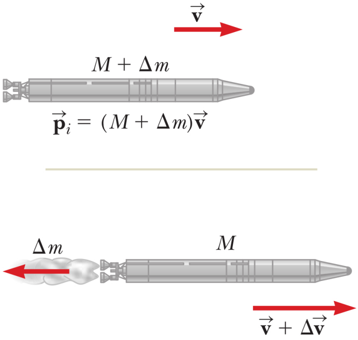
مسئله–۲۶:

$$\begin{cases} v_0^2 - \sqrt{2}v_0 v + v^2 = 16V^2 \\ v_0^2 - v^2 = 4V^2 \end{cases} \Rightarrow 5v^2 - \sqrt{2}v_0 v - 3v_0^2 = 0$$

$$v_\pm = v_0 \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{62}}{10} \Rightarrow v_+ = 0.93 v_0$$ قابل قبول

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{v_0^2 - v_+^2}$$

دستگاههای با جرم متغیر



$$\vec{p}(t) = (M + \Delta m)\vec{v}$$

$$\vec{p}(t+\Delta t) = M(\vec{v}+\Delta\vec{v})+\Delta m(\vec{v}-\vec{v}_e)$$

سرعت گاز خروجی نسبت به موشک : $\vec{v}_e$

سرعت گاز خروجی نسبت به زمین : $\vec{v} - \vec{v}_e$

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t) = [M(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m(\vec{v} - \vec{v}_e)] - (M + \Delta m)\vec{v}$$

$$\Delta\vec{p} = M\Delta\vec{v} - \vec{v}_e\Delta m \quad (۱)$$

$$\vec{F}_{\text{خارجی}} = 0 \Rightarrow \Delta p = 0 \Rightarrow M\Delta\vec{v} = \vec{v}_e\Delta m$$

دستگاههای با جرم متغیر

اگر $\Delta t \to 0: \ \Delta\vec{v} \to \mathrm{d}\vec{v}, \quad \Delta m \to \mathrm{d}m$

$$M\mathrm{d}\vec{v} = \vec{v}_e \mathrm{d}m$$

نکته: افزایش جرم خروجی از اگزوز موشک متناظر است با کاهش جرم موشک، یعنی

$$\mathrm{d}m = -\mathrm{d}M$$

بنابراین

$$M\mathrm{d}\vec{v} = -\vec{v}_e \mathrm{d}M$$

$$\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \mathrm{d}\vec{v} = -\vec{v}_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{\mathrm{d}M}{M}$$

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = -\vec{v}_e \ln\left(\frac{M_f}{M_i}\right) \Rightarrow \vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{v}_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

دستگاههای با جرم متغیر

$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = -\vec{v}_e \ln\left(\frac{M_f}{M_i}\right) \Rightarrow \vec{v}_f - \vec{v}_i = \vec{v}_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

رابطه‌ی بالا به ما می گوید که

- افزایش سرعت موشک متناسب است با سرعت گاز خروجی از اگزوز موشک است. برای این منظور مقدار آن باید زیاد باشد.
- افزایش سرعت موشک متناسب است با لگاریتم کسر M_i/M_f. یعنی جرم موشک بدون سوخت ش باید تا حد ممکن کوچک باشد و موشک تا حد ممکن باید سوخت حمل کند.

اگر $\vec{F}_{\text{ext}} \neq 0$ بنابراین

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} - \vec{v}_e\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

برای $\Delta \to 0$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} - \vec{v}_e\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

دستگاه ذرات

مسئله–۲۸: مردی به جرم m در پایین نردبان طنابی آویخته از بالونی به جرم M ایستاده است. بالون نسبت به زمین ساکن است. اگر این مرد با سرعت v نسبت به بالون از نردبان بالا برود. بالون با چه سرعتی و در چه جهتی نسبت به زمین حرکت خواهد کرد؟

نکته ۱: بطورکلی نیروی گرانش در امتدا قائم مانع از پایستگی تکانه در امتداد قائم می‌شود. ولی از آنجایی که بالون در ابتدا نسبت به زمین ساکن است، می‌توان نتیجه گرفت که برایند نیروهای خارجی در امتداد قائم اثر یکدیگر را خنثی می‌کند. در این شرایط می‌توان پایستگی تکانه را در امتداد قائم اعمال کرد.

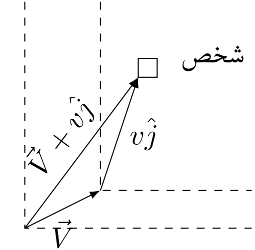
نکته ۲: نیروی که از طریق نردبان میان شخص و بالون مبادله می‌شود یک نیروی داخلی می‌باشد.

