فیزیک ۱
گرانش

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

گرانش

- هر جسمی در جهان جسم دیگری را جذب می‌کند. این تمایل اجسام برای حرکت به طرف جسم دیگر را **گرانش** می‌گویند.
- ماده مورد نظر در گرانش، جرم جسم است.
  - برای سیبی در نزدیکی زمین، اگرچه جرم زمین خیلی زیاد است، ولی نهایتا نیروی جاذبه بین سیب و زمین در حدود $0.8\ \mathrm{N}$ است.
  - نیروی جاذبه بین دو شخص ایستاده در کنار هم، خیلی کم (تقریبا از مرتبه $10^{-6}\ \mathrm{N}$) وقابل صرفه‌نظر است.

- جاذبه گرانشی برای دو جرم نقطه‌ای m_1 و m_2 با فاصله‌ی r از یکدیگر بصورت زیر داده می‌شود،

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

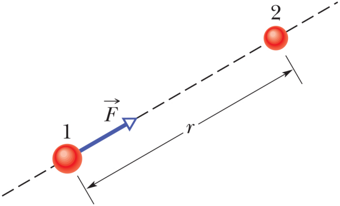
که $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ ثابت گرانش است

گرانش

◄ بزرگی نیروی گرانش وارد بر جرم m_1 ناشی از جرم m_2 بوسیله‌ی رابطه‌ی

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

داده می‌شود و جهت آن بطرف ذره‌ی 2 است.



گرانش

◄ می‌توان بردار نیروی گرانش را بصورت شعاعی توصیف کرد. نیروی گرانش وارد بر جرم m_1 ناشی از جرم m_2 بوسیله‌ی رابطه‌ی

$$\vec{F} = F\hat{r} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

داده می‌شود که $\hat{r}$ بردار یکه‌ی شعاعی می‌باشد.

◄ نیروی وارد بر جرم m_2 ناشی از جرم m_1 دارای همان اندازه‌ی نیروی وارد بر جرم m_1 ولی در جهت مخالف است.

◄ نیروی بین دو جرم m_2 و m_1 در حضور ذرات دیگر تغییر نمی‌کند، حتی اگر ذره‌ی سومی در فضای بین دو ذره 1 و 2 قرار داشته باشند.

گرانش

- در یک دستگاه ذرات نیروی گرانش یک نیروی داخلی محسوب می‌شود که بر اساس قانون سوم نیوتن نیروهای بین هر دو ذره مساوی و در خلاف جهت هستند.
- در یک دستگاه ذرات نیروی گرانش یک نیروی داخلی محسوب می‌شود بطوریکه جمع دو بدوی نیروها برابر صفر خواهد شد.
- در یک دستگاه ذرات و در غیاب نیروهای خارجی، نیروی گرانشی پایستگی تکانه را حفظ می‌کنند.

گرانش و اصل برهم‌نهی

◀ نیروی وارد بر یک ذره از طرف سایر ذرات نقطه‌ای در دستگاه ذرات را باید در یک جمع برداری با در نظر گرفتن جهت و اندازه‌ی آنها بدست آورد.

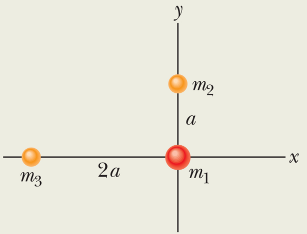
$$\begin{cases} \vec{F}_1^{\text{برایند}} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{12} + \cdots + \vec{F}_{1n} = \sum_{j\neq 1} \vec{F}_{1j} \\ \vec{F}_2^{\text{برایند}} &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{22} + \cdots + \vec{F}_{2n} = \sum_{j\neq 2} \vec{F}_{2j} \\ &\vdots \\ \vec{F}_n^{\text{برایند}} &= \vec{F}_{n1} + \vec{F}_{n2} + \cdots + \vec{F}_{(n-1)n} = \sum_{j\neq n} \vec{F}_{nj} \end{cases}$$

