فیزیک ۱
غلتش

محمدرضا مظفری

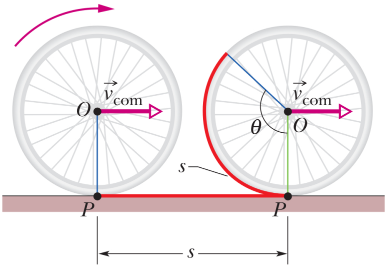
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

غلتش بصورت ترکیبی از انتقال و دوران

◄ در حرکت غلتشی، مطابق شکل، مرکز جرم چرخ در یک خط مستقیم حرکت می کند و محور دوران عبوری از آن در هر لحظه موازی خواهد ماند.

◄ وقتی چرخی می‌غلتد، مطابق شکل، مرکز جرم O با سرعت v_{CM} بطرف جلو می رود. همچنین نقطه‌ی P (یعنی نقطه تماس چرخ با سطح) با سرعت v_{CM} بطرف جلو می‌رود.



غلتش بصورت ترکیبی از انتقال و دوران

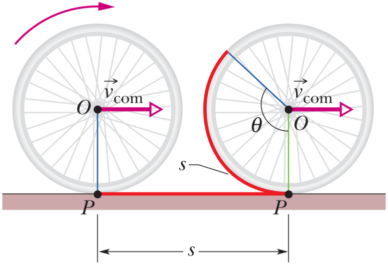
◀ در بازه‌ی زمانی t، مرکز جرم O و نقطه‌ی Pی چرخ، مسافت s را می‌پیماید. همچنین در اثر غلتش چرخ به اندازه‌ی زاویه‌ی θ، نقطه‌ی تماس اولیه چرخ با سطح، کمانی بطول s را می‌پیماید. رابطه‌ی زاویه چرخش و مسافت طی شده بصورت

$$s = R\theta$$

داده می‌شود که R شعاع چرخ است.

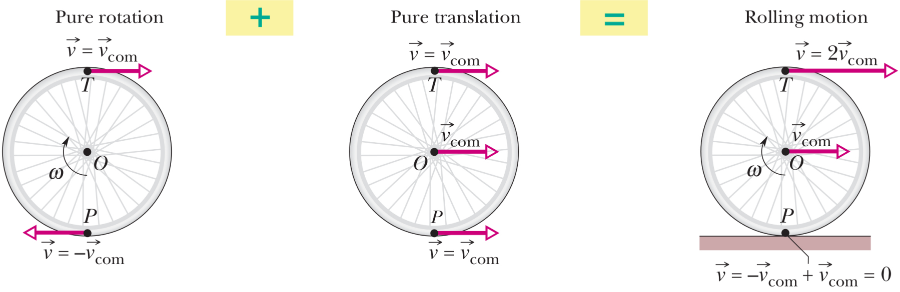
◀ سرعت مرکز جرم چرخ با شعاع ثابت

$$v_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$



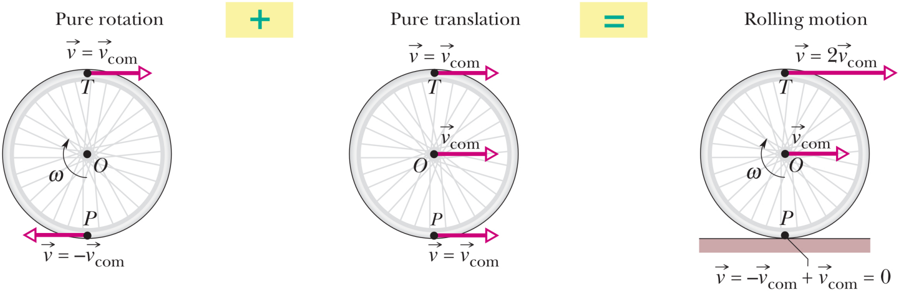
غلتش بصورت ترکیبی از انتقال و دوران

◄ حرکت غلتشی چرخ ترکیبی از حکت انتقالی خالص و حرکت دورانی خالص است.



◄ اگر چرخ بخواهد یک غلتش خالص داشته باشد، باید نیروی اصطکاکی در نقطه‌ی P به چرخ وارد شود تا از لغزش چرخ جلوگیری کند. این نیروی اصطکاک یک **نیروی اصطکاک ایستایی** است.

انرژی جنبشی غلتشی

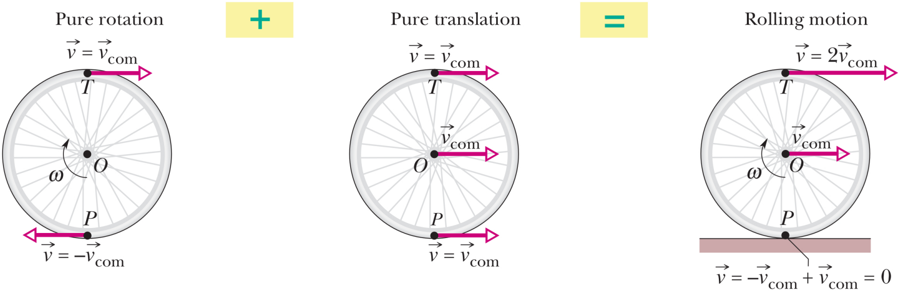


انرژی جنبشی انتقالی + انرژی جنبشی دورانی = انرژي جنبشی غلتشی

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M (R\omega)^2 = \frac{1}{2} (I_{CM} + MR^2)\omega^2$$

انرژی جنبشی غلتشی

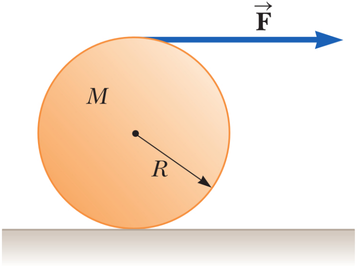


$$K = \frac{1}{2}(I_{\text{CM}} + MR^2)\omega^2$$

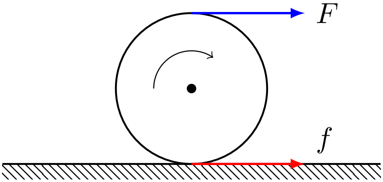
$$I_P = I_{\text{CM}} + MR^2$$

$$K = \frac{1}{2}I_P\omega^2$$

مسئله-۱: مطابق شکل، طناب قرقره‌ای به جرم M و شعاع R تحت نیروی ثابت F باز می شود. با فرض اینکه قرقره یک استوانه‌ی یکنواخت جامد است که نمی لغزد ، نشان می دهد که الف) شتاب مرکز جرم $4F/3M$ است و ب) نیروی اصطکاک به سمت راست و از نظر بزرگی برابر است با $F/3$. ج) اگر استوانه از حالت سکون شروع به حرکت کند و بدون لغزش غلتیده شود، سرعت مرکز جرم آن پس از طی کردن مسافت d چقدر است؟



مسئله–۱:

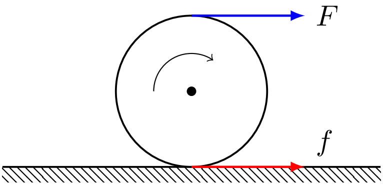


$$\sum F = Ma \Rightarrow F + f = Ma$$

$$\sum \tau = I_{\text{CM}}\alpha \Rightarrow (F - f)R = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R}\right)$$

$$\begin{cases} F + f = Ma \\ F - f = \frac{1}{2}Ma \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4F}{3M}, \quad f = \frac{1}{3}F$$

مسئله–۱:

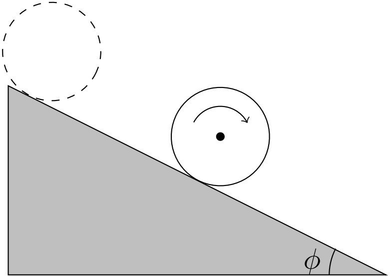


$$a = \frac{4F}{3M}, \quad f = \frac{1}{3}F$$

حرکت با شتاب ثابت

$$v^2 - v_0^2 = 2ad \Rightarrow v^2 - 0 = \frac{8Fd}{3M} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{8Fd}{3M}}$$

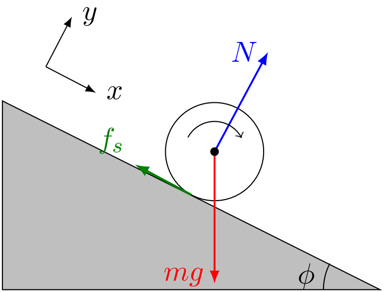
مسئله-۲: جسم دوار یکنواختی به جرم M و شعاع R از بالای سطح شیبداری به زاویه‌ی شیب ϕ بطرف پایین می‌غلتد. شتاب مرکز جرم جسم را بدست آورید.