نکته ۳: مرکز جرم شخص و بالون قبل و بعد از بالا رفتن از نردبان ساکن باقی خواهد ماند.

دستگاه ذرات

مسئله–۲۸:

نکته ۴: پایستگی تکانه نسبت یه زمین برقرار است.



تکانه نهایی = تکانه اولیه

$$0 = M\vec{V} + m(\vec{V} + v\hat{j})$$

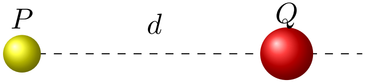
$$\vec{V} = -\frac{mv}{M+m}\hat{j}$$

مسئله–۲۹: دو ذره‌ی P و Q در ابتدا ساکن اند و از یکدیگر به اندازه‌ی d فاصله دارند. جرم ذره‌ی P برابر با m و جرم ذره‌ی Q برابر M است. دو ذره یکدیگر را با نیروی ثابت F یکدیگر را جذب می کنند. هیچ نیروی خارجی روی این سیستم اثر نمی‌کند. در چه فاصله‌ی اولیه از ذره‌ی P، دو ذره به هم برخورد می کنند.

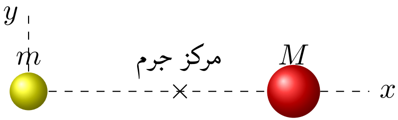
نکته: برایند نیروهای خارجی صفر است و نیروی F نیروی داخلی محسوب می‌شود. در این شرایط مرکز جرم دستگاه در گذر زمان ساکن باقی می‌ماند. بدین ترتیب انتظار داریم دو ذره در مرکز جرم با یکدیگر برخورد کنند.

$$(M+m)X = 0 + Md$$

$$X = \frac{Md}{m+M}$$

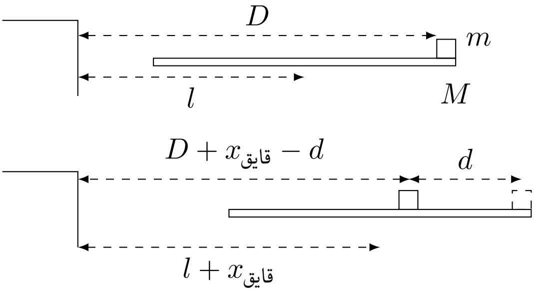


انتخاب مبدا دستگاه مختصات روی ذره‌ی P و تعیین مرکز جرم



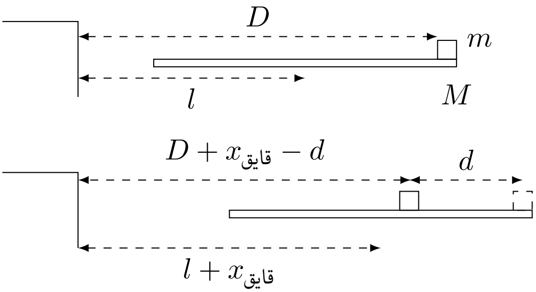
مسئله–۲۹: سگی به جرم m بر روی قایق تختی به جرم M ایستاده است. سگ از ساحل به اندازه‌ی D فاصله دارد. بین آب و قایق اصطکاکی وجود ندارد. سگ به اندازه‌ی d بطرف ساحل حرکت می‌کند و سپس می‌ایستد. در این وضعیت فاصله سگ از ساحل چقدر است؟

نکته: مکان مرکز جرم قبل و بعد از حرکت قایق و سگ ثابت باقی می‌ماند.



$$mD + lM = (D + x_{\text{قایق}} - d)m + (l + x_{\text{قایق}})M$$

مسئله–۲۹:

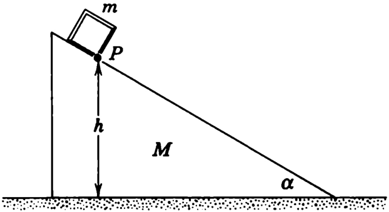


$$mD + lM = (D + x_{\text{قایق}} - d)m + (l + x_{\text{قایق}})M$$

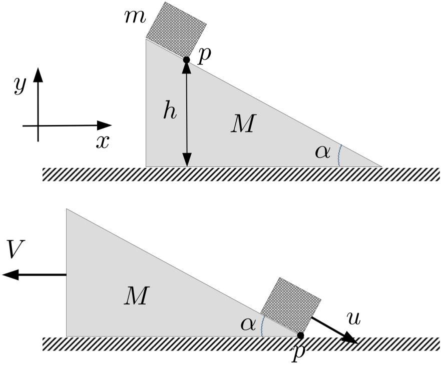
$$(m+M)x_{\text{قایق}} = md \Rightarrow x_{\text{قایق}} = \frac{md}{m+M}$$

$$\text{فاصله سگ از ساحل} = D + x_{\text{قایق}} - d = D + \frac{md}{m+M} - d = D - \frac{Md}{m+M}$$

