

# فیزیک ۱

## نوسانات

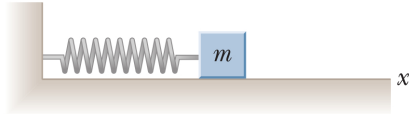
محمد رضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

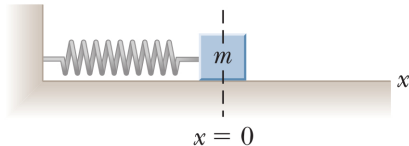
## حرکت هماهنگ ساده

◀ یک مدل ساده برای حرکت هماهنگ ساده، بررسی ذره‌ای به جرم  $m$  می‌باشد که مطابق شکل به انتهای فنری متصل شده است.

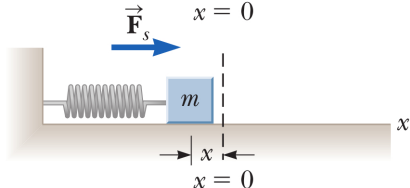
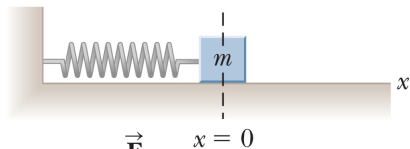
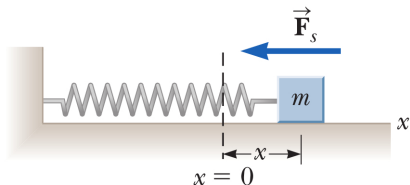


ذره می‌تواند روی سطح افقی بدون اصطکاک حرکت کند.

◀ وقتی فنر هیچ فشردگی و کشیدگی ندارد، ذره در مکانی که به مکان تعادلی شناخته می‌شود در حال سکون است. در شکل مکان تعادلی را در  $x = 0$  مشخص کرده‌ایم.



## حرکت هماهنگ ساده



◀ وقتی ذره از حال سکون به اندازه  $x$  بطرف راست یا چپ جابجا می‌شود، نیرویی از فنر  $\vec{F}_s$  در خلاف جهت جابجایی به ذره اعمال می‌شود.

◀ نیروی فنر نسبت به نقطه‌ی تعادل، بوسیله‌ی قانون هوک داده می‌شود

$$F_s = -kx$$

◀ برای حالت کشیدگی یا جابجایی  $x > 0$

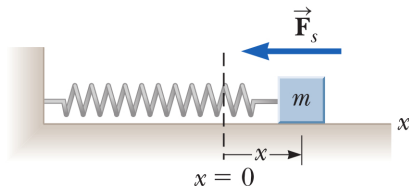
$$F_s < 0$$

◀ برای حالت فشرده‌گی یا جابجایی  $x < 0$

$$F_s > 0$$

## حرکت هماهنگ ساده

◀ وقتی ذره‌ای از نقطه‌ی تعادل به اندازه‌ی  $x$  جابجا و سپس رها می‌شود، تحت تاثیر نیروی هوک حرکت شتابداری پیدا می‌کند.



◀ شتاب ذره را می‌توان با استفاده از قانون دوم نیوتن بصورت زیر داده می‌شود،

$$\sum F = ma \Rightarrow -kx = ma \Rightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

◀ معادله‌ی دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده یا معادله دیفرانسیل دستگاه جرم-فنر بصورت زیر داده می‌شود،

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

## حرکت هماهنگ ساده

◀ معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

یک معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم همگن با ضرایب ثابت است.

◀ اگر  $\omega = \sqrt{k/m}$ ، تمامی جوابهای ممکن معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

بصورت داده می‌شود

مقادیر  $A$  و  $\alpha$  با شرایط اولیه مشخص می‌شود،  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ ,

مقادیر  $B$  و  $\beta$  با شرایط اولیه مشخص می‌شود،  $x = B \sin(\omega t + \beta)$ ,

مقادیر  $C_1$  و  $C_2$  با شرایط اولیه مشخص می‌شود،  $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ ,

که  $\omega (= 2\pi/T)$  را فرکانس زاویه‌ی نوسانات حرکت هماهنگ ساده می‌نامند.

