فیزیک ۱
تعادل

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

شرطهای لازم در تعادل

در حرکت انتقالی

$$\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = 0$$

یعنی

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

در حرکت دورانی

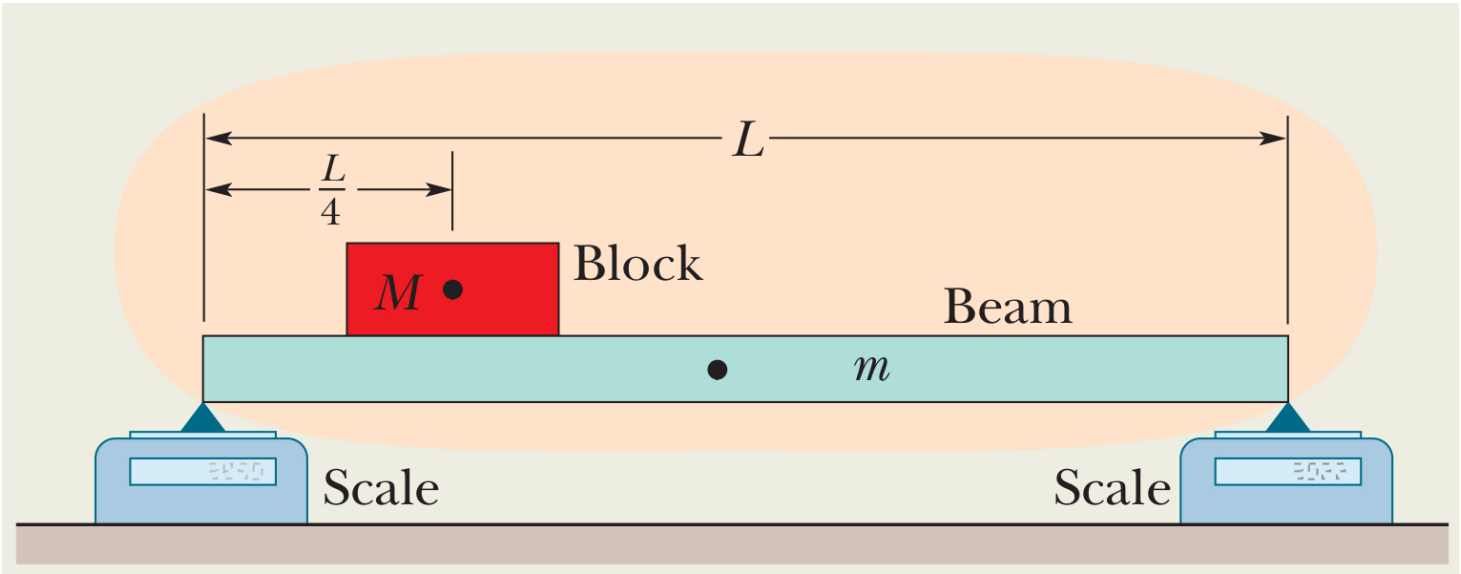
$$\sum \tau = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = 0$$

یعنی

$$\begin{cases} \sum \tau_x = 0 \\ \sum \tau_y = 0 \\ \sum \tau_z = 0 \end{cases}$$

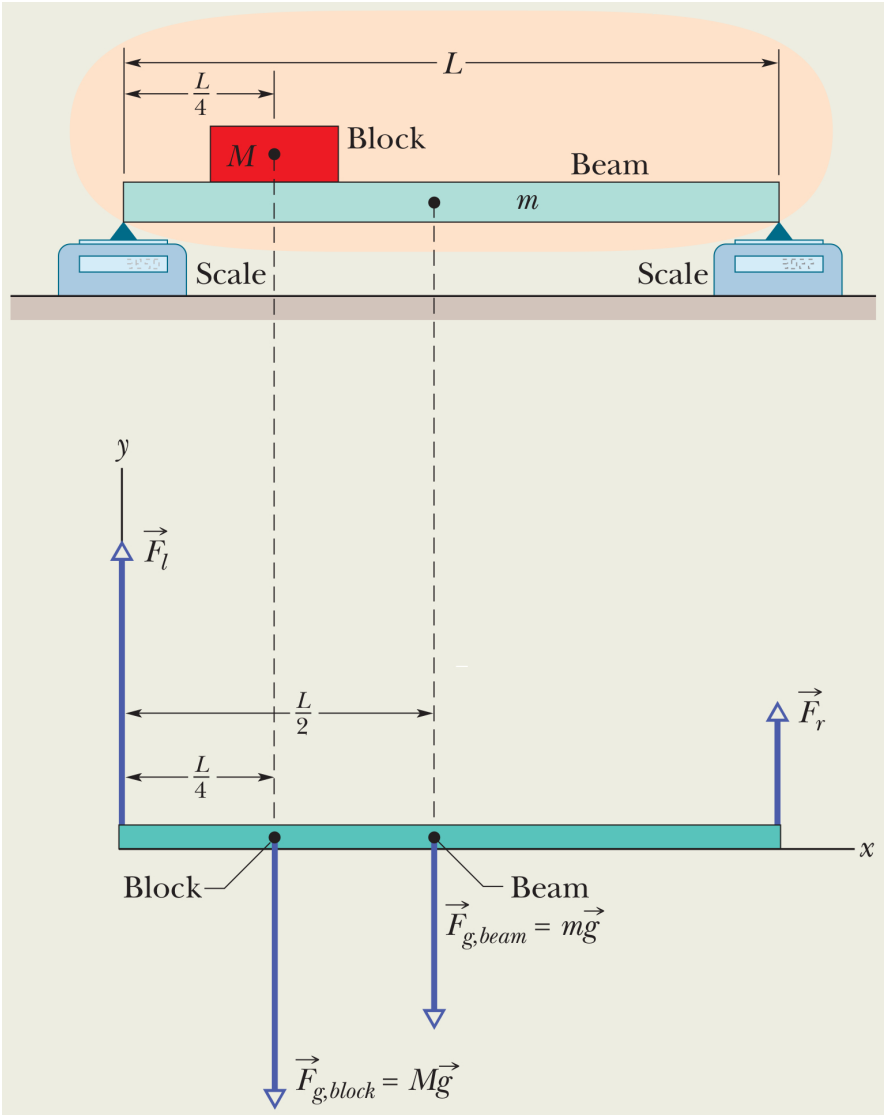
تعادل

مسئله-۱: در شکل زیر تیر یکنواختی بطول L و جرم m روی دو ترازو در حال سکون است. قطعه‌ی یکنواختی به جرم M روی تیر قرار دارد که از مرکز فاصله‌ی $L/4$ از انتهای سمت چپ تیر واقع است. ترازوها چه عددی را نشان می‌دهند.



تعادل

مسئله-۱:



$$\sum F_y = 0$$

$$F_r + F_l - mg - Mg = 0$$

$$\sum \tau_{CM} = 0$$

$$\frac{L}{2}F_r + \frac{L}{4}Mg - \frac{L}{2}F_l = 0$$

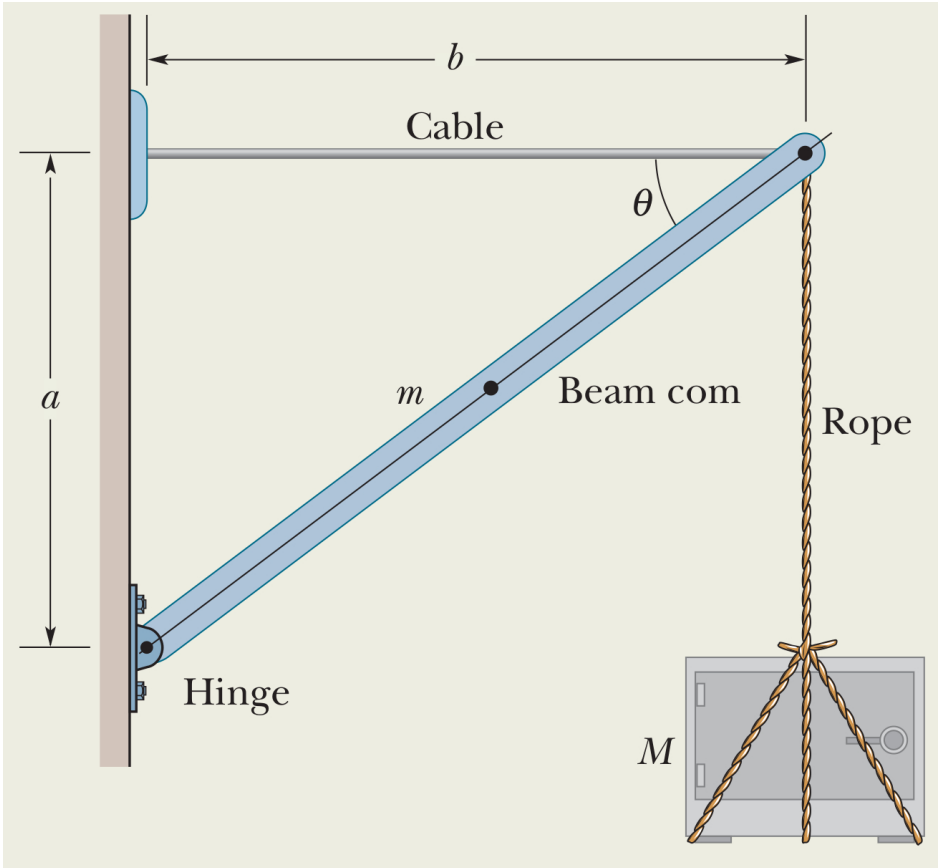
$$\begin{cases} F_r + F_l = (M+m)g \\ F_r - F_l = Mg/2 \end{cases}$$

$$F_r = \frac{1}{2}mg + \frac{3}{4}Mg$$

$$F_l = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{4}Mg$$

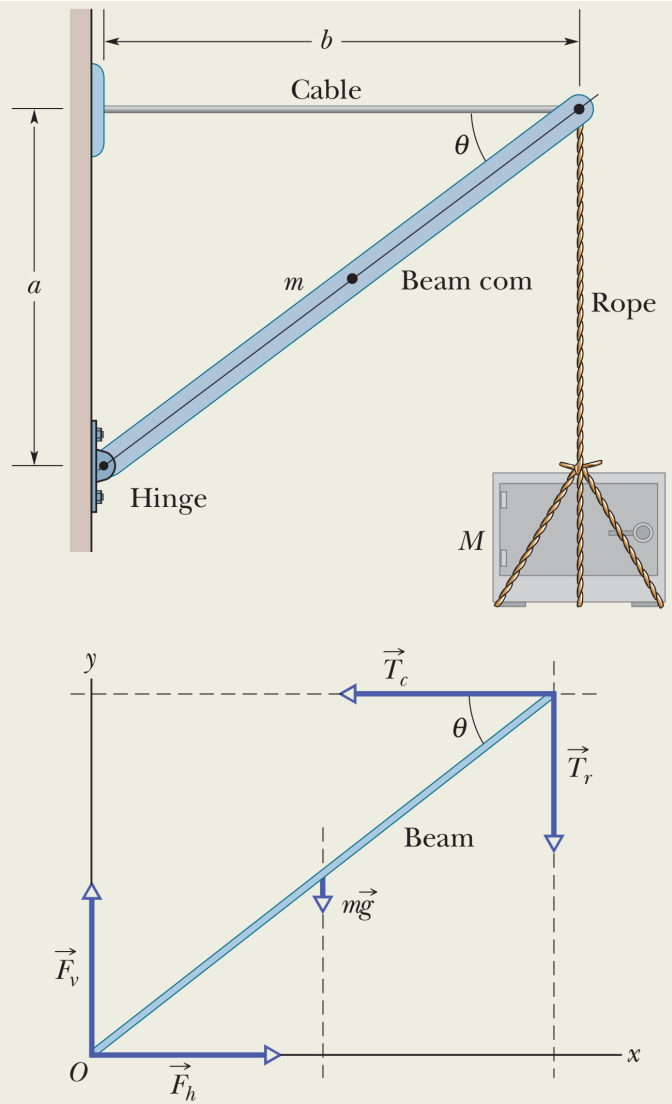
تعادل

مسئله-۲: در شکل زیر گاوصندوقی به جرم M را نشان می‌دهد که بوسیله طنابی از بازوی متحرکی به اضلاع a و b آویزان شده است. این بازو شامل یک تیر، یک لولا و یک کابل افقی است. تیر یکنواخت دارای جرم m و جرم کابل و طناب قابل چشمپوشی است. الف) کشش T_c چقدر است؟ ب) بزرگی نیروی وارد بر تیر از طرف لولا را بدست آورید.