مسئله‌–۳۰: مطابق شکل، جسمی به جرم m روی سطح شیبداری به جرم M واقع شده است و سطح شیبدار هم روی میز افقی قرار گرفته است. سطحهای تماس بدون اصطکاک‌اند. این سیستم از حال سکون از وضعیتی که نقطه‌ی p در ارتفاع h از سطح میز قرار دارد شروع به حرکت می‌کند، سرعت سطح شیبدار در لحظه‌ای که نقطه‌ی p به سطح میز می‌رسد چقدر است؟



مسئله– ۳۰:



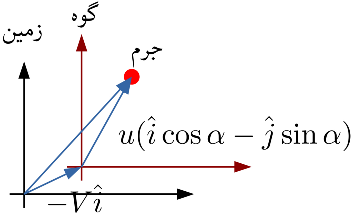
تکانه و انرژی سیستم دستگاه قبل از حرکت جرم m بصورت زیر داده می‌شود،

$$p_x^i = 0$$

$$E^i = mgh$$

که مرجع پتانسیل زمین قرار داده شده است.

مسئله- ۳۰:
در ادامه نیاز داریم که تکانه و انرژی سیستم بعد از رسیدن جرم m به پایین سطح شیبدار را نسبت به ناظر لخت حساب کنیم. همچنین در نظر داشته باشید که پایستگی تکانه بدلیل حضور گرانش، فقط در امتداد x برقرار است.



تکانه و انرژی سیستم دستگاه بعد از رسیدن جرم m به پایین سطح شیبدار را بصورت زیر داده می‌شود،

$$p_x^f = m(-V + u\cos\alpha) - MV$$

$$E^f = \frac{1}{2}m[(-V + u\cos\alpha)^2 + (-u\sin\alpha)^2] + \frac{1}{2}MV^2$$

مسئله– ۳۰:

$$\text{پایستگی تکانه}:\ 0 = mu\cos\alpha - (m+M)V \Rightarrow u = \frac{(m+M)V}{m\cos\alpha}$$

و

$$\text{پایستگی انرژی}:\ mgh = \frac{1}{2}mu^2 - muV\cos\alpha + \frac{1}{2}(m+M)V^2$$

با قرار دادن سرعت u در داخل رابطه پایستگی انرژی داریم،

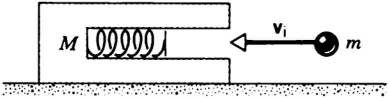
$$mgh = \left(\frac{m+M}{m\cos^2\alpha}\right)\frac{1}{2}(m+M)V^2 - \frac{1}{2}(m+M)V^2$$

$$mgh = \left(\frac{m+M}{m\cos^2\alpha} - 1\right)\frac{1}{2}(m+M)V^2$$

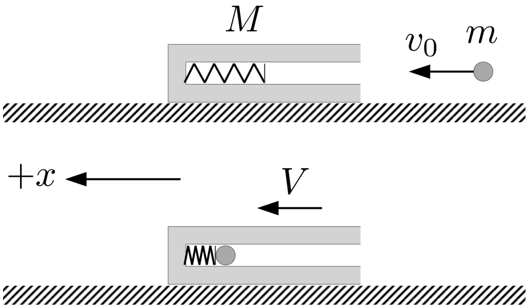
بنابراین

$$V^2 = \frac{2m^2gh\cos^2\alpha}{(M+m)(M+m\sin^2\alpha)} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2m^2gh\cos^2\alpha}{(M+m)(M+m\sin^2\alpha)}}$$

مسئله–۳۱: گلوله‌ای به جرم m با سرعت اولیه v_i به داخل لوله‌ی یک تفنگ فنری به جرم M که در آغاز روی سطح بدون اصطکاکی ساکن است شلیک می‌شود. گلوله در نقطه‌ی حداکثر فشردگی فنر به داخل لوله گیر می‌کند. هیچ انرژی صرف مقابله با اصطکاک نمی‌شود. الف) سرعت تفنگ فنری پس از آنکه گلوله در داخل لوله متوقف شده چقدر است؟ ب) چه کسری از انرژی اولیه گلوله در فنر ذخیره می‌شود؟



مسئله-۳۱:
وقتی گلوله در داخل تتفنگ فنر متوقف می‌شود، گلوله و تفنگ همزمان با سرعت V حرکت می‌کنند.