◀ معادلات سرعت

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega B \cos(\omega t + \beta)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -C_1\omega \sin \omega t + C_2\omega \cos \omega t$$

◀ تمامی جوابهای ممکن معادله دیفرانسیل

مقادیر  $A$  و  $\alpha$  با شرایط اولیه مشخص می‌شود،  $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ ,

مقادیر  $B$  و  $\beta$  با شرایط اولیه مشخص می‌شود،  $x = B \cos(\omega t + \beta)$ ,

مقادیر  $C_1$  و  $C_2$  با شرایط اولیه مشخص می‌شود،  $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ ,

پس از اعمال شرایط اولیه به یک رابطه‌ی یکسانی منجر خواهند شد.

## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۱: اگر جواب معادله دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

بصورت

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

باشد با اعمال شرایط اولیه

$$x(t = 0) = x_0, v(t = 0) = 0$$

ثوابت  $A$  و  $\alpha$  را بدست آورید.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \text{شرایط اولیه: } x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = 0$$

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = A \cos \alpha \quad (۱) \\ 0 = -A\omega \sin \alpha \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۲): 0 = -A\omega \sin \alpha \Rightarrow \alpha = 0$$

$$(۱): \text{اگر } \alpha = 0 \Rightarrow A = x_0$$

بنابراین

$$x = x_0 \cos \omega t$$



## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۲: اگر جواب معادله دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

بصورت

$$x = B \sin(\omega t + \beta)$$

باشد با اعمال شرایط اولیه

$$x(t = 0) = x_0, v(t = 0) = 0$$

ثوابت  $B$  و  $\beta$  را بدست آورید.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \text{شرایط اولیه: } x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = 0$$

$$x = B \sin(\omega t + \beta)$$

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = B \sin \beta \quad (۱) \\ 0 = B\omega \cos \beta \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۲): 0 = B\omega \cos \beta \Rightarrow \beta = \pi/2$$

$$(۱): \text{اگر } \beta = \pi/2 \Rightarrow B = x_0$$

بنابراین

$$x = x_0 \sin(\omega t + \pi/2) = x_0 \cos \omega t$$

## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۳: اگر جواب معادله دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

بصورت

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

باشد با اعمال شرایط اولیه

$$x(t = 0) = x_0, v(t = 0) = 0$$

ثوابت  $C_1$  و  $C_2$  را بدست آورید.

# حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۳:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad \text{شرایط اولیه: } x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = 0$$

اگر جواب معادله دیفرانسیل را بصورت

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

انتخاب کنیم، با اعمال شرایط اولیه معادلات زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = C_1 \\ 0 = C_2 \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

بنابراین

$$x = x_0 \cos \omega t$$

## حرکت هماهنگ ساده

بدین ترتیب جواب معادله دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده

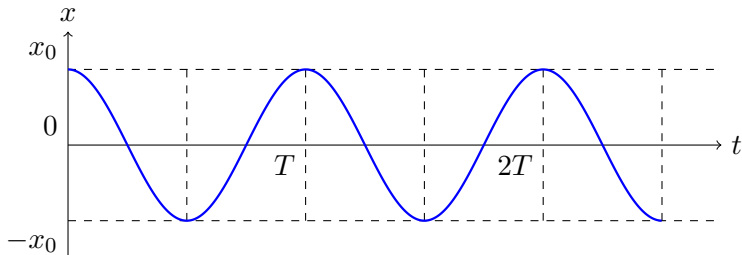
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

برای شرایط اولیه‌ی

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = 0$$

برابراست با

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad \omega = 2\pi/T, \quad \text{دامنه} = x_0$$