تعادل

مسئله-۲:



$$\sum F_x = 0$$

$$F_h - T_c = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_v - mg - T_r = 0 \Rightarrow F_v = (m + M)g$$

$$\sum \tau_{\mathrm{O}} = 0$$

$$-\frac{L}{2}mg\cos\theta - LT_r\cos\theta + LT_c\sin\theta = 0$$

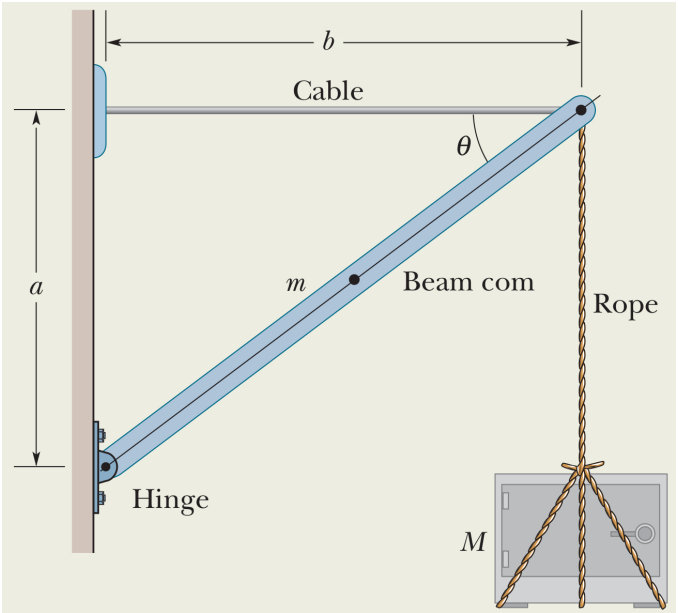
$$L\cos\theta = b, \quad L\sin\theta = a$$

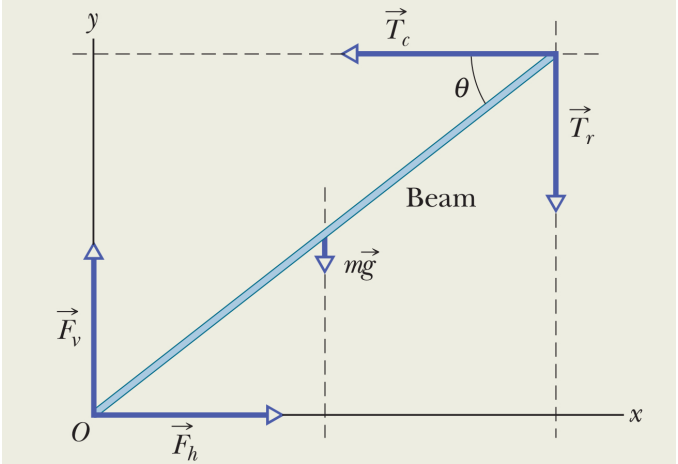
$$-\frac{1}{2}mgb - Mgb + T_c a = 0$$

$$T_c = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}m + M\right)g$$

تعادل

مسئله-۲:





$$T_c = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}m + M\right)g$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_h = T_c = \frac{b}{a}\left(\frac{1}{2}m + M\right)g$$

$$\sum F_y = 0$$

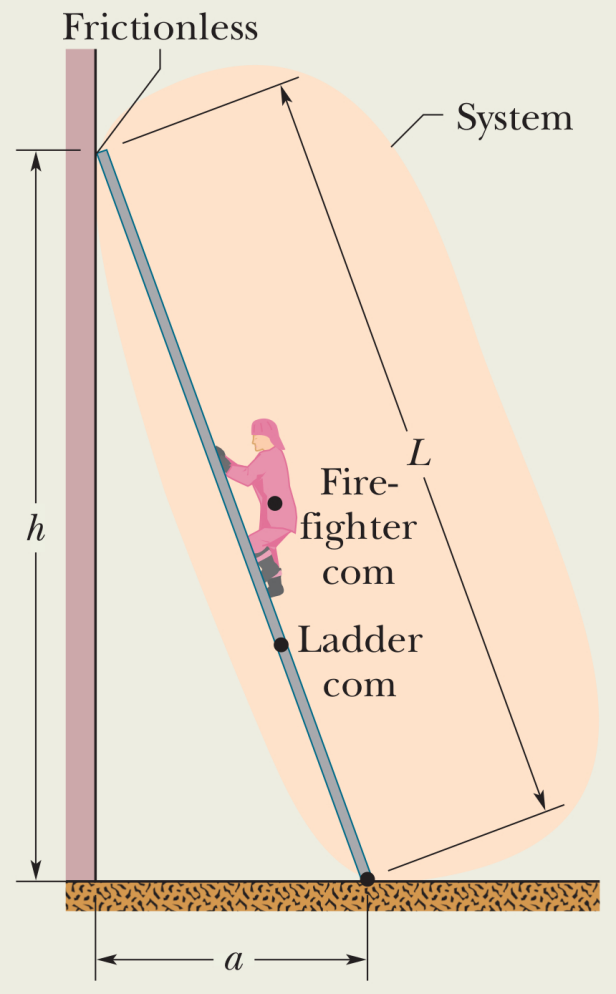
$$F_v = (m + M)g$$

اندازه : $F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2}$

جهت : $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_v}{F_h}\right)$

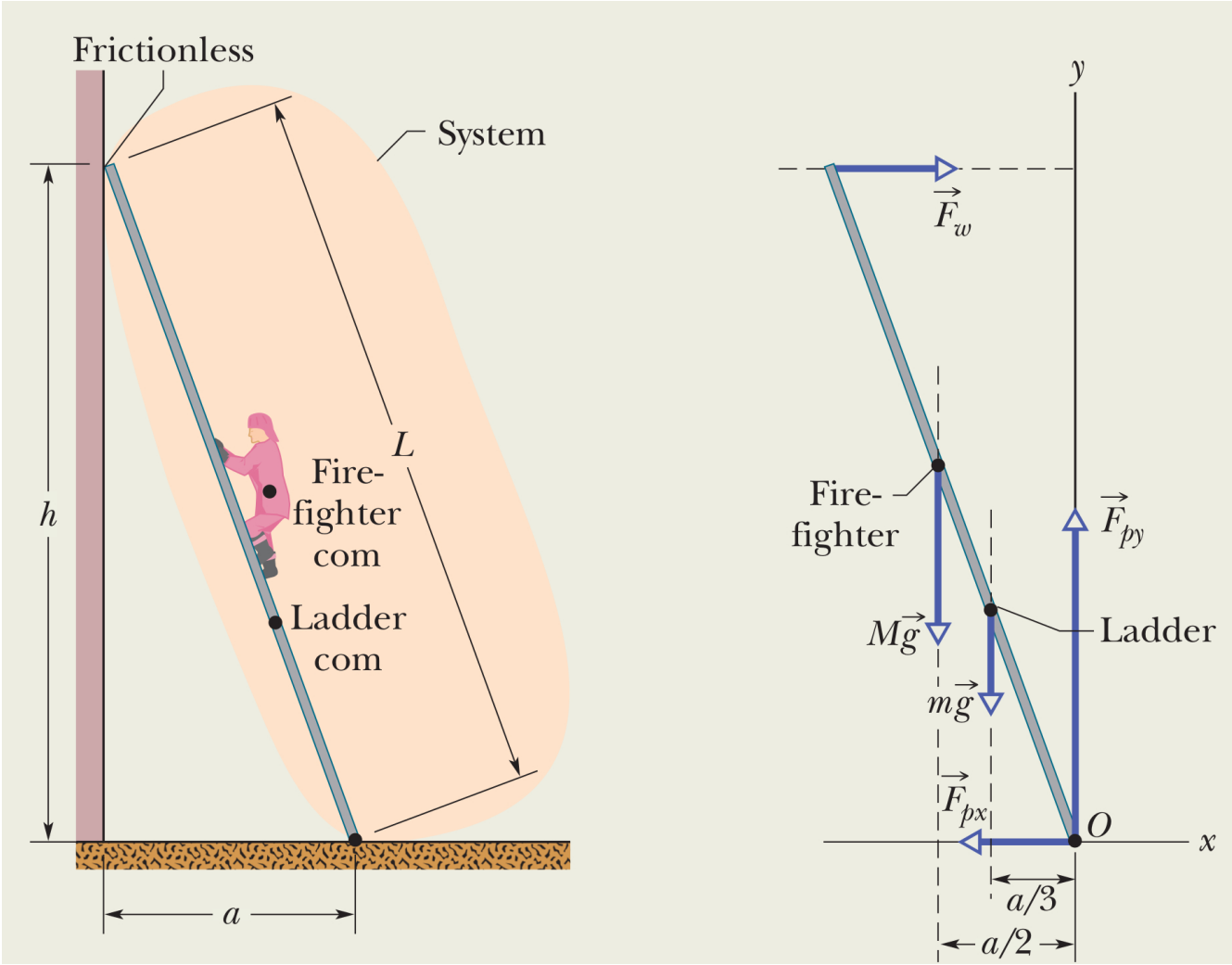
تعادل

مسئله-۳: در شکل نردبانی بطول L و جرم m به دیوار صافی (بدون اصطکاک) تکیه داده است. انتهای بالایی نردبان به فاصله‌ی h از سطح پیاده‌رو واقع است. پیاده‌رو اصطکاک دارد. مرکز جرم نردبان در فاصله‌ی $L/3$ از انتهای پایین نردبان قرار دارد.یک مامور آتش‌نشانی به جرم M از نردبان آنقدر بالا می‌رود تا وقتی که مرکز جرم او $L/2$ از انتهای پایینی نردبان قرار می‌گیرد. در این حالت، بزرگی نیروهای وارد از دیواره و پیاده‌رو را بدست آورید.