بنابراین

$$\vec{F}_i^{\text{برایند}} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \cdots + \vec{F}_{i(i-1)} + \vec{F}_{i(i+1)} + \cdots + \vec{F}_{in} = \sum_{j\neq i}^{n} \vec{F}_{ij}$$

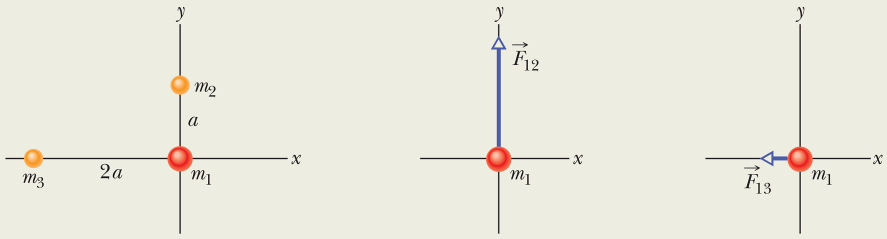
گرانش و اصل برهم‌نهی

مسئله-۱: شکل زیر پیکربندی سه ذره را نشان می‌دهد. ذره‌ی ۱ با جرم m_1 و ذره‌ی ۲ و ۳ با جرم $m_2 = m_3 = 2m_1/3$ است. نیروی گرانشی وارد بر ذره‌ی ۱ ناشی از دیگر ذرات چقدر است.



گرانش و اصل برهم‌نهی

مسئله−۱:



نیروی ناشی از ذره‌ی m_2

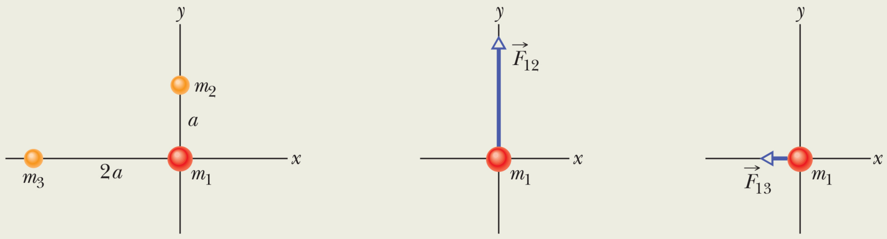
$$\vec{F}_{12} = G\frac{2m_1^2/3}{a^2}\hat{j}$$

نیروی ناشی از ذره‌ی m_3

$$\vec{F}_{13} = -G\frac{2m_1^2/3}{4a^2}\hat{i}$$

نیروی برایند : $\vec{F}_1^{\text{براینده}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = G\frac{m_1^2}{6a^2}\left(\hat{i} - 4\hat{j}\right)$

مسئله–۱:



$$\text{نیروی براینده} : \quad \vec{F}_1^{\text{برایند}} = G\frac{m_1^2}{6a^2}\left(\hat{i} - 4\hat{j}\right)$$

$$\text{اندازه} : \quad F_1^{\text{برایند}} = G\frac{\sqrt{15}m_1^2}{6a^2}$$

$$\text{جهت} : \quad \tan\theta = \frac{F_{1y}}{F_{1x}} = -4 \Rightarrow \theta = -\tan^{-1} 4$$

گرانش و اصل برهم‌نهی

◄ برای اجسام صلب یا اجسامی که ابعاد دارند، نیرو با تقسیم جسم به قسمتهای خیلی کوچک بدست می‌آید. در این حالت با تغییر علامت جمع به انتگرالگیری نیروی وارد بر ذره را از طرف همه‌ی قسمتها بدست می‌آوریم.

◄ می‌توان جسم پیوسته را به دیفرانسیلهای $\mathrm{d}m$ تقسیم کرد که هر یک نیروی دیفرانسیلی $\mathrm{d}\vec{F}$ وارد بر ذره را ایجاد می کنند.

