فیزیک ۱

دوران

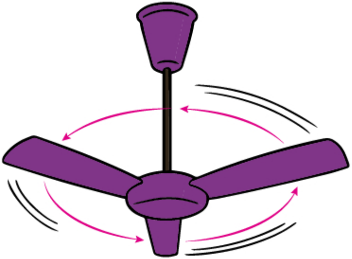
محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

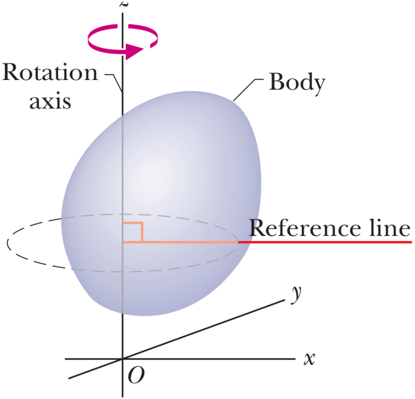
بهمن ۱۴۰۰

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

- **جسم صلب**، جسمی است که تمامی اجزای متصل به آن می‌توانند با هم حرکت دورانی داشته باشد بدون اینکه تغییر شکلی در آنها ایجاد شود.
- **محور ثابت**، محوری است که در طی دوران جسم صلب حرکت نمی کند.



دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت



متغیرهای دوران

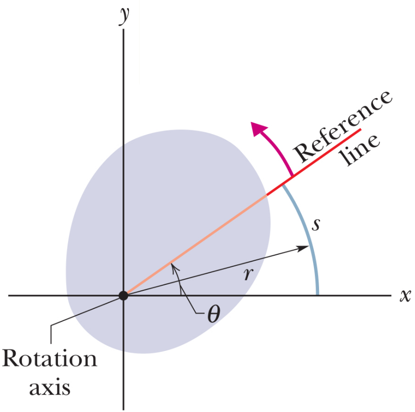
◄ شکل جسم صلبی با شکل دلخواه را نشان می‌دهد که حول محور ثابتی می‌چرخد که آنرا محور دوران می‌نامند.

◄ در دوران خالص هر نقطه از جسم صلب بر روی دایره‌ای حرکت می کند که مرکز آن بر روی محور دوران قرار دارد.

◄ به حرکت دوران خالص، **حرکت زاویه‌ای** می‌گویند.

◄ در مقایسه با **حرکت انتقالی** که با متغیرهای مکان، جابجایی، سرعت و شتاب سروکار داشتیم، در **حرکت زاویه‌ای** با مکان زاویه‌ای، جابجایی زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای بعنوان متغیر کار خواهیم کرد.

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت



مکان زاویه‌ای

◄ شکل خط مرجعی را نشان می‌دهد که به جسم متصل است و بر محور دوارن عمود است و با جسم حرکت می‌کند.

◄ زاویه‌ای که خط مرجع نسبت به جایگاه اولیه خود دارد را مکان زاویه‌ای θ می‌نامند و جایگاه اولیه را مکان زاویه‌ای صفر θ_0 می گویند.

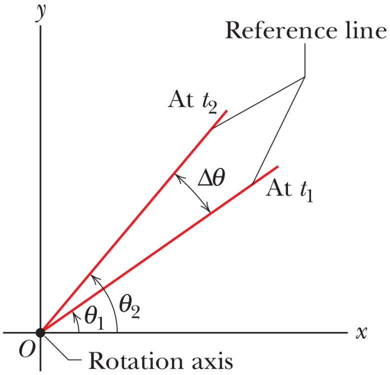
◄ واحد مکان زاویه‌ای رادیان rad یا دور rev است،

$$1\ \text{rev} = 2\pi\ \text{rad}$$

◄ کمان یا قوس طی شده‌ی s توسط خط مرجع برای یک شعاع دلخواه r برابر است با

$$s = r\theta$$

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت



جابجایی زاویه‌ای یا تغییر زاویه‌ای

برای یک حرکت انتقالی در امتداد محور x با معلوم بودن $x(t)$، تابع مکان بر حسب زمان، می توان همه چیز را درباره‌ی حرکت فهمید.

بطور مشابه

برای یک حرکت زاویه‌ای حول یک محور ثابت، با معلوم بودن $\theta(t)$، مکان زاویه‌ای خط مرجع جسم صلب بر حسب زمان، می‌توان همه چیز را درباره‌ی دوران جسم صلب فهمید.

◄ اگر مکان زاویه‌ای خط مرجع متصل به جسم چرخان در لحظه‌ی t_1 در θ_1 و در لحظه‌ی t_2 در θ_2 باشد، جابجایی زاویه‌ای جسم $\Delta\theta$ در بازه‌ی Δt برابر است با

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

◄ قرارداد: جابجایی زاویه‌ای در جهت پادساعتگرد مثبت و در جهت ساعتگرد منفی است

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

سرعت زاویه‌ای متوسط

- اگر جسم چرخان در لحظه‌ی t_1 در θ_1 و در لحظه‌ی t_2 در θ_2 باشد، سرعت زاویه‌ای متوسط جسم $\omega_{\text{متوسط}}$ در بازه‌ی Δt برابر است با

$$\omega_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

سرعت زاویه‌ای یا سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای

- سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای برابر است با حد سرعت زاویه‌ای متوسط وقتی Δt بطرف صفر میل می‌کند،

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

- سرعت زاویه‌ای متوسط و سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای نه تنها برای کل جسم صلب برقرار است بلکه برای هز ذره از جسم صلب نیز برقرار است.
- واحد سرعت زاویه‌ای رادیان بر ثانیه (rad/s) یا دور بر ثانیه (rev/s) است.

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

شتاب زاویه‌ای متوسط

◄ اگر جسم چرخان در لحظه‌ی t_1 دارای سرعت زاویه‌ای ω_1 و در لحظه‌ی t_2 دارای ω_2 باشد، شتاب زاویه‌ای متوسط جسم متوسطα در بازه‌ی Δt برابر است با

$$\alpha_{\text{متوسط}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

شتاب زاویه‌ای یا شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای

◄ شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای برابر است با حد شتاب زاویه‌ای متوسط وقتی Δt بطرف صفر میل می‌کند

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

◄ شتاب زاویه‌ای متوسط و شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای نه تنها برای کل جسم صلب برقرار است بلکه برای هر ذره از جسم صلب نیز برقرار است.

◄ واحد شتاب زاویه‌ای رادیان بر مجذور ثانیه $(\mathrm{rad/s^2})$ یا دور بر مجذور ثانیه $(\mathrm{rev/s^2})$ است.

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

مسئله–۱: قرصی حول محور مرکزی، مانند چرخ وفلک افقی، می‌چرخد. مکان زاویه‌ای خط مرجع قرص بصورت زیر است،

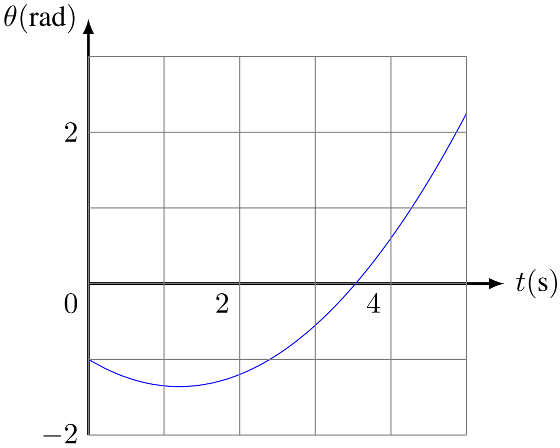
$$\theta(t) = -1 - 0.6t + 0.25t^2$$

که t بر حسب ثانیه و θ برحسب رادیان است. الف) مکان زاویه‌ای قرص را بر حسب زمان بازه‌ی $0 \leq t \leq 5$ رسم کنید و زاویه‌ی مرجع را در زمانهای $3\ \mathrm{s}$ و $5\ \mathrm{s}$ بدست آورید. ب) مقدار θ کمینه را بدست آورید. ج) تابع سرعت زاویه ی قرص را بر حسب زمان بدست آورده و آنرا رسم کنید. شکل قرص را رسم کرده و جهت چرخش و علامت ω را در t_{min} و $t = 1\ \mathrm{s}$ و $2\ \mathrm{s}$ بدست آورید.

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

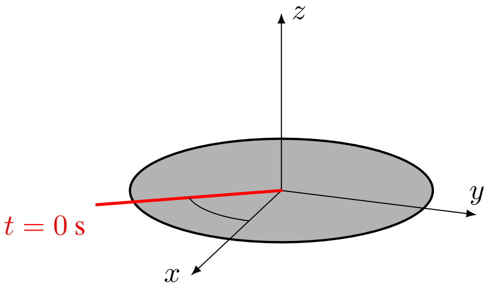
مسئله–۱:

$$\theta(t) = -1 - 0.6t + 0.25t^2$$



دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

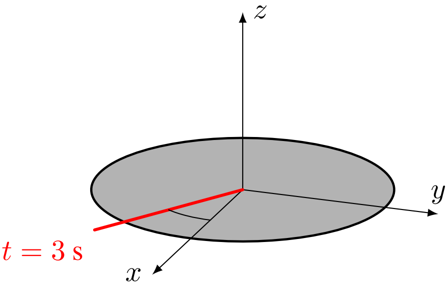
مسئله–۱:

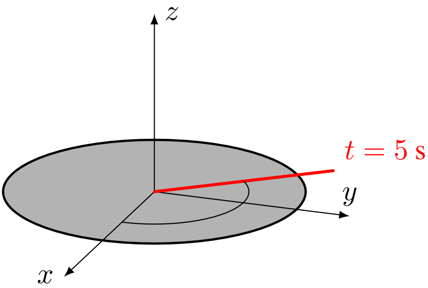


$$\theta(t=0) = -1\,\mathrm{rad} = -57.3^\circ$$

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

مسئله–۱:





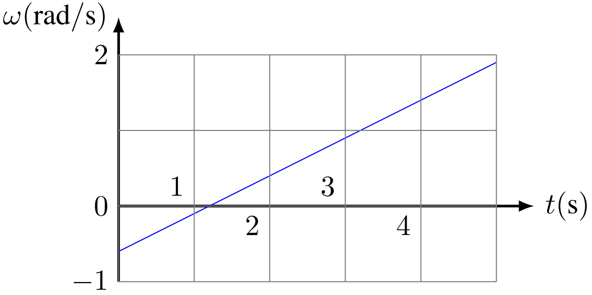
$$\theta(t=3) = -0.55\,\text{rad} = -31.5^\circ$$

$$\theta(t=5) = 2.25\,\text{rad} = 129^\circ$$

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

مسئله-۱:

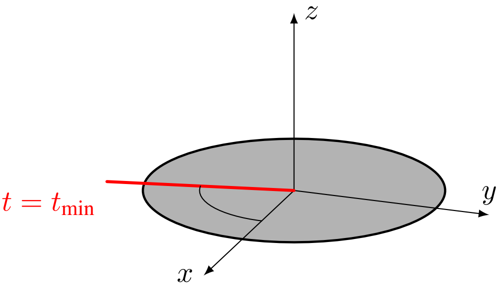
$$\theta(t) = -1 - 0.6t + 0.25t^2$$
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \theta(t) = -0.6 + 0.5t$$



نقطه مینیمم در تابع $\theta(t)$: $\omega = 0 \Rightarrow t_{\min} = 1.2\ \mathrm{s}$, $\omega(t=0) = -0.6\ \mathrm{rad/s}$,

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

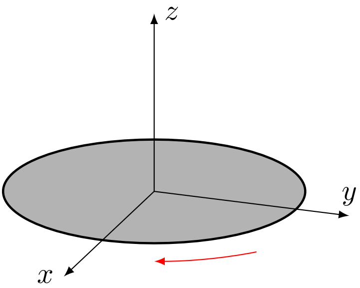
مسئله–۱:

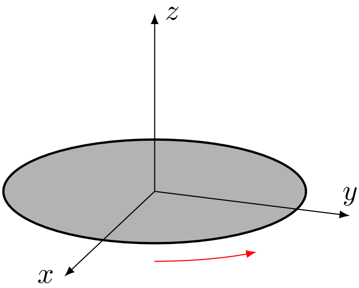


$$\omega(t = t_{\min}) = 0, \quad \theta(t = t_{\min}) - 1.36\,\mathrm{rad} = -78^\circ$$

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

مسئله–۱:





$$\omega(t=1) = -0.1\,\mathrm{rad/s} \qquad \omega(t=2) = 0.4\,\mathrm{rad/s}$$

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

مسئله-۲: فرفره کودکی با شتاب زاویه‌ای

$$\alpha = 5t^3 - 4t$$

می‌چرخد که t بر حسب ثانیه و α بر حسب $\mathrm{rad/s^2}$ است. در لحظه‌ی $t = 0$ سرعت زاویه‌ای فرفره $5\ \mathrm{rad/s}$ و خط مرجع آن در مکان زاویه‌ای $\theta = 2\ \mathrm{rad}$ است. الف) عبارتی برای سرعت زاویه‌ای فرفره $\omega(t)$ بدست آورید. ب) عبارتی برای سرعت زاویه‌ای فرفره $\theta(t)$ بدست آورید.

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha(t)$$

$$\int_5^\omega \mathrm{d}\omega = \int_0^t (5t^3 - 4t)\mathrm{d}t \Rightarrow \omega - 5 = \frac{5}{4}t^4 - 2t^2$$

$$\omega(t) = 5 + \frac{5}{4}t^4 - 2t^2$$

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

مسئله–۲:

$$\alpha = 5t^3 - 4t$$

$$\omega(t) = 5 + \frac{5}{4}t^5 - 2t^2$$

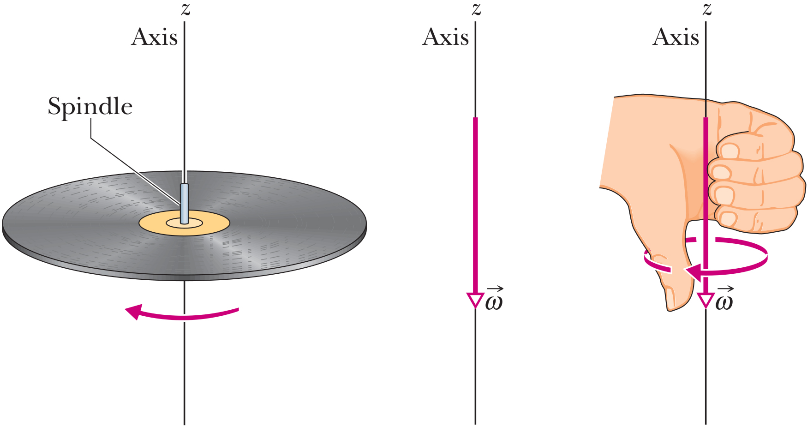
$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega(t)$$

$$\int_2^\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^t (5 + \frac{5}{4}t^4 - 2t^2)\mathrm{d}t \Rightarrow \theta - 2 = 5t + \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3$$

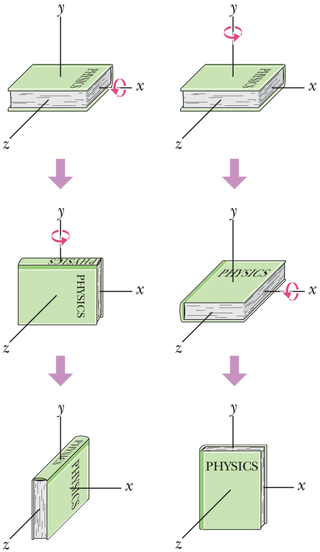
$$\theta(t) = 2 + 5t + \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3$$

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت

◄ **سرعت زاویه‌ای یک بردار است** که می‌توان جهت آنرا با استفاده از قاعده‌ی دست راست بدست آورد. برای دوران حول محور ثابت بردار سرعت زاویه در امتداد محور دوران است.



دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت



◄ جابجایی زاویه‌ای بر خلاف سرعت زاویه‌ای یک بردار نیست و فقط وقتی جابجایی زاویه‌ای یک بردار است که چرخش‌ها بسیار کوچک باشد.

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت–سینماتیک دوران

◄ دوران با سرعت زاویه‌ای ثابت

حرکت انتقالی	حرکت دورانی
$x(t) = x_0 + vt$	$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$

◄ دوران با شتاب زاویه‌ای ثابت

حرکت انتقالی	حرکت دورانی
$v(t) = v_0 + at$	$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$
$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$
$x(t) = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)t$	$\theta(t) = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)t$

مسئله–۳: یک سنگ سمباده با شتاب زاویه‌ای ثابت $\alpha = 0.25\ \text{rad/s}^2$ می‌چرخد. در لحظه‌ی $t = 0$ سرعت زاویه‌ای آن $\omega_0 = -4.6\ \text{rad/s}$ و خط مرجع در مکان زاویه‌ای $\theta_0 = 0$ بصورت افقی است. الف) در چه لحظه‌ای پس از $t = 0$ خط مرجع در مکان اولیه $\theta = 5\ \text{rev}$ است؟ ب) در چه لحظه‌ای چرخ سمباده بطور لحظه‌ای می‌ایستد؟

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

معادله حرکت با شتاب ثابت : $\theta(t) = -4.6t + 0.175t^2$

$$\theta = 5\ \text{rev} = 5\ \text{rev} \times \frac{2\pi}{1\ \text{rev}} = 10\pi\ \text{rad}$$

$$10\pi = -4.6t + 0.175t^2 \Rightarrow 0.175t^2 - 4.6t - 10\pi = 0$$

$t = -5.6$ غیر قابل قبول $\quad t = 31.9\ \text{s}$

دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت–سینماتیک دوران

مسئله–۳:

$$\theta(t) = -4.6t + 0.175t^2 \quad : \text{معادله حرکت با شتاب ثابت}$$

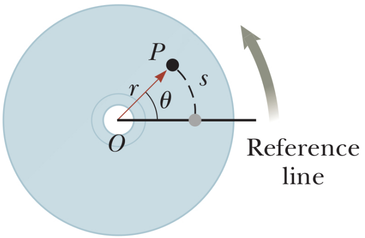
$$\omega(t) = -4.6 + 0.25t$$

$$\omega = 0 \quad : \text{وقتی ذره بطور لحظه‌ای می‌ایستد}$$

$$-4.6 + 0.35t = 0 \Rightarrow t = 13.1 \text{ s}$$

رابطه بین متغیرهای خطی و زاویه‌ای

هر نقطه از جسم صلب بر روی دایره‌ای می‌چرخد که شعاع آن فاصله‌ی عمودی نقطه‌ی مربوطه از محور دوران است.



◄ **مکان** : اگر جسم صلب به اندازه‌ی θ بچرخد، هر نقطه از جسم صلب (مانند p) که با فاصله‌ی r از محور دوران فاصله دارد، کمانی به مسافت s را بر روی دایره به شعاع r می‌پیماید که از رابطه‌ی

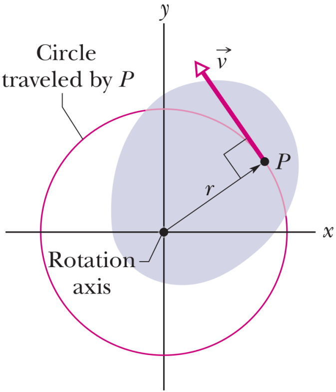
$$s = r\theta$$

بدست می‌آید. در اینجا θ بر حسب رادیان است و برای $\theta = 2\pi$، کمان طی شده s برابر است با محیط دایره

$$\text{محیط دایره} = s = r(2\pi) = 2\pi r$$

رابطه بین متغیرهای خطی و زاویه‌ای

هر نقطه از جسم صلب بر روی دایره‌ای می‌چرخد که شعاع آن فاصله‌ی عمودی نقطه‌ی مربوطه از محور دوران است.



◀ **اندازه‌ی سرعت** : با مشتق گیری از رابطه‌ی $s = r\theta$ نسبت به زمان برای r ثابت داریم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

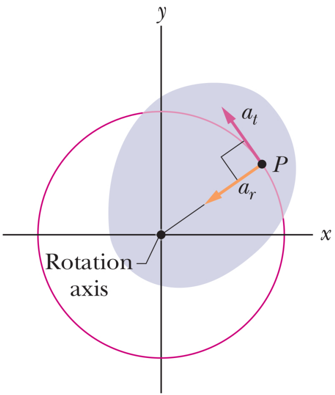
$v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ اندازه‌ی **سرعت نقطه‌ی** P می‌باشد که مماس بر مسیر دایره است.
$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ اندازه‌ی **سرعت زاویه‌ای جسم صلب** می‌باشد. بنابراین

در اینجا ω رادیان بر ثانیه است.

$$v = r\omega$$

رابطه بین متغیرهای خطی و زاویه‌ای

هر نقطه از جسم صلب بر روی دایره‌ای می‌چرخد که شعاع آن فاصله‌ی عمودی نقطه‌ی مربوطه از محور دوران است.



◄ **شتاب** : با مشتق گیری از رابطه‌ی $v = r\omega$ نسبت به زمان برای r ثابت داریم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\omega)$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

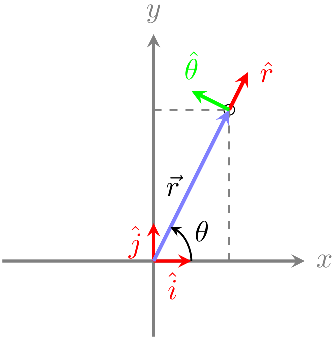
$a_{\text{مماسی}} = a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ اندازه‌ی **شتاب نقطه‌ی** P می‌باشد که مماس بر مسیر دایره است.
$\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ اندازه‌ی **شتاب زاویه‌ای جسم صلب** می‌باشد. بنابراین

$$a_t = r\alpha$$

در اینجا α رادیان بر مجذور ثانیه است.

رابطه بین متغیرهای خطی و زاویه‌ای

هر نقطه از جسم صلب بر روی دایره‌ای می‌چرخد که شعاع آن فاصله‌ی عمودی نقطه‌ی مربوطه از محور دوران است.



$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \\ \hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \end{cases}$$

◄ **یاد آوری** : بردار مکان برای حرکت بر روی یک دایره به شعاع ثابت r در مختصات قطبی

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

بردار سرعت برای حرکت بر روی یک دایره به شعاع ثابت r در مختصات قطبی

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{\theta} = r\omega\hat{\theta}$$

بردار شتاب برای حرکت بر روی یک دایره به شعاع ثابت r در مختصات قطبی

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} = a_r\hat{r} + a_t\hat{\theta}$$

رابطه بین متغیرهای خطی و زاویه‌ای

هر نقطه از جسم صلب بر روی دایره‌ای می‌چرخد که شعاع آن فاصله‌ی عمودی نقطه‌ی مربوطه از محور دوران است.

◄ یاد آوری :

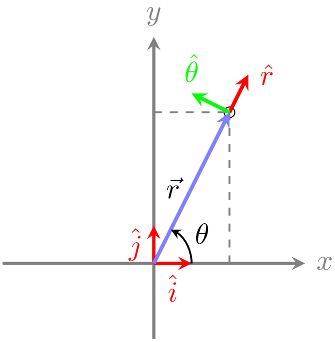
بردار مکان : $\vec{r} = r\hat{r}$

بردار سرعت : $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$

بردار شتاب : $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta}$
$= -a_r\hat{r} + a_t\hat{\theta}$

بزرگی شتاب شعاعی : $a_r = r\dot{\theta}^2$
$= r\omega^2 = \dfrac{v^2}{r}$

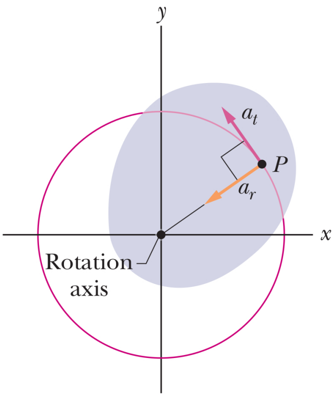
بزرگی شتاب مماسی : $a_t = r\ddot{\theta}$
$= r\alpha$



$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta \\ \hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta \end{cases}$$

رابطه بین متغیرهای خطی و زاویه‌ای

هر نقطه از جسم صلب بر روی دایره‌ای می‌چرخد که شعاع آن فاصله‌ی عمودی نقطه‌ی مربوطه از محور دوران است.



◄ **شتاب** : بدین ترتیب نقطه‌ی P روی جسم صلب علاوه بر شتاب مماسی

$$a_t = r\alpha, \quad \text{اگر } \alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{dt} \neq 0$$

دارای شتاب شعاعی

$$a_r = r\omega^2, \quad \text{اگر } \omega \neq 0$$

بطرف مرکز دوران است.

اندازه شتاب : $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$

زاویه‌ی بردار شتاب نسبت به $\hat{r}$: $\tan\phi = \dfrac{a_t}{a_r}$

رابطه بین متغیرهای خطی و زاویه‌ای

مسئله–۴: چرخ و فلک افقی حول محور قائمی به شعاع r می‌چرخد. سرنشینان چرخ و فلک در کنار دیواره‌ی استوانه‌ای آن می‌ایستند. مکان زاویه‌ای خط مرجع چرخ و فلک بر حسب زمان بصورت

$$\theta(t) = ct^3$$

می‌باشد که cکمیت ثابتی است. وقتی چرخ و فلک شروع به چرخش می‌کند، کف حلقه از زیر پای سرنشینان پایین می‌رود ولی سرنشینان نمی‌افتند. آنها فکر می‌کنند که به دیوار استوانه‌ای چسبیده‌اند. برای لحظه‌ی دلخواه t، سرعت زاویه‌ای ω، سرعت خطی v، شتاب زاویه‌ای α، شتاب مماسی a_t، شتاب شعاعی a_r و شتاب $\vec{a}$ سرنشینان را پیدا کنید.

$$\text{سرعت زاویه‌ای} : \ \omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 3ct^2$$

$$\text{سرعت} : \ v = r\omega = 3crt^2$$

$$\text{شتاب زاویه‌ای} : \ \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 6ct$$

رابطه بین متغیرهای خطی و زاویه‌ای

مسئله–۴:

$$\text{شتاب زاویه‌ای} : \ \alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 6ct$$

$$\text{شتاب مماسی} : \ a_t = r\alpha = 6crt$$

$$\text{شتاب شعاعی} : \ a_r = r\omega^2 = 9c^2rt^4$$

$$\hat{r} = \hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta = \hat{i}\cos(ct^3) + \hat{j}\sin(ct^3)$$

$$\hat{\theta} = -\hat{i}\sin\theta + \hat{j}\cos\theta = -\hat{i}\sin(ct^3) + \hat{j}\cos(ct^3)$$

$$\vec{a} = -\hat{r}a_r + \hat{\theta}a_t$$

$$\vec{a} = -\hat{r}(9c^2rt^4) + \hat{\theta}(6crt)$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(9c^2rt^4)^2 + (6crt)^2}$$

انرژی جنبشی دورانی

اگر جسم صلب را به مجموعه‌ای از ذارت با اندازه‌ی سرعت‌های متفاوت در نظر بگیریم، می‌توان انرژی جنبشی ناشی از دوران حول محور ثابت همه ذرات را با هم جمع کرد و انرژی جنبشی کل جسم را بدست آورد.

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \cdots = \sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2$$

با توجه به فاصله عمودی هر ذره از محور دوران دارد، سرعت ذرات برابر است با

$$\begin{aligned} v_1 &= r_1\omega \\ v_2 &= r_2\omega \\ v_3 &= r_3\omega \\ &\vdots \end{aligned}$$

که ω سرعت زاویه‌ای دوران جسم صلب و ذرات تشکیل دهنده‌ی آن حول محور دوارن است.

انرژی جنبشی دورانی

بنابراین

$$\begin{cases} K & = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\ v_i & = r_i \omega \end{cases} \Rightarrow K = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

کمیت داخل پرانتز **لختی دورانی** نام دارد و آنرا با I نمایش می‌دهند.

$$\boxed{\text{توزیع ذرات گسسته} : \quad I = \sum_i m_i r_i^2}$$

برای توزیع‌های پیوسته لختی دورانی بصورت زیر تعریف می‌شود

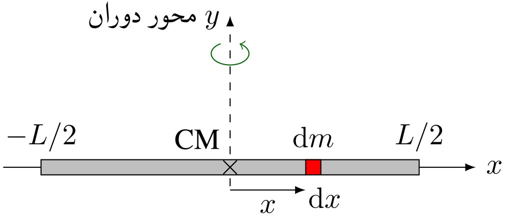
$$\boxed{\text{توزیع ذرات پیوسته} : \quad I = \int r^2 \mathrm{d}m}$$

بدین ترتیب **انرژی جنبشی دورانی جسم صلب** حول محور ثابت با سرعت زاویه‌ای ω برابر است با

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله-۵: لختی دورانی میله نازک به طول L و جرم M را حول محوری که از وسط میله بطور عمودی می‌گذرد را بدست آورید. جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است.



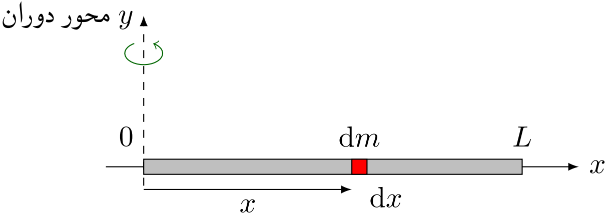
$$\lambda = \frac{M}{L}, \quad \mathrm{d}l = \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l = \frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 \mathrm{d}x = \frac{M}{L}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$I_y = \frac{1}{12}ML^2 = I_{\mathrm{CM}}$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۶: لختی دورانی میله نازک به طول L و جرم M را حول محوری عمود بر میله که از یک انتهای آن می‌گذرد را بدست آورید. جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است.