برای این منظور می‌توان پایستگی تکانه قبل و بعد از حرکت را با یکدیگر برابر قرار داد،

$$mv_0 = (m+M)V \Rightarrow V = \frac{m}{m+M}v_0$$

مسئله-۳۱:
برای بررسی انرژی ذخیره شده در فنر پایستگی انرژی را بصورت زیر می‌نویسیم،

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

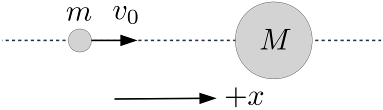
با قرار دادن V در داخل پایستگی انرژی داریم،

$$\left(1 - \frac{m}{m+M}\right)\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx^2$$
$$\left(\frac{M}{m+M}\right)\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

بنابراین

$$\frac{kx^2/2}{mv_0^2/2} = \frac{M}{m+M}$$

مسئله–۳۲: الکترونی به جرم m، سربه‌سر با اتم ساکن به جرم M برخورد می‌کند. در نتیجه این برخورد مقداری معینی انرژی E بصورت انرژی داخلی در اتم ذخیره می‌شود. حداقل سرعت اولیه‌ای که الکترون باید داشته باشد، v_0، چقدر است؟



از پایستگی تکانه و انرژی داریم،

$$p_x^i = p_x^f \Rightarrow mv_0 = mv + MV \Rightarrow V = \frac{m}{M}(v_0 - v)$$

و

$$E^i = E^f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + E$$

با جایگزینی V از رابطه پایستگی تکانه در داخل رابطه پایستگی انرژی داریم،

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}(v_0 - v)^2 + E$$

دستگاه ذرات

مسئله-۳۲:

و

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{m}{M}\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{m}{M}\frac{1}{2}mv^2 - 2\frac{m}{M}\frac{v}{v_0}\frac{1}{2}mv_0^2 + E$$

و

$$v_0^2 = v^2 + \frac{m}{M}v_0^2 + \frac{m}{M}v^2 - 2\left(\frac{m}{M}v_0\right)v + \frac{2E}{m}$$

حالا می‌تونیم معادله‌ی بالا را بر حسب توانهای v مرتب کنیم،

$$\left(1 + \frac{m}{M}\right)v^2 - 2\left(\frac{m}{M}v_0\right)v + \frac{2E}{m} + \left(\frac{m}{M} - 1\right)v_0^2 = 0$$

معادله‌ی درجه دو بالا وقتی جواب حقیقی دارد که $\Delta \geq 0$ باشد. پس

$$\Delta = \frac{4m^2}{M^2}v_0^2 - 4\left(1 + \frac{m}{M}\right)\left[\frac{2E}{m} + \left(\frac{m}{M} - 1\right)v_0^2\right] \geq 0$$

مسئله-۳۲:

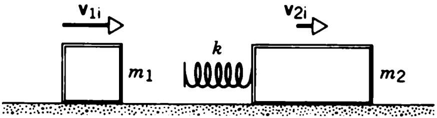
و

$$4v_0^2 - \frac{8E}{m}\left(\frac{m}{M}+1\right) \geq 0 \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{\frac{2E(m+M)}{mM}}$$

رابطه بالا نشان می دهد که حداقل سرعت اولیه الکترون برابر است با

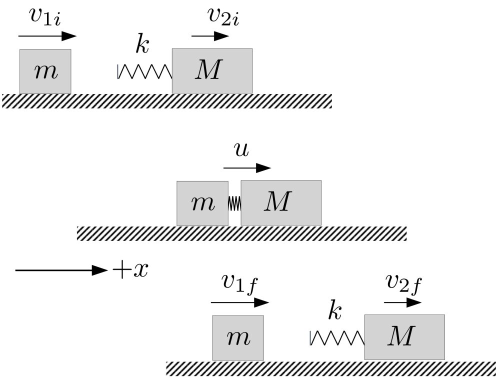
$$v_0\big|_{\min} = \sqrt{\frac{2E(m+M)}{mM}}$$

مسئله–۳۳: قالبی به جرم m_1 روی میز بدون اصطکاکی با سرعت v_{1i} حرکت می‌کند. دقیقا در جلوی این قالب، قالب دیگری به جرم m_2 در همان جهت با سرعت v_{2i} در حال حرکت است($m_1 < m_2$ و $v_{1i} > v_{2i}$). فنر بدون جرم با ثابت نیروی k به قسمت عقب قالب m_2 وصل شده است. الف) وقتی دو قالب با هم برخورد می‌کنند، حداکثر فشردگی فنر چقدر است؟ ب) سرعت هر یک از قالب‌ها، وقتی جرم m_1 از فنر جدا می‌شود را بدست آورید.