$$\begin{cases} \text{کره توخالی}: & I_{\text{CM}} = \frac{2}{3}MR^2 \\ \text{کره توپر}: & I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}MR^2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \text{استوانه توخالی}: & I_{\text{CM}} = MR^2 \\ \text{استوانه توپر}: & I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}MR^2 \end{cases}$$

غلتش

مسئله–۲:



روش اول: دوران حول مرکز جرم

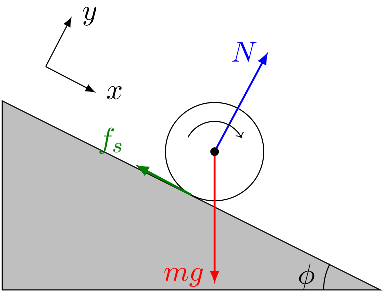
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - Mg\cos\phi = 0 \Rightarrow N = Mg\cos\phi$$

$$\sum F_x = Ma_{\text{CM}} \Rightarrow Mg\sin\phi - f_s = Ma_{\text{CM}}$$

$$\sum \tau_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}\alpha \Rightarrow f_s R = I_{\text{CM}}\frac{a_{\text{CM}}}{R} \Rightarrow f_s = \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}a_{\text{CM}}$$

غلتش

مسئله–۲:

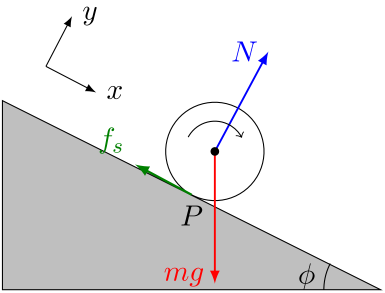


روش اول: دوران حول مرکز جرم

$$\begin{cases} Mg\sin\phi - f_s = Ma_{\text{CM}} \\ f_s = \dfrac{I_{\text{CM}}}{R^2} a_{\text{CM}} \end{cases} \Rightarrow a_{\text{CM}} = \frac{g\sin\phi}{1 + I_{\text{CM}}/MR^2}$$

$$f_s = \frac{(I_{\text{CM}}/R^2) g \sin\phi}{1 + I_{\text{CM}}/MR^2}$$

غلتش



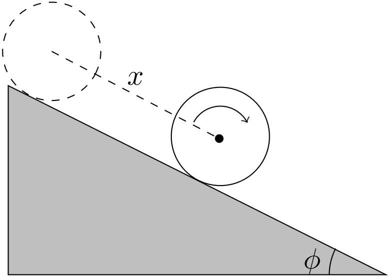
روش دوم: دوران حول محور لحظه‌ای P

$$\sum \tau_P = I_P \alpha' \Rightarrow MgR\sin\phi = (I_{\text{CM}} + MR^2)\alpha'$$

$$\alpha' = \frac{MgR\sin\phi}{I_{\text{CM}} + MR^2} \Rightarrow a_{\text{CM}} = R\alpha' = \frac{MgR^2\sin\phi}{I_{\text{CM}} + MR^2} = \frac{g\sin\phi}{1 + I_{\text{CM}}/MR^2}$$

غلتش

مسئله-۲:



روش سوم: استفاده از پایستگی انرژي

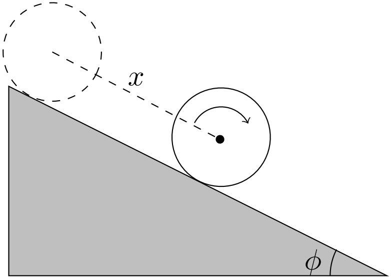
$$E_{\text{دلخواه}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 - Mgx\sin\phi$$

$$E_{\text{دلخواه}} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{I_{\text{CM}}}{R^2}\dot{x}^2 - Mgx\sin\phi$$

پایستگی انرژی : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\text{دلخواه}} = 0 \Rightarrow M\dot{x}\ddot{x} + \frac{I_{\text{CM}}}{R^2}\dot{x}\ddot{x} - Mg\dot{x}\sin\phi = 0$

غلتش

مسئله–۲:



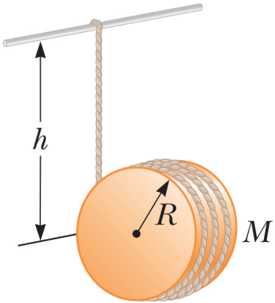
روش سوم: استفاده از پایستگی انرژی

$$\dot{x}\left(M\ddot{x}+\frac{I_{\text{CM}}}{R^2}\ddot{x}-Mg\sin\phi\right)=0$$

$\dot{x}=0$ غیرقابل قبول

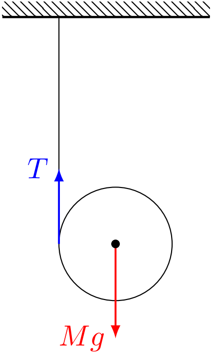
$$\ddot{x}=\frac{g\sin\phi}{1+I_{\text{CM}}/MR^2}=a_{\text{CM}}$$

غلتش



مسئله–۳: یک ریسمان به دور یک صفحه یکنواخت به شعاع R و جرم M پیچیده می‌شود. دیسک با ریسمان عمودی از حالت سکون خارج می‌شود و انتهای بالایی آن به یک میله ثابت بسته می‌شود. نشان دهید که (الف) کشش رشته یک سوم وزن دیسک است، (ب) بزرگی شتاب مرکز جرم برابر با $2g/3$ است، و (ج) سرعت مرکز جرم $(4gh/3)^{1/2}$ بعد از اینکه دیسک از فاصله h فرود آمد است. (د) پاسخ خود را به بخش (ج) با استفاده از رویکرد انرژی تأیید کنید.

مسئله-۳:



$$\sum F_y = Ma_{\text{CM}}$$

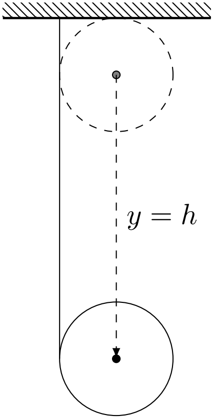
$$Mg - T = Ma_{\text{CM}}$$

$$\sum \tau_{\text{CM}} = I_{\text{CM}}\alpha$$

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\frac{a_{\text{CM}}}{R}$$

$$T = \frac{1}{2}Ma_{\text{CM}}$$

$$\begin{cases} Mg - T = Ma_{\text{CM}} \\ T = \frac{1}{2}Ma_{\text{CM}} \end{cases} \Rightarrow a_{\text{CM}} = \frac{2}{3}g, \quad T = \frac{1}{3}Mg$$



مسئله–۳:

$$a_{\text{CM}} = \frac{2}{3}g$$

حرکت با شتاب ثابت

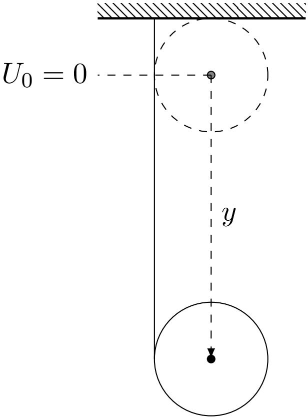
$$v^2 - v_0^2 = 2a_{\text{CM}}y$$

شرایط اولیه : $y_0 = 0,\ v_0 = 0$

برای $y = h :\ v^2 = \frac{4}{3}gh$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

مسئله–۳:



$$E = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 - Mgy$$

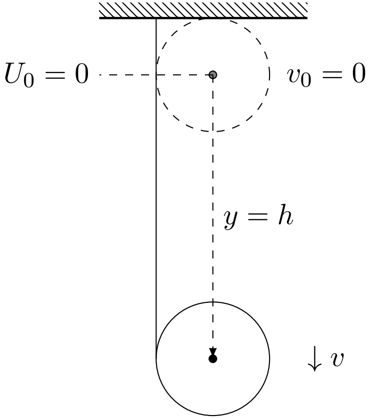
$$E = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\dot{y}}{R}\right)^2 - Mgy$$

$$E = \frac{3}{4}M\dot{y}^2 - Mgy$$

پایستگی انرژی : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_{\text{دلخواه}} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}M\dot{y}\ddot{y} - Mg\dot{y} = 0 \Rightarrow \dot{y}[(3/2)M\ddot{y} - Mg] = 0$