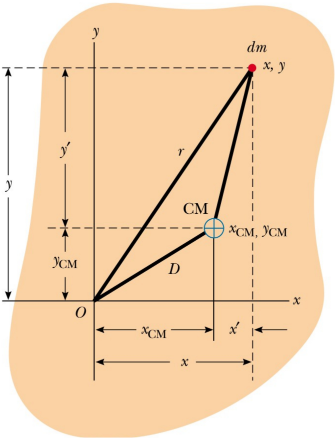
$$\lambda = \frac{M}{L}, \quad \mathrm{d}l = \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l = \frac{M}{L}\mathrm{d}x$$

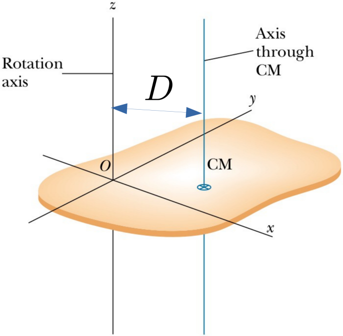
$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 \mathrm{d}x = \frac{M}{L}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^L$$

$$I_y = \frac{1}{3}ML^2$$

محاسبه لختی دورانی

قضیه محورهای موازی

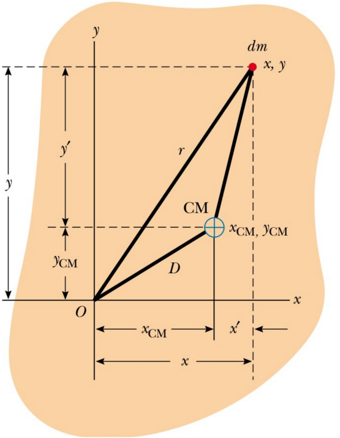




$$I_O = I_{CM} + MD^2$$

محاسبه لختی دورانی

قضیه محورهای موازی



$$I_O = \int r^2 \mathrm{d}m = \int (x^2 + y^2) \mathrm{d}m$$

$$x = x_{\mathrm{CM}} + x'$$

$$y = y_{\mathrm{CM}} + y'$$

$$I_O = (x_{\mathrm{CM}}^2 + y_{\mathrm{CM}}^2) \int \mathrm{d}m$$

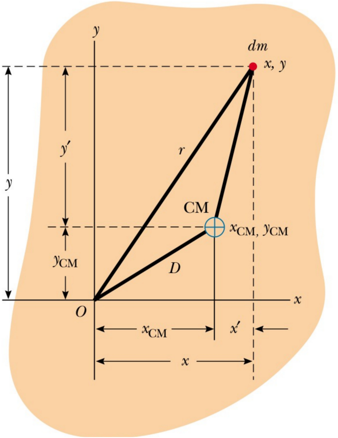
$$+ 2x_{\mathrm{CM}} \int x' \mathrm{d}m$$

$$+ 2y_{\mathrm{CM}} \int y' \mathrm{d}m$$

$$+ \int (x'^2 + y'^2) \mathrm{d}m$$

محاسبه لختی دورانی

قضیه محورهای موازی



$$x_{\mathrm{CM}}^2 + y_{\mathrm{CM}}^2 = D^2$$

$$I_O = (x_{\mathrm{CM}}^2 + y_{\mathrm{CM}}^2) \int \mathrm{d}m$$
$$+ 2x_{\mathrm{CM}} \int x' \mathrm{d}m$$
$$+ 2y_{\mathrm{CM}} \int y' \mathrm{d}m$$
$$+ \int (x'^2 + y'^2) \mathrm{d}m$$

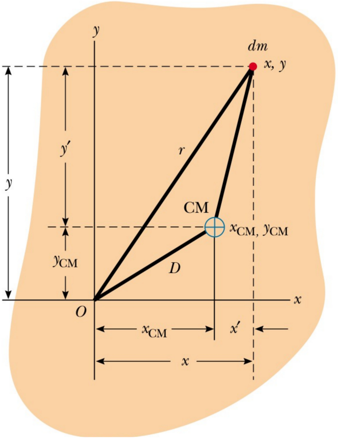
$$(x_{\mathrm{CM}}^2 + y_{\mathrm{CM}}^2) \int \mathrm{d}m = MD^2$$

$$\int x' \mathrm{d}m = \int y' \mathrm{d}m = 0$$

$$\int (x'^2 + y'^2) \mathrm{d}m = I_{\mathrm{CM}}$$

محاسبه لختی دورانی

قضیه محورهای موازی

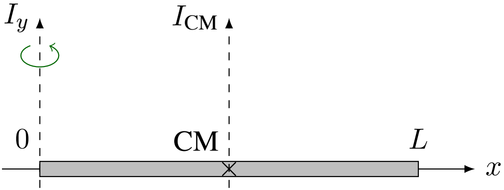


$$\boxed{I_O = MD^2 + I_{CM}}$$

نکته: قضیه محورهای موازی برای اجسام با هر بعدی قابل استفاده است.

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۷: لختی دورانی میله نازک به طول L و جرم M را حول محوری عمود بر میله که از یک انتهای آن می‌گذرد را بدست آورید. جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است (با استفاده از قضیه محورهای موازی).

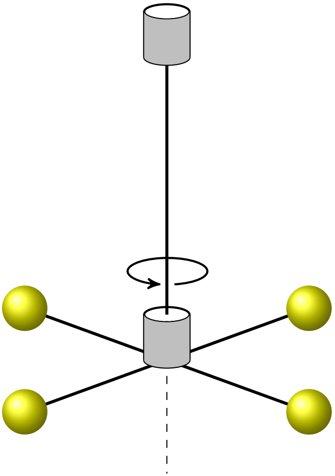


$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{12} M L^2$$

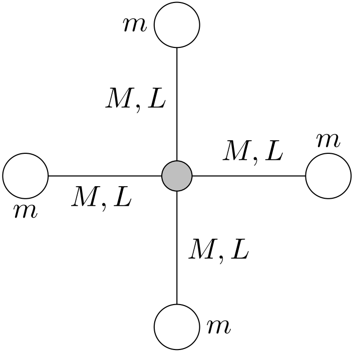
$$\text{قضیه محورهای موازی} : \quad I_y = I_{\mathrm{CM}} + M \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$I_y = \frac{1}{3} M L^2$$

محاسبه لختی دورانی

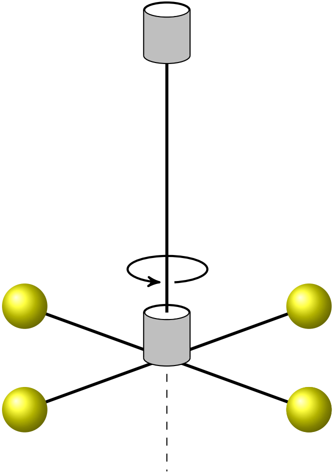


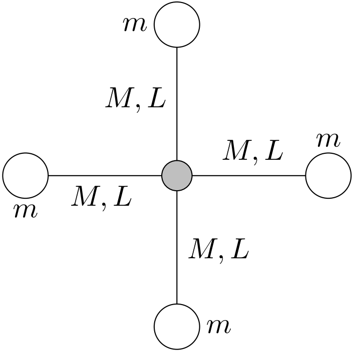
مسئله–۸: چهار گوی به جرم m به انتهای چهار میله‌ی بطول L و جرم M متصل شده‌اند و انتهای دیگر میله‌ها بصورت عمودی به محور متصل شده‌اند. لختی دورانی کل را حول محور چرخش دستگاه پیدا کنید.



محاسبه لختی دورانی

مسئله–۸:



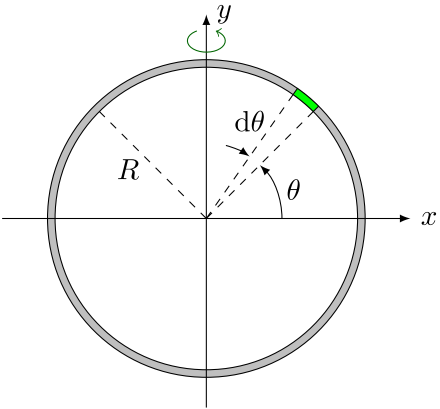


$$I_{\text{کل}} = 4I_{\text{میله}} + 4I_{\text{جرم}}$$

$$I_{\text{کل}} = 4\left(\frac{1}{3}ML^2\right) + 4mL^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۹: لختی دورانی حلقه نازک به شعاع R و جرم M را حول محوری که از یکی از قطر می‌گذرد را بدست آورید. جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi}\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

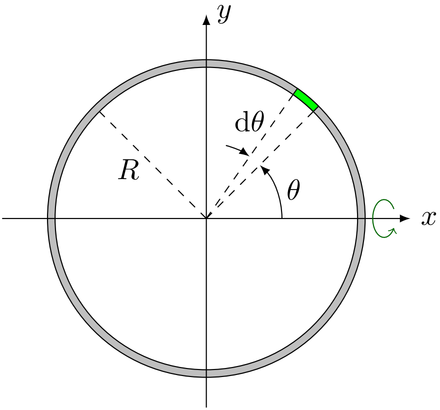
$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} R^2\cos^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$I_y = \frac{MR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$I_y = \frac{MR^2}{4\pi}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}MR^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۹: لختی دورانی حلقه نازک به شعاع R و جرم M را حول محوری که از یکی از قطر می‌گذرد را بدست آورید. جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi}\mathrm{d}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

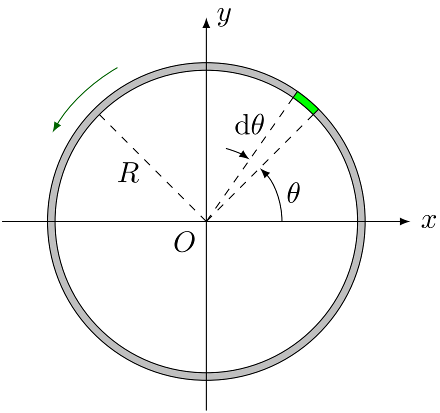
$$I_x = \int y^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} R^2\sin^2\theta \mathrm{d}\theta$$

$$I_x = \frac{MR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$

$$I_x = \frac{MR^2}{4\pi}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}MR^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۰: لختی دورانی حلقه نازک به شعاع R و جرم M را حول محوری که بطور عمودی از مرکز حلقه می‌گذرد را بدست آورید. جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi}\mathrm{d}\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

$$I_O = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \int R^2 \mathrm{d}m$$

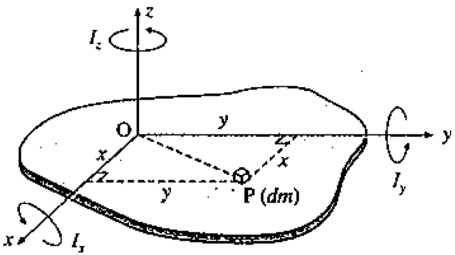
$$I_O = \int R^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \mathrm{d}\theta$$

$$I_O = \frac{MR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$

$$I_O = \frac{MR^2}{2\pi}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = MR^2$$

محاسبه لختی دورانی

قضیه محورهای عمودی



$$I_z = \int r^2 \mathrm{d}m$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \mathrm{d}m$$

$$I_z = \int x^2 \mathrm{d}m + \int y^2 \mathrm{d}m$$

$$I_x = \int x^2 \mathrm{d}m$$

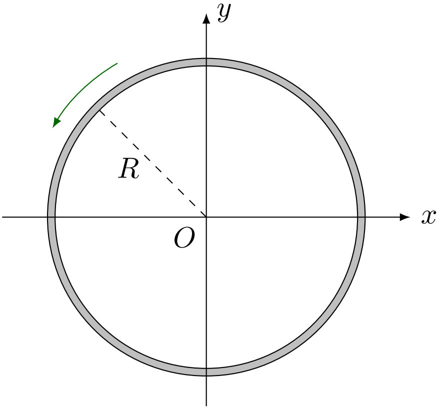
$$I_y = \int y^2 \mathrm{d}m$$

$$\boxed{I_z = I_x + I_y}$$

نکته: قضیه محورهای عمودی فقط برای اجسام صلب دوبعدی قابل استفاده است.

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۱: لختی دورانی حلقه نازک به شعاع R و جرم M را حول محوری که بطور عمودی از مرکز حلقه می‌گذرد را بدست آورید. جرم در واحد طول آن بطور یکنواخت توزیع شده است (با استفاده از قضیه محورهای عمودی).



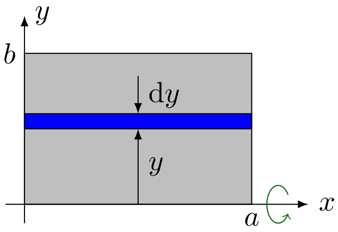
$$I_x = I_y = \frac{1}{2}MR^2$$

قضیه محورهای عمودی : $I_O = I_x + I_y$

$$I_O = MR^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۲: لختی دورانی صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و $b(< a)$ و جرم M را حول ضلع بزرگتر پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



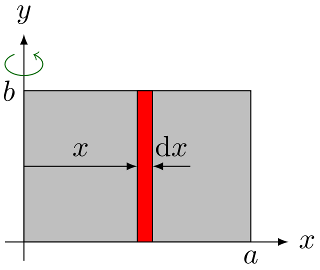
$$\sigma = \frac{M}{ab}, \ \mathrm{d}s = b\mathrm{d}y, \ \mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{M}{b}\mathrm{d}y, \quad 0 \le y \le b$$

$$I_x = \int y^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{b}\int_0^b y^2 \mathrm{d}y = \frac{M}{b}\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^b$$

$$I_x = \frac{1}{3}Mb^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۳: لختی دورانی صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و $b(< a)$ و جرم M را حول ضلع کوچکتر پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



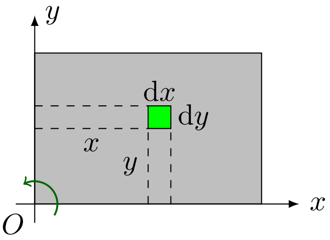
$$\sigma = \frac{M}{ab},\ \mathrm{d}s = b\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{M}{a}\mathrm{d}x, \quad 0 \le x \le a$$

$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{a}\int_0^a x^2 \mathrm{d}x = \frac{M}{a}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$I_y = \frac{1}{3}Ma^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۴: لختی دورانی صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و $b(< a)$ و جرم M را حول محور عمود بر صفحه در یکی از گوشه‌ها پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$$

$$I_O = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \frac{M}{ab}\int (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

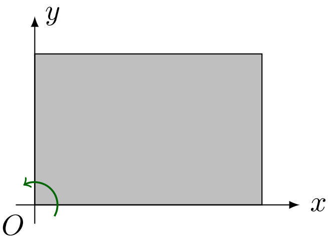
$$I_O = \frac{M}{ab}\left(\int_0^a x^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b \mathrm{d}y\right) + \frac{M}{ab}\left(\int_0^a \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^b y^2\mathrm{d}y\right)$$

$$I_O = \frac{M}{ab}\left(\frac{1}{3}a^3\right)b + \frac{M}{ab}a\left(\frac{1}{3}b^3\right)$$

$$I_O = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۵: لختی دورانی صفحه‌ای نازک چارگوش به ابعاد a و $b(<a)$ و جرم M را حول محور عمود بر صفحه در یکی از گوشه‌ها پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (با استفاده از قضیه محورهای عمودی).