دستگاه ذرات

مسئله-۳۳:
حداکثر فشردگی فنر مربوط بحالت لحظه‌ای می‌باشد که دو جرم همزمان دارای سرعت u هستند.



در این حالت پایستگی تکانه و انرژی به قرار زیر است،

$$mv_{1i} + Mv_{2i} = (m+M)u \Rightarrow u = \frac{mv_{1i} + Mv_{2i}}{m+M}$$

مسئله–۳۳:

و

$$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 + \frac{1}{2}Mv_{2i}^2 = \frac{1}{2}(m+M)u^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

اگر u را از رابطه پایستگی تکانه در داخل رابطه پایستگی انرژی قرار دهیم، داریم

$$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 + \frac{1}{2}Mv_{2i}^2 = \frac{1}{2}\frac{(mv_{1i}+Mv_{2i})^2}{M+m} + \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

و

$$\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_{1i}^2 + \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}v_{2i}^2 - \frac{Mm}{M+m}v_{1i}v_{2i} = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

و

$$\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(v_{1i}-v_{2i})^2 = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

بنابراین

$$\Delta x = \sqrt{\frac{Mm}{k(M+m)}}(v_{1i}-v_{2i})$$

مسئله-۳۳:
بعد از جدا شدن جرمها از یکدیگر و باز شدن فنر می‌توان پایستگی تکانه و انرژی حالت نهایی را با حالت اولیه بصورت زیر نوشت،

$$mv_{1i} + Mv_{2i} = mv_{1f} + Mv_{2f}$$

و

$$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 + \frac{1}{2}Mv_{2i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}Mv_{2f}^2$$

دو عبارت بالا را بصورت زیر مرتب می‌کنیم

$$\begin{cases} m(v_{1i} - v_{1f}) = M(v_{2f} - v_{2i}) \\ m(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = M(v_{2f} - v_{2i})(v_{2i} + v_{2f}) \end{cases}$$

از جایگزینی عبارتهای بالا داریم،

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f} \Rightarrow v_{1f} - v_{2f} = v_{2i} - v_{1i}$$

مسئله–۳۳:
حالا عبارت بدست آماده بالا و رابطه پایستگی تکانه را در یک دستگاه حل می‌کنیم

$$\begin{cases} mv_{1f} + Mv_{2f} = mv_{1i} + Mv_{2i} \\ v_{1f} - v_{2f} = v_{2i} - v_{1i} \end{cases}$$

در نهایت داریم

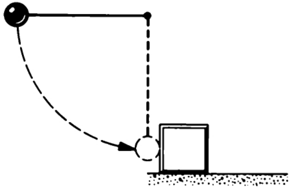
$$v_{2f} = \frac{2m}{M+m}v_{1i} + \frac{M-m}{M+m}v_{2i}$$

و

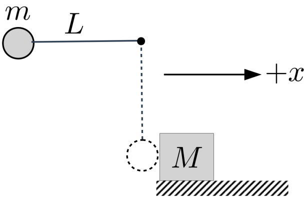
$$v_{1f} = \frac{m-M}{M+m}v_{1i} + \frac{2M}{M+m}v_{2i}$$

دستگاه ذرات

مسئله–۳۴: گلوله‌ای فولادی به جرم m از یک سر ریسمانی به طول L آویزان شده است. ریسمان را از حالت کشیده شده افقی رها می‌کنیم. در پایین‌ترین قسمت مسیر، گلوله به یک قالب فولادی به جرم M که روی سطح بدون اصطکاک ساکن است برخورد می‌کند. برخورد کشسان است. کمیتهای زیر را تعیین کنید، الف) سرعت گلوله درست پس از برخورد، ب) سرعت قالب فولادی درست پس از برخورد، ج) حالا فرض کنید که در ضمن برخورد، نیمی از انرژی جنبشی به انرژی داخلی و انرژی صوتی تبدیل شود، در این صورت سرعتهای نهایی را بدست آورید.



مسئله-۳۴:
آونگ در پایین‌ترین نقطه مسیر سرعتی افقی دارد و یک برخورد کشسان با جرم M در امتداد افق انجام می‌دهد.