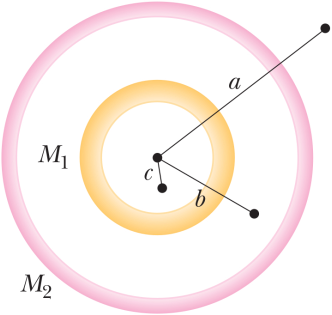
$$\vec{F}_1^{\text{برایند}} = \int \mathrm{d}\vec{F}$$

◄ حالت خاص: اگر جسم صلب یا پیوسته، کره‌ای توپر یا پوسته کروی باشد که جرم بطور یکنواخت در آنها توزیع شده باشد، با این فرض که جرم در مرکز جسم متمرکز است، می‌توان از انتگرالگیری اجتناب کرد.

◄ **قضیه‌ی پوسته**، یک پوسته کروی به جرم M هیچ نیروی گرانشی خالصی به ذره‌ای که در داخل آن قرار دارد وارد نمی‌کند.

گرانش و اصل برهم‌نهی

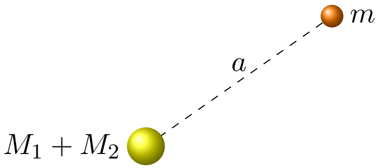
مسئله–۲: دو پوسته کروی هم مرکز به جرمهای M_1 و M_2 را که بطور یکنواخت توزیع شده‌اند در شکل نشاد داده شده است. بزرگی نیروی خالص وارد بر ذره‌ای به جرم m ناشی از پوسته‌ها را وقتی ذره در فاصله‌ی شعاعی الف) a، ب) b و ج) c بدست آورید.



گرانش و اصل برهم‌نهی

مسئله–۲:

الف) برای فاصله شعاعی a که در بیرون دو پوسته‌ی کروی قرار دارد. در این حالت، هر دو پوسته را بصورت یک جرم نقطه‌ای $M_1 + M_2$ در مرکز متمرکز می‌کنیم.

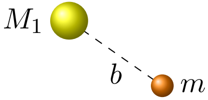


$$\text{نیروی وارد بر ذره‌ی } m : \quad F = G\frac{m(M_1+M_2)}{a^2}, \quad \text{بطرف مرکز}$$

گرانش و اصل برهم‌نهی

مسئله–۲:

ب) برای فاصله شعاعی b که در فاصله‌ی بین دو پوسته‌ی کروی قرار دارد. در این حالت و با استفاده از قضیه‌ی پوسته، نیروی گرانشی خالص بر ذره‌ی m از طرف پوسته بیرونی برابر صفر است و فقط پوسته داخلی اثر غیر صفر دارد. برای این منظور جرم پوسته داخلی را بصورت یک جرم نقطه‌ای M_1 در مرکز متمرکز می‌کنیم.

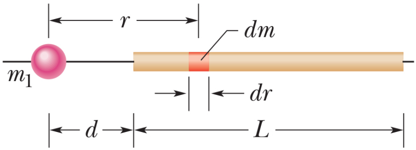


$$\text{نیروی وارد بر ذره‌ی } m : \quad F = G\frac{mM_1}{b^2}, \ \text{بطرف مرکز}$$

ج) برای فاصله شعاعی c که درون پوسته‌ی داخلی قرار دارد. در این حالت و با استفاده از قضیه‌ی پوسته، نیروی گرانشی خالص بر ذره‌ی m از طرف دو پوسته داخلی و بیرونی برابر صفر است.

$$\text{نیروی وارد بر ذره‌ی } m : \quad F = 0$$

مسئله–۳: در شکل ذره‌ای به جرم m_1 در فاصله‌ی d از یک طرف میله یکنواخت بطول L و جرم M قرار دارد. بزرگی نیروی گرانش وارد بر ذره از طرف میله را بدست آورید.