$$I_x = \frac{1}{3}Ma^2$$

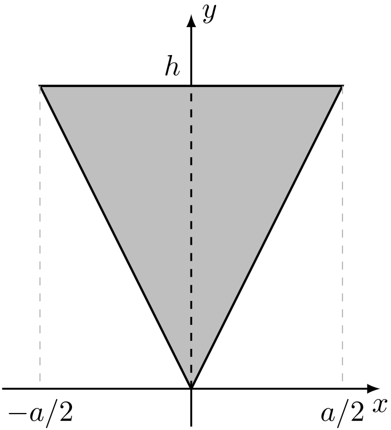
$$I_y = \frac{1}{3}Mb^2$$

قضیه محورهای عمودی : $I_O = I_x + I_y$

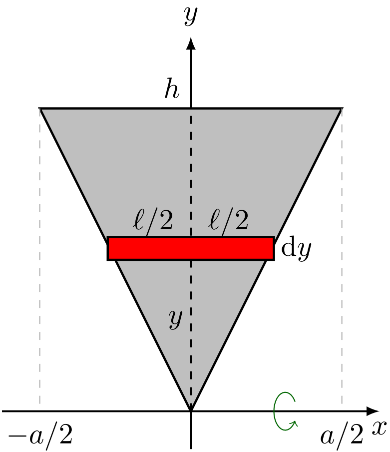
$$I_O = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۶: لختی دورانی صفحه‌ای نازک مثلثی به قاعده‌ی a، ارتفاع h و جرم M را مطابق شکل حول محور x پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



محاسبه لختی دورانی



$$I_x = \int y^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{ah}\ell \mathrm{d}y$$

تشابه مثلثها : $\dfrac{\ell/2}{a/2} = \dfrac{y}{h} \Rightarrow \ell(y) = \dfrac{a}{h}y$

$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{h^2}y\mathrm{d}y, \quad 0 \le y \le h$$

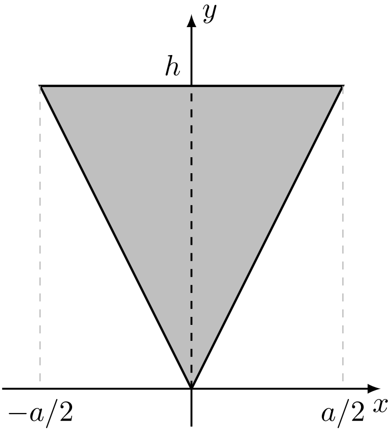
$$I_x = \frac{2M}{h^2}\int_0^h y^3 \mathrm{d}y$$

$$I_x = \frac{2M}{h^2}\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^h$$

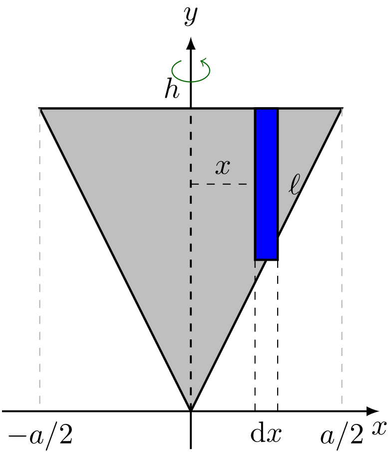
$$I_x = \frac{1}{2}Mh^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۷: لختی دورانی صفحه‌ای نازک مثلثی به قاعده‌ی a، ارتفاع h و جرم M را مطابق شکل حول محور y پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



محاسبه لختی دورانی



$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m$$

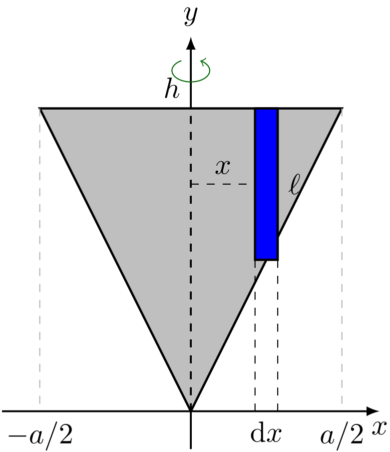
$$\mathrm{d}m = \frac{2M}{ah}\ell(x)\mathrm{d}x$$

$$\ell(x) = \begin{cases} \frac{h}{a}(a+2x), & -a/2 \leq x \leq 0 \\ \frac{h}{a}(a-2x), & 0 \leq x \leq a/2 \end{cases}$$

$$I_y = \frac{2M}{a^2}\int_{-a/2}^{0} x^2(a+2x)\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{2M}{a^2}\int_{0}^{a/2} x^2(a-2x)\mathrm{d}x$$

محاسبه لختی دورانی



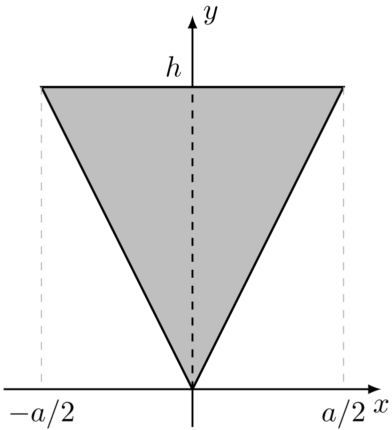
$$I_y = \frac{2M}{a^2}\int_{-a/2}^{0} x^2(a+x)\mathrm{d}x + \frac{2M}{a^2}\int_{0}^{a/2} x^2(a-x)\mathrm{d}x$$

$$I_y = \frac{2M}{a^2}\left[\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{4}x^4\right]_{-a/2}^{0} + \frac{2M}{a^2}\left[\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{a/2}$$

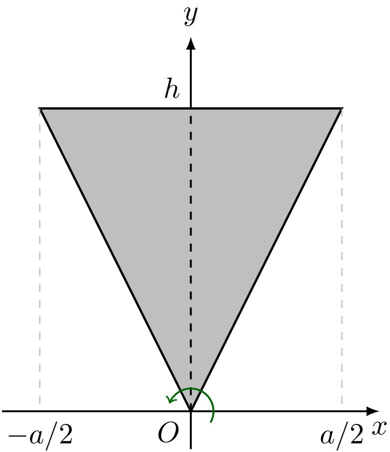
$$I_y = \frac{1}{24}Ma^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۸: لختی دورانی صفحه‌ای نازک مثلثی به قاعده‌ی a، ارتفاع h و جرم M را مطابق شکل حول محور عمود بر صفحه‌ی xy در نقطه‌ی O را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (با استفاده از قضیه محورهای عمودی).



محاسبه لختی دورانی



$$I_x = \frac{1}{2}Mh^2$$

$$I_y = \frac{1}{24}Ma^2$$

قضیه محورهای عمودی : $I_O = I_x + I_y$

$$I_O = \frac{1}{24}Ma^2 + \frac{1}{2}Mh^2$$

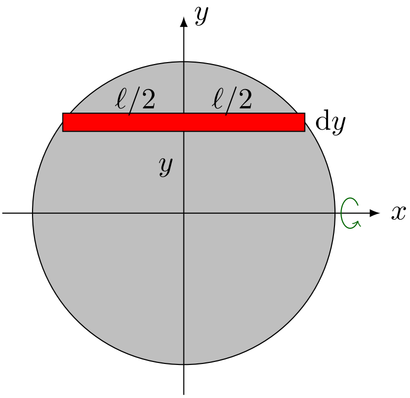
قضیه محورهای موازی :

$$I_O = I_{\mathrm{CM}} + M\left(\frac{2}{3}h\right)^2$$

$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{24}Ma^2 + \frac{1}{18}Mh^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۹: لختی دورانی صفحه‌ای نازک دایره‌ای به شعاع R و جرم M را مطابق شکل حول محور x پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}, \quad \mathrm{d}s = \ell \mathrm{d}y$$

$$\ell = 2\sqrt{R^2 - y^2} \quad -R \leq y \leq R$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{2M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y$$

$$I_x = \int y^2 \mathrm{d}m$$

$$I_x = \frac{2M}{\pi R^2}\int_{-R}^{R} y^2 \sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y$$

محاسبه لختی دورانی

$$I_x = \frac{2M}{\pi R^2}\int_{-R}^{R} y^2\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y$$

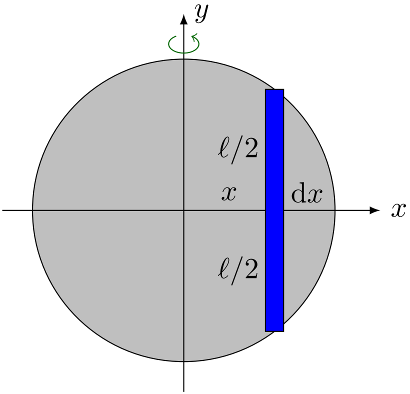
$$\begin{cases} y = R\cos\theta, & \mathrm{d}y = -R\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ y = R \Rightarrow \theta = 0, & y = -R \Rightarrow \theta = \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} y^2\sqrt{R^2 - y^2}\mathrm{d}y = -R^4\int_{\pi}^{0}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{4}\int_{0}^{\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta \\ = \frac{R^4}{8}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi} \\ = \frac{\pi R^4}{8}\end{aligned}$$

$$I_x = \frac{1}{4}MR^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۰: لختی دورانی صفحه‌ای نازک دایره‌ای به شعاع R و جرم M را مطابق شکل حول محور y پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است.



$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}, \quad \mathrm{d}s = \ell \mathrm{d}x$$

$$\ell = 2\sqrt{R^2 - x^2} \qquad -R \leq x \leq R$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{2M}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m$$

$$I_y = \frac{2M}{\pi R^2}\int_{-R}^{R} x^2\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

محاسبه لختی دورانی

$$I_y = \frac{2M}{\pi R^2}\int_{-R}^{R} x^2\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

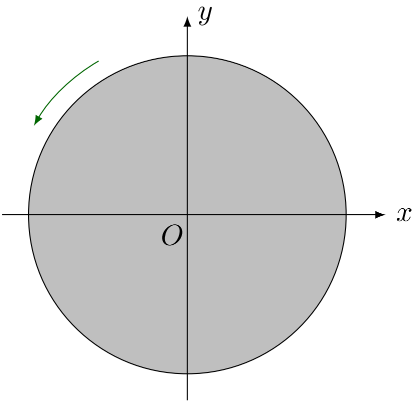
$$\begin{cases} x = R\cos\theta, & \mathrm{d}x = -R\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ x = R \Rightarrow \theta = 0, & x = -R \Rightarrow \theta = \pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} x^2\sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}y &= -R^4\int_{\pi}^{0}\cos^2\theta\sin^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{4}\int_{0}^{\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{R^4}{8}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 4\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi R^4}{8}
\end{aligned}$$

$$I_y = \frac{1}{4}MR^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۱: لختی دورانی صفحه‌ای نازک دایره‌ای به شعاع R و جرم M را مطابق شکل حول محوری که از مبدا می‌گذرد پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است. (استفاده از قضیه محورهای عمودی).



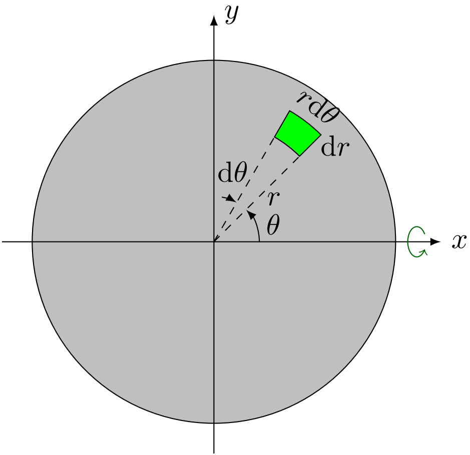
$$I_x = I_y = \frac{1}{4}MR^2$$

قضیه محورهای عمودی : $I_O = I_x + I_y$

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۱: لختی دورانی صفحه‌ای نازک دایره‌ای به شعاع R و جرم M را مطابق شکل حول محور x پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).



$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}, \quad \mathrm{d}s = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

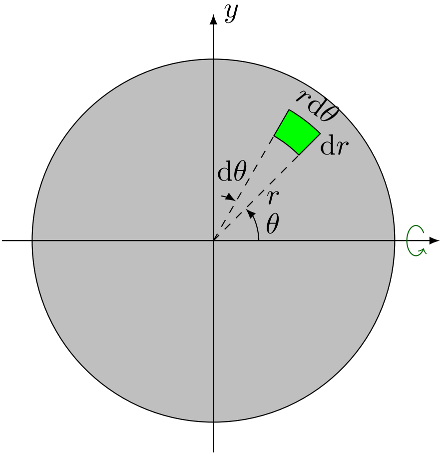
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$I_x = \int y^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \sin^2\theta \mathrm{d}m$$

$$I_x = \frac{M}{\pi R^2} \int r^2 \sin^2\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۱:



$$0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$I_x = \frac{M}{\pi R^2} \int r^2 \sin^2\theta r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

$$I_x = \frac{M}{\pi R^2} \left(\int_0^R r^3 \mathrm{d}r \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta \right)$$

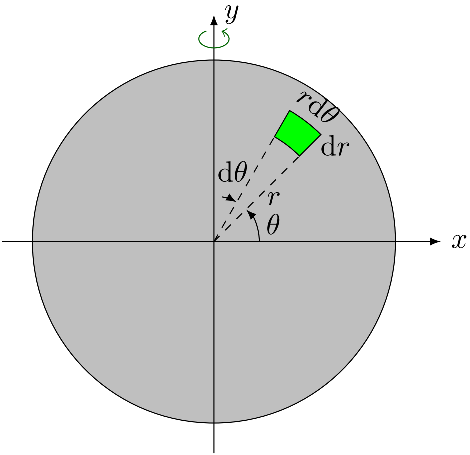
$$I_x = \frac{M}{\pi R^2} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \left[\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$I_x = \frac{M}{\pi R^2} \left(\frac{1}{4} R^4 \right) \times \pi$$

$$I_x = \frac{1}{4} M R^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۲: لختی دورانی صفحه‌ای نازک دایره‌ای به شعاع R و جرم M را مطابق شکل حول محور y پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).



$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}, \quad \mathrm{d}s = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

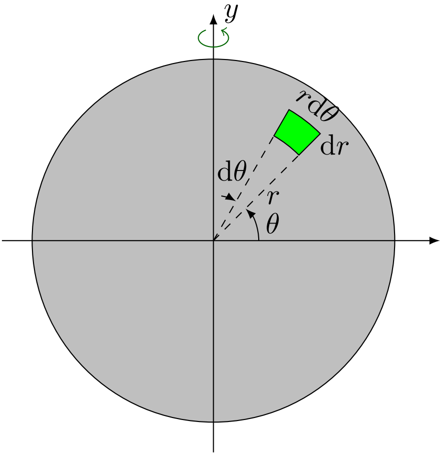
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$I_y = \int x^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \cos^2\theta \mathrm{d}m$$

$$I_y = \frac{M}{\pi R^2} \int r^2 \cos^2\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۲:



$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$I_y = \frac{M}{\pi R^2} \int r^2 \cos^2 \theta r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

$$I_x = \frac{M}{\pi R^2} \left(\int_0^R r^3 \mathrm{d}r \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \mathrm{d}\theta \right)$$

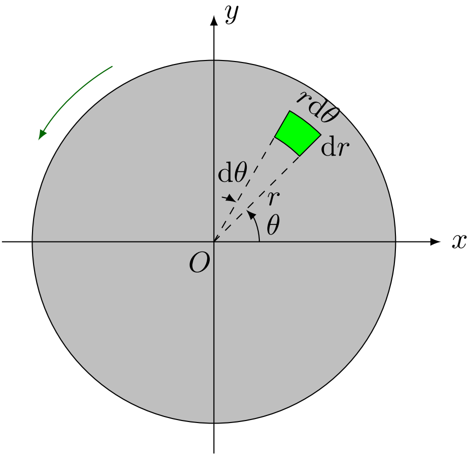
$$I_y = \frac{M}{\pi R^2} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R \left[\frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right]_0^{2\pi}$$

$$I_y = \frac{M}{\pi R^2} \left(\frac{1}{4} R^4 \right) \times \pi$$

$$I_y = \frac{1}{4} M R^2$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۱۳: مرکز جرم صفحه‌ای نازک به شکل نیم‌دایره به شعاع R و جرم M را پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).