سرعت جرم m در پایین ترین نقطه مسیر از پایستگی انرژی برای آونگ وقتی در امتداد افق قرار دارد و هنگامی که به پایین‌ترین نقطه از مسیر خود می‌رسد. یعنی

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

دستگاه ذرات

مسئله-۳۴:
حالا پایستگی تکانه و انرژی را وقتی جرم m به جرم M برخورد می‌کند را بررسی می‌کنیم. این پایستگی را برای شرایط که ذرات برای لحظه‌ای مشخص در امتداد افق قرار دارند می‌نویسیم. یعنی

$$mv_0 = mv + MV$$

و

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

مانند مسئله قبل می‌توان تکانه و انرژی را بصورت زیر نوشت

$$\begin{cases} m(v_0 - v) = MV \\ m(v_0 - v)(v_0 + v) = MV^2 \end{cases} \Rightarrow v_0 + v = V$$

حالا با استفاده از رابطه اخیر و رابطه تکانه خطی داریم

$$\begin{cases} mv + MV = mv_0 \\ -v + V = v_0 \end{cases}$$

دستگاه ذرات

مسئله–۳۴:

بنابراین

$$v = \frac{M-m}{M+m}v_0 = \frac{M-m}{M+m}\sqrt{2gh}$$

و

$$V = \frac{2m}{M+m}v_0 = \frac{2m}{M+m}\sqrt{2gh}$$

برای قسمت بعد سوال پایستگی تکانه مانند قبل است و پایستگی انرژی بصورت زیر تغییر می‌کند

$$mv_0 = mv + MV$$

و

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right)$$

که جمله آخر سمت راست سهم انرژی داخلی است که طبق فرض مسئله برابر با نصف انرژی جنبشی اولیه ذره m است.

دستگاه ذرات

مسئله-۳۴:

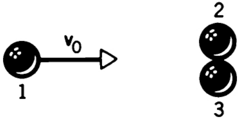
در ادامه داریم

$$\begin{cases} m(v_0 - v) = MV \\ mv_0^2 - 2mv^2 = 2MV^2 \end{cases}$$

اگر از رابطه بالا V را در رابطه پایین قرار دهیم، معادله پایین تبدیل به یک معادله مرتبه دو بر حسب v می‌شود. ادامه حل مسئله را با حل معادله درجه دو پیش ببرید.

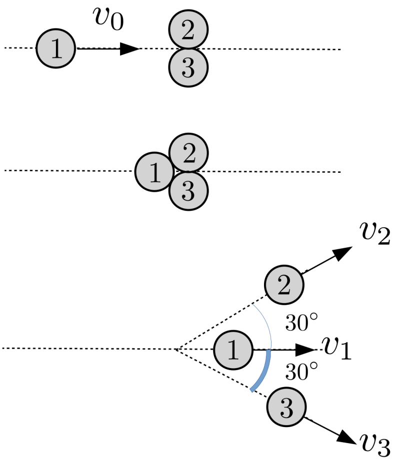
دستگاه ذرات

مسئله–۳۵: توپی که با سرعت اولیه v_0 در حرکت است با دو توپ مشابه و مماس به یکدیگر که خط واصل مراکز آنها عمود بر سرعت اولیه خودش است برخورد کشسان می‌کند. توپ اول مستقیما به طرف نقطه‌ی تماس دو توپ دیگر نشانه‌روی شده است. همه توپها بدون اصطکاک‌اند. سرعت هر سه توپ را پس از برخورد معین کنید.



دستگاه ذرات

مسئله–۳۵:



وقتی توپ ۱ با سرعت v_0 به توپ‌های ۲ و ۳ می‌رسد، برای لحظه‌ای مرکز توپ‌ها تشکیل یک مثلث متساوی الاضلاع می‌دهد. زاویه پراکندگی دو توپ ۲ و ۳ بعد از برخورد در امتداد ضلع‌های مثلث متساوی الاضلاع با ذره ۱ است.