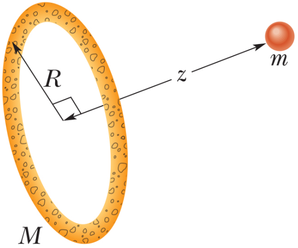


$$\vec{F}_1 = \int \mathrm{d}\vec{F}_1, \quad \mathrm{d}\vec{F}_1 = G\frac{m_1 \mathrm{d}m}{r^2}\hat{r}, \quad \mathrm{d}m = \frac{M}{L}\mathrm{d}r, \quad d \leq r \leq d+L$$

$$\vec{F}_1 = \hat{r}\frac{Gm_1M}{L}\int_d^{d+L}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \hat{r}\frac{Gm_1M}{L}\left[-\frac{1}{r}\right]_d^{d+L} = \hat{r}\frac{Gm_1M}{L}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right]$$

$$\vec{F}_1 = \hat{r}\frac{Gm_1M}{d(d+L)}$$

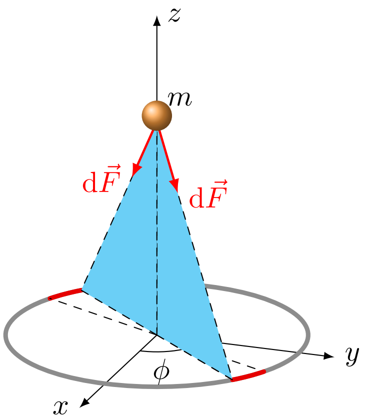
مسئله‌–۴: حلقه‌ای نازک و همگن به شعاع R و جرم M را در نظر بگیرید. نیروی وارد بر جرم m که روی محور مرکزی حلقه و به فاصله‌ی z از مرکز حلقه قرار دارد را بدست آورید.

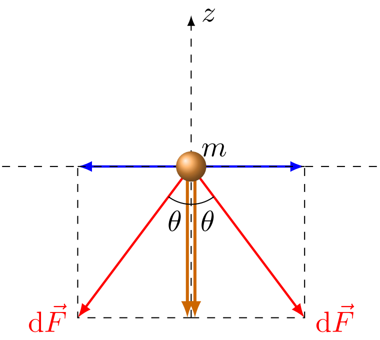


گرانش و اصل برهم‌نهی

مسئله–۳:

$$\mathrm{d}M = \frac{M}{2\pi}\mathrm{d}\phi$$





$$\mathrm{d}F_z = -\mathrm{d}F\cos\theta$$

$$\mathrm{d}F_z = -\mathrm{d}F\cos\theta = -G\frac{m(M/2\pi)\mathrm{d}\phi}{R^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

گرانش و اصل برهم‌نهی

مسئله–۴:

$$\mathrm{d}M = \frac{M}{2\pi}\mathrm{d}\phi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$\mathrm{d}F_z = -\mathrm{d}F\cos\theta$$

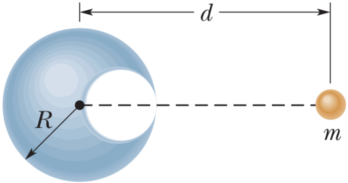
$$\mathrm{d}F_z = -G\frac{m(M/2\pi)\mathrm{d}\phi}{R^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$F_z = -G\frac{m(M/2\pi)}{R^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$F_z = -G\frac{mMz}{[R^2+z^2]^{3/2}}$$

گرانش و اصل برهم‌نهی

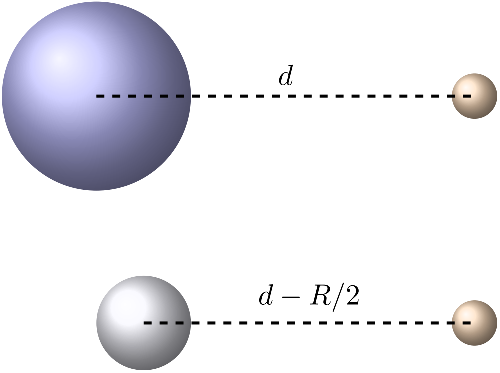
مسئله-۵: شکل حفره‌ای کروی را درون کره‌ی سربی به شعاع R نشان می‌دهد. سطح حفره از مرکز می‌گذرد و سمت راست آن با کره در تماس است. جرم کره پیش از ایجاد حفره M بوده است. کره‌ی سربی حفره‌دار با چه نیروی گرانشی کره‌ی کوچک به جرم m را که در فاصله d از مرکز آن روی خط واصل مرکزهای کره‌ها و حفره قرار دارد جذب می‌کند؟