$\dot{y} = 0$ غیرقابل قبول, $\quad \ddot{y} = \frac{2}{3}g = a_{\text{CM}}$

مسئله–۳:



$$E_{\text{حالت اولیه}} = E_{\text{حالت نهایی}}$$

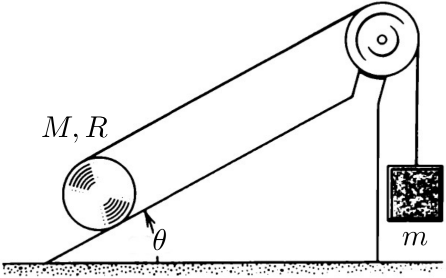
$$0 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 - Mgh$$

$$0 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2 - Mgh$$

$$0 = \frac{3}{4}Mv^2 - Mgh$$

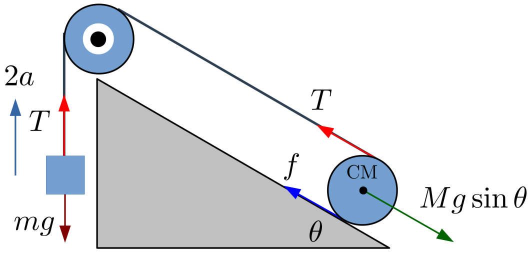
$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

مسئله–۴: مطابق شکل به دور یک استوانه‌ی توپر به جرم M و شعاع R نوار نازک و سبکی پیچیده شده است. سر دیگر نوار از روی قرقره‌ی ثابت و سبکی به ذره‌ی دیگری به جرم m در امتداد قائم متصل شده است. استوانه بدون لغزش از روی سطح شیبداری به زاویه‌ی شیب θ بطرف پایین می‌غلتد. الف) شتاب استوانه و ب) کشش نوار را بدست آورید.



غلتش

مسئله–۴:



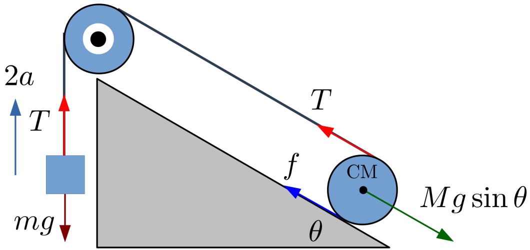
برای ذره‌ی به جرم M داریم،

$$\sum F = Ma \Rightarrow Mg\sin\theta - T - f = Ma$$

$$\sum \tau = \mathbb{I}_{\mathrm{CM}}\alpha \Rightarrow (f - T)R = \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R}\right)$$

غلتش

مسئله–۴:



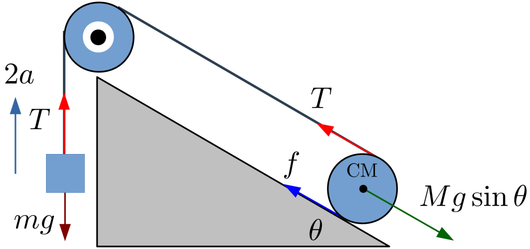
برای ذره‌ی به جرم m داریم،

$$\sum F = m2a \Rightarrow T - mg = m(2a)$$

نکته: اگر مرکز جرم استوانه‌ی توپر با شتاب a از سطح شیبدار پایین بغلتد، قسمت بیرونی استوانه که طناب از آنجا به دور استوانه می‌پیچد، شتاب $2a$ دارد. بنابراین جرم m شتاب $2a$ خواهد داشت.

غلتش

مسئله-۴:

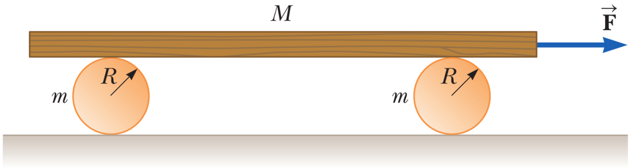


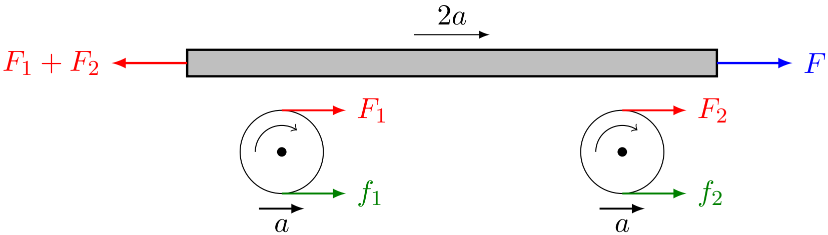
$$\begin{cases} Mg\sin\theta - T - f = Ma \\ f - T = \frac{1}{2}Ma \\ T - mg = 2ma \end{cases}$$

$$a = \frac{2M\sin\theta - 4m}{3M + 8m}g, \quad T = \left(\frac{3M + 4M\sin\theta}{3M + 8m}\right)mg$$

غلتش

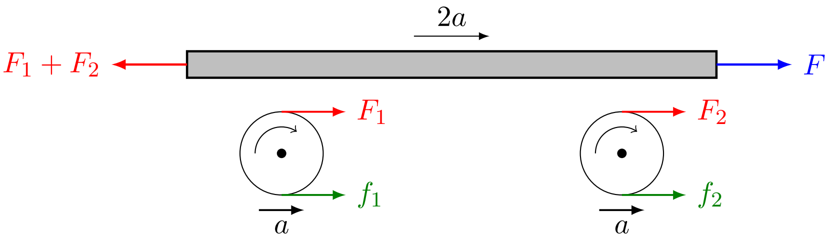
مسئله–۵: تخته‌ای با جرم M بر بالای دو غلتک استوانه‌ای مستقل و یکسان قرار گرفته است که شعاع R و جرم m دارند. مطابق شکل، تخته با نیروی افقی و ثابت F در امتداد عمود بر محورهای استوانه ها (که موازی هستند) کشیده می‌شود. استوانه‌ها بدون لغزش روی سطح صاف می‌غلتند. الف) شتاب تخته و غلتک را پیدا کنید. ب) چه نیروهای اصطکاکی عمل می کنند؟





غلتش

مسئله–۵:



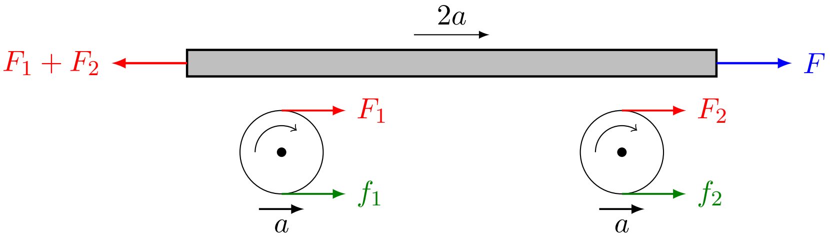
بدلیل یکسان بودن استوانه‌ها و همچنین موازی بود محورهای آنها در حین غلتش، نیروهای اصطکاک بین تخته و استوانه با یکدیگر برابرند، $F_1 = F_2$ و نیروهای اصطکاک بین زمین و استوانه با یکدیگر برابرند، $f_1 = f_2$. بنابراین برای یکی از استوانه‌ها دینامیک مسئله بصورت زیر داده می‌شود،

$$\sum F = ma \Rightarrow F_1 + f_1 = ma$$

و

$$\sum \tau = I_{\text{CM}}\alpha \Rightarrow (F_1 - f_1)R = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R}$$

مسئله–۵:

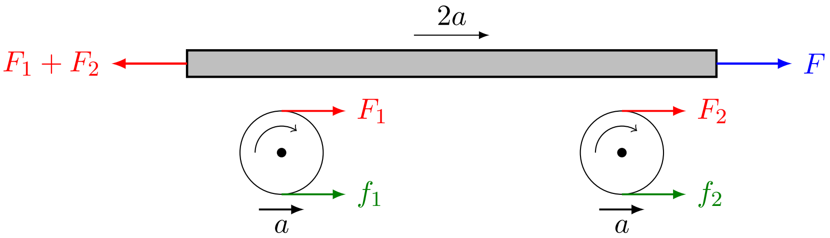


تختهی M چون بر روی قسمت بیرونی استوانهها قرار دارد، شتابی دو برابر شتاب مرکز جرم استوانهها دارد. یعنی،

$$\sum F = M(2a) \Rightarrow F - (F_1 + F_2) = 2Ma$$

غلتش

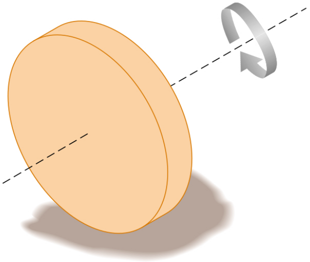
مسئله–۵:



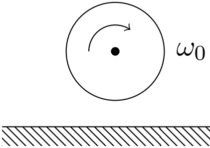
$$\begin{cases} F - 2F_1 = 2Ma \\ F_1 + f_1 = ma \\ F_1 - f_1 = \frac{1}{2}ma \end{cases}$$

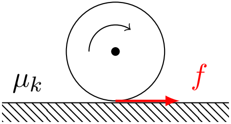
$$a = \frac{2F}{4M + 3m}, \quad F_1 = F\left(\frac{3m}{8M + 6m}\right), \quad f_1 = F\left(\frac{m}{8M + 6m}\right)$$

مسئله–۶: فرض کنید که دیسک جامدی به شعاع R با سرعت زاویه‌ای ω_0 حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد، می‌چرخد. سپس آنرا بر روی یک سطح افقی پایین آورده و رها می‌کنیم. فرض کنید که ضریب اصطکاک بین دیسک و سطح μ باشد. الف) نشان دهید که مدت زمان لازم برای اینکه حرکت غلتشی خالص اتفاق افتد برابر است با $R\omega_0/3\mu g$. ب) نشان دهید مسافتی را که دیسک تا قبل از حرکت غلتشی خالص طی می کند برابر است با $R^2\omega_0^2/18\mu g$.



مسئله-۶:





لغزش و غلتش

برای حالتی که غلتش و لغزش داریم روابط $v = R\omega$ و $a = R\alpha$ برقرار نیستند. بنابراین

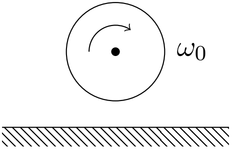
$$\sum F = ma \Rightarrow f_k = ma \Rightarrow a = \mu_k g$$

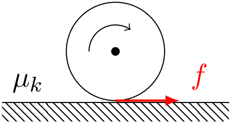
و

$$\sum \tau = I_{\text{CM}}\alpha \Rightarrow -\mu_k mgR = \frac{1}{2}mR^2\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{2\mu_k g}{R}$$

غلتش

مسئله–۶:





لغزش و غلتش

$$a = \mu_k g, \quad \alpha = -\frac{2\mu_k g}{R}$$

سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای بصورت زیر بدست می‌آید،

$$v = \mu_k g t, \quad \omega = -\frac{2\mu_k g}{R} t + \omega_0$$

غلتش

مسئله–۶:

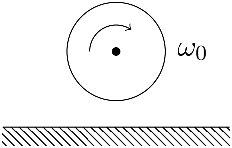
وقتی غلتش خالص شروع می‌شود که $v(t) = R\omega(t)$ باشد. بنابراین

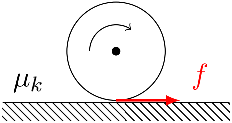
$$v = R\omega \Rightarrow \mu_k g t = -2\mu_k g t + R\omega_0$$

از رابطه بالا می‌توان زمان t را بدست آورد،

$$t = \frac{R\omega_0}{3\mu_k g}$$

که مدت زمان لازم برای اینکه حرکت غلتشی خالص اتفاق افتد.

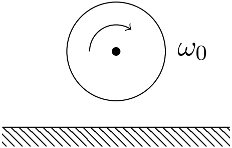




لغزش و غلتش

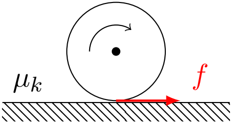
غلتش

مسئله–۶:



مکان دیسک از لحظه قرار گرفتن روی سطح از رابطه زیر بدست می‌آید،

$$x(t) = \frac{1}{2}\mu_k g t^2$$



لغزش و غلتش

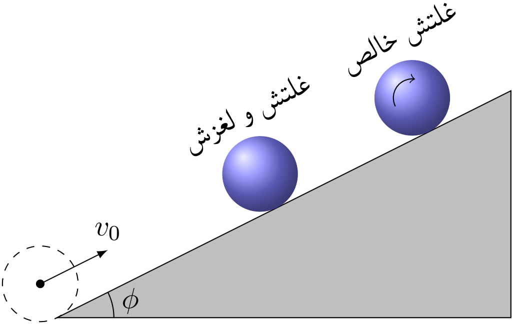
بنابراین مسافت طی شده تا قبل از غلتش خالص برابر است با

$$x(t = R\omega_0/3\mu_k g) = \frac{1}{2}\mu_k g \left(\frac{R\omega_0}{3\mu_k g}\right)^2$$

$$x = \frac{R^2\omega_0^2}{18\mu_k g}$$

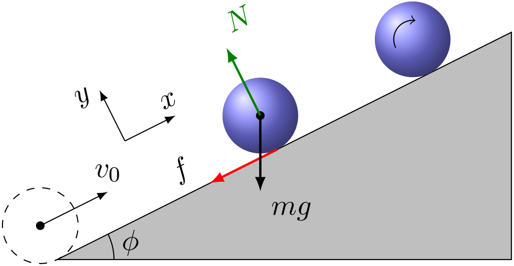
غلتش

مسئله–۷: توپی ابتدا بدون چرخش با سرعت v_0 روی سطح شیبداری ناصاف به زاویه شیب θ و ضریب اصطکاک لغزشی μ_k به بالا پرتاب می‌شود. الف) مکان توپ را بصورت تابعی از زمان تعیین کنید. ب) در چه مکانی غلتش خالص توپ شروع می‌شود؟



غلتش

مسئله–۷:



برای حالتی که غلتش و لغزش داریم روابط $v = R\omega$ و $a = R\alpha$ برقرار **نیستند**. بنابراین

$$\sum F = ma \Rightarrow -mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = ma$$

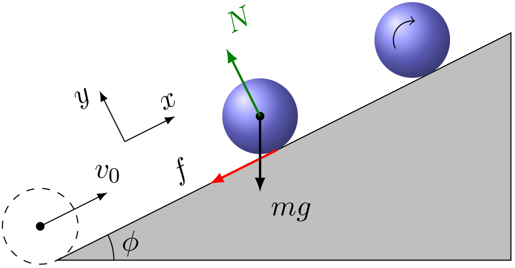
$$a = -(\sin\theta + \mu_k\cos\theta)g$$

$$\sum \tau = I_{\text{CM}}\alpha \Rightarrow \mu_k mg\cos\theta R = \frac{2}{5}mR^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{5\mu_k g\cos\theta}{2R}$$

غلتش

مسئله–۷:



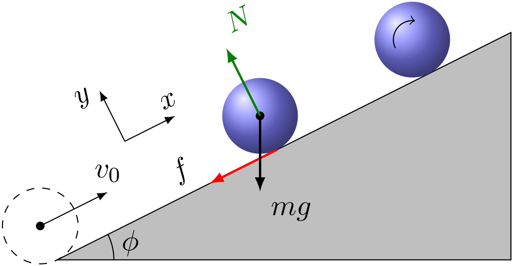
$$a = -(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)g, \quad \alpha = \frac{5\mu_k g \cos\theta}{2R}$$

سرعت خطی و سرعت زاویه‌ای بصورت زیر بدست می‌آید،

$$v = -(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)gt + v_0$$

$$\omega = \frac{5\mu_k g \cos\theta}{2R} t$$

مسئله–۷:



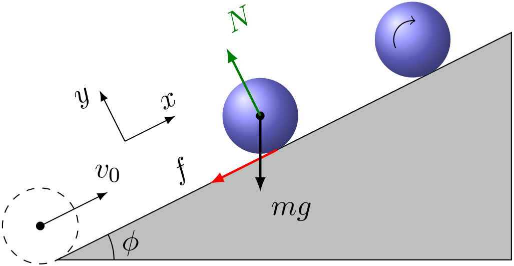
$$v = -(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)gt + v_0, \quad \omega = \frac{5\mu_k g \cos\theta}{2R} t$$

وقتی غلتش خالص شروع می‌شود که $v(t) = R\omega(t)$ باشد. بنابراین

$$v = R\omega \Rightarrow -(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)gt + v_0 = \frac{5}{2}\mu_k g t \cos\theta$$

غلتش

مسئله–۷:

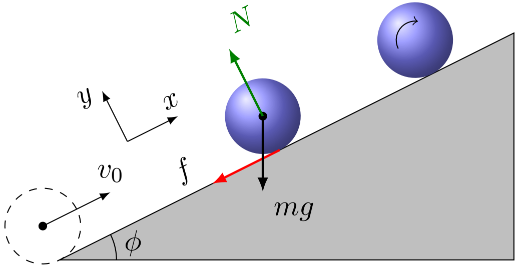


$$v = R\omega \Rightarrow -(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)gt + v_0 = \frac{5}{2}\mu_k gt\cos\theta$$

از رابطه بالا می‌توان زمان شروع غلتش t را بدست آورد،

$$t = \frac{2v_0}{g(2\sin\theta + 7\mu_k\cos\theta)}$$

مسئله–۷:



که مدت زمان لازم برای اینکه حرکت غلتشی خالص اتفاق افتد. مکان توپ از لحظه قرار گرفتن روی سطح از رابطه زیر بدست می‌آید،

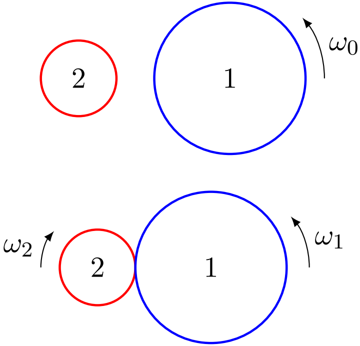
$$x(t) = -\frac{1}{2}(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)gt^2 + v_0 t$$

بنابراین مسافت طی شده تا قبل از غلتش خالص برابر است با

$$x = \frac{2v_0^2}{g}\,\frac{\sin\theta + 6\mu_k\cos\theta}{(2\sin\theta + 7\mu_k\cos\theta)^2}$$

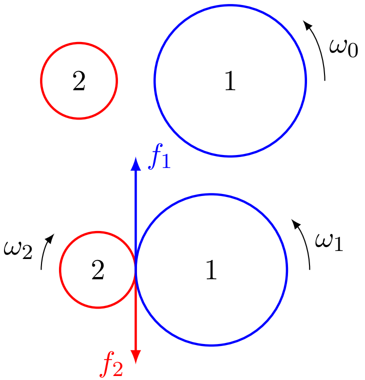
غلتش

مسئله–۸: دو استوانه به شعاع‌های R_1 و R_2 به ترتیب دارای لختی دورانی I_1 و I_2 هستند. مطابق شکل محورهای این استوانه‌ها عمود بر صفحه نگهداری می‌شوند. استوانه بزرگ در آغاز با سرعت زاویه‌ای ω_0 در حرکت است.استوانه کوچکتر به سمت راست حرکت داده می‌شود تا با استوانه بزرگتر تماس پیدا کند و بواسطه اصطکاک با استوانه دیگر به دوران در بیاید. سرانجام لغزش به پایان می‌رسد و دو استوانه با آهنگهای ثابت و در جهتهای مخالف دوران می‌کنند. سرعت زاویه‌ی نهایی، ω_2، استوانه کوچکتر را برحسب I_1، I_2، R_1، R_2 و ω_0 پیدا کنید.



غلتش

مسئله–۸:



در اینجا f_1 و f_2 نیروهای اصطکاک هست که فرض می شود مستقل از سرعت استوانه‌ها و ثابت باشند. این نیروها در هر لحظه مساوی و در خلاف جهت یکدیگر هستند، بنابراین $f_1 = f_2 = f$. نیروی اصطکاک گشتاور نیروی منفی روی ذره اول و گشتاور نیروی مثبت روی ذره دوم اعمال می‌کند،

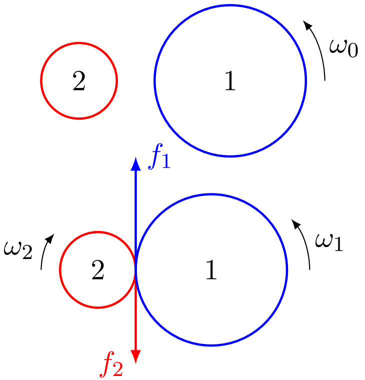
$$-fR_1 = I_1\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{fR_1}{I_1}$$

و

$$fR_2 = I_2\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{fR_2}{I_2}$$

غلتش

مسئله–۸:



سرعت زاویه‌ای استوانه‌ها بصورت زیر داده می‌شود،

$$\omega_1 = \alpha_1 t + \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = -\frac{fR_1}{I_1}t + \omega_0$$

و

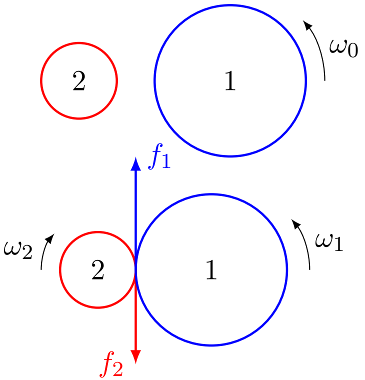
$$\omega_2 = \alpha_2 t \Rightarrow \omega_2 = \frac{fR_2}{I_2}t$$

وقتی ذرات با یک آهنگ ثابت می‌چرخد، در نقطه تماس، استوانه‌ها سرعت خطی برابری دارند، یعنی

$$v_1 = v_2 \Rightarrow R_1\omega_1 = R_2\omega_2 \Rightarrow -\frac{fR_1^2}{I_1}t + R_1\omega_0 = \frac{fR_2^2}{I_2}t$$

غلتش

مسئله–۸:



$$-\frac{fR_1^2}{I_1}t + R_1\omega_0 = \frac{fR_2^2}{I_2}t$$

در ادامه می‌توان مدت زمانی را که طول می‌کشد ذرات سرعت خطی برابری داشته باشند را بدست آورد،

$$t = \frac{R_1 I_1 I_2 \omega_0}{f(R_1^2 I_2 + R_2^2 I_1)}$$

با استفاده از روابط بالا داریم

$$\omega_2 = \frac{fR_2}{I_2}t \Rightarrow \omega_2 = \frac{R_1 R_2 I_1}{R_1^2 I_2 + R_2^2 I_1}\omega_0$$

اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه ذرات

اندازه حرکت زاویه‌ای عنصر Δm_i جسم صلبی که با سرعت زاویه‌ای ω حول محوردلخواه برابر است با

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \Delta\vec{p}_i$$

آهنگ تغییرات زمانی عنصر Δm_i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_i \times \Delta m_i \vec{v}_i\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_i = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) \times \Delta m_i \vec{v}_i + \vec{r}_i \times \Delta m_i \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}_i}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_i = \Delta m_i(\vec{v}_i \times \vec{v}_i) + \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0, \quad \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{\tau}_i$ گشتاور نیروی وارد بر عنصر Δm_i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_i = \vec{\tau}_i$$

اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه ذرات

اندازه حرکت زاویه‌ای عنصر Δm_i جسم صلبی که با سرعت زاویه‌ای ω حول محوردلخواه برابر است با

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_i = \vec{\tau}_i$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots$$

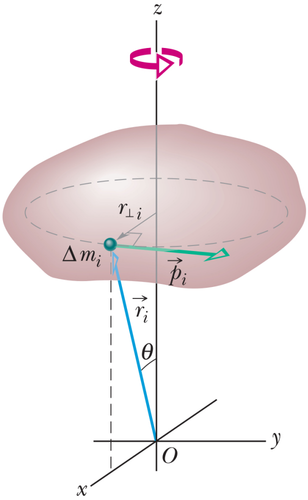
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}_2 + \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = \vec{\tau}}$$

فرم دیگری از قانون دوم نیوتن برای حرکتهای دورانی

اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه ذرات حول محور ثابت



اندازه حرکت زاویه‌ای عنصر Δm_i جسم صلبی که با سرعت زاویه‌ای ω حول محور ثابتی می‌چرخد، برابر است با

$$L_{iz} = r_{\perp i} \Delta p_i$$

که

$$\Delta p_i = \Delta m_i v_i = \Delta m_i (r_{\perp i} \omega)$$

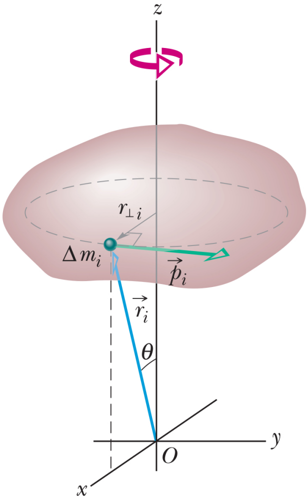
بنابراین

$$L_{iz} = (\Delta m_i r_{\perp i}^2) \omega$$

اندازه حرکت زاویه‌ای جسم صلب

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \left(\sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2 \right) \omega$$

اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه ذرات حول محور ثابت



اندازه حرکت زاویه‌ای جسم صلب

$$L_z = \left(\sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2\right)\omega$$

اگر لختی دورانی حول محور برابر

$$I = \sum_i \Delta m_i r_{\perp i}^2$$

باشد، بنابراین

$$L_z = I\omega$$

اندازه حرکت زاویه‌ای دستگاه ذرات حول محور ثابت

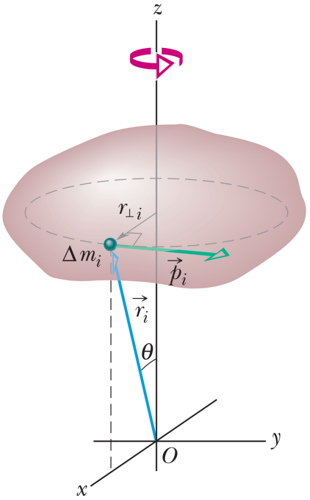
اندازه حرکت زاویه‌ای جسم صلب

$$L_z = I\omega$$

آهنگ تغییرات زمانی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L_z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I\omega = I\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega$$

$$\boxed{\tau = I\alpha}$$



پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای

اگر گشتاور نیروی خالص وارد بر جسم صلب برابر صفر باشد

$$\tau_{\text{خالص}} = 0$$

بنابراین

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

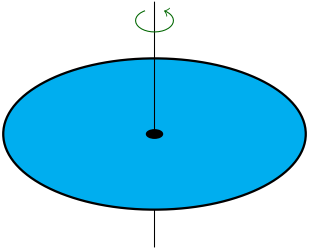
این نتیجه پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای نامیده می‌شود که برای هر دو لحظه‌ی t_i و t_f بصورت زیر نوشته می‌شود،

$$\text{اندازه حرکت زاویه‌ای کل در لحظه‌ی } t_f = \text{اندازه حرکت زاویه‌ای کل در لحظه‌ی } t_i$$

$$L_i = L_f$$

پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای

مسئله–۹: سوسکی به جرم m روی قرصی به جرم M و شعاع R قرار دارد. قرص مانند یک چرخ و فلک با سرعت زاویه‌ای ω_0 نسبت به محور می چرخد. سوسک در ابندا در شعاع $r = 0.8R$ قرار دارد و سپس به پیرامون قرص می‌رسد، تندی زاویه‌ای چقدر است؟



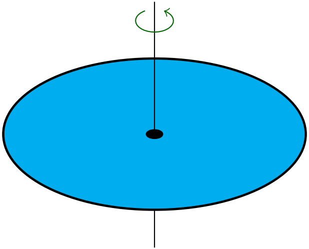
$$I_{\text{قرص}} = \frac{1}{2}MR^2, \qquad I_{\text{سوسک در حالت اولیه}} = m(0.8R)^2 = 0.64mR^2$$

$$I_{\text{حالت اولیه}} = (0.5M + 0.64m)R^2$$

$$L_{\text{حالت اولیه}} = I_{\text{حالت اولیه}}\omega_0 = (0.5M + 0.64m)R^2\omega_0$$

پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای

مسئله–۹:



$$L_{\text{حالت اولیه}} = (0.5M + 0.64m)R^2\omega_0$$

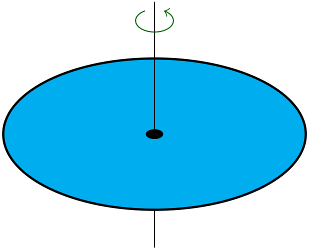
$$I_{\text{قرص}} = \frac{1}{2}MR^2, \qquad I_{\text{سوسک در حالت نهایی}} = mR^2$$

$$I_{\text{حالت نهایی}} = (0.5M + m)R^2$$

$$L_{\text{حالت نهایی}} = I_{\text{حالت نهایی}}\omega = (0.5M + m)R^2\omega$$

پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای

مسئله–۹:



$$L_{\text{حالت اولیه}} = (0.5M + 0.64m)R^2\omega_0$$

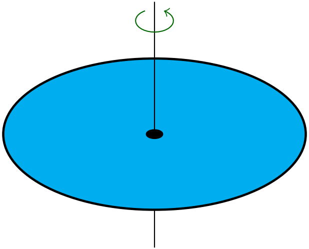
$$L_{\text{حالت نهایی}} = (0.5M + m)R^2\omega$$

$$L_{\text{حالت اولیه}} = L_{\text{حالت نهایی}}$$

$$\omega = \frac{0.5M + m}{0.5M + 0.64m}\omega_0$$

پایستگی اندازه حرکت زاویه‌ای

مسئله–۹:



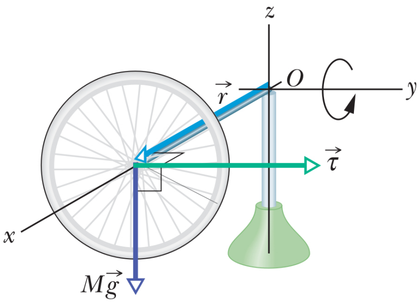
$$L_{\text{حالت اولیه}} = (0.5M + 0.64m)R^2\omega_0$$

$$L_{\text{حالت نهایی}} = (0.5M + m)R^2\omega$$

$$L_{\text{حالت اولیه}} = L_{\text{حالت نهایی}}$$

$$\omega = \frac{0.5M + m}{0.5M + 0.64m}\omega_0$$

حرکت تقدیمی ژیرسکوپ

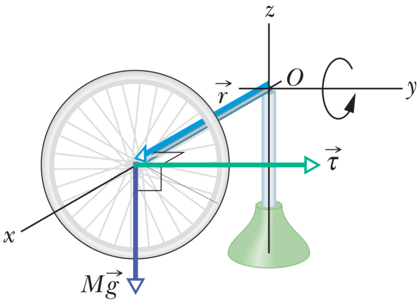


◀ ژیروسکوپ از یک چرخ و یک میله تشکیل شده است. میله از محور چرخ می‌گذرد و چرخ می‌تواند آزادانه حول آن بچرخد.

◀ یک انتهای میله‌ی ژیرسکوپ روی پایه‌ای قرار دارد.

◀ در حالتی که **چرخ حول محور خود نمی‌چرخد**، ژیرسکوپ را رها می‌کنیم. ژیرسکوپ با چرخش حول محور پایه بطرف پایین می‌افتد.

حرکت تقدیمی ژیرسکوپ



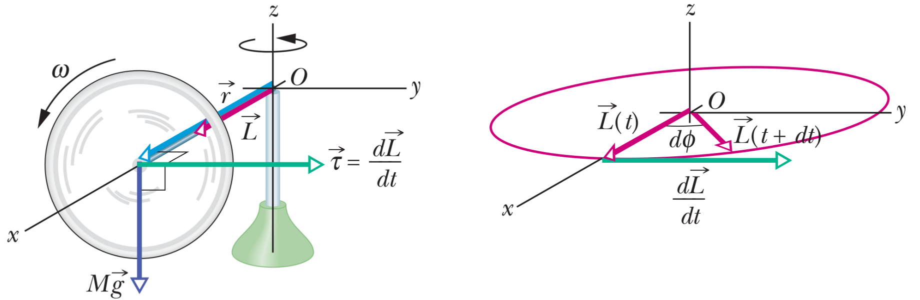
◄ در حالتی که **چرخ حول محور خود نمی‌چرخد**، ژیرسکوپ را رها می‌کنیم. ژیرسکوپ با چرخش حول محور پایه بطرف پایین می‌افتد.

◄ گشتاور نیروی از شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتن بدست می‌آید

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

◄ بزرگی گشتاور نیروی

$$\tau = Mgr$$

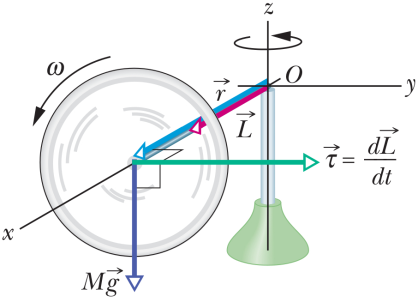


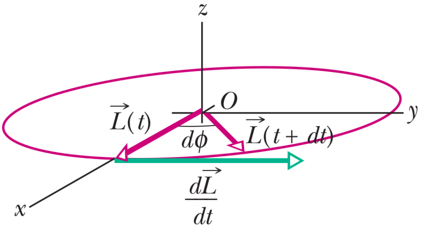
◄ در حالتی که **چرخ حول محور خود می‌چرخد**، ژیرسکوپ شروع به چرخش افقی به دور یک محور قائم که از نقطه‌ی O پایه می‌گذرد می‌کند که به آن **حرکت تقدیمی** می‌گویند.

◄ اندازه حرکت $\vec{L}$ در یک صفحه‌ی افقی دوران می‌کند. با فرض اینکه بزرگی اندازه‌ی حرکت زاویه‌ای ثابت $(I\omega)$ باشد، بردار اندازه حرکت زاویه‌ای بصورت شعاعی مشخص می شود.

$$\vec{L} = I\omega\hat{r}$$

حرکت تقدیمی ژیرسکوپ



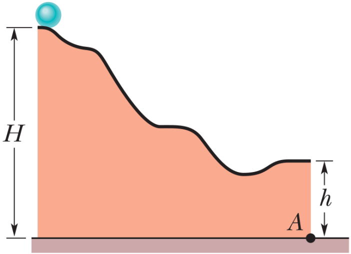


$$\vec{L} = I\omega\hat{r}$$

$$\vec{\tau} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow Mgr\hat{\phi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega\hat{r}) \Rightarrow Mgr\hat{\phi} = I\omega\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$\dot{\phi} = \frac{Mgr}{I\omega} =$ سرعت زاویه‌ی حرکت تقدیمی $= \Omega$

مسئله‌–۱۰: مطابق شکل زیر، گلوله‌ی توپر بطور هموار از حال سکون شروع به غلتش می‌کند و در انتهای مسیر که افقی است و در ارتفاع h قرار دارد، از مسیر جدا می‌شود. فاصله‌ی افقی نقطه‌ی برخورد گلوله با زمین تا نقطه‌ی A چقدر است؟

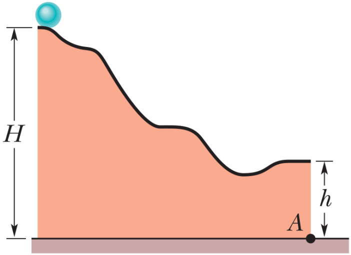


اگر سطح زمین را به عنوان مرجع پتانسیل در نظر بگیریم،

$$E_{\text{وقتی از ارتفاع } H \text{ رها می‌شود}} = E_{\text{وقتی به مسیر افقی در ارتفاع } h \text{ می‌رسد}}$$

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh$$

مسئله–۱۰:



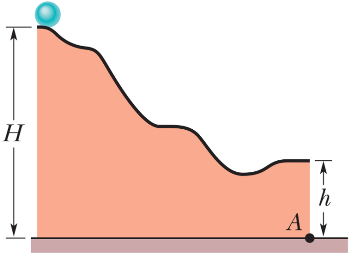
$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh$$

$$mg(H-h) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 \Rightarrow mg(H-h) = \frac{7}{10}mv^2$$

سرعت مرکز جرم گلوله : $v = \sqrt{\frac{10}{7}g(H-h)}$

غلتش

مسئله– ۱۰:



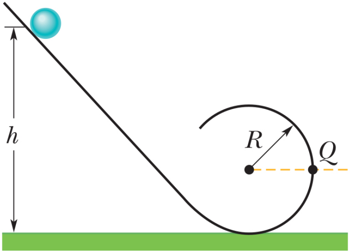
$$\text{سرعت مرکز جرم گلوله} : \; v = \sqrt{\frac{10}{7} g (H - h)}$$

$$\text{معادله حرکت پرتابه در امتداد افق} : \; y = y_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2} = h - \frac{7}{20} \frac{x^2}{H - h}$$

$$y = 0 : \; x = \sqrt{\frac{20}{7} h (H - h)}$$

غلتش

مسئله–۱۱: مطابق شکل زیر، گلوله‌ی توپر به جرم m از حال سکون در طول یک مسیر مستقیم رها می‌شود و بطور هموار در یک مسیر دایره‌ای می‌غلتد. شعاع قسمت مارپیچ R و شعاع گلوله $r \leq R$ است. الف) در صورتی که گلوله به لبه‌ی بالایی مسیر دایره‌ای برسد و سپس از آن جدا شود مقدار h چقدر است. ب) اگر گلوله از ارتفاع $h = 6R$ رها شود بزرگی و جهت نیروی وارد بر گلوله در نقطه‌ی Q را بدست آورید.

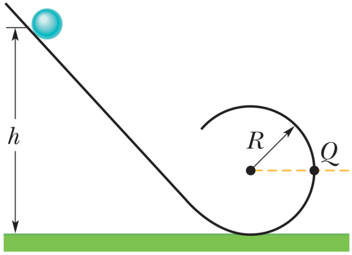


اگر سطح زمین را به عنوان مرجع پتانسیل در نظر بگیریم،

$$E_{\text{وقتی از ارتفاع } h \text{ رها می‌شود}} = E_{\text{وقتی به بالای مسیر دایره‌ای می‌رسد}}$$

غلتش

مسئله–۱۱:



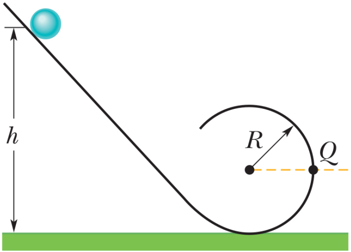
$$E_{\text{وقتی از ارتفاع } h \text{ رها می‌شود}} = E_{\text{وقتی به بالای مسیر دایره‌ای می‌رسد}}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(2R - r)$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 + mg(2R - r)$$

غلتش

مسئله–۱۱:



$$mgh = \frac{7}{10}mv^2 + mg(2R - r)$$

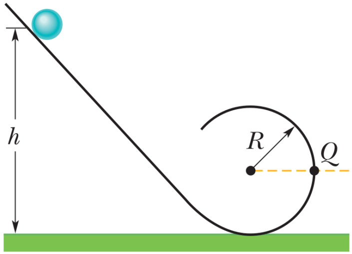
در بالاترین نقطه‌ی مسیر دایره‌ای : $\sum F_r = -mv^2/(R-r)$

$$-N - mg = -mv^2/(R-r) \Rightarrow N = mg - mv^2/(R-r)$$

در بالاترین نقطه‌ی مسیر دایره‌ای : $N = 0 \Rightarrow mv^2 = mg(R-r)$

غلتش

مسئله–۱۱:



$$mgh = \frac{7}{10}mv^2 + mg(2R - r)$$

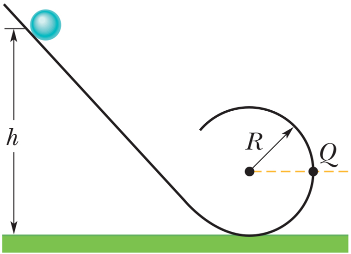
در بالاترین نقطه‌ی مسیر دایره‌ای : $mv^2 = mg(R - r)$

$$mgh = \frac{7}{10}mg(R - r) + mg(2R - r)$$

$$h = \frac{7}{10}(R - r) + (2R - r) = R + \frac{17}{10}(R - r) \Rightarrow h \simeq \frac{27}{10}R, \quad r \ll R$$

غلتش

مسئله–۱۱:



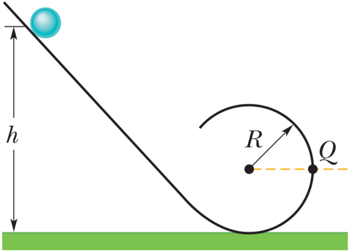
$$mg(6R) = \frac{7}{10}mv^2 + mgR \Rightarrow mv^2 = \frac{50}{7}mgR$$

$$-N = -mv^2/(R-r) \Rightarrow N = \frac{50R}{7(R-r)}mg, \quad N = \frac{50}{7}[1-(r/R)+\cdots]mg$$

$$r \ll R: \ N = \frac{50}{7}[1-(r/R)+\cdots]mg \simeq \frac{50}{7}mg$$

غلتش

مسئله–۱۱:



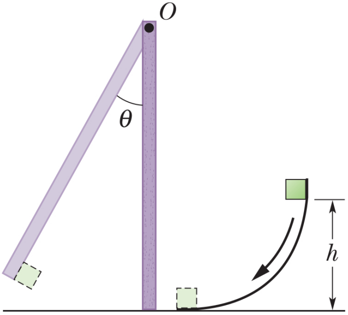
$$r \ll R: \;\; N \simeq \frac{50}{7} mg$$

$$\vec{F} = -\frac{50}{7} mg\hat{i} - mg\hat{j}$$

$$F = mg\sqrt{1 + \left(\frac{50}{7}\right)^2}, \quad \phi = \tan^{-1}(7/50)$$

غلتش

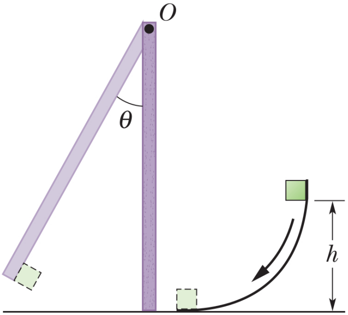
مسئله–۱۲: در شکل قطعه‌ی کوچکی به جرم m روی یک سطح بدون اصطکاک از ارتفاع h بطرف پایین می‌لغزد و سپس به میله‌ی یکنواختی به جرم M و طول ℓ برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. محور میله حول نقطه‌ی O پیش از توقف لحظه‌ای تا زاویه‌ی θ می‌چرخد. زاویه‌ی θ را بدست آورید.



مرجع پتانسیل را پایین ترین قسمت مسیر دایره‌ای قرار می‌دهیم.

$$E_{\text{وقتی جرم } m \text{ به پایین مسیر دایره‌ای می‌رسد}} = E_{\text{وقتی جرم } m \text{ از بالای مسیر دایره‌ای رها می‌شود}}$$

مسئله–۱۲:



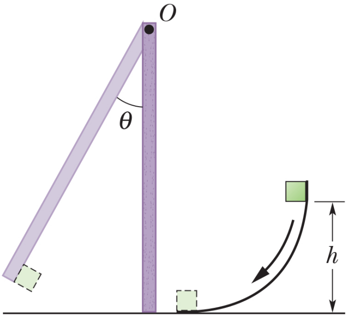
$$E_{\text{وقتی جرم } m \text{ بالای مسیر دایره‌ای رها می‌شود}} = E_{\text{وقتی جرم } m \text{ به پایین مسیر دایره می‌رسد}}$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh}$$

$$L_{\text{لحظه‌ای قبل از بر خورد جرم } m \text{ به میله}} = L_{\text{لحظه‌ای بعد از برخورد جرم } m \text{ به میله}}$$

غلتش

مسئله–۱۲:

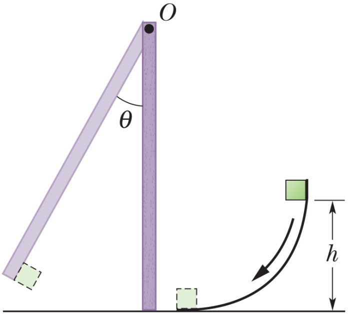


$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

$$L_{\text{لحظه‌ای قبل از بر خورد جرم } m \text{ به میله}} = L_{\text{لحظه‌ای بعد از برخورد جرم } m \text{ به میله}}$$

$$m\ell v_0 = m\ell v + \frac{1}{3}M\ell^2\omega \Rightarrow m\ell\sqrt{2gh} = m\ell^2\omega + \frac{1}{3}M\ell^2\omega$$

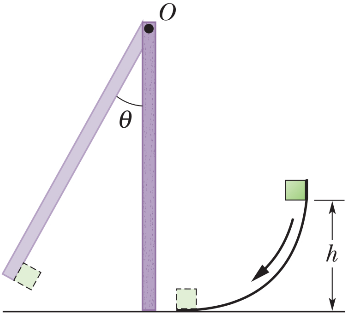
مسئله–۱۲:



$$m\ell\sqrt{2gh} = m\ell^2\omega + \frac{1}{3}M\ell^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{m\sqrt{2gh}}{m\ell + M\ell/3}$$

$E_{\text{وقتی جرم } m \text{ و میله با امتداد قائم زاویه‌ی } \theta \text{ می‌سازد}} = E_{\text{وقتی جرم } m \text{ و میله در امتداد قائم قرار دارند}}$

مسئله–۱۲:



$E_{\text{وقتی جرم } m \text{ و میله با امتداد قائم زاویه‌ی } \theta \text{ می‌سازد}} = E_{\text{وقتی جرم } m \text{ و میله در امتداد قائم قرار دارند}}$

$$\frac{1}{2}\left(m + M/3\right)\ell^2\omega^2 = mg\ell(1-\cos\theta) + Mg\ell(1-\cos\theta)/2$$

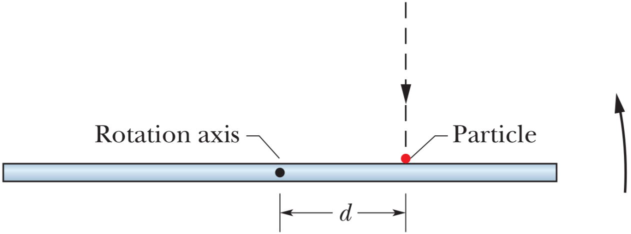
مسئله–۱۲:

$$\begin{cases} \ell\omega = \dfrac{m\sqrt{2gh}}{m+M/3} \\ \dfrac{1}{2}\left(m+M/3\right)\ell^2\omega^2 = (mg+Mg/2)\ell(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{m^2}{(m+M/3)(m+M/2)}\frac{h}{\ell}$$

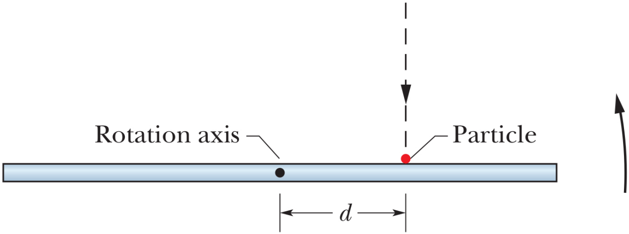
$$\theta = \cos^{-1}\left[1 - \frac{m^2}{(m+M/3)(m+M/2)}\frac{h}{\ell}\right]$$

مسئله–۱۳: شکل زیر، نمایی از بالای میله‌ی یکنواختی به طول ℓ و جرم M را نشان می‌دهد که بطور افقی و با سرعت زاویه‌ی ω_0 بصورت پادساعتگرد حول محوری که از مرکز آن می‌گذرد می چرخد. ذره‌ای به جرم $M/3$ بطور افقی با سرعت v_0 به میله برخورد می کند و به آن می‌چسبد. مسیر ذره در لحظه‌ی برخورد عمود بر میله است و از مرکز میله به اندازه‌ی d فاصله دارد. الف) در چه مقداری از d میله و ذره بعد از برخورد به سکون می رسد. ب) اگر d از این مقدار بیشتر باشد، میله و ذره در چه جهتی می‌چرخند؟



غلتش

مسئله–۱۳:



$$L_{\text{لحظه‌ای قبل از بر خورد جرم } M/3 \text{ به میله}} = L_{\text{لحظه‌ای بعد از برخورد جرم } M/3 \text{ به میله}}$$

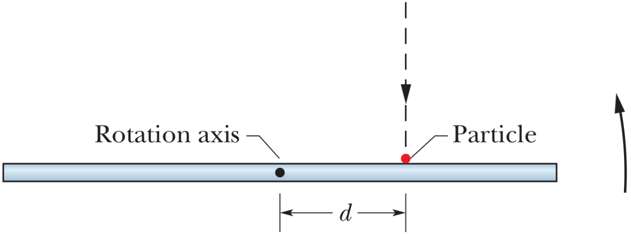
$$I_{\text{محور چرخش}}\omega_0 - (M/3)dv_0 = I_{\text{محور چرخش}} + (M/3)d^2]\omega$$

$$\frac{1}{12}M\ell^2\omega_0 - \frac{1}{3}Mdv_0 = \left[\frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{3}Md^2\right]\omega$$

$$\omega = 0 \Rightarrow d = \frac{\ell^2\omega_0}{4v_0}$$

غلتش

مسئله–۱۳:



$$\frac{1}{12}M\ell^2\omega_0 - \frac{1}{3}Mdv_0 = \left[\frac{1}{12}M\ell^2 + \frac{1}{3}Md^2\right]\omega$$

$$\omega = \frac{\ell^2\omega_0 - 4dv_0}{\ell^2 + 4d^2} \Rightarrow \omega = \frac{4v_0}{\ell^2 + 4d^2}\left[\frac{\ell^2\omega_0}{4v_0} - d\right]$$

$d > \frac{\ell^2\omega_0}{4v_0} \Rightarrow \omega < 0$: حرکت ساعتگرد، $d < \frac{\ell^2\omega_0}{4v_0} \Rightarrow \omega > 0$: حرکت پادساعتگرد