مسئله–۳۵:
پایستگی تکانه در امتداد محور x و محور y و همچنین پایستگی انرژی بصورت زیر داده می‌شود،

$$p_x^i = p_x^f \Rightarrow mv_0 = mv_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}mv_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}mv_3$$

$$p_y^i = p_y^f \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}mv_2 - \frac{1}{2}mv_3 \Rightarrow v_2 = v_3$$

و

$$E^i = E^f \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv_3^2$$

با توجه به اینکه $v_2 = v_3$ بنابراین

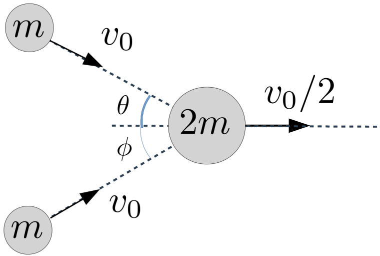
$$\begin{cases} v_0 = v_1 + \sqrt{3}v_2 \\ v_0^2 = v_1^2 + 2v_2^2 \end{cases}$$

مسئله-۳۵:

$$\begin{cases} v_0 - v_1 = \sqrt{3} v_2 \\ (v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = 2 v_2^2 \end{cases} \quad \Rightarrow v_0 + v_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} v_2$$

$$\begin{cases} v_1 + \sqrt{3} v_2 = v_0 \\ -v_1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} v_2 = v_0 \end{cases} \quad \Rightarrow v_2 = \frac{2\sqrt{3}}{5} v_0, v_1 = -\frac{1}{5} v_0$$

مسئله–۳۶: دو جسم با جرمهای یکسان که سرعتهای اولیه‌شان هم یکی است در یک برخورد کاملا ناکشسان به هم می‌چسبند و با سرعت مشترکی که برابر با نصف سرعت اولیه هر یک از آنها است حرکت می‌کنند. زاویه میان سرعتهای اولیه دو جسم چقدر بوده است؟



بدلیل اینکه برخوردها کاملا نامشسان است، بقاء انرژی نداریم.

دستگاه ذرات

مسئله-۳۶:
در ادامه پایستگی تکانه خطی را در امتداد ذره پراکنده و عمود بر آن بررسی می‌کنیم،

$$p_x^i = p_x^f \Rightarrow mv_0 \cos\theta + mv_0 \cos\phi = 2m\frac{v_0}{2}$$

و

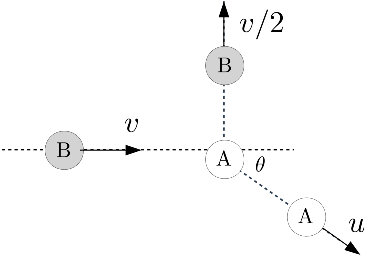
$$p_y^i = p_y^f \Rightarrow mv_0 \sin\theta - mv_0 \sin\phi = 0 \Rightarrow \theta = \phi$$

برای $\theta = \phi$، رابطه اول بصورت زیر داده می‌شود،

$$2mv_0 \cos\theta = 2m\frac{v_0}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

بنابراین $\theta + \phi = 120^\circ$.

مسئله–۳۷: دو گوی A و B با جرمهای متفاوت و مجهول با هم برخورد می‌کنند. گوی A در آغاز ساکن است و گوی B با سرعت v حرکت می‌کند. پس از برخورد گوی B دارای سرعت $v/2$ است و در راستای عمود بر سرعت اولیه‌اش حرکت می‌کند. تعیین کنید که گوی A پس از برخورد در چه جهتی حرکت می‌کند.



پایستگی تکانه خطی را در امتداد ذره فرودی و عمود بر آن بررسی می‌کنیم،

$$p_x^i = p_x^f \Rightarrow m_{\mathrm{B}} v = m_{\mathrm{A}} u \cos\theta$$

$$p_y^i = p_y^f \Rightarrow 0 = m_{\mathrm{B}} \frac{v}{2} - m_{\mathrm{A}} u \sin\theta$$

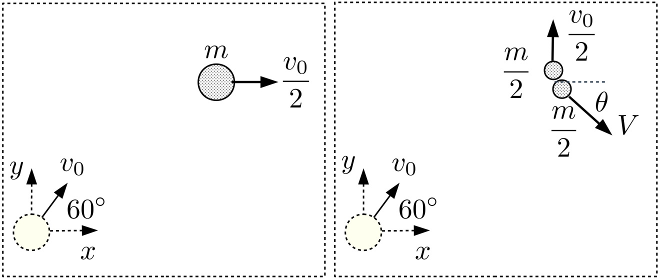
مسئله-۳۷:
عبارت بالا را می‌توان در یک دستگاه بصورت زیر نوشت،

$$\begin{cases} m_{\mathrm{B}} v = m_{\mathrm{A}} u \cos\theta \\ m_{\mathrm{B}} \frac{v}{2} = m_{\mathrm{A}} u \sin\theta \end{cases}$$