$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2}, \quad \mathrm{d}s = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\mathrm{d}m = \sigma \mathrm{d}s = \frac{M}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

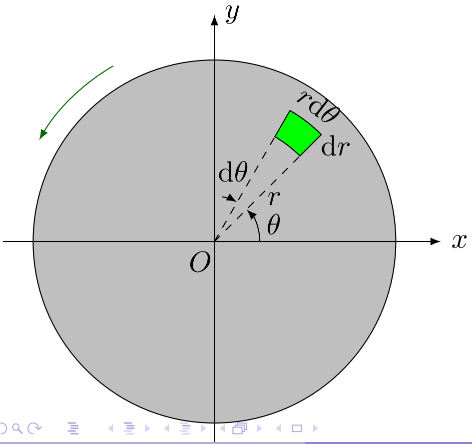
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$I_O = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \int r^2 \mathrm{d}m$$

$$I_O = \frac{M}{\pi R^2} \int r^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۳: لختی دورانی صفحه‌ای نازک دایره‌ای به شعاع R و جرم M را مطابق شکل حول محوری از مبدا می‌گذرد پیدا کنید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از مختصات قطبی).



$$0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$I_O = \frac{M}{\pi R^2} \int r^3 \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

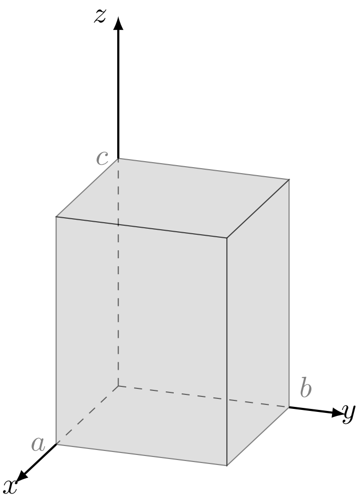
$$I_O = \frac{M}{\pi R^2} \left(\int_0^R r^3 \mathrm{d}r \right) \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \right)$$

$$I_O = \frac{M}{\pi R^2} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi}$$

$$I_O = \frac{M}{\pi R^2} \left(\frac{1}{4} R^4 \right) \times 2\pi$$

$$I_O = \frac{1}{2} M R^2$$

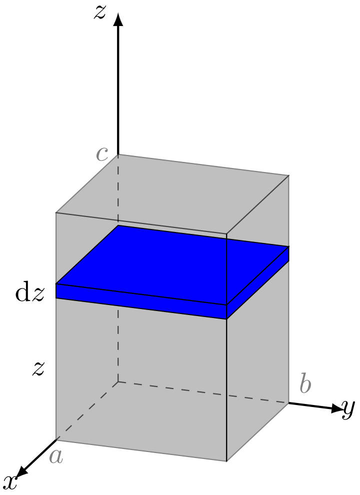
محاسبه لختی دورانی



مسئله–۲۴: لختی دورانی مکعب مستطیلی به اضلاع a، b و c و جرم M را مطابق شکل حول محورهای x، y و z بدست آورید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از فرمهای دیفرانسیل لختی صفحات دوبعدی و فرم دیفرانسیل قضیه محورهای موازی).

محاسبه لختی دورانی

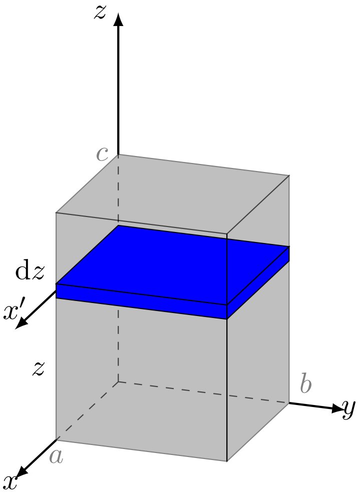
مسئله-۲۴:
مطابق مسئله-۱۴، لختی دورانی فرم دیفرانسیل عنصر جرمی برابر است با



$$\mathrm{d}I_z = \frac{1}{3}(a^2+b^2)\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{abc}ab\mathrm{d}z = \frac{M}{c}\mathrm{d}z$$
$$0 \le z \le c$$
$$\mathrm{d}I_z = \frac{M}{3c}(a^2+b^2)\mathrm{d}z$$
$$I_z = \frac{M}{3c}(a^2+b^2)\int_0^c \mathrm{d}z$$
$$I_z = \frac{1}{3}M(a^2+b^2)$$

محاسبه لختی دورانی



مسئله-۲۴:
با استفاده از فرم دیفرانسیلی قضیه محورهای موازی

$$\mathrm{d}I_x = \mathrm{d}I'_x + z^2 \mathrm{d}m$$

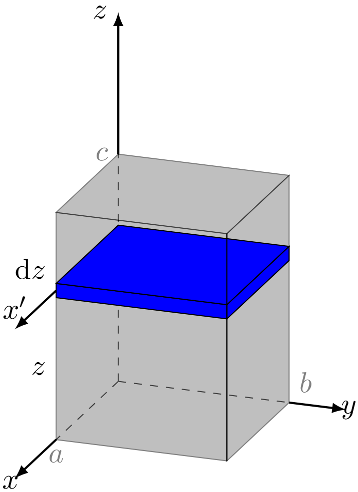
$$\mathrm{d}m = \frac{M}{abc} ab\mathrm{d}z = \frac{M}{c}\mathrm{d}z$$
$$0 \leq z \leq c$$

مطابق مسئله-۱۲، لختی دورانی فرم دیفرانسیلی عنصر جرمی برابر است با

$$\mathrm{d}I'_x = \frac{1}{3} b^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}I_x = \frac{M}{3c} b^2 \mathrm{d}z + \frac{M}{c} z^2 \mathrm{d}z$$

مسئله–۲۴:



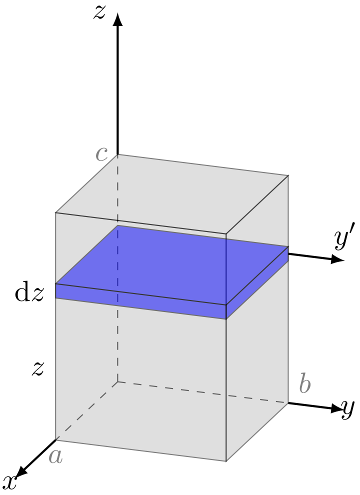
$$\mathrm{d}I_x = \frac{M}{3c}b^2\mathrm{d}z + \frac{M}{c}z^2\mathrm{d}z$$

$$0 \leq z \leq c$$

$$I_x = \frac{M}{3c}b^2 \int_0^c \mathrm{d}z + \frac{M}{c}\int_0^c z^2\mathrm{d}z$$

$$I_x = \frac{1}{3}(b^2 + c^2)$$

محاسبه لختی دورانی



مسئله–۲۴:
با استفاده از فرم دیفرانسیلی قضیه محورهای موازی

$$\mathrm{d}I_y = \mathrm{d}I'_y + z^2\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{abc}ab\mathrm{d}z = \frac{M}{c}\mathrm{d}z$$

$$0 \le z \le c$$

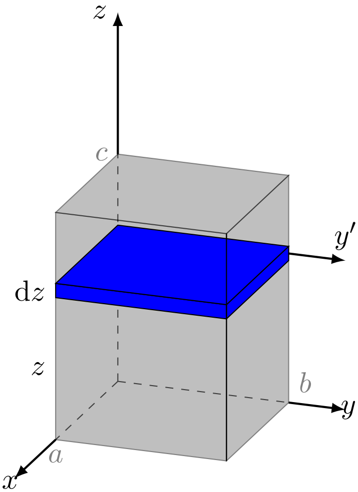
مطابق مسئله–۱۳، لختی دورانی فرم دیفرانسیلی عنصر جرمی برابر است با

$$\mathrm{d}I'_y = \frac{1}{3}a^2\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}I_y = \frac{M}{3c}a^2\mathrm{d}z + \frac{M}{c}z^2\mathrm{d}z$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۴:

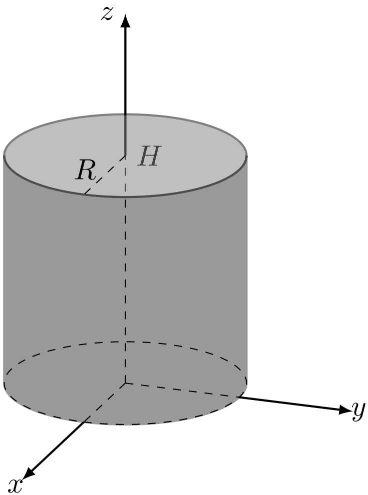


$$\mathrm{d}I_y = \frac{M}{3c}a^2\mathrm{d}z + \frac{M}{c}z^2\mathrm{d}z$$

$$0 \le z \le c$$

$$I_y = \frac{M}{3c}a^2\int_0^c \mathrm{d}z + \frac{M}{c}\int_0^c z^2\mathrm{d}z$$

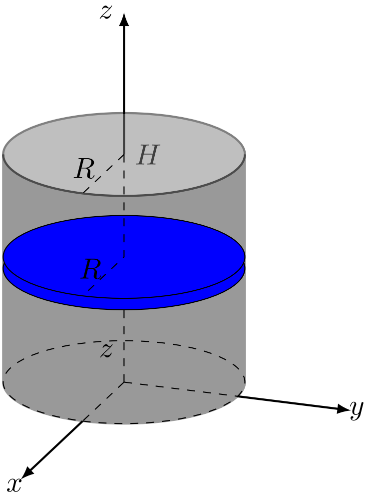
$$I_y = \frac{1}{3}(a^2 + c^2)$$



مسئله–۲۵: لختی دورانی استوانه‌ای به شعاع R و ارتفاع h و جرم M را مطابق شکل حول محورهای x، y و z بدست آورید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از فرمهای دیفرانسیل لختی صفحات دوبعدی و فرم دیفرانسیل قضیه محورهای موازی).

محاسبه لختی دورانی

مسئله-۲۵:
مطابق مسئله-۲۱، لختی دورانی فرم دیفرانسیل عنصر جرمی برابر است با



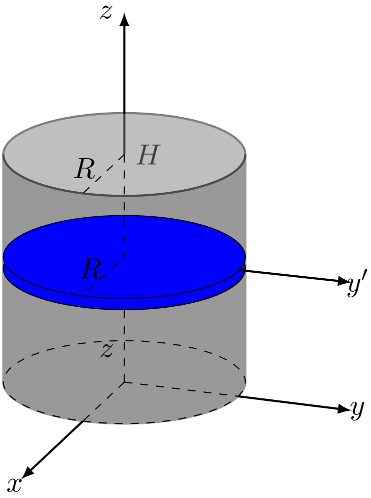
$$\mathrm{d}I_z = \frac{1}{2}R^2\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi R^2 H}\pi R^2\mathrm{d}z = \frac{M}{H}\mathrm{d}z$$
$$0 \leq z \leq H$$
$$\mathrm{d}I_z = \frac{M}{2H}R^2\mathrm{d}z$$

$$I_z = \frac{M}{2H}R^2\int_0^H \mathrm{d}z$$

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

محاسبه لختی دورانی



مسئله-۲۵:
با استفاده از فرم دیفرانسیلی قضیه محورهای موازی

$$\mathrm{d}I_y = \mathrm{d}I'_y + z^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{\pi R^2 H}\pi R^2 \mathrm{d}z = \frac{M}{H}\mathrm{d}z$$

$$0 \le z \le H$$

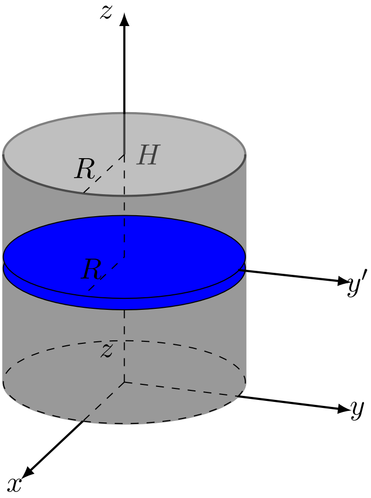
مطابق مسئله-۲۰، لختی دورانی فرم دیفرانسیلی عنصر جرمی برابر است با

$$\mathrm{d}I'_y = \frac{1}{4}R^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}I_y = \frac{M}{4H}R^2 \mathrm{d}z + \frac{M}{H}z^2 \mathrm{d}z$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۵:



$$\mathrm{d}I_y = \frac{M}{4H}R^2\mathrm{d}z + \frac{M}{H}z^2\mathrm{d}z$$

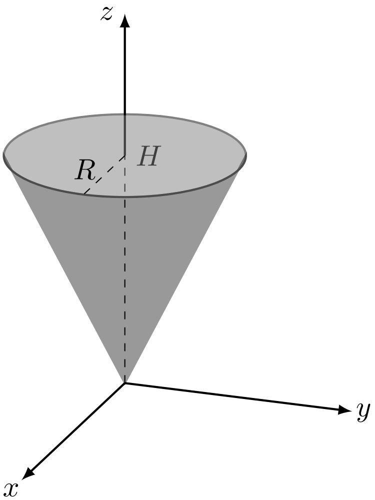
$$0 \leq z \leq H$$

$$I_y = \frac{M}{4H}R^2\int_0^H \mathrm{d}z + \frac{M}{H}\int_0^H z^2\mathrm{d}z$$

$$I_y = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{3}MH^2$$

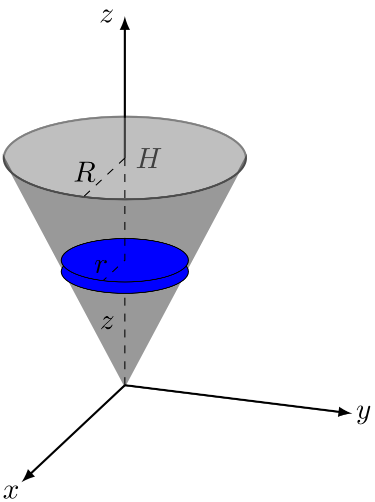
$$I_x = I_y = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{3}MH^2$$

محاسبه لختی دورانی



مسئله–۲۶: لختی دورانی مخروطی به شعاع R و ارتفاع H و جرم M را مطابق شکل حول محورهای x، y و z بدست آورید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از فرمهای دیفرانسیل لختی صفحات دوبعدی و فرم دیفرانسیل قضیه محورهای موازی).