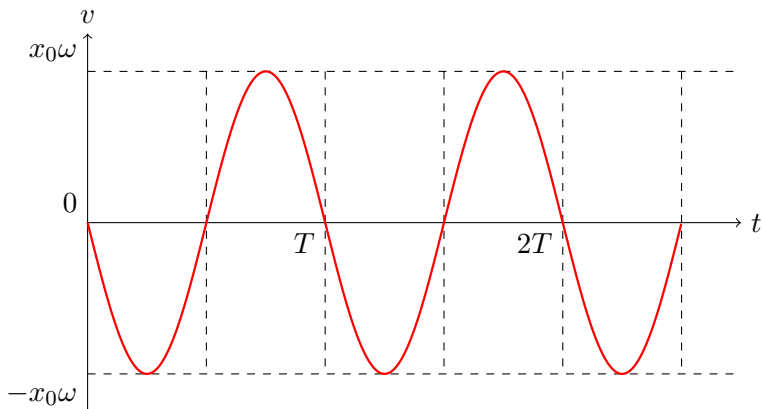


# حرکت هماهنگ ساده

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad \omega = 2\pi/T$$

معادله‌ی سرعت

$$v = -x_0\omega \sin \omega t, \quad \text{دامنه سرعت} = x_0\omega$$

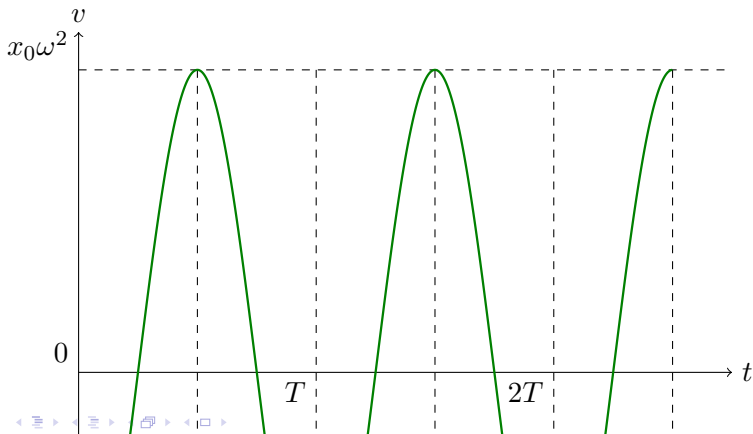


# حرکت هماهنگ ساده

$$v = -x_0\omega \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi/T, \quad \text{دامنه سرعت} = x_0\omega$$

معادله‌ی شتاب

$$a(t) = -x_0\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x(t), \quad \text{دامنه شتاب} = x_0\omega^2$$



## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۴: اگر جواب معادله دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

بصورت

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

باشد با اعمال شرایط اولیه

$$x(t = 0) = 0, v(t = 0) = v_0 > 0$$

ثوابت  $A$  و  $\alpha$  را بدست آورید.



## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۴:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad x(t=0) = 0, \quad v(t=0) = v_0 > 0$$

اگر جواب معادله دیفرانسیل را بصورت

$$x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

انتخاب کنیم، با اعمال شرایط اولیه معادلات زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = A \cos \alpha \quad (۱) \\ v_0 = -A\omega \sin \alpha \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \quad 0 = A \cos \alpha \Rightarrow \alpha = -\pi/2$$

$$(۲) \quad \text{اگر } \alpha = -\pi/2 \Rightarrow A = v_0/\omega$$

بنابراین

$$x = (v_0/\omega) \cos(\omega t - \pi/2) = (v_0/\omega) \sin \omega t$$

## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۵: اگر جواب معادله دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

بصورت

$$x = B \sin(\omega t + \beta)$$

باشد با اعمال شرایط اولیه

$$x(t = 0) = 0, v(t = 0) = v_0 > 0$$

ثوابت  $B$  و  $\beta$  را بدست آورید.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad x(t=0) = 0, \quad v(t=0) = v_0 > 0$$

اگر جواب معادله دیفرانسیل را بصورت

$$x = B \sin(\omega t + \beta)$$

انتخاب کنیم، با اعمال شرایط اولیه معادلات زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = B \sin \beta \quad (۱) \\ v_0 = B\omega \cos \beta \quad (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \quad 0 = B \sin \beta \Rightarrow \beta = 0$$

$$(۱) \quad \beta = 0 \Rightarrow B = v_0/\omega$$

بنابراین

$$x = (v_0/\omega) \sin \omega t$$

## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۶: اگر جواب معادله دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

بصورت

$$x = C_1 \cos \omega t + \sin \omega t$$

باشد با اعمال شرایط اولیه

$$x(t=0) = 0, v(t=0) = v_0 > 0$$

ثوابت  $C_1$  و  $C_2$  را بدست آورید.

## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۶:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad x(t=0) = 0, \quad v(t=0) = v_0$$

اگر جواب معادله دیفرانسیل را بصورت

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

انتخاب کنیم، با اعمال شرایط اولیه معادلات زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = C_1 \\ v_0 = C_2 \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = v_0/\omega \end{cases}$$

بنابراین

$$x = (v_0/\omega) \sin \omega t$$

## حرکت هماهنگ ساده

بدین ترتیب جواب معادله دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده

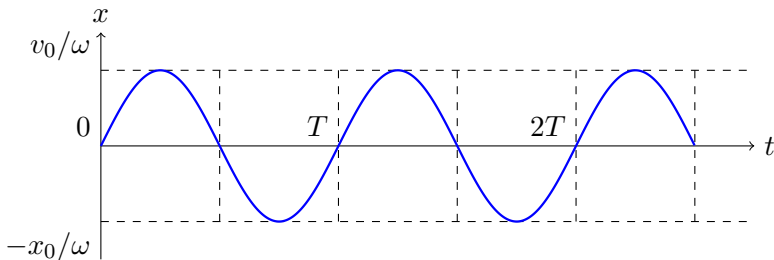
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

برای شرایط اولیه‌ی

$$x(t=0) = 0, \quad v(t=0) = v_0$$

برابر است با

$$x = (v_0/\omega) \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi/T, \quad \text{دامنه} = v_0/\omega$$

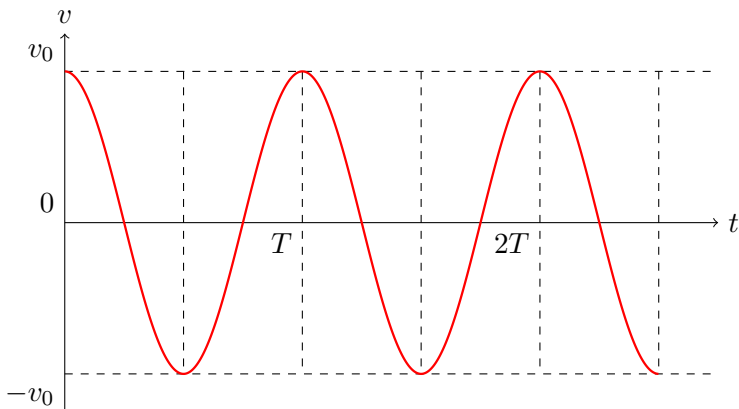


# حرکت هماهنگ ساده

$$x = (v_0/\omega) \sin \omega t, \quad \omega = 2\pi/T$$

معادله‌ی سرعت

$$v = v_0 \cos \omega t, \quad \text{دامنه سرعت} = v_0$$

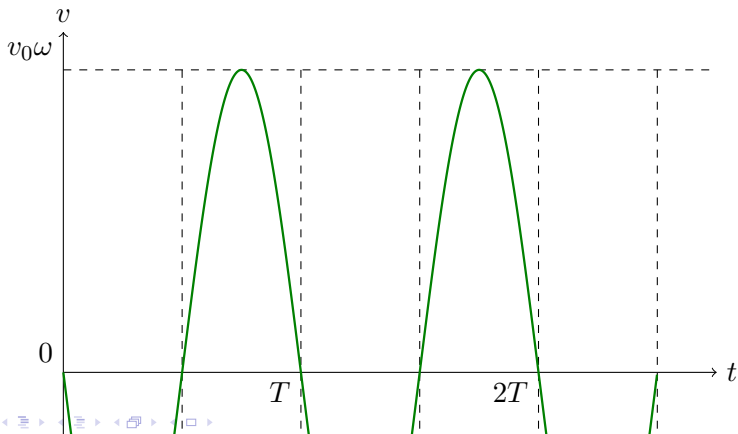


# حرکت هماهنگ ساده

$$v = v_0 \cos \omega t, \quad \omega = 2\pi/T, \quad \text{دامنہ سرعت} = v_0$$

معادلہ شتاب

$$a(t) = -v_0\omega \sin \omega t = -\omega^2 x(t), \quad \text{دامنہ شتاب} = v_0\omega$$





## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۷: معادله‌ی حرکت هماهنگ ساده با فرکانس زاویه‌ی  $\omega$  و شرایط اولیه

$$x(t=0) = x_0, \quad v(t=0) = v_0$$

بدست آورید.