اگر دو طرف چپ و راست عبارتها را برهم تقسیم کنیم، داریم،

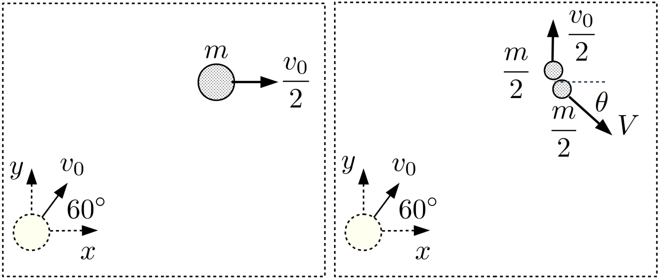
$$\tan\theta = \frac{1}{2}.$$

مسئله–۳۸: یک گلوله‌ی توپ نسبت به افق با زاویه‌ی 60° و سرعت اولیه‌ی v_0 شلیک می‌شود. این گلوله در بالاترین بخش مسیرش منفجر و به دو جزء مساوی تقسیم می‌شود. یکی از آنها با سرعت $v_0/2$ نسبت به زمین، مستقیما بطرف بالا حرکت می‌کند. جهت و سرعت حرکت جزء دیگر گلوله‌ی توپ را بلافاصله بعد از انفجار بدست آورید.



نکته–۱: انفجار یک نیروی داخلی می‌باشد. نکته–۲: نیروی خارجی گرانش در امتداد قائم باعث می‌شود که پایستگی تکانه در بالاترین نقطه‌ی مسیر فقط در امتداد افق برقرار باشد. اما از آنجایی که در صورت سوال حرکت بلافاصله بعد از انفجار مورد نظر است می‌توان پایستگی تکانه را در امتداد قائم بکار برد (چون Δt خیلی کوچک است).

مسئله–۳۸:



سرعت ذره در بالاترین نقطه مسیر فقط مولفه‌ی افقی و برابر با $v_0 \cos 60° = v_0/2$ دارد.

$$p_x^i = p_x^f \,:\; m\frac{v_0}{2} = \frac{m}{2} V\cos\theta \Rightarrow V\cos\theta = v_0$$

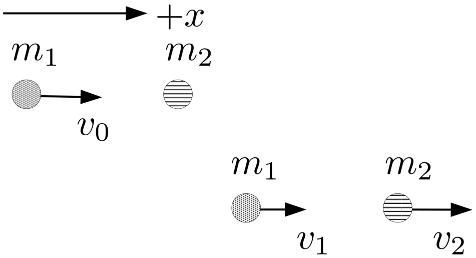
$$p_y^i = p_y^f \,:\; 0 = \frac{m}{2}\frac{v_0}{2} - \frac{m}{2} V\sin\theta \Rightarrow V\sin\theta = \frac{v_0}{2}$$

مسئله–۳۸:

$$\begin{cases} V\cos\theta = v_0 \\ V\sin\theta = \frac{v_0}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V = \frac{\sqrt{5}}{2} v_0 \\ \tan\theta = 2 \end{cases}$$

مسئله–۳۹: ذره‌ای متحرک به جرم m_1 با ذره‌ی هدفی به جرم m_2 که ابتدا در حال سکون است بطور کشسان برخورد می کند. اگر برخورد سربه‌سر باشد، نشان دهید که ذره‌ی فرودی کسر $4\mu/M$ را از انرژی جنبشی خود را از دست می‌دهد. $M = m_1 + m_2$ و μ جرم کاهش یافته است.



پایستگی تکانه خطی

$$p_x^i = p_x^f$$

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \Rightarrow m_1(v_0 - v_1) = m_2 v_2$$

دستگاه ذرات

مسئله-۳۹:

پایستگی انرژی

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$
$$m_1(v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = m_2 v_2^2$$

$$\begin{cases} m_1(v_0 - v_1) = m_2 v_2 \\ m_1(v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = m_2 v_2^2 \end{cases} \quad \Rightarrow v_0 + v_1 = v_2$$

حالا رابطه پایستگی تکانه را با رابطه بالا در یک دستگاه حل می‌کنیم

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0 \\ -v_1 + v_2 = v_0 \end{cases}$$

سرعتهای v_1 و v_2 بصورت زیر داده می‌شود،

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

مسئله-۳۹:
اختلاف انرژی ذره فرودی قبل و بعد از برخورد با استفاده از پایستگی انرژی برابر است با

$$\Delta T = \frac{1}{2}m_1 v_0^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

که اگر $v_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_0$ بنابراین

$$\Delta T = \frac{1}{2}m_2 \frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}v_0^2 = 4\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\frac{1}{2}m_1 v_0^2$$

و

$$\frac{\Delta T}{\frac{1}{2}m_1 v_0^2} = 4\frac{\mu}{M}$$