محاسبه لختی دورانی



مسئله–۲۶: مطابق مسئله–۲۱، لختی دورانی فرم دیفرانسیل عنصر جرمی برابر است با

$$\mathrm{d}I_z = \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{\pi R^2 H}\pi r^2\mathrm{d}z = \frac{3M}{R^2 H}r^2\mathrm{d}z$$

$$0 \le z \le H$$

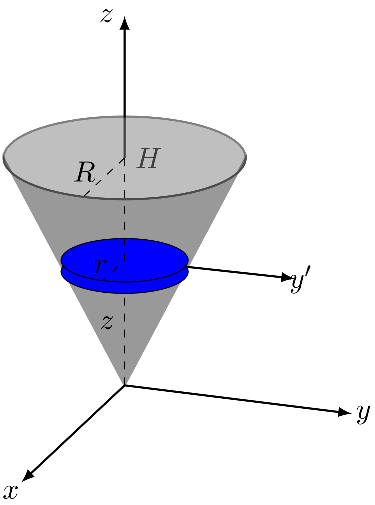
تشابه مثلثها : $\dfrac{r}{R} = \dfrac{z}{H} \Rightarrow r = \dfrac{R}{H}z$

$$\mathrm{d}I_z = \frac{3MR^2}{2H^5}z^4\mathrm{d}z$$

$$I_z = \frac{3MR^2}{2H^5}\int_0^H z^4\mathrm{d}z$$

$$I_z = \frac{3}{10}MR^2$$

محاسبه لختی دورانی



با استفاده از فرم دیفرانسیلی قضیه محورهای موازی

$$\mathrm{d}I_y = \mathrm{d}I'_y + z^2\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{\pi R^2 H}\pi r^2 \mathrm{d}z = \frac{3M}{R^2 H} r^2 \mathrm{d}z$$

$$0 \le z \le H$$

تشابه مثلثها : $\dfrac{r}{R} = \dfrac{z}{H} \Rightarrow r = \dfrac{R}{H}z$

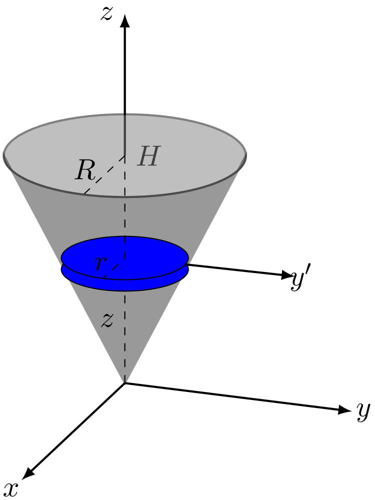
مطابق مسئله-۲۰، لختی دورانی فرم دیفرانسیلی عنصر جرمی برابر است با

$$\mathrm{d}I'_y = \frac{1}{4} r^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}I_y = \frac{3M}{4H^5} R^2 z^4 \mathrm{d}z + \frac{3M}{H^3} z^4 \mathrm{d}z$$

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۶:



$$\mathrm{d}I_y = \frac{3M}{4H^5}R^2 z^4 \mathrm{d}z + \frac{3M}{H^3} z^4 \mathrm{d}z$$

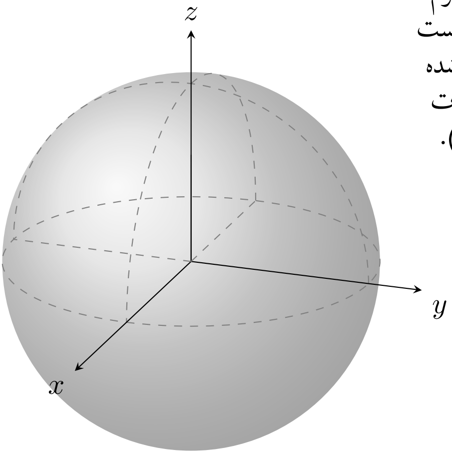
$$0 \leq z \leq H$$

$$I_y = \frac{3M}{4H^5}R^2 \int_0^H z^4 \mathrm{d}z + \frac{3M}{H^3}\int_0^H z^4 \mathrm{d}z$$

$$I_y = \frac{3}{20}M(R^2 + 4H^2)$$

$$I_x = I_y = \frac{3}{20}M(R^2 + 4H^2)$$

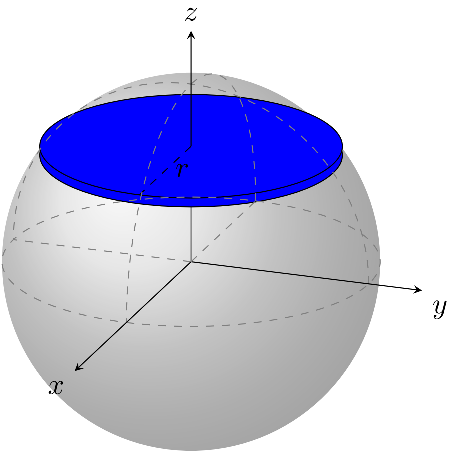
محاسبه لختی دورانی



مسئله–۲۷: لختی دورانی کره‌ای به شعاع R و جرم M را مطابق شکل حول محورهای x، y و z بدست آورید. جرم در واحد حجم بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از فرمهای دیفرانسیل لختی صفحات دوبعدی و فرم دیفرانسیل قضیه محورهای موازی).

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۷: مطابق مسئله–۲۱، لختی دورانی فرم دیفرانسیل عنصر جرمی برابر است با



$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{4\pi R^3}\pi r^2 \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}I_z = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}m$$

$$r^2 = R^2 - z^2$$

$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{4R^3}(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$$

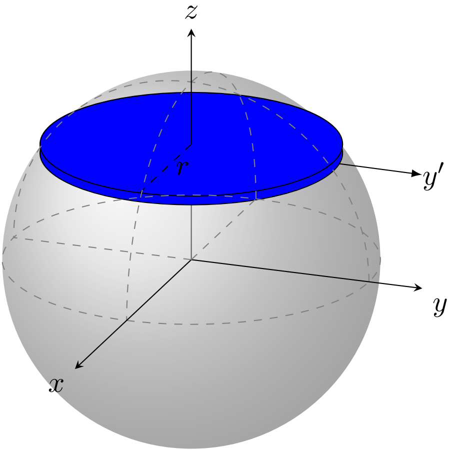
$$-R \le z \le R$$

$$\mathrm{d}I_z = \frac{3M}{8R^3}(R^2 - z^2)^2 \mathrm{d}z$$

$$I_z = \frac{3M}{8R^3}\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)^2 \mathrm{d}z$$

$$I_z = \frac{2}{5} M R^2$$

محاسبه لختی دورانی



با استفاده از فرم دیفرانسیلی قضیه محورهای موازی

$$\mathrm{d}I_y = \mathrm{d}I_y' + z^2\mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{3M}{4R^3}(R^2 - z^2)\mathrm{d}z$$

$$-R \le z \le R$$

مطابق مسئله–۲۰، لختی دورانی فرم دیفرانسیلی y عنصر جرمی برابر است با

$$\mathrm{d}I_y' = \frac{3M}{16R^3}(R^2 - z^2)^2\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}I_y = \frac{3M}{16R^3}(R^2 - z^2)^2\mathrm{d}z + \frac{3M}{4R^3}z^2(R^2 - z^2)^2\mathrm{d}z$$

محاسبه لختی دورانی

$$dI_y = \frac{3M}{16R^3}(R^2 - z^2)^2 dz + \frac{3M}{4R^3} z^2 (R^2 - z^2)^2 dz$$

$$I_y = \frac{3M}{16R^3}\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)^2 dz + \frac{3M}{4R^3}\int_{-R}^{R} z^2 (R^2 - z^2)^2 dz$$

$$I_y = \frac{3M}{16R^3}\left[R^4 z - \frac{2}{3}R^2 z^3 + \frac{1}{5}z^5\right]_{-R}^{R} + \frac{3M}{4R^3}\left[\frac{1}{3}R^2 z^3 - \frac{1}{5}z^5\right]_{-R}^{R}$$

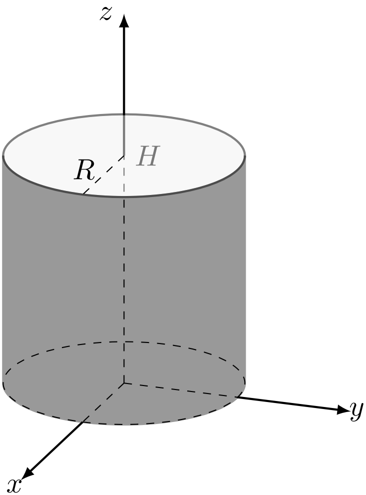
$$I_y = \frac{3M}{16}R^2\left[2\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)\right] + \frac{3M}{4}R^2\left[2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$I_y = \frac{3M}{16}R^2\left(\frac{16}{15}\right) + \frac{3M}{4}R^2\left(\frac{4}{15}\right)$$

$$I_y = \frac{3}{15}MR^2 + \frac{3}{15}MR^2$$

$$I_y = \frac{2}{5}MR^2$$

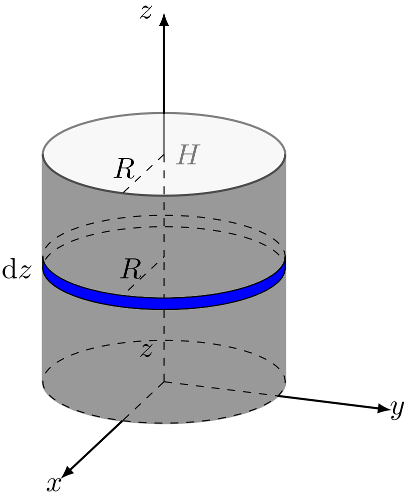
محاسبه لختی دورانی



مسئله–۲۸: لختی دورانی پوسته‌ی استوانه‌ای به شعاع R، ارتفاع H و جرم M را مطابق شکل حول محورهای x، y و z بدست آورید. جرم در واحد سطح بطور یکنواخت توزیع شده است (استفاده از فرمهای دیفرانسیل لختی صفحات دوبعدی و فرم دیفرانسیل قضیه محورهای موازی).

محاسبه لختی دورانی

مسئله–۲۸: مطابق مسئله–۱۰، لختی دورانی فرم دیفرانسیل عنصر جرمی برابر است با



$$\mathrm{d}I_z = R^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi RH} 2\pi R \mathrm{d}z = \frac{M}{H}\mathrm{d}z$$

$$0 \leq z \leq H$$

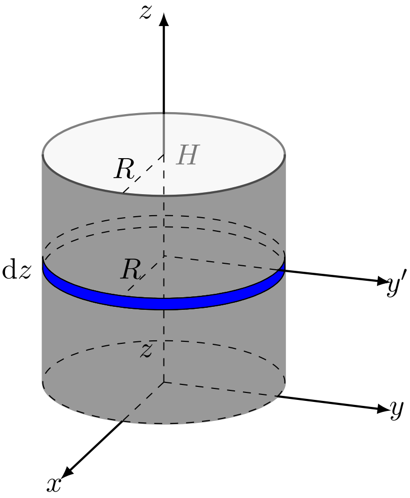
$$\mathrm{d}I_z = \frac{M}{H} R^2 \mathrm{d}z$$

$$I_z = \frac{M}{H} R^2 \int_0^H \mathrm{d}z$$

$$I_z = MR^2$$

محاسبه لختی دورانی

با استفاده از فرم دیفرانسیلی قضیه محورهای موازی



$$\mathrm{d}I_y = \mathrm{d}I'_y + z^2 \mathrm{d}m$$

$$\mathrm{d}m = \frac{M}{2\pi RH} 2\pi R \mathrm{d}z = \frac{M}{H} \mathrm{d}z$$
$$0 \leq z \leq H$$

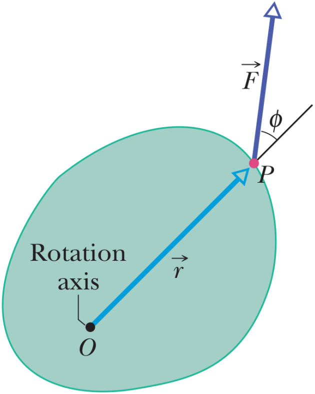
مطابق مسئله–۹، لختی دورانی فرم دیفرانسیلی عنصر جرمی برابر است با

$$\mathrm{d}I'_y = \frac{1}{2} R^2 \mathrm{d}m = \frac{M}{2H} R^2 \mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}I_y = \frac{M}{2H} R^2 \mathrm{d}z + \frac{M}{H} z^2 \mathrm{d}z$$

$$I_y = \frac{1}{2} MR^2 + \frac{1}{3} MH^2$$

گشتاور



◄ شکل مقابل، سطح مقطعی از جسم را نشان می‌دهد که حول محوری عبوری از نقطه‌ی O می‌تواند آزادانه دوران کند.

◄ نیروی $\vec{F}$ به نقطه‌ی P وارد می‌شود که مکان آن با بردار $\vec{r}$ نسبت به نقطه‌ی O مشخص می‌شود. جهت بردار $\vec{F}$ و بردار $\vec{r}$ زاویه‌ی ϕ می‌سازد.

گشتاور

◄ برای تعیین نحوی عملکرد نیروی $\vec{F}$، آنرا به دو مولفه‌ی شعاعی F_r و مولفه‌ی مماسی F_t تجزیه می‌کنیم.

◄ مولفه‌ی شعاعی نیرو در امتداد بردار $\vec{r}$ قرار دارد و دورانی ایجاد نمی‌کند.

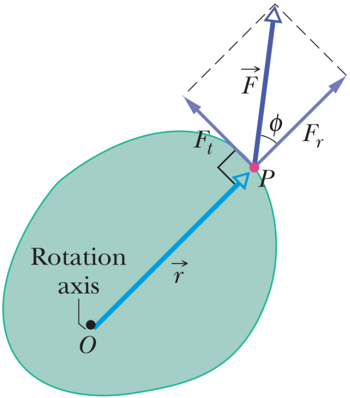
◄ مولفه‌ی مماسی نیرو، $F_t = F \sin\phi$، عمود بر بردار $\vec{r}$ است و باعث دوران جسم صلب می‌شود.

◄ محاسبه گشتاور

$$\tau_O = rF_t = r(F\sin\phi)$$

◄ واحد گشتاور Nm است.

◄ جهت گشتاور برای دوران حول محورهای ثابت عمود بر صفحه‌ی $\vec{r}$ و $\vec{F}$ بطرف بالا (مثبت) یا بطرف پایین (منفی) است.