گرانش و اصل برهم‌نهی

مسئله–۵:

$$\text{چگالی حجمی}\ :\ \rho = \frac{M}{(4\pi R^3/3)(1-1/8)} = \frac{6M}{7\pi R^3}$$



$$F_1 = -G\frac{m[+\rho(4/3)\pi R^3]}{d^2}$$

$$F_2 = -G\frac{m[-\rho(4/3)\pi (R/2)^3]}{(d-R/2)^2}$$

گرانش و اصل برهم‌نهی

مسئله–۵:

$$\rho = \frac{6M}{7\pi R^3} \quad : \text{چگالی حجمی}$$

$$F_1 = -G\frac{m[+\rho(4/3)\pi R^3]}{d^2} = -G\frac{8mM}{7d^2}$$

$$F_2 = -G\frac{m[-\rho(4/3)\pi (R/2)^3]}{(d-R/2)^2} = G\frac{mM}{7(d-R/2)^2}$$

$$F_{\text{برایند}} = F_1 + F_2 = -G\frac{8mM}{7d^2} + G\frac{mM}{7(d-R/2)^2}$$

$$F_{\text{برایند}} = -G\frac{8mM}{7d^2}\left[1 - \frac{d^2}{8(d-R/2)^2}\right]$$

گرانش در نزدیکی سطح زمین

◀ فرض کنید زمین کره‌ای یکنواخت به جرم M است. اندازه‌ی گرانش وارد بر ذره‌ای به جرم m از طرف زمین در محلی خارج از سطح زمین به فاصله‌ی r از رابطه‌ی

$$F = G = \frac{mM}{r^2}$$

بدست می‌آید.

◀ حالا اگر ذره رها شود در اثر نیروی گرانش با شتابی به نام شتاب گرانش a_g بطرف مرکز زمین سقوط می‌کند. مطابق قانون دو نیوتن

$$F = ma_g$$

شتاب گرانش بصورت

$$a_g = \frac{GM}{r^2}$$

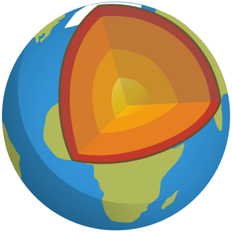
داده می‌شود.

گرانش در نزدیکی سطح زمین

- زمین می‌چرخد و این باعث می‌شود که زمین را دیگر بعنوان یک چارچوب لخت در نظر نگیریم. اما با صرفه‌نظر کردن چرخش زمین، می‌توان شتاب گرانش را برابر با شتاب سقوط ازاد $g = 9.8\mathrm{m/s}^2$ قرار داد.
- بطور کلی مقدار اندازه‌گیری شده g برای یک مکان مشخص با مقدار بدست آمده برای شتاب گرانش از رابطه‌ی

$$a_g = \frac{GM}{r^2}$$

مقادیر متفاوتی خواهد بود. سه دلیل برای این تفاوت وجود دارد،
۱) زمین یک توزیع یکنواختی ندارد. چگالی زمین بصورت شعاعی تغییر می‌کند.



گرانش در نزدیکی سطح زمین

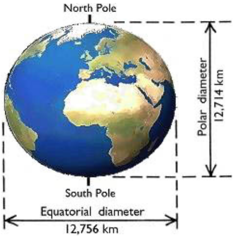
◄ زمین می‌چرخد و این باعث می‌شود که زمین را دیگر بعنوان یک چارچوب لخت در نظر نگیریم. اما با صرفه‌نظر کردن چرخش زمین، می‌توان شتاب گرانش را برابر با شتاب سقوط ازاد $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ قرار داد.