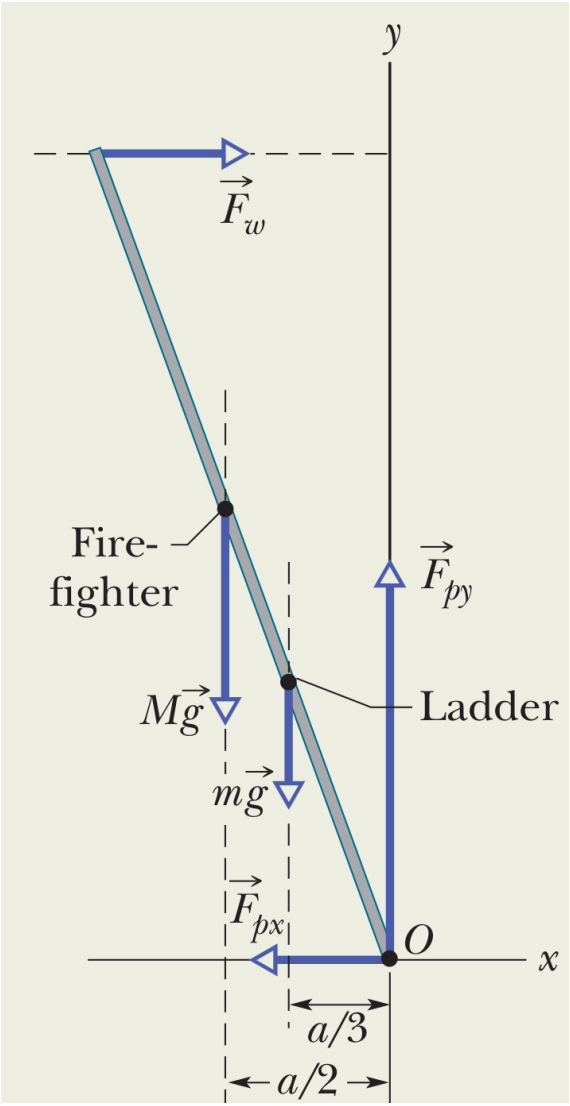
تعادل

مسئله-۳:



تعادل

مسئله-۳:



$$\sum F_x = 0$$

$$F_w - F_{px} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{py} - (m+M)g = 0$$

$$\sum \tau_O = 0$$

$$mg(L/3)\sin\theta + Mg(L/2)\sin\theta - F_w L\cos\theta = 0$$

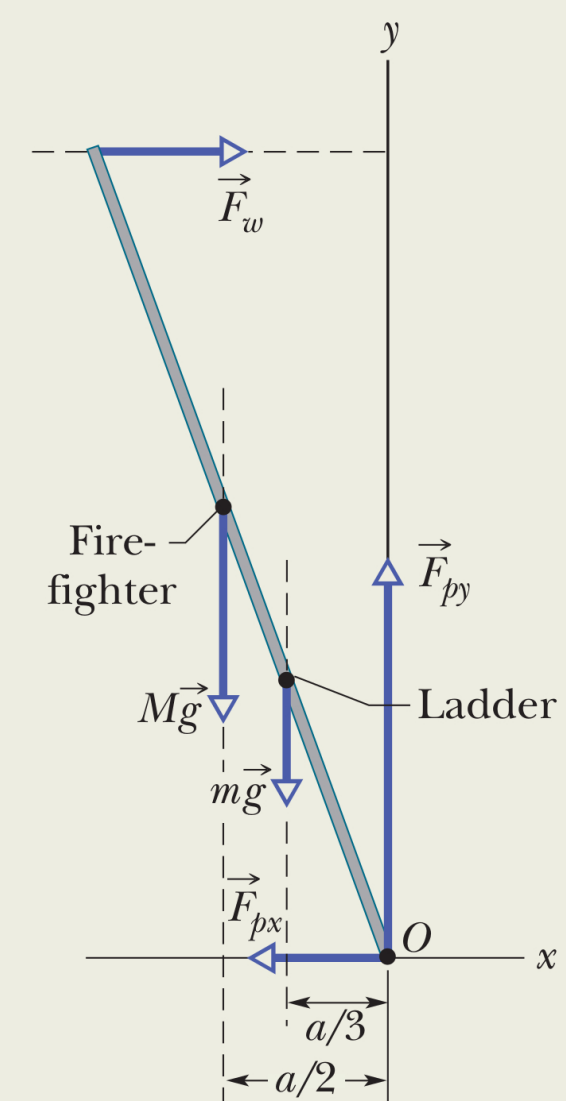
$$L\sin\theta = a = \sqrt{L^2 - h^2}, \quad L\cos\theta = h$$

$$mga/3 + Mga/2 - F_w h = 0$$

$$F_w = \frac{a}{6h}(2m+3M)g$$

تعادل

مسئله-۳:



$$\sum \tau_O = 0$$

$$F_w = \frac{a}{6h}(2m + 3M)g$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_w - F_{px} = 0 \Rightarrow F_{px} = F_w = \frac{a}{6h}(2m + 3M)g$$

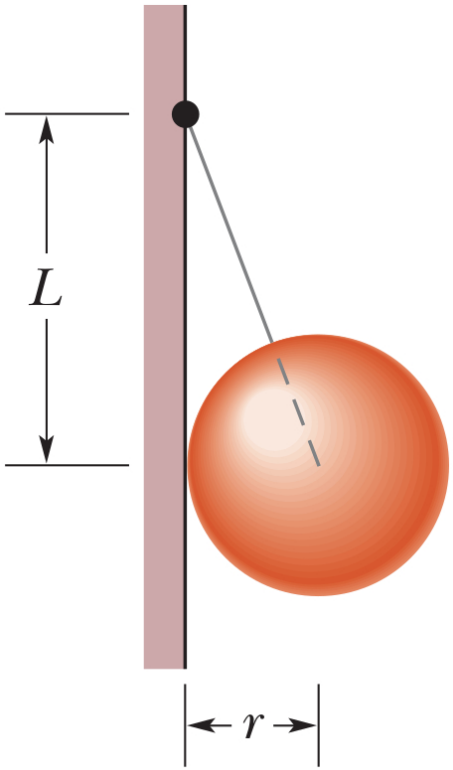
$$\sum F_y = 0$$

$$F_{py} = (m + M)g$$

$$F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{py}^2}, \quad \alpha = \tan^{-1}\left[\frac{F_{py}}{F_{px}}\right]$$

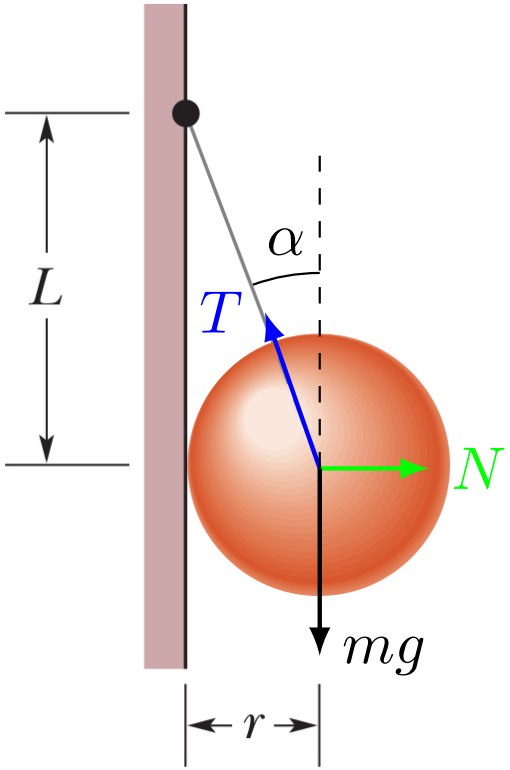
تعادل

مسئله-۴: در شکل کره‌ی یکنواختی به جرم m و شعاع r بوسیله طناب ناچیزی به دیوار بدون اصطکاکی در فاصله‌ی L بالاتر از مرکز کره متصل است. مطلوب است تعیین الف) نیروی کشش طناب و ب) نیروی وارد بر کره از طرف دیورار.



تعادل

مسئله-۴:



$$\sum F_x = 0: \quad N - T\sin\alpha = 0$$

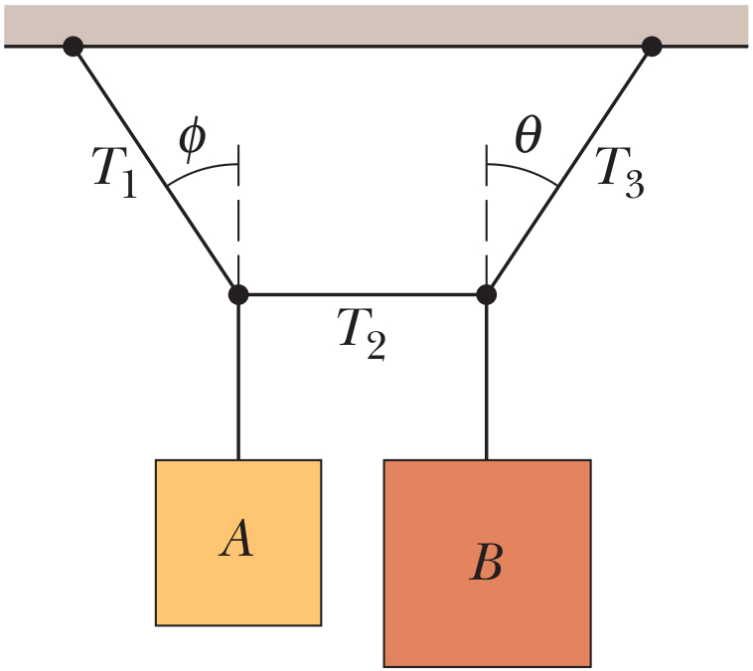
$$\sum F_y = 0: \quad T\cos\alpha - mg = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{\sqrt{L^2+r^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+r^2}}$$

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{L^2+r^2}}{L}mg$$

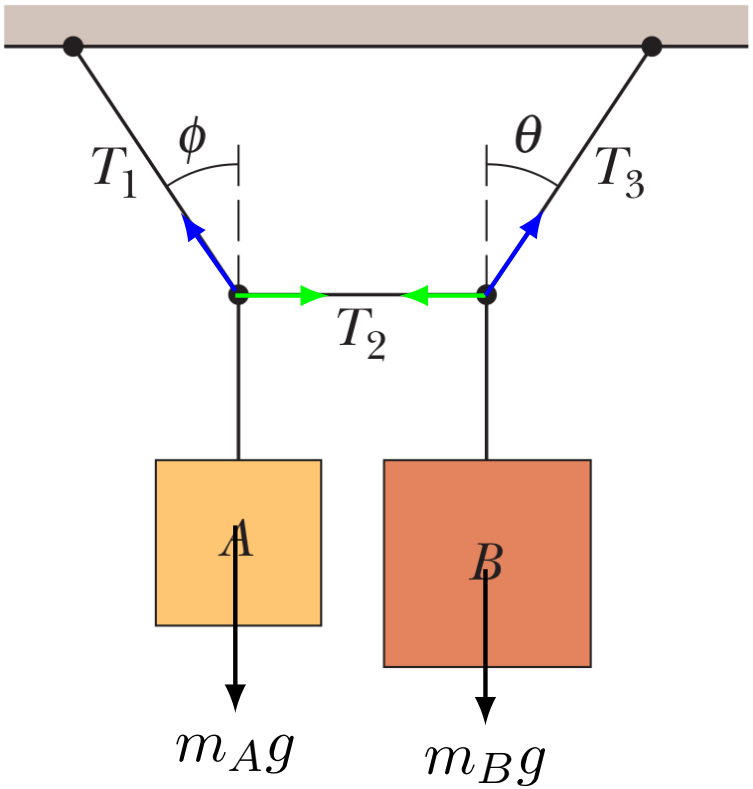
$$N = \frac{r}{L}mg$$

تعادل



مسئله-۵: دستگاه نشان داده شده در حال تعادل است. ریسمان میانی کاملا افقی است. مطلوب است تعیین کنید الف) نیروی کشش T_1، ب) نیروی کشش T_2 ، ج) نیروی کشش T_3 و د) زاویه‌ی θ.