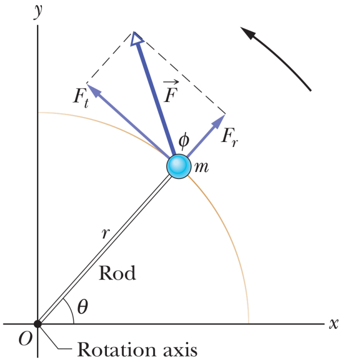
◄ گشتاور یک کمیت برداری است

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

که

$$\vec{\tau}_O \cdot \vec{r} = \vec{\tau}_O \cdot \vec{F} = 0$$

قانون دوم نیوتن برای دوران



- ذره‌ای به جرم m به انتهای میله‌ای بدون جرم به طول r متصل است. میله حول انتهای دیگرش دوران می کند.
- ذره‌ی m فقط می‌تواند در امتداد مسیر دایره‌ای حرکت کند و فقط نیروی مماسی F_t می‌تواند باعث شتاب مماسی a_t شود. رابطه‌ی شتاب مماسی و نیروی مماسی بر اساس قانون دوم نیوتن

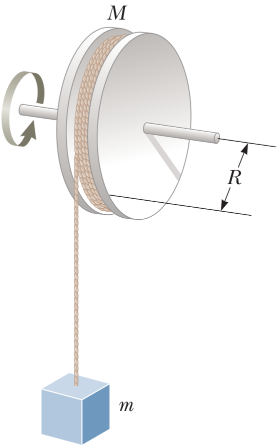
$$F_t = ma_t$$

- گشتاور و شتاب زاویه‌ای

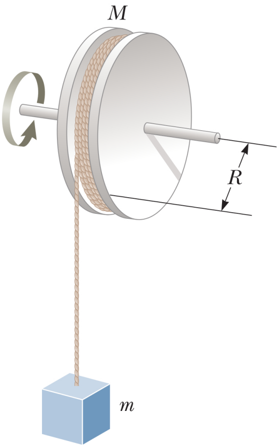
$$\begin{cases} \tau_O = rF_t = r(ma_t) \\ a_t = r\alpha \end{cases} \Rightarrow \tau_O = (mr^2)\alpha \Rightarrow \boxed{\tau_O = I\alpha \quad \text{یا} \quad \sum \tau_O = I\alpha}$$

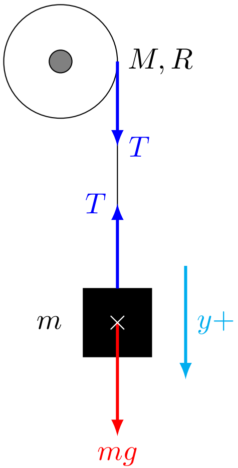
قانون دوم نیوتن برای دوران

مسئله–۲۹: مطابق شکل، قرص یکنواختی با جرم M و شعاع R را نشان می‌دهد که بر روی یک محور افقی ثابت، نصب شده است. قطعه‌ای به جرم m از نخ بدون جرمی آویزان است که به دور قرص پیچیده شده است. شتاب قطعه‌ی در حال سقوط، شتاب زاویه‌ای قرص و کشش نخ را بدست آورید. نخ نمی‌لغزد و محور بدون اصطکاک است.

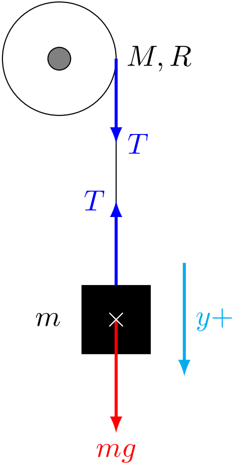


قانون دوم نیوتن برای دوران





قانون دوم نیوتن برای دوران



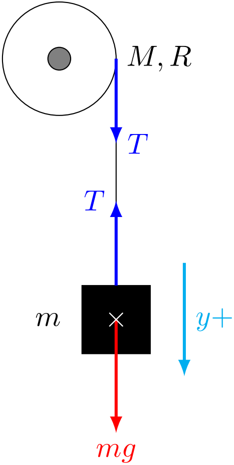
$$m: \quad \sum F_y = ma \Rightarrow mg - T = ma$$

$$\text{قرقره}: \quad \sum \tau = I\alpha \Rightarrow TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \\ \alpha = a/r \end{cases}$$

قانون دوم نیوتن برای دوران



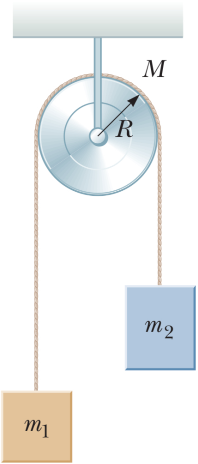
$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T = \frac{1}{2}Ma \end{cases}$$

$$a = \frac{2m}{M + 2m}g$$

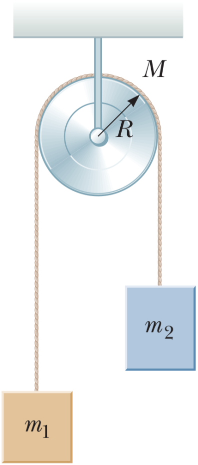
$$T = \frac{Mm}{M + 2m}g$$

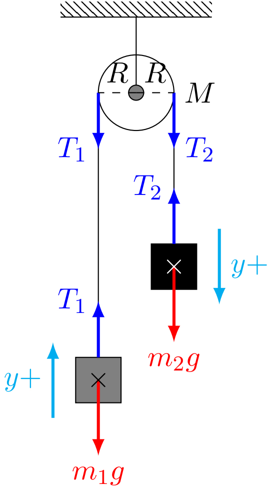
قانون دوم نیوتن برای دوران

مسئله–۳۰: جرمهای m_1 و $m_2(> m_1)$ توسط طنابی از روی قرقره‌ای بدون اصطکاک به شعاع R و جرم M به هم متصل شده‌اند. وقتی جسم از حالت سکون رها می‌شود، الف) اندازه‌ی شتاب اجسام چقدرا است؟ ب) کشش طناب دو طرف قرقره را بدست آورید. ج) اندازه‌ی شتاب زاویه‌ای قرقره را بدست آورید.

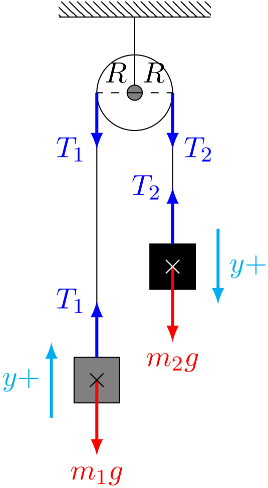


قانون دوم نیوتن برای دوران





قانون دوم نیوتن برای دوران



$$m_1 : \sum F_y = m_1 a \Rightarrow T_1 - m_1 g = m_1 a$$

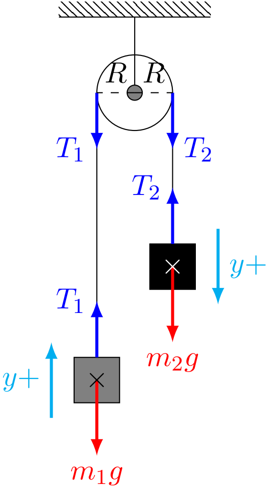
$$m_2 : \sum F_y = m_2 a \Rightarrow m_2 g - T_2 = m_2 a$$

قرقره : $\sum \tau = I\alpha \Rightarrow T_2 R - T_1 R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha$

$$a = R\alpha$$

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_2 R - T_1 R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha \\ \alpha = a/R \end{cases}$$

قانون دوم نیوتن برای دوران



$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_2 - T_1 = \frac{1}{2} M a \end{cases}$$

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + (M/2)} \right) g$$

$$T_1 = \left(\frac{2m_2 + (M/2)}{m_2 + m_1 + (M/2)} \right) m_1 g$$

$$T_2 = \left(\frac{2m_1 + (M/2)}{m_2 + m_1 + (M/2)} \right) m_2 g$$

کار و انرژی دورانی

- انرژی جنبشی در حرکت انتقالی

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

سرعت برای حرکت دورانی خالص

$$v = r\omega$$

انرژی جنبشی برای حرکت دورانی جسم صلبی با لختی دورانی I بصورت زیر بدست می‌آید

$$K = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

- قضیه کار و انرژي در حرکت انتقالی

$$\Delta K_{\text{انتقالی}} = W \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W$$

تغییر انرژی جنبشی در حرکت دورانی خالص

$$\Delta K_{\text{دورانی}} = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

کار و انرژی دورانی

◄ قضیه کار و انرژي در حرکت انتقالی

$$\Delta K_{\text{انتقالی}} = W \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = W$$

کار ناشی از نیروی $\vec{F}$

$$W = \int F \mathrm{d}x$$

تغییر انرژی جنبشی در حرکت دورانی خالص

$$\Delta K_{\text{دورانی}} = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

کار ناشی از گشتاور نیروی $\vec{\tau}$

$$W = \int F_t \mathrm{d}s = \int F_t (r\mathrm{d}\theta) = \int rF_t \mathrm{d}\theta = \int \tau \mathrm{d}\theta$$

کار و انرژی دورانی

- قضیه کار و انرژي در حرکت دورانی خالص

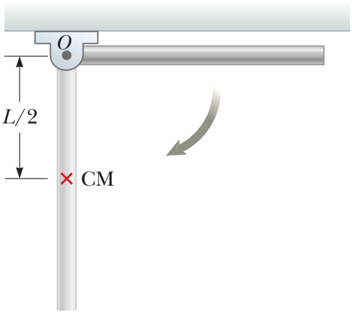
$$\Delta K_{\text{دورانی}} = W \quad \text{یا} \quad \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 = W$$

کار ناشی از گشتاور نیروی τ

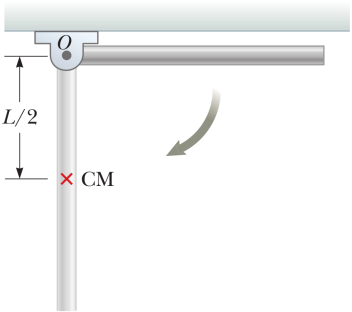
$$W = \int \tau \mathrm{d}\theta$$

حل بوسیله‌ی ملاحظات انرژی

مسئله–۳۱: میله‌ی یکنواختی به طول L و جرم M حول محور بدون اصطکاک عبوری از یک انتهای میله می‌تواند آزادانه بچرخد. مطابق شکل، میله از حالت افقی رها می شود. (الف) هنگامی که میله به پایین‌ترین موقعیت خود می رسد سرعت زاویه‌ای آن چقدر است؟ ب) سرعت مماسی مرکز جرم و پایین‌ترین نقطه‌ی میله را وقتی میله در امتدا قائم قرار دارد را بدست آورید.



حل بوسیله‌ی ملاحظات انرژی



$$\text{پایستگی انرژي} : E_1 = E_2$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$K_1 = U_1 = 0$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$U_2 = -MgL/2$$

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

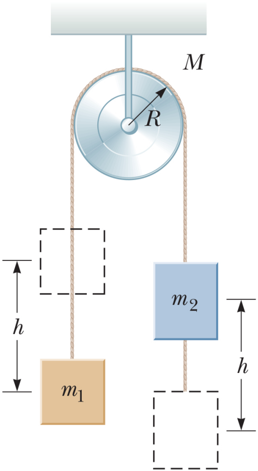
$$0 = \frac{1}{6} ML^2\omega^2 - MgL/2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$v_{\text{CM}} = (L/2)\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

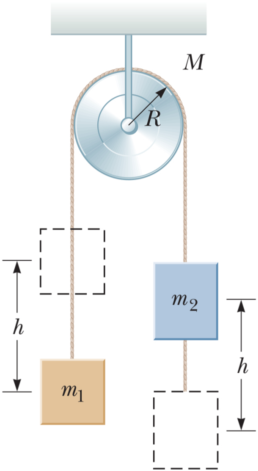
$$v_{\text{انتهای میله}} = L\omega = \sqrt{3gL}$$

حل بوسیله‌ی ملاحظات انرژی



مسئله–۳۲: دو بلوک با جرم های مختلف m_1 و m_2 توسط طنابی که از روی یک قرقره می‌گذرد به هم متصل می شوند. قرقره شعاع R و جرم M دارد. ریسمان روی قرقره نمی لغزد و سیستم از حالت سکون خارج می شود. سرعت انتقال بلوک ها را پس از فرود بلوک ۲ از فاصله h را پیدا کنید و سرعت زاویه‌ای قرقره را در این زمان بیابید.

حل بوسیله‌ی ملاحظات انرژی



$$E_1 = E_2 : \text{پایستگی انرژي}$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$K_1 = U_1 = 0$$

$$K_2 = \frac{1}{2}m_1 v_f^2 + \frac{1}{2}m_2 v_f^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

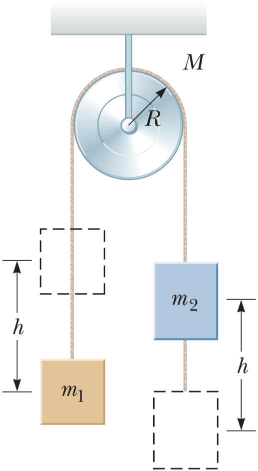
$$U_2 = m_1 gh - m_2 gh$$

$$\omega = v_f/R, \quad I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M\right) v_f^2 = (m_2 - m_1)gh$$

$$v_f = \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + M/2}\right]^{1/2}$$

حل بوسیله‌ی ملاحظات انرژی



$$v_f = \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + M/2}\right]^{1/2}$$

$$\omega = v_f/R,$$

$$\omega = \frac{1}{R}\left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + M/2}\right]^{1/2}$$

مسئله–۳۳: جسمی در فاصله‌ی r ار محور دوران صفحه‌ای قرار دارد و صفحه با سرعت زاویه‌ی ω می‌چرخد. الف)شتاب جسم را بدست آورید. ب)کمینه ضریب اصطکاک ایستایی چقدر باشد تا جسم نلغزد. ج) اگر صفحه از حالت سکون با شتاب زاویه‌ای ثابت α می‌چرخد، کمینه ضریب اصطکاک ایستایی لازم برای جلوگیری از لغزش را بدست آورید.

سرعت زاویه‌ای ثابت : $a_t = 0, \quad a_r = r\omega^2$ بطرف مرکز

$$\sum F_r = ma_r \Rightarrow -f_s = -mr\omega^2$$

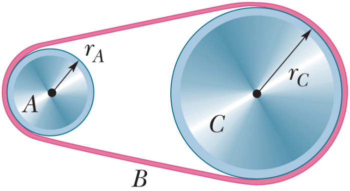
$$f_s \le \mu_s mg \Rightarrow mr\omega^2 \le \mu_s mg \Rightarrow \mu_s \ge \frac{r\omega^2}{g}$$

شتاب زاویه‌ای ثابت : $a_t = r\alpha, \quad a_r = r\alpha^2 t^2$ بطرف مرکز

$$\sum F = ma \Rightarrow f_s = m\sqrt{a_t^2 + a_r^2} = mr\alpha\sqrt{1+\alpha^2 t^4}$$

$$f_s \le \mu_s mg \Rightarrow mr\alpha\sqrt{1+\alpha^2 t^4} \le \mu_s mg \Rightarrow \mu_s \ge \frac{r\alpha}{g}\sqrt{1+\alpha^2 t^4}$$

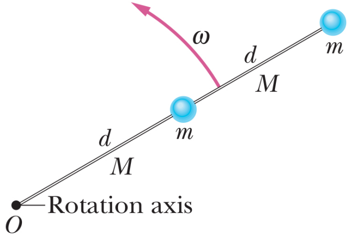
مسئله–۳۴: در شکل چرخ A با شعاع r_A بوسیله تسمه‌ی B به چرخ C با شعاع r_C متصل است. اندازه‌ی سرعت زاویه‌ای چرخ A از حالت سکون با آهنگ ثابت α افزایش می‌یابد. زمان لازم برای رسیدن چرخ C به اندازه‌ی سرعت ω_C را بدست آورید. فرض کنید تسمه نمی‌لغزد.



$$a_t^A = a_t^C \Rightarrow r_A \alpha_A = r_C \alpha_C \Rightarrow \alpha_C = \frac{r_A}{r_C}\alpha$$

$$\omega_C = \alpha_C t \Rightarrow t = \omega_C/\alpha_C = (\omega_C/\alpha)\frac{r_C}{r_A}$$

مسئله‌–۳۵: در شکل دو ذره هریک به جرم m بوسیله‌ی دو میله‌ی نازک به هم وصل شده‌اند و مجموع حول محور دوران O قرار دارد. جرم هر میله M و طول هر میله d است.مجموع با اندازه سرعت زاویه‌ی ω حول محور دوران می چرخد. الف) لختی دوران ب) انرژی جنبشی مجموع را بدست آورید.