◄ بطور کلی مقدار اندازه‌گیری شده g برای یک مکان مشخص با مقدار بدست آمده برای شتاب گرانش از رابطه‌ی

$$a_g = \frac{GM}{r^2}$$

مقادیر متفاوتی خواهد بود. سه دلیل برای این تفاوت وجود دارد،

۲) **زمین یک کره کامل نیست**. زمین تقریبا در قطبها پخ و در استوا برآمده است.



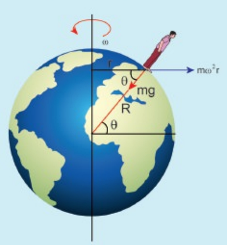
گرانش در نزدیکی سطح زمین

◄ زمین می‌چرخد و این باعث می‌شود که زمین را دیگر بعنوان یک چارچوب لخت در نظر نگیریم. اما با صرفه‌نظر کردن چرخش زمین، می‌توان شتاب گرانش را برابر با شتاب سقوط ازاد $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ قرار داد.

◄ بطور کلی مقدار اندازه‌گیری شده g برای یک مکان مشخص با مقدار بدست آمده برای شتاب گرانش از رابطه‌ی

$$a_g = \frac{GM}{r^2}$$

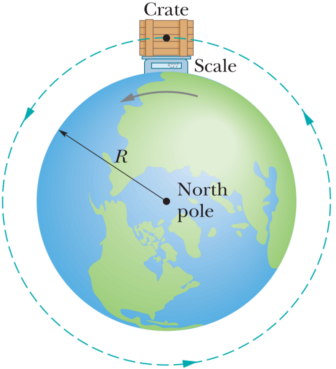
مقادیر متفاوتی خواهد بود. سه دلیل برای این تفاوت وجود دارد،

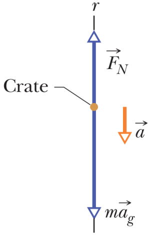


۳) زمین می‌چرخد. وقتی جسمی در مکانی بر روی سطح زمین قرار دارد، باید بر روی دایره‌ای حول محور دوران بچرخد. بنابراین دارای شتاب جانب به مرکز می‌شود که جهت و بزرگی g را دستخوش تغییر می‌کند.

گرانش در نزدیکی سطح زمین

برای اینکه ببینیم چگونه چرخش زمین باعث اختلاف g و a_g می‌شود، وضعیت ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که مطابق شکل در استوا صندوق به جرم m بر روی ترازویی قرار دارد.



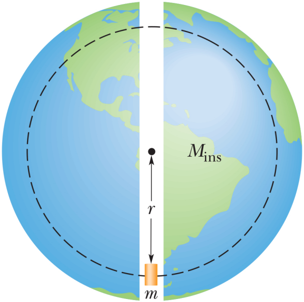


$$F_N - ma_g = m(-R\omega^2)$$

اندازه‌ی نیروی عمودی یا همان عدد ترازو : $F_N = mg$

$$g = a_g - R\omega^2$$

گرانش در داخل زمین



برای بدست آورد نیروی گرانشی وارد بر ذره‌ی m در فاصله شعاعی r می‌بایست بخشی از جرم زمین را که توسط کره‌ی به شعاع r احاطه می‌شود را در نظر بگیریم.
در اینجا جرمی M_{ins} که بوسیله‌ی کره‌ی به شعاع r احاطه می‌شود برابر است با