جواب انتخابی برای حرکت هماهنگ ساده

اعمال شرایط اولیه

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cos \alpha = x_0 \\ -A\omega \sin \alpha = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cos \alpha = x_0 \\ A \sin \alpha = -v_0/\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \\ \alpha = -\tan^{-1}(v_0/x_0\omega) \end{cases}$$

$$x = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \cos(\omega t + \alpha), \quad \tan \alpha = -v_0/x_0\omega$$

# حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۷:

جواب انتخابی برای حرکت هماهنگ ساده :  $x = B \sin(\omega t + \beta)$

اعمال شرایط اولیه

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B \sin \beta = x_0 \\ B\omega \cos \beta = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \sin \beta = x_0 \\ A \cos \beta = v_0/\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \\ \beta = \tan^{-1}(x_0\omega/v_0) \end{cases}$$

$$x = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \sin(\omega t + \beta), \quad \tan \beta = x_0\omega/v_0$$

## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۷:

جواب انتخابی برای حرکت هماهنگ ساده  $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$

اعمال شرایط اولیه

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 \omega = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 \\ C_2 = v_0/\omega \end{cases}$$

$$x = x_0 \cos \omega t + (v_0/\omega) \sin \omega t$$

## حرکت هماهنگ ساده

مسئله-۷:

جوابهای یکسان معادله‌ی حرکت

$$x = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \cos(\omega t + \alpha), \quad \tan \alpha = -v_0/x_0\omega$$

$$x = x_0 \cos \omega t + (v_0/\omega) \sin \omega t$$

$$x = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2} \sin(\omega t + \beta), \quad \tan \beta = x_0\omega/v_0$$

$$\tan \alpha \tan \beta = -1$$

$$\text{اتحاد: } \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

بنابراین

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

## انرژی در حرکت هماهنگ ساده

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{: انرژی جنبشی}$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{: انرژی پتانسیل}$$

$$E = K + U \quad \text{: انرژی کل}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

برای معادله حرکت

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{k/m}$$

که

$$v = -A\omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$K = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha), \quad U = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

## انرژی در حرکت هماهنگ ساده

$$\text{انرژی جنبشی} : K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$\text{انرژی پتانسیل} : U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

$$\text{انرژی کل} : E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = \sqrt{k/m} \Rightarrow k = m\omega^2$$

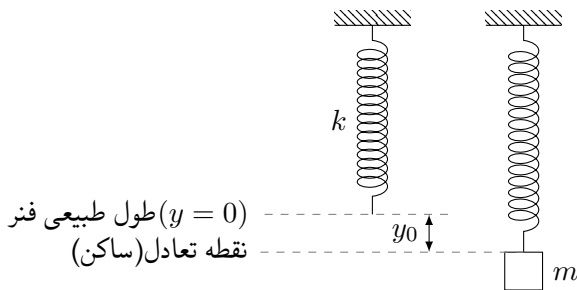
$$E = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha)$$

$$= \frac{1}{2}kA^2(\sin^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha))$$

$$= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \text{ثابت}$$

# فیزیک فنر آویزان در امتداد قائم: حالت تعادل

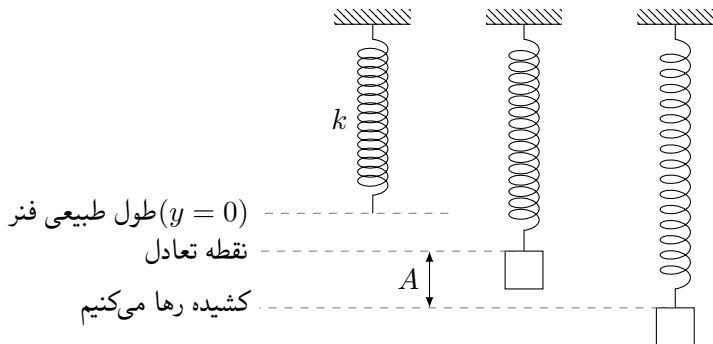
$$F = -ky \quad \text{قانون هوک}$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -ky_0 - mg = 0 \Rightarrow y_0 = -\frac{mg}{k}$$

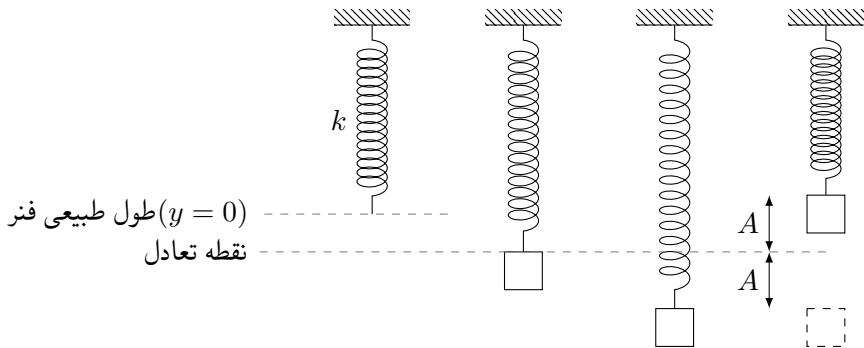
$$y_0 = -\frac{g}{k}m$$

# فیزیک فنر آویزان در امتداد قائم: نوسانات حول نقطه تعادل





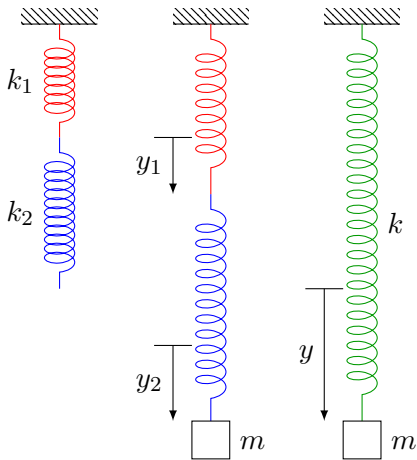
# فیزیک فز آویزان در امتدا قائم: نوسانات حول نقطه تعادل



$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_y \Rightarrow m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky - mg \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = -g$$

$$y = -\frac{mg}{k} + A \cos(\omega t), \quad \text{فرکانس نوسانات: } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

## سری و موازی کردن فنرها



نیروی فنر با ثابت  $k_1$  برای جابجایی  $y_1$  برابر است با

$$F = -k_1 y_1$$

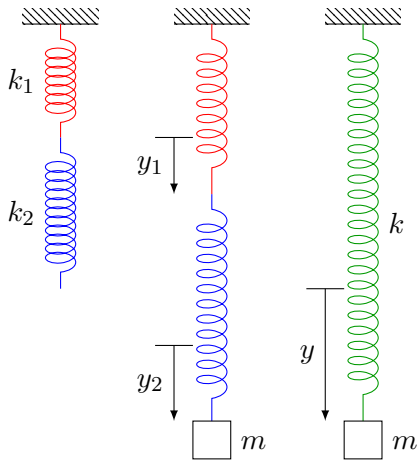
نیروی فنر با ثابت  $k_2$  برای جابجایی  $y_2$  برابر است با

$$F = -k_2 y_2$$

نیروی فنر معادل  $k$  برای جابجایی  $y (= y_1 + y_2)$  برابر است با

$$F = -k y = -k (y_1 + y_2)$$

## سری و موازی کردن فنرها



$$F = -k_1 y_1 \Rightarrow y_1 = -\frac{F}{k_1}$$

$$F = -k_2 y_2 \Rightarrow y_2 = -\frac{F}{k_2}$$

$$F = -k(y_1 + y_2) \Rightarrow y_1 + y_2 = -\frac{F}{k}$$

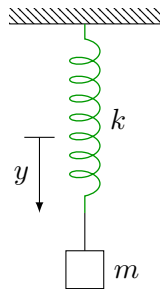