تعادل



مسئله-۵:

برای جرم m_A:

$$\sum F_x = 0: \quad T_2 - T_1 \sin\phi = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad T_1 \cos\phi - m_A g = 0$$

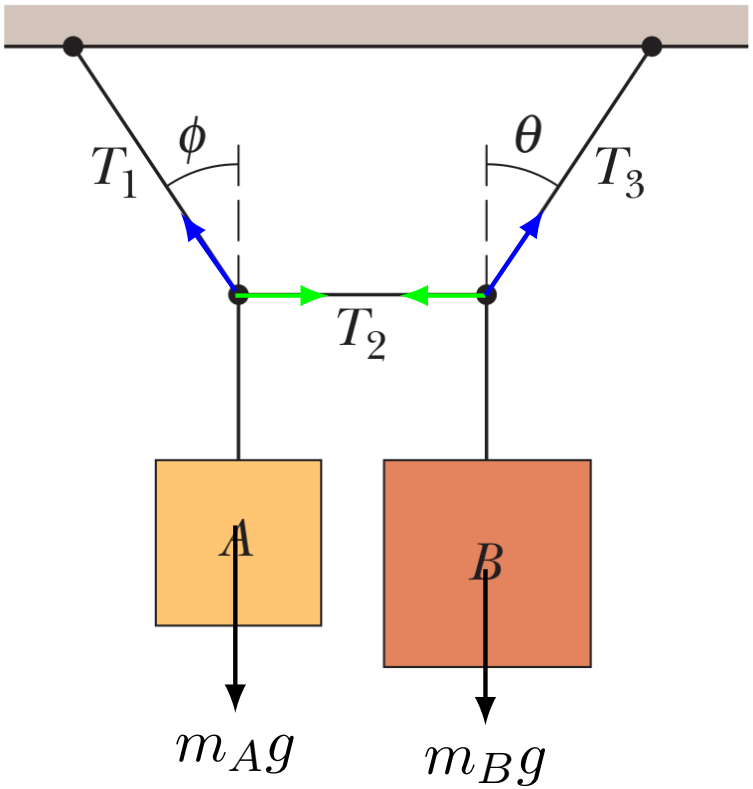
$$T_1 = \frac{m_A g}{\cos\phi}, \quad T_2 = m_A g \tan\phi$$

برای جرم m_B:

$$\sum F_x = 0: \quad -T_2 + T_3 \sin\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad T_3 \cos\theta - m_B g = 0$$

تعادل



مسئله-۵:

$$T_1 = \frac{m_A g}{\cos\phi}, \quad T_2 = m_A g \tan\phi$$

برای جرم m_B:

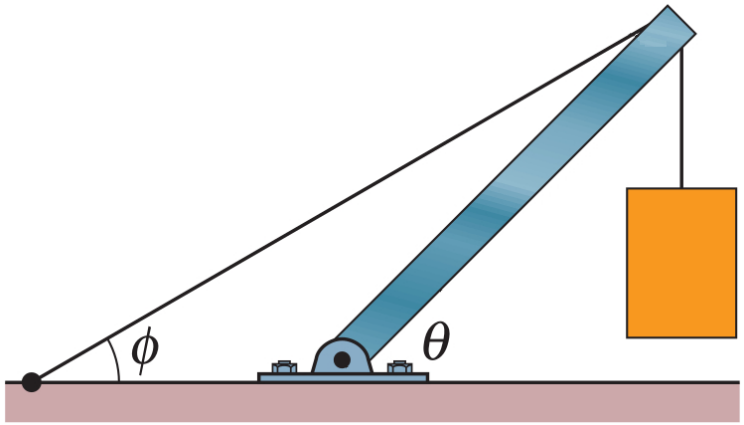
$$\begin{cases} T_3 \sin\theta = T_2 = m_A g \tan\phi \\ T_3 \cos\theta = m_B g \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{m_A g}{m_B g} \tan\phi$$

$$T_3 = \sqrt{T_2^2 + (m_B g)^2}$$

$$T_3 = \sqrt{(m_A g)^2 \tan^2\phi + (m_B g)^2}$$

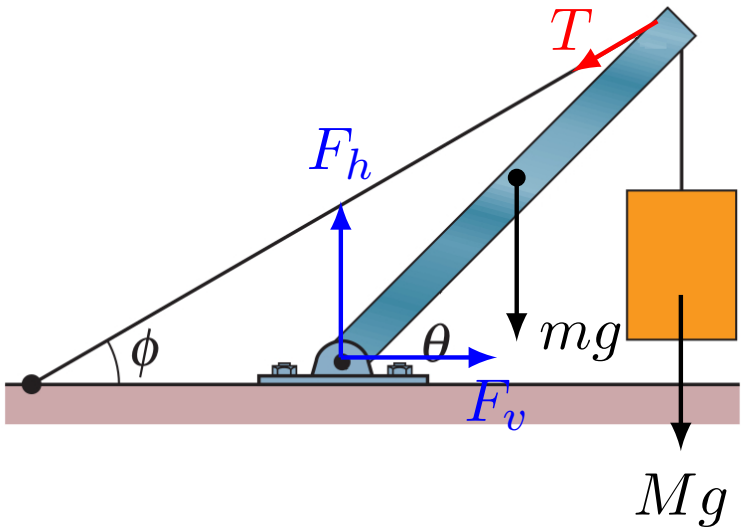
تعادل



مسئله-۶: دستگاه نشان داده شده در شکل در حال تعادل است. یک قطعه بتونی به جرم M از انتهای میله‌ی یکنواختی به جرم m آویخته شده است. برای زاویه‌های θ و ϕ داده شده مطلوب است تعیین کنید الف) نیروی کشش T در کابل و ب) مولفه‌های نیروی افقی و قائم از طرف لولا به میله را بدست آورید.

تعادل

مسئله-۶:



$$\sum F_x = 0$$

$$F_v - T\cos\phi = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_h - mg - Mg - T\sin\phi = 0$$

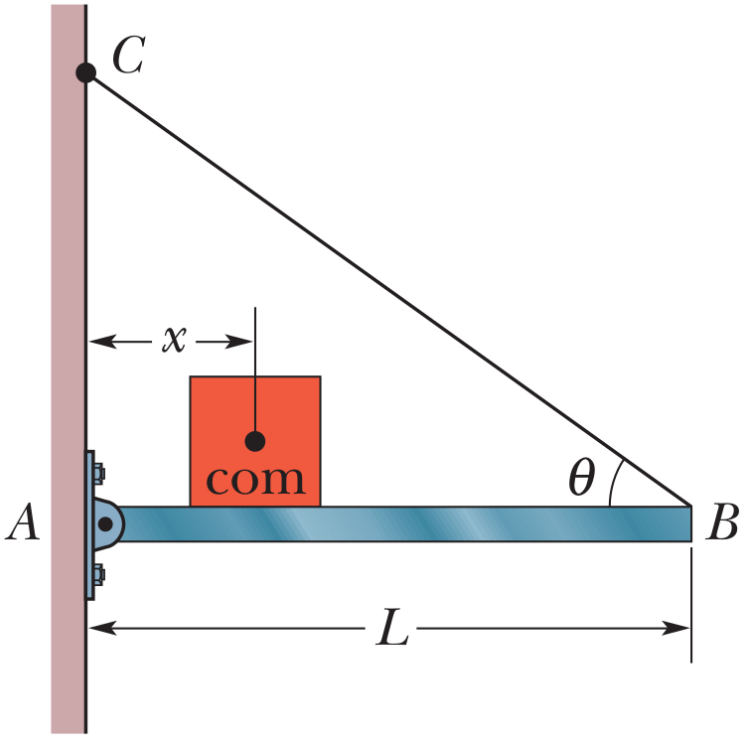
$$\sum \tau_O = 0$$

$$-\frac{L}{2}mg\cos\theta - LMg\cos\theta + LT\sin(\theta-\phi) = 0$$

$$T = \frac{(mg/2 + Mg)\cos\theta}{\sin(\theta-\phi)}$$

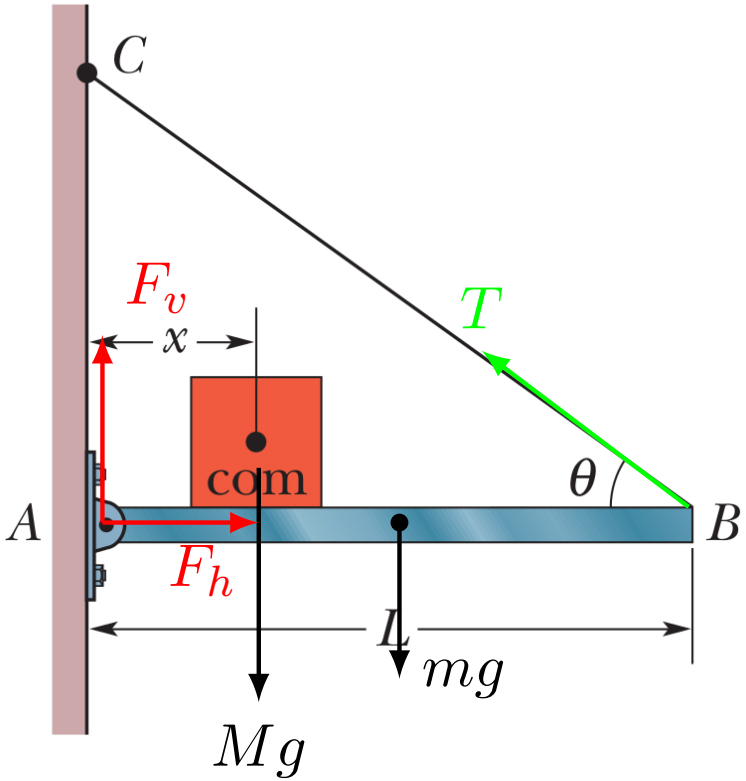
$$F_v = \frac{(mg/2 + Mg)\cos\theta\cos\phi}{\sin(\theta-\phi)},\ F_h = (m+M)g + \frac{(mg/2 + Mg)\cos\theta\sin\phi}{\sin(\theta-\phi)}$$

تعادل



مسئله-۷: در شکل فرض کنید که طول میله یکنواخت L و جرم آن m باشد. همچنین فرض کنید جرم قطعه‌ی M و زاویه‌ی θ معلوم باشد. کابل می‌تواند بیشینه‌ی کشش $T_{\max}$ را تحمل کنید. الف) بیشترین فاصله‌ی x قبل از پاره شدن چقدر است. ب) در حالتی که قطعه در بیشترین فاصله قرار دارد، مولفه‌های افقی و قائم نیرویی که بوسیله لولا در A به میله وارد می‌شود را بدست آورید.

مسئله-۷:



$$\sum F_x = 0$$

$$F_h - T\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_v - mg - Mg + T\sin\theta = 0$$

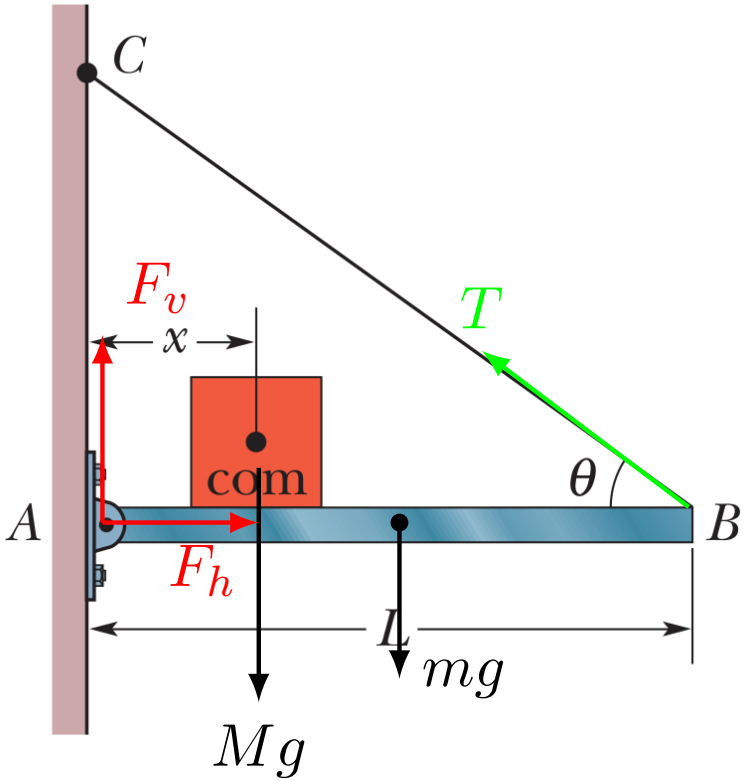
$$\sum \tau_O = 0$$

$$-xMg - (L/2)mg + LT\sin\theta = 0$$

$$T(x) = \frac{Mgx + mgL/2}{L\sin\theta}$$

$$\text{برای } T = T_{\max}: \quad x = L\frac{-mg/2 + T_{\max}\sin\theta}{Mg}$$

تعادل



مسئله-۷:

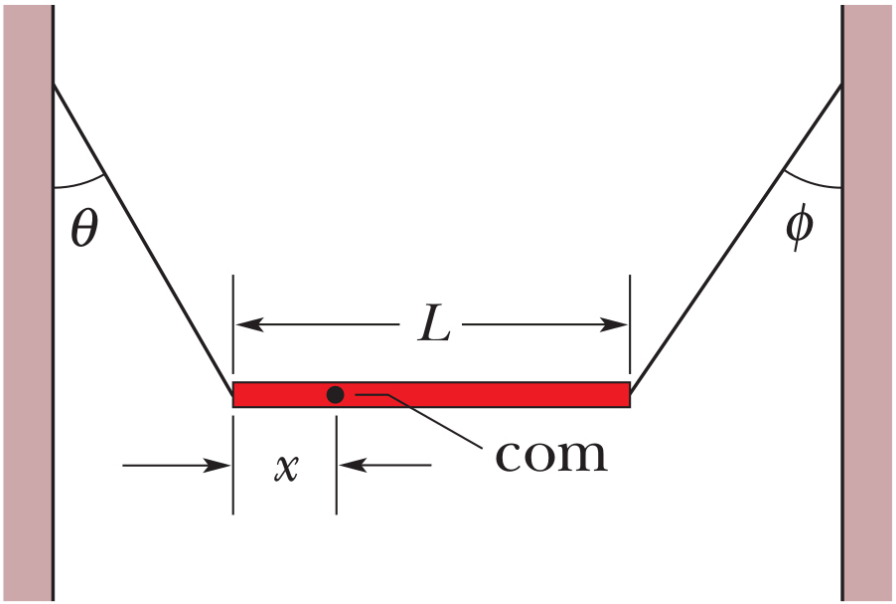
برای $T = T_{\max}$

$$F_h - T\cos\theta = 0 \Rightarrow F_h = T_{\max}\cos\theta$$

$$F_v - mg - Mg + T\sin\theta = 0$$

$$F_v = mg + Mg - T_{\max}\sin\theta$$

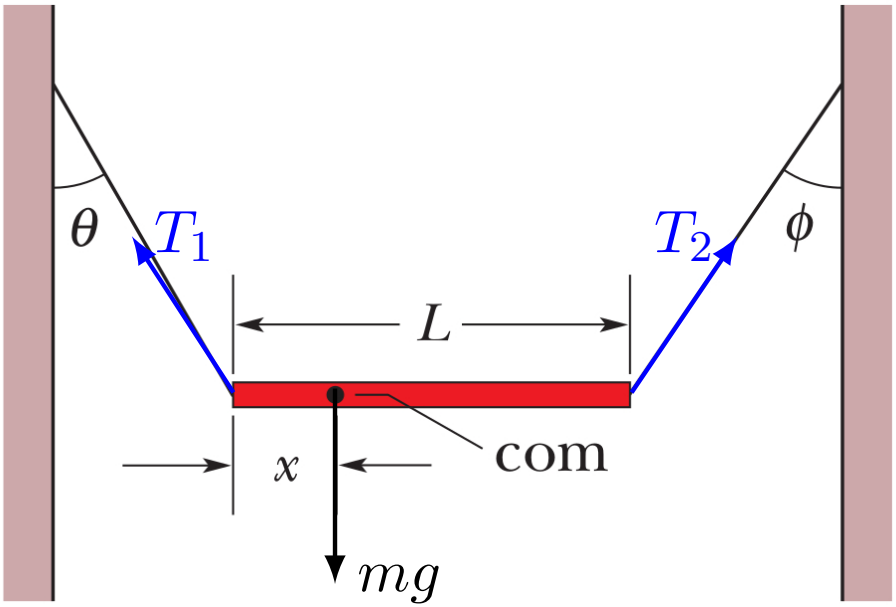
تعادل



مسئله-۸: میله‌ی غیریکنواختی همانطور که در شکل نشان داده شده است، بوسیله‌ی دو ریسمان با جرم ناچیز آویخته شده است و به حالت افقی در حال سکون قرار دارد. زاویه‌ی ریسمانها با امتداد قائم θ و ϕ است. اگر طول میله L باشد فاصله‌ی x مرکز جرم از انتهای چپ میله بدست آورید.

تعادل

مسئله-۸:



$$\sum F_x = 0$$

$$-T_1 \sin\theta + T_2 \sin\phi = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T_1 \cos\theta + T_2 \cos\phi - mg = 0$$

$$T_1 = \frac{\sin\phi}{\sin(\theta+\phi)} mg, \quad T_2 = \frac{\sin\theta}{\sin(\theta+\phi)} mg$$

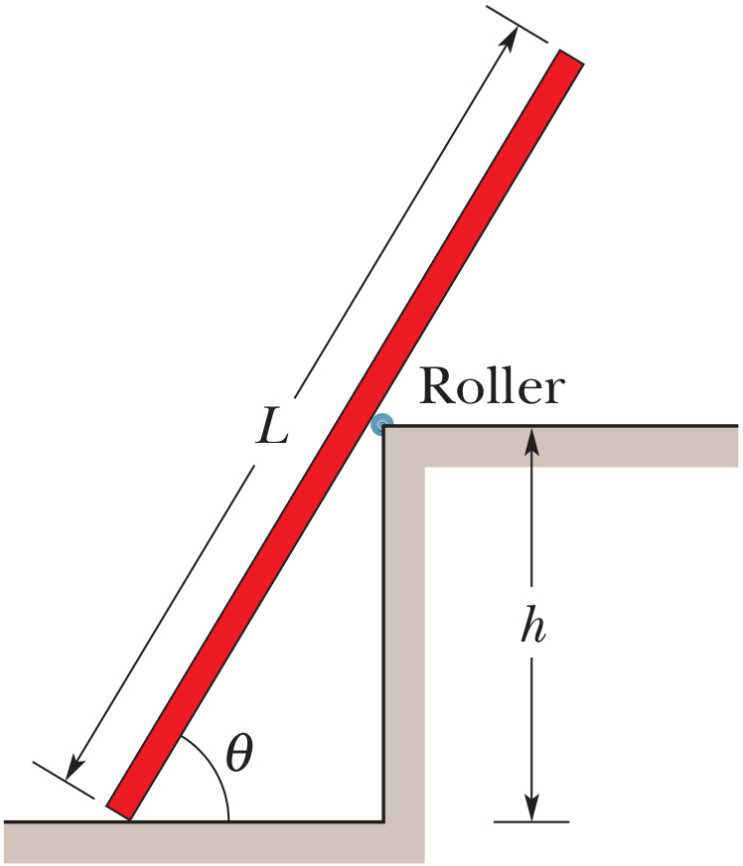
$$\sum \tau_{\text{مرکز جرم}} = 0$$

$$xT_1 \cos\theta - (L-x)T_2 \cos\phi = 0$$

$$x = L\frac{T_2 \cos\phi}{T_1 \cos\theta + T_2 \cos\phi} = L\frac{\sin\theta \cos\phi}{\sin(\theta+\phi)}$$

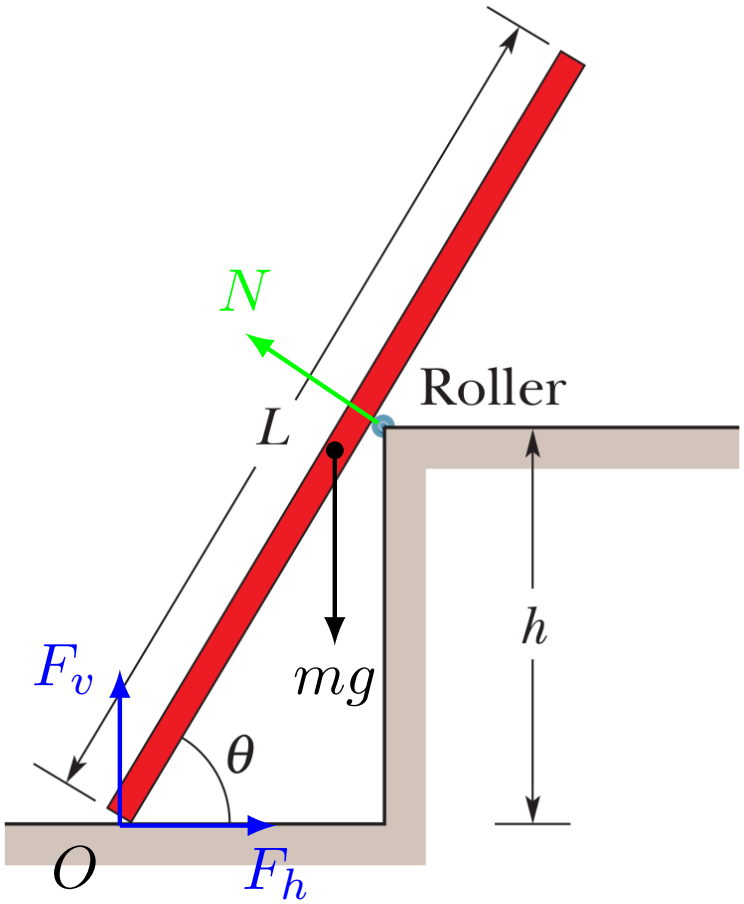
تعادل

مسئله-۹: یک الوار یکنواخت بطول L و جرم M از یک سر روی زمین و از سر دیگر رو غلتک بدون اصطکاکی واقع در بالای دیواری به ارتفاع h در حال سکون قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان الوار و زمین را بدست آورید.



تعادل

مسئله-۹:



$$\sum F_x = 0$$

$$-N\sin\theta + F_h = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N\cos\theta - mg + F_v = 0$$

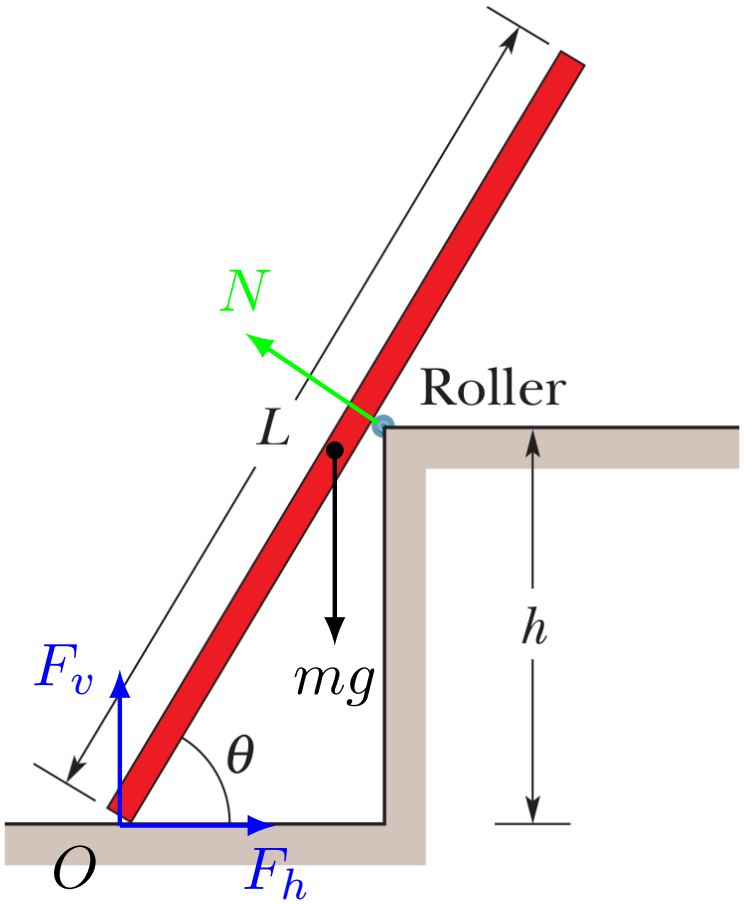
$$\sum \tau_O = 0$$

$$-mg(L/2)\cos\theta + \frac{h}{\sin\theta}N = 0$$

$$N = mg\frac{L}{2h}\sin\theta\cos\theta$$

تعادل

مسئله-۹:



$$\sum \tau_O = 0$$

$$N = mg\frac{L}{2h}\sin\theta\cos\theta$$

$$\sum F_x = 0$$

$$-N\sin\theta + F_h = 0$$

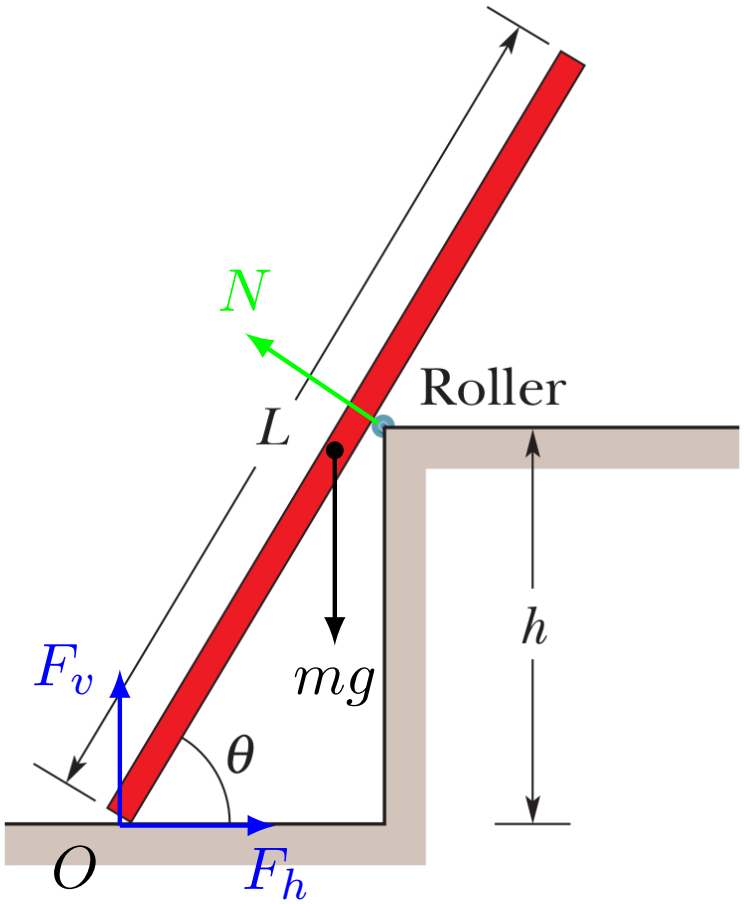
$$\sum F_y = 0$$

$$N\cos\theta - mg - F_v = 0$$

$$F_h = mg\frac{L}{2h}\sin^2\theta\cos\theta, \quad F_v = mg - mg\frac{L}{2h}\sin\theta\cos^2\theta$$

تعادل

مسئله-۹:



$$N = mg\frac{L}{2h}\sin\theta\cos\theta$$

$$F_h = mg\frac{L}{2h}\sin^2\theta\cos\theta$$

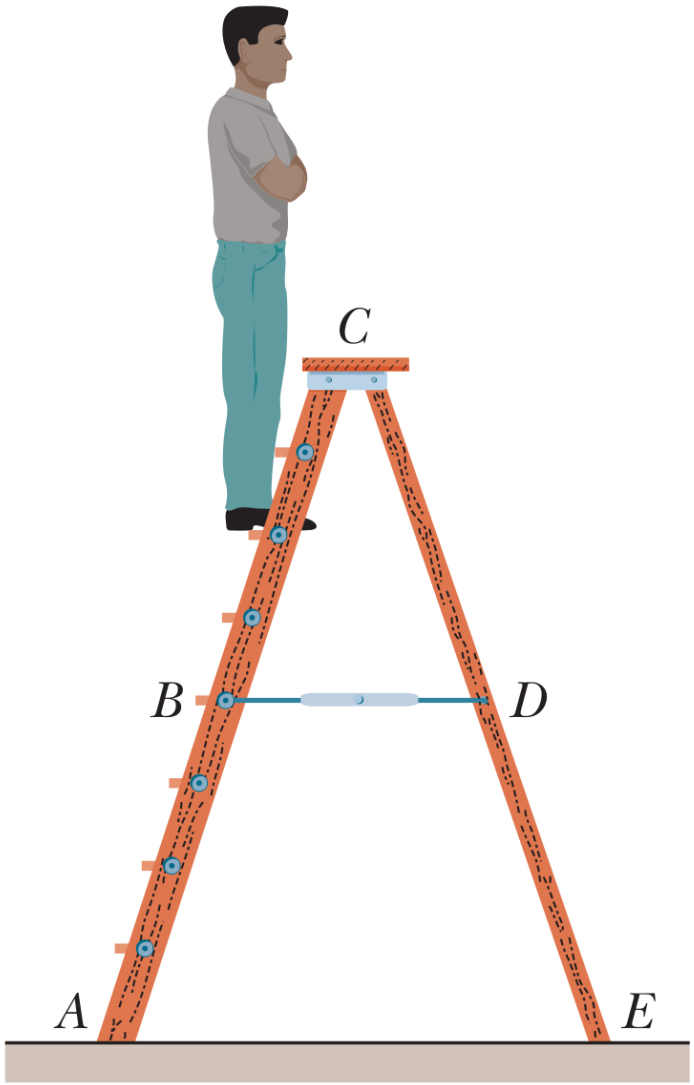
$$F_v = mg - mg\frac{L}{2h}\sin\theta\cos^2\theta$$

بزرگی نیروی اصطکاک

$$F_h = \mu_s F_v$$

$$\mu_s = \frac{F_h}{F_v} = \frac{(L/2h)\sin^2\theta\cos\theta}{1-(L/2h)\sin\theta\cos^2\theta}$$

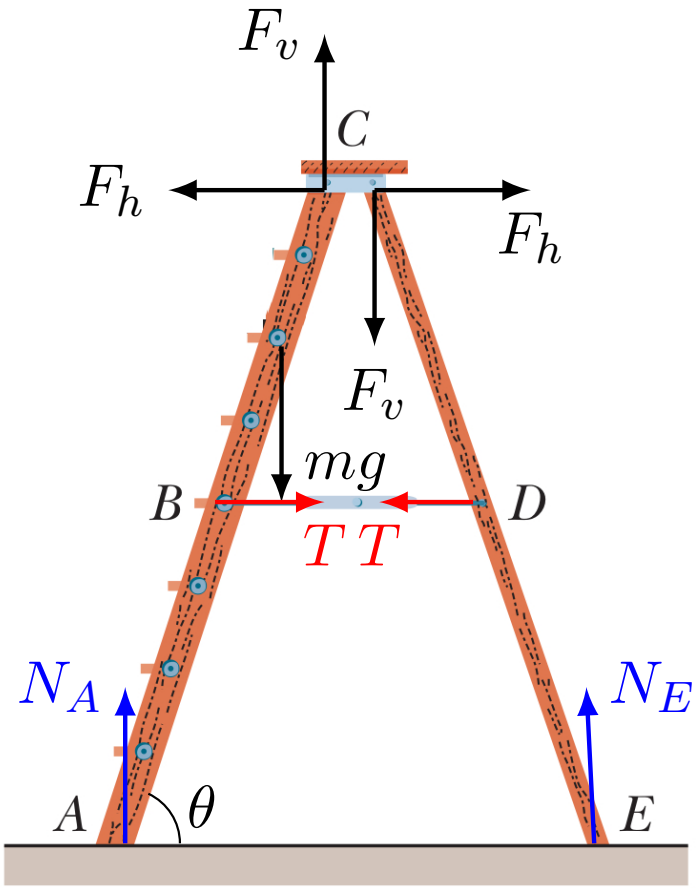
تعادل



مسئله-۱۰: برای پله‌ی نشان داده شده در شکل، طولهای AC و EC با هم برابر L هستند و در نقطه‌ی C به هم لولا شده‌اند. میله نگهدارنده‌ی BD طولی برابر d دارد. مردی به جرم m در روی پله به اندازه‌ی $3L/4$ بالا می‌رود. اصطکاک و وزن پله ناچیز است. تعیین کنید الف) نیروی کشش در میله نگهدارنده را بدست آوریدو ب) نیروی عکس‌العمل سطح را در نقاط A و E را بدست آورید.

تعادل

مسئله-۱۰:



$$\cos\theta = d/L, \quad \sin\theta = \sqrt{1-(d/L)^2}$$

پله سمت چپ:

$$\sum F_x = 0$$

$$-F_h + T = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

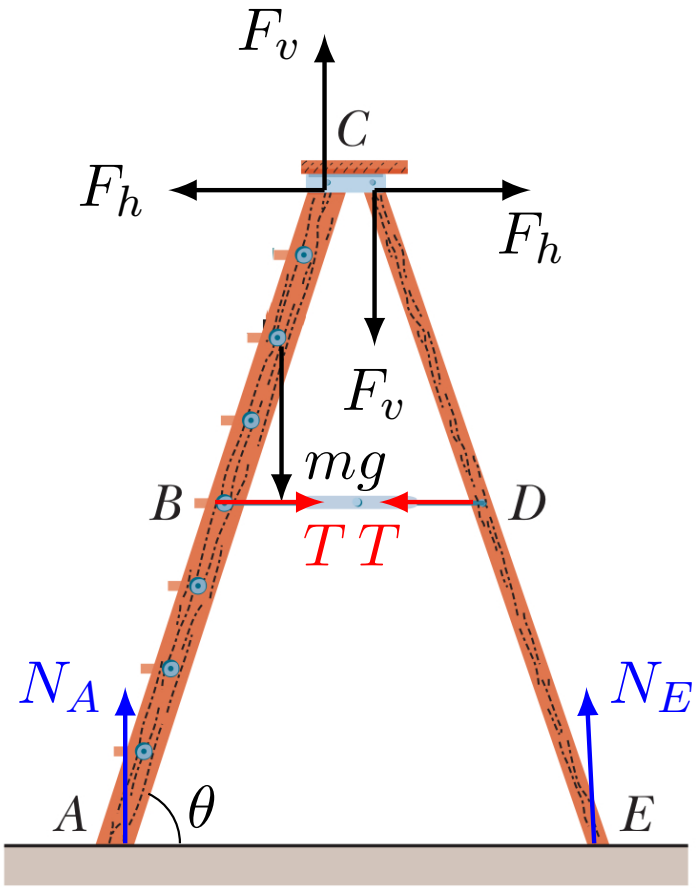
$$N_A - mg + F_v = 0$$

$$\sum \tau_C = 0$$

$$mg(L/4)\cos\theta - N_A L\cos\theta + T(L/2)\sin\theta = 0$$

تعادل

مسئله-۱۰:



$$\cos\theta = d/L, \quad \sin\theta = \sqrt{1-(d/L)^2}$$

تکیه گاه سمت راست:

$$\sum F_x = 0$$

$$F_h - T = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_E - F_v = 0$$

$$\sum \tau_C = 0$$

$$N_E L\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0$$

مسئله- ۱۰:

$$\cos\theta = d/L, \quad \sin\theta = \sqrt{1-(d/L)^2}$$

$$\begin{cases} N_A - mg + F_v = 0 \\ mg(L/4)\cos\theta - N_A L\cos\theta + T(L/2)\sin\theta = 0 \\ F_h - T = 0 \\ N_E - F_v = 0 \\ N_E L\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mg(L/4)\cos\theta - N_A L\cos\theta + T(L/2)\sin\theta = 0 \\ N_E L\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$mg(L/4)\cos\theta - N_A L\cos\theta + N_E L\cos\theta = 0$$

$$N_A - N_E = mg/4 \quad (1)$$

مسئله- ۱۰:

$$\cos\theta = d/L, \quad \sin\theta = \sqrt{1-(d/L)^2}$$

$$\begin{cases} N_A - mg + F_v = 0 \\ mg(L/4)\cos\theta - N_A L\cos\theta + T(L/2)\sin\theta = 0 \\ F_h - T = 0 \\ N_E - F_v = 0 \\ N_E L\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_A - mg + F_v = 0 \\ N_E - F_v = 0 \end{cases}$$

$$N_A - mg + N_E = 0$$

$$N_A + N_E = mg \quad (2)$$

مسئله- ۱۰:

$$\cos\theta = d/L, \quad \sin\theta = \sqrt{1-(d/L)^2}$$

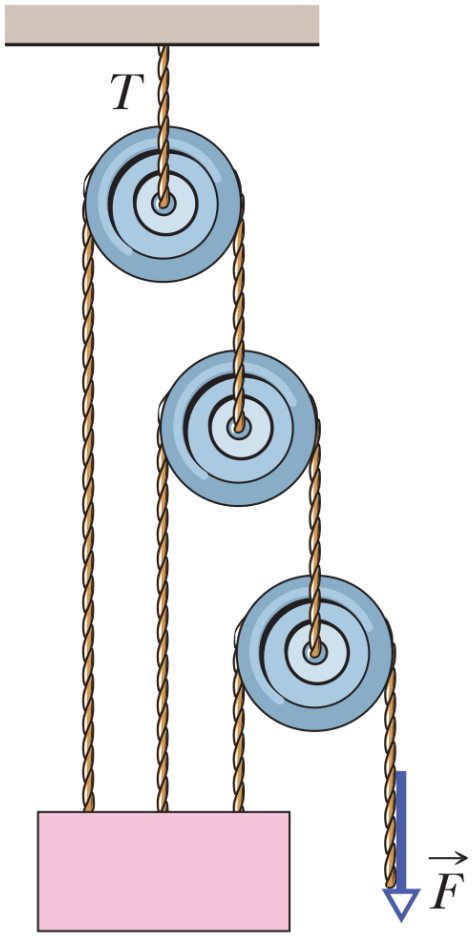
$$\begin{cases} N_A - mg + F_v = 0 \\ mg(L/4)\cos\theta - N_A L\cos\theta + T(L/2)\sin\theta = 0 \\ F_h - T = 0 \\ N_E - F_v = 0 \\ N_E L\cos\theta - T(L/2)\sin\theta = 0 \Rightarrow T = 2N_E/\tan\theta \end{cases}$$

$$①, ② : \begin{cases} N_A + N_E = mg \\ N_A - N_E = mg/4 \end{cases}$$

$$N_A = 5mg/8, \quad N_E = 3mg/8 = F_v$$

$$F_h = T = 3mg/(4\tan\theta)$$

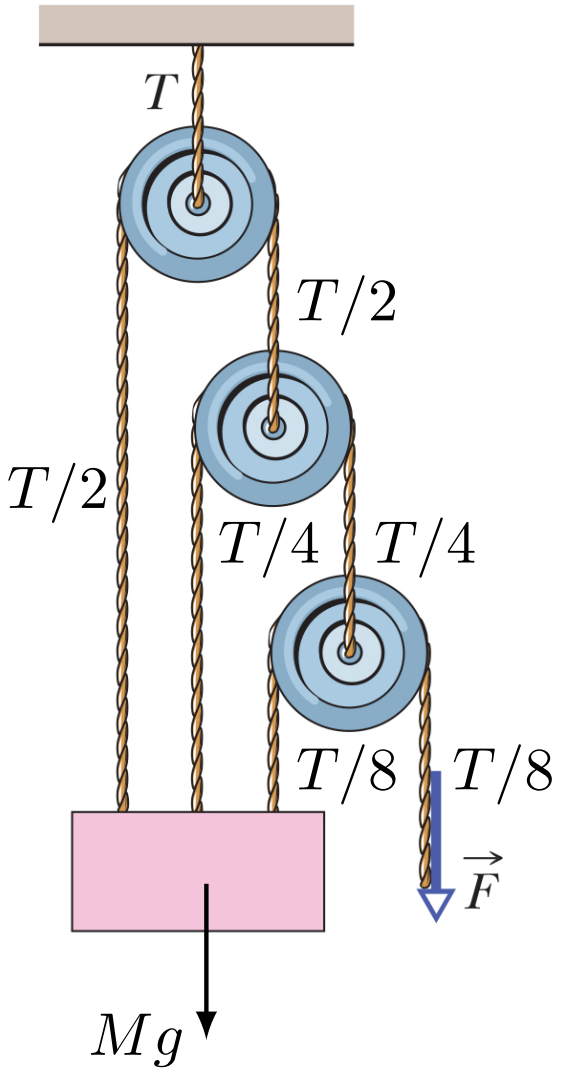
تعادل



مسئله-۱۱: در شکل نیروی F می‌تواند قطعه‌ای به جرم M و قرقره‌ای به جرم ناچیز را در حال تعادل نگهدارد. اصطکاک ناچیز است. نیروی کشش T وارد به کابل بالایی و نیروی F را بر حسب Mg بدست آورید.

تعادل

مسئله-۱۱:



$$\sum F_y = 0$$

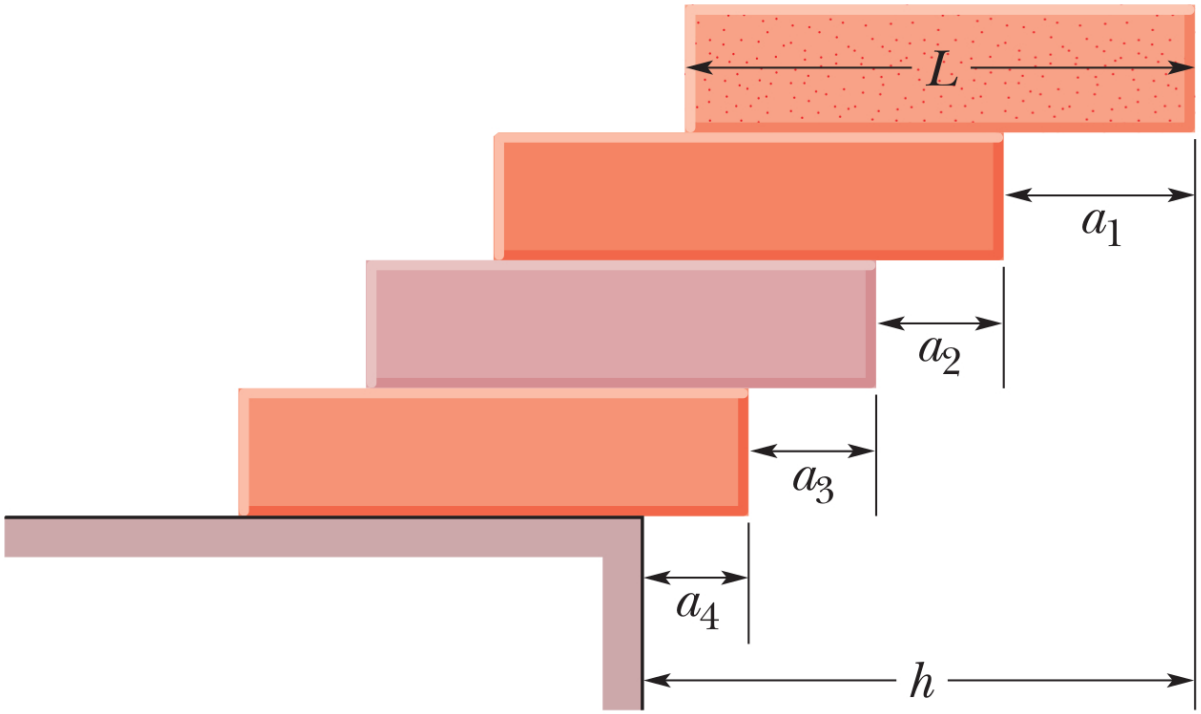
$$\frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = Mg$$

$$\frac{7T}{8} = Mg \Rightarrow T = \frac{8}{7}Mg$$

$$F = \frac{T}{8} = \frac{1}{7}Mg$$

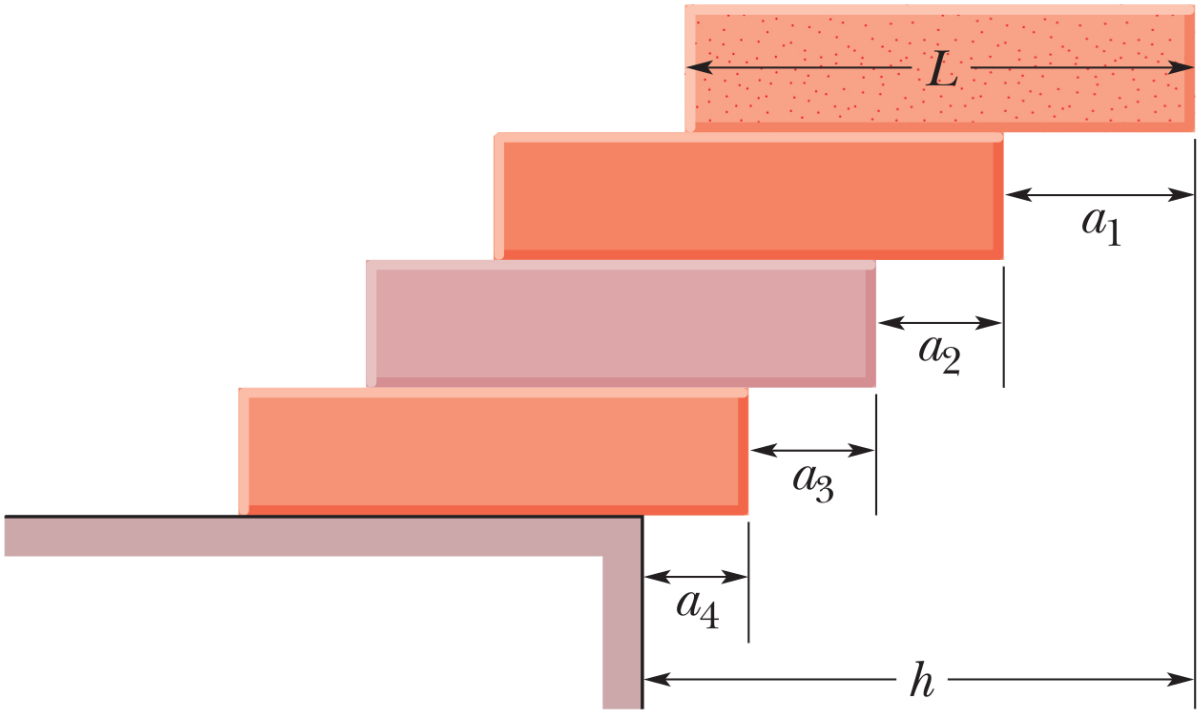
تعادل

مسئله-۱۲: چهار آجر مشابه یکنواخت که طول هر یک L است طوری روی هم قرار گرفته‌اند که قسمتی از هر آجر از لبه‌ی آجر زیری جلوتر است. مطلوب است بر حسب L مقدارهای بیشینه‌ی a_1، a_2، a_3، a_4 وقتی مجموعه در حال تعادل باشد.