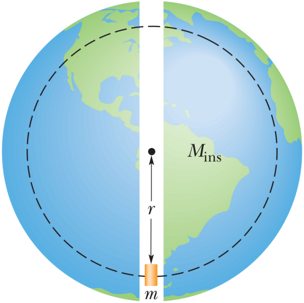
$$M_{\text{ins}} = \text{چگالی} \times \text{حجم کره‌ی به شعاع } r$$

$$M_{\text{ins}} = \frac{M}{(4/3)\pi R^3} \times (4/3)\pi r^3 = \frac{M}{R^3} r^3$$

نیروی وارد بر ذره‌ی m : $F = G\dfrac{mM_{\text{ins}}}{r^2} \Rightarrow F = G\dfrac{mM}{R^3} r$ بطرف مرکز

نیروی فنر : $\vec{F} = -G\dfrac{mM}{R^3} r\hat{r} = -Kr\hat{r}$

گرانش در داخل زمین



رابطه‌ی

$$F = -G\frac{mM}{R^3}r = -Kr$$

نشان می‌دهد که جرم m مانند قطعه‌ی متصل به فنر حول مرکز زمین نوسان می‌کند.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{mM}{R^3}r \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} + G\frac{M}{R^3}r = 0}, \quad \omega = \sqrt{G\frac{M}{R^3}}$$

انرژی پتانسیل گرانش

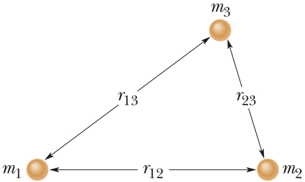
انرژی پتانسیل گرانشی U دو ذره به جرم m و M با فاصله‌ی r از هم بصورت

$$\boxed{U = -G\frac{mM}{r}}$$

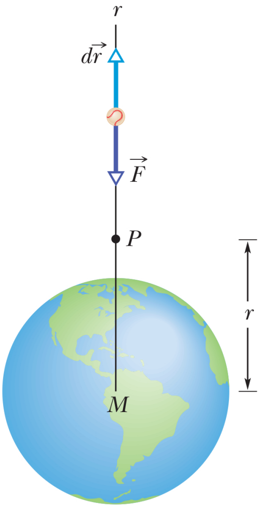
داده می‌شود.

- به ازای $r = \infty$، $U(\infty) = 0$ است.
- برای هر مقدار محدود r، پتانسیل منفی است.
- انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه چند ذره‌ای

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}} + \frac{Gm_3m_1}{r_{13}}\right)$$



انرژی پتانسیل گرانش



انرژی پتانسیل گرانشی یک توپ بیسبال که از سطح زمین بطرف بالا درتاب می‌شود، برابر است با

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

در اینجا قصد داریم عبارت انرژی پتانسیل گرانشی را بوسیله کار نیروی گرانشی وقتی توپ بیسبال از نقطه‌ی P بطرف بینهایت می‌رود را بدست آوریم.

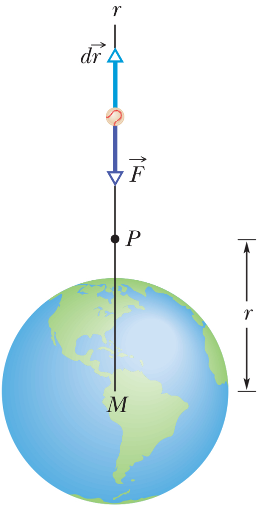
نیروی گرانشی یک نیروی متغییر است، بنابراین

$$W = \int_r^\infty \vec{F}_g(r) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{F}_g(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}, \quad \vec{r} = \hat{r}\mathrm{d}r$$

انرژی پتانسیل گرانش

در اینجا قصد داریم عبارت انرژی پتانسیل گرانشی را بوسیله کار نیروی گرانشی وقتی توپ بیسبال از نقطه‌ی P بطرف بینهایت می‌رود را بدست آوریم.



$$W = \int_r^\infty \vec{F}_g(r) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

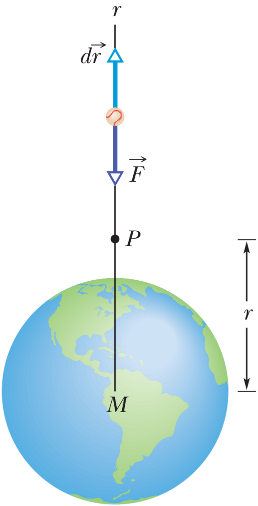
$$\vec{F}_g(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}, \quad \vec{r} = \hat{r}\mathrm{d}r$$

$$W = -\int_r^\infty G\frac{Mm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$W = -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_r^\infty$$

$$W = -\frac{GMm}{r}$$

انرژی پتانسیل گرانش



$$W = -\frac{GMm}{r}$$

نیروی گرانشی مانند نیروی کولنی یک **نیروی پایستار** می‌باشد. بنابراین می‌توان برای آن انرژی پتانسیل تعریف کرد که رابطه‌ی آن با کار بصورت زیر است

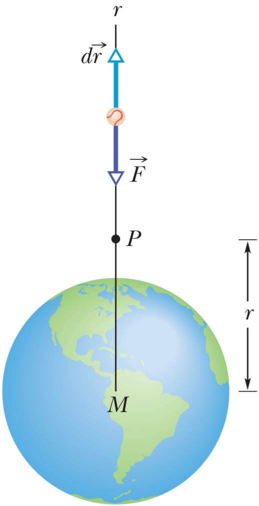
$$\Delta U = -W$$

$$U_\infty - U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

اگر مرجع پتانسیل در بینهایت را بربر صفر قرار دهیم $(U_\infty = 0)$ انرژی پتانسیل گرانشی برابر است با

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} = W$$

انرژی پتانسیل گرانش



$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

برای نیروهای پاستار و پتانسیل ناشی از چنین نیروهایی رابطه زیر همواره برقرار است،

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}$$

در همین راستا با در اختیار داشتن پتانسیل گرانشی می‌توان نیروی گرانشی را بصورت زیر بدست آورد،

$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}$$

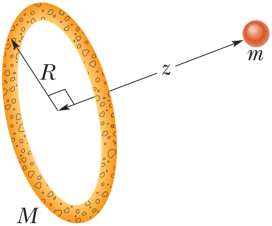
انرژی پتانسیل گرانش

◄ در حل مسائل با پیوستار جرمی، پتانسیل گرانشی در هر نقطه را باید برای هر عنصر جرمی بدست آورد.

◄ فرم دیفرانسیلی پتانسیل گرانشی بین عنصر جرمی $\mathrm{d}m$ و جرم m_1 با فرض اینکه پتانسیل در فاصله بینهایت صفر است بصورت زیر داده می‌شود

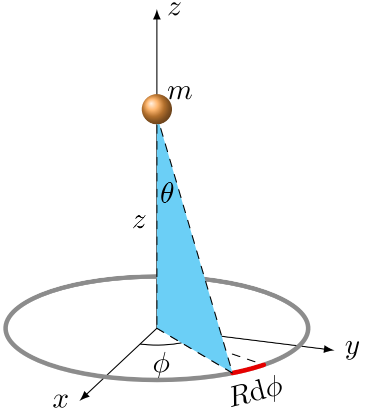
$$\mathrm{d}U = -\frac{Gm_1\mathrm{d}m}{r}$$

مسئله–۶: حلقه‌ای نازک و همگن به شعاع R و جرم M را در نظر بگیرید. انرژی پتانسیل گرانشی بین جرم m که روی محور مرکزی حلقه و به فاصله‌ی z از مرکز حلقه قرار دارد را بدست آورید.



انرژی پتانسیل گرانش

مسئله–۶:



$$\mathrm{d}M = \frac{M}{2\pi R}R\mathrm{d}\phi = \frac{M}{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}U = -\frac{Gm\mathrm{d}M}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\mathrm{d}U = -\frac{GmM}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$U = -\frac{GmM}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

$$U = -\frac{GmM}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}z}$$

$$F = -\frac{GmMz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$