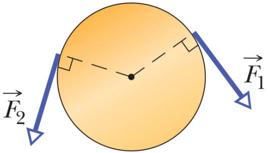


$$I_{\text{کل}} = I_{\text{میله}} + I_{\text{جرمها}}$$

$$I_{\text{کل}} = \frac{1}{3}(2M)(2d)^2 + md^2 + m(2d)^2 = \frac{8}{3}Md^2 + 5md^2$$

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{کل}}\omega^2 = \left[\frac{4}{3}M + \frac{5}{2}m\right](d\omega)^2$$

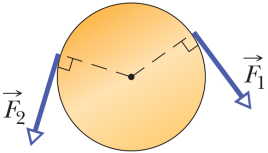
مسئله–۳۶: قرص یکنواختی می‌تواند حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد مانند چرخ و فلک افقی بچرخد. شعاع قرص R و جرمش M و در ابتدا ساکن است. در لحظه‌ی $t = 0$ دو نیرو مماس بر لبه قرص به آن وارد می‌شوند. الف) شتاب زاویه‌ای قرص را بدست آورید. ب) تابع سرعت زاویه‌ای بر حسب زمان تعیین کنید.



$$\sum \tau = I\alpha$$

اگر $F_1 > F_2$: $R(F_1 - F_2) = \frac{1}{2}MR^2\alpha$: حرکت ساعتگرد

مسئله-۳۶:



$$R(F_1 - F_2) = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{2(F_1 - F_2)}{MR}$$

$$\omega(t) = \frac{(F_1 - F_2)}{MR}t^2$$

مسئله–۳۷: یک دودکش استوانه‌ای بلند در اثر شکستن پایه‌اش می‌افتد. دودکش را مانند میله‌ی نازک به طول L در نظر بگیرید. در لحظه‌ای که زاویه‌ی آن با امتداد قائم θ است، الف) شتاب شعاعی نوک، ب) شتاب مماسی نوک آنرا بدست آورید (از ملاحظات انرژی استفاده کنید).

$$E_{\text{وقتی دودکش در امتداد قائم قرار دارد}} = E_{\text{وقتی دودکش با امتداد قائم زاویه‌ی } \theta \text{ می‌سازد}}$$

$$Mg(L/2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2 + Mg(L/2)\cos\theta$$

$$\omega^2 = (3g/L)(1-\cos\theta)$$

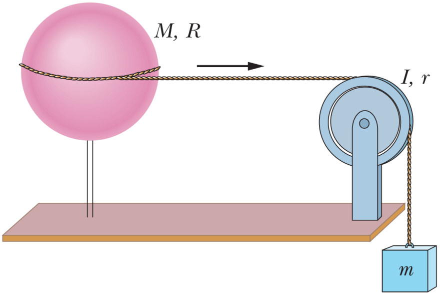
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3g/L)(1-\cos\theta)$$

$$2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = (3g/L)\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = (3g/L)\sin\theta\omega$$

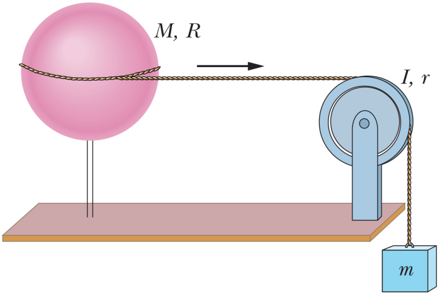
$$\alpha = (3g/2L)\sin\theta$$

$$a_t = L\alpha = (3g/2)\sin\theta, \quad a_r = -L\omega^2 = -3g(1-\cos\theta)$$

مسئله–۳۸: پوسته‌ی کروی یکنواختی به جرم M و شعاع R می‌تواند بر روی پایه‌ی بدون اصطکاک قائمی بچرخد. طناب بدون جرمی بدور استوانه پیچیده شده و از روی قرقره‌ای با لختی دورانی I و شعاع r عبور کرده و به جسم کوچکی به جرم m متصل است. محور قرقره بدون اصطکاک است و طناب بر روی قرقره نمی‌لغزد. وقتی جسم رها می‌شود و به اندازه h پایین می‌رود، اندازه‌ی سرعت جسم را بدست آورید (از ملاحظات انرژی استفاده کنید).



مسئله–۳۸:

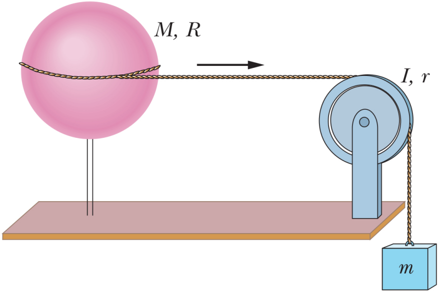


$$E_1 = E_2$$

$$0 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}MR^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$v = R\omega_1, \quad v = r\omega_2$$

مسئله–۳۸:

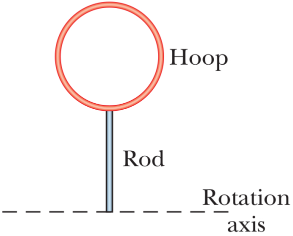


$$0=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}MR^2\right)\omega_1^2+\frac{1}{2}I\omega_2^2+\frac{1}{2}mv^2-mgh$$

$$v=R\omega_1,\quad v=r\omega_2$$

$$mgh=\frac{1}{3}Mv^2+\frac{1}{2}(I/r^2)v^2+\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{mgh}{M/3+I/2r^2+m/2}}$$

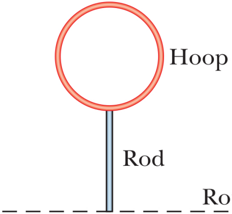
مسئله–۳۹: شکل، مجموعه‌ای از حلقه‌ی نازک به جرم m و شعاع R ویک میله‌ی شعاعی نازک به جرم m و طول $2R$ را نشان می‌شدهد. مجموعه بصورت قائم قرار دارد اما با یک تلنگر کوچک حول محور افقی واقع در صفحه‌ی میله و حلقه و عبوری از انتهای پایین میله می‌چرخد.اندازه‌ی سرعت زاویه‌ای مجموعه هنگام عبور از حالت سرو ته (برعکس) چقدر است؟



اگر مبدا روی محور دوران قرار داده شود، مرکز جرم میله و حلقه

$$Y = \frac{mR + 3mR}{2m} = 2R$$

مسئله–۳۹:



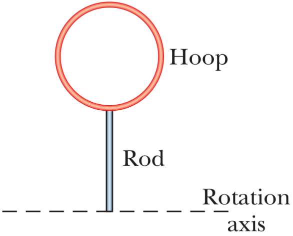
$$Y = \frac{mR + 3mR}{2m} = 2R$$

اگر محور دوران را سطح مرجع پتانسیل قرار دهیم،

$$E_1 = E_2$$

$$0 + (2mg)(2R) = \frac{1}{2} I_{\text{کل}} \omega^2 - (2mg)(2R) \Rightarrow \frac{1}{2} I_{\text{کل}} \omega^2 = 8mgR$$

مسئله–۳۹:

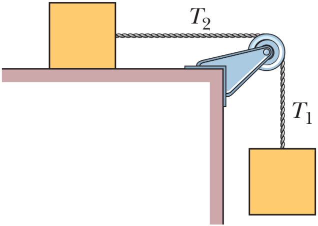


$$\frac{1}{2}I_{\text{کل}}\omega^2 = 8mgR$$

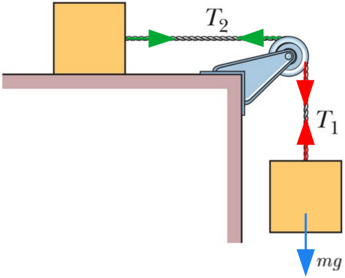
$$I_{\text{کل}} = I_{\text{میله}} + I_{\text{حلقه}} = \frac{1}{3}m(2R)^2 + \frac{1}{2}mR^2 + m(3R)^2 = \frac{65}{6}mR^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{96g}{65R}}$$

مسئله–۴۰: در شکل، دو جسم به جرم m توسط نخی بدون جرم به هم وصل شده‌اند و نخ از دور قرقره‌ای با شعاع R و لختی دورانی I عبور کرده است. نخ بر روی قرقره نمی‌لغزد و بین جسم لغزنده و میز اصطکاک وجود ندارد. شتاب اجسام را بدست آورید. ب) کششهای طناب T_1 و T_2 چقدر است؟



مسئله- ۴۰:



$$\sum F_x = ma \; : \text{جرم روی سطح افقی}$$

$$T_2 = ma$$

$$\sum F_y = ma \; : \text{جرم آویزان}$$

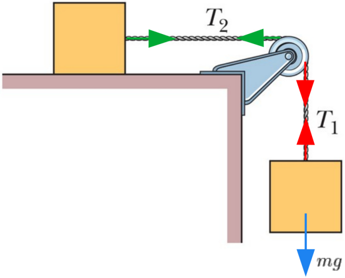
$$mg - T_1 = ma$$

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$R(T_1 - T_2) = I\alpha = Ia/R$$

$$\begin{cases} T_2 = ma \\ mg - T_1 = ma \\ T_1 - T_2 = Ia/R^2 \end{cases}$$

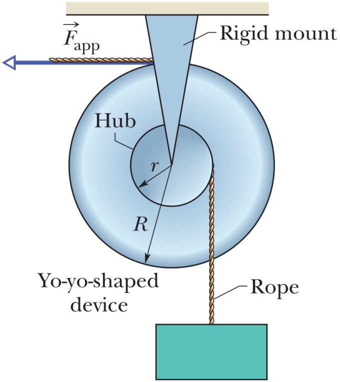
مسئله- ۴۰:



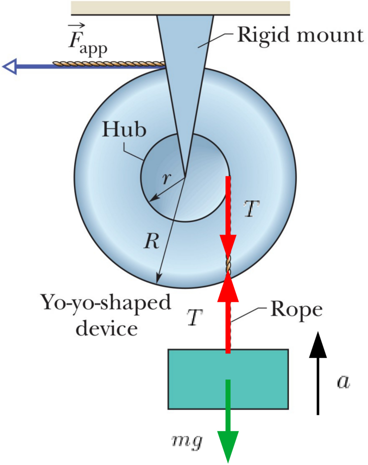
$$\begin{cases} T_2 = ma \\ mg - T_1 = ma \\ T_1 - T_2 = Ia/R^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = [m/(2m + I/R^2)]g \\ T2 = [m/(2m + I/R^2)]mg \\ T_1 = [1 - m/(2m + I/R^2)]mg \end{cases}$$

مسئله–۴۱: در شکل، وسیله‌ای به شکه شکل یویو بر روی محور افقی بدون اصطکاک نصب شده است و برای بردن جعبه‌ای به جرم m به کار می‌رود. شعاع خارجی R و شعاع داخلی r است. وقتی نیروی F_{app} به طناب وارد می‌شودکه به دور لبه‌ی خارجی پیچیده شده است. اگر جعبه با شتاب a بالا برود، لختی دورانی حول محور دوران را بدست آورید.



مسئله-۴۱:



اگر کشش طناب حول محور به شعاع r را برابر T در نظر بگیریم،

$$m: \sum F = ma$$

$$T - mg = ma \Rightarrow T = m(g+a)$$

شتاب زاویه‌ای α حول محور یویو

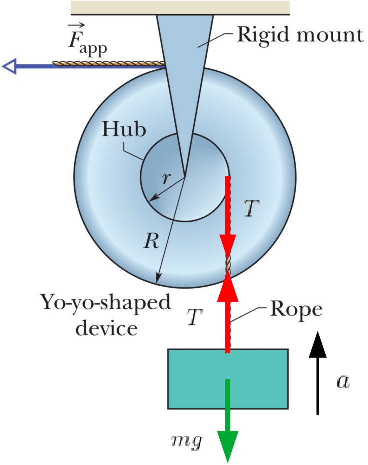
$$\text{یویو}: \sum \tau = I\alpha$$

$$F_{app}R - Tr = I\alpha$$

$$F_{app}R - m(g+a)r = I\alpha$$

$$\alpha = [F_{app}R - m(g+a)r]/I$$

مسئله–۴۱:



شتاب مماس روی شعاع داخلی برابر است با $a = \alpha r$. بنابراین

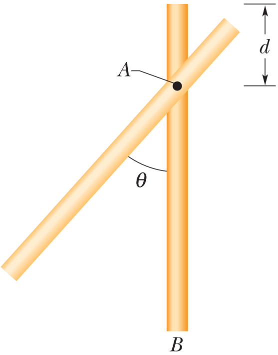
$$\begin{cases} \alpha = [F_{\text{app}}R - m(g+a)r]/I \\ a = \alpha r \end{cases}$$

از دو رابطه‌ی بالا لختی دورانی I برابر است با

$$a/r = [F_{\text{app}}R - m(g+a)r]/I$$

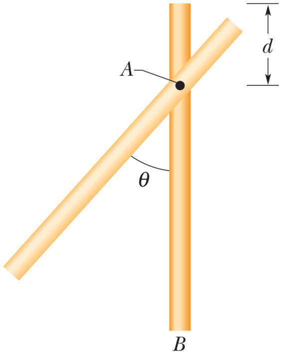
$$I = [F_{\text{app}}rR - m(g+a)r^2]/a$$

مسئله–۴۲: میله‌ای نازک و یکنواخت به طول L و جرم M بطور آزادانه حول محور افقی A عمود بر میله و عبوری از نقطه‌ای به فاصله‌ی $d = L/4$ از سر میله دوران می‌کند.اگر انرژی جنبشی میله هنگام عبور از امتداد قائم E_k باشد، الف) لختی دورانی میله حول محور A را بدست آورید. ب) هنگام عبور میله از امتداد قائم، اندازه‌ی سرعت نقطه‌ی B چقدر است؟ ج) هنگام بالا رفتن، میله موقتا در چه زاویه θی می‌ایستد؟



مسئله-۴۲:

الف)



$$I_A = I_{CM} + M(L/4)^2$$

$$I_{CM} = ML^2/12$$

$$I_A = ML^2/12 + ML^2/16$$

$$I_A = 7ML^2/48$$

ب)

$$E_k = I_A\omega^2/2$$

$$E_k = (7ML^2/48)\omega^2/2$$

$$\omega = \sqrt{96E_k/7ML^2}$$

$$v_B = (3L/4)\omega = \sqrt{54E_k/7M}$$

مسئله-۴۲:

ج) اگر مرجع پتانسیل را روی مرکز جرم در نظر گرفته شود، در زاویه‌ی θ مرکز جرم نسبت به حالت قائم به اندازه‌ی

$$h = (L/4)(1 - \cos\theta)$$

بالا می‌رود. بنابراین

$$E_{\text{امتداد قائم}} = E_{\text{در زاویه‌ی منحرف شده}}$$

$$E_k = Mg(L/4)(1 - \cos\theta)$$

$$\cos\theta = 1 - 4E_k/MgL$$