تعادل

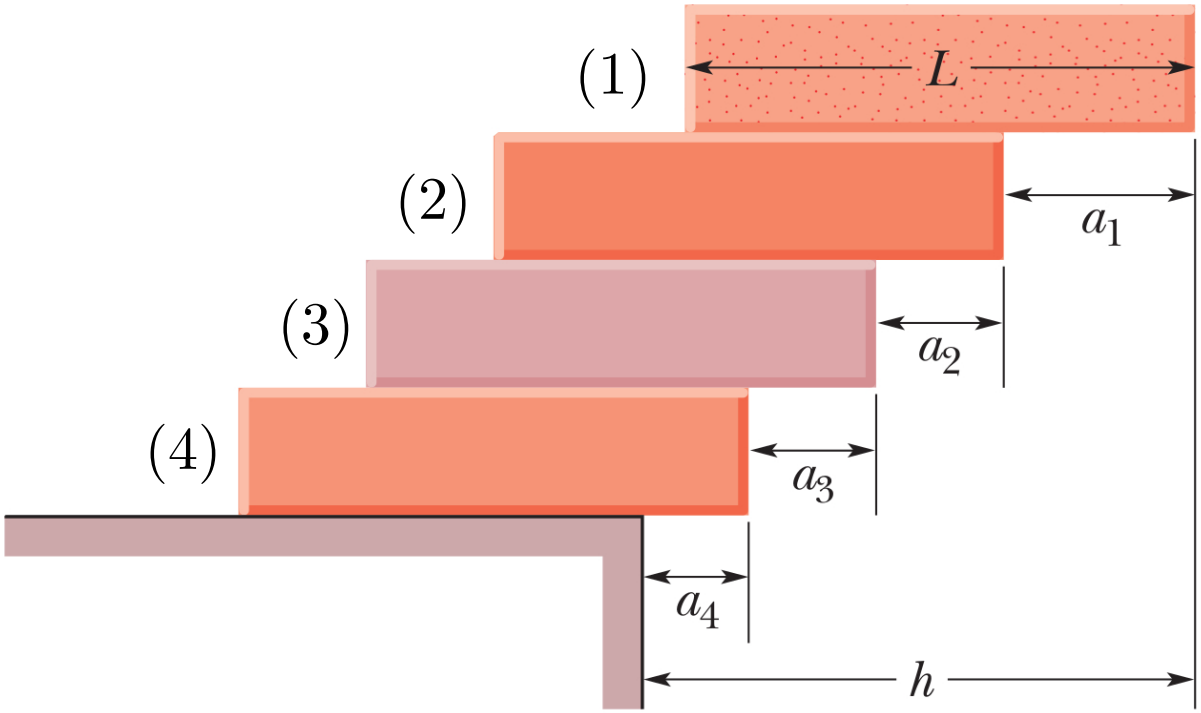
مسئله-۱۲:



نکته کلیدی: تا وقتی مرکز جرم قبل از لبه آجرها قرار گیرد، تعادل برقرار و دورانی نخواهیم داشت. ماکزیمم مقدار جلو رفتگی آجرها وقتی اتفاق می‌افتد که مرکز جرم روی محور دوران قرار گیرد.

تعادل

مسئله-۱۲:

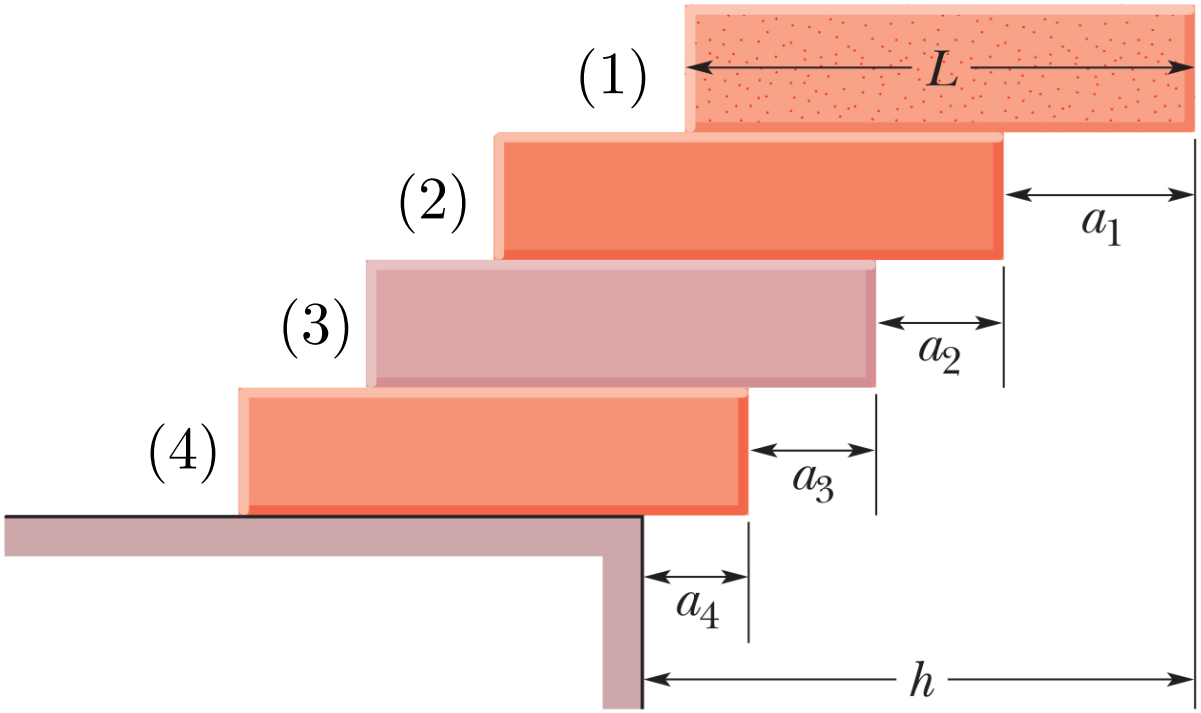


حداکثر جلو رفتگی آجر (1) وقتی اتفاق می‌افتد که مرکز جرم آجر (1) روی لبه‌ی آجر (2) قرار بگیرد، یعنی

$$\boxed{a_1 = \frac{L}{2}}$$

تعادل

مسئله-۱۲:

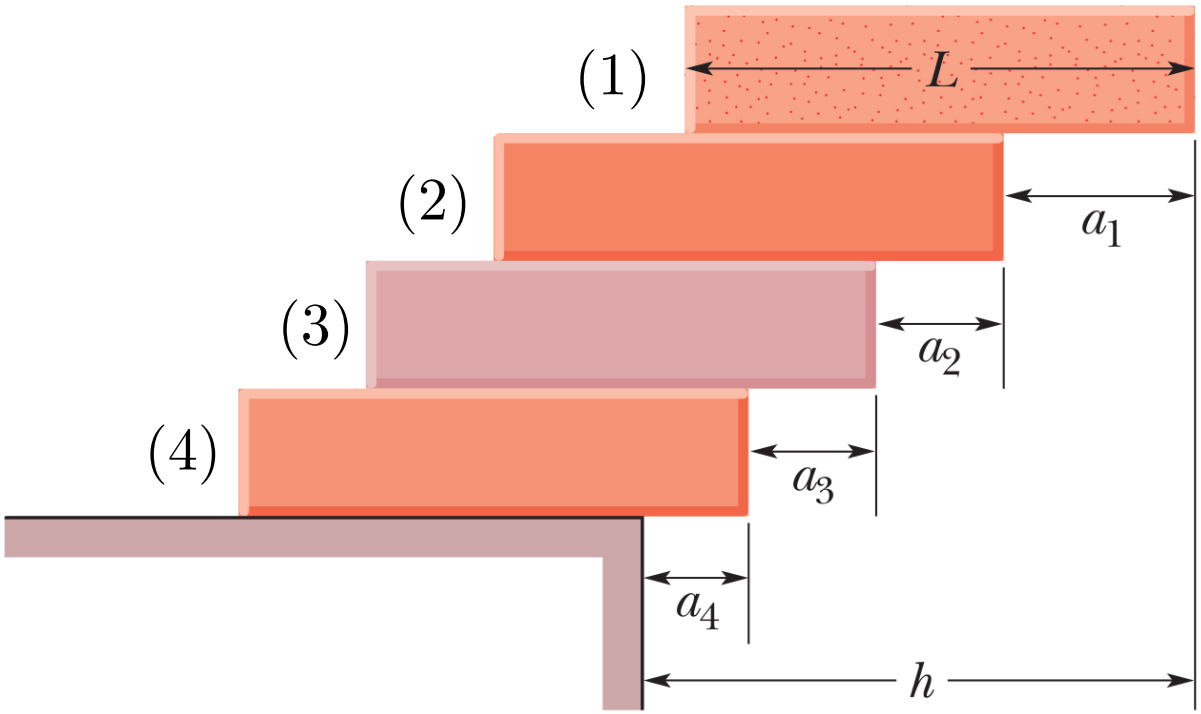


حداکثر جلو رفتگی آجر (2) وقتی اتفاق می‌افتد که مرکز جرم آجر نهایی آجرهای (1) و (2) روی لبه‌ی آجر (3) قرار بگیرند، یعنی

$$m(a_1 + a_2 - \frac{L}{2}) + m(a_2 - \frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_2 = L \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{L}{4}}$$

تعادل

مسئله-۱۲:
حداکثر جلو رفتگی آجر (3) وقتی اتفاق می‌افتد که مرکز جرم آجر نهایی آجرهای (1) ، (2) و (3) روی لبه‌ی آجر (4) قرار بگیرند، یعنی

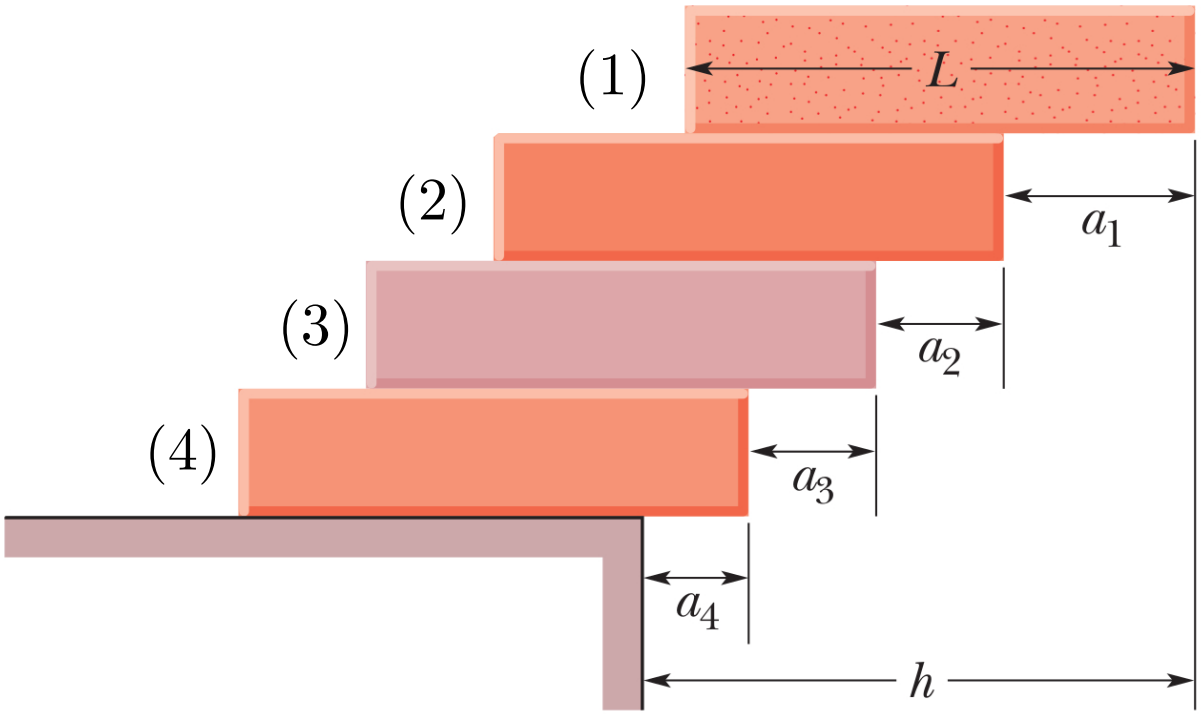


$$m(a_1+a_2+a_3-\frac{L}{2})+m(a_2+a_3-\frac{L}{2})+m(a_3-\frac{L}{2}) = 0 \Rightarrow a_1+2a_2+3a_3 = \frac{3L}{2}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{L}{6}}$$

تعادل

مسئله-۱۲:
حداکثر جلو رفتگی آجر (4) وقتی اتفاق می‌افتد که مرکز جرم آجر نهایی آجرهای (1) ، (2) ، (3) و (4) روی لبه‌ی سکو قرار بگیرند، یعنی



$$m(a_1+a_2+a_3+a_4-\frac{L}{2})+m(a_2+a_3+a_4-\frac{L}{2})+m(a_3+a_4-\frac{L}{2})+m(a_4-\frac{L}{2}) = 0$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = \frac{4L}{2} \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{L}{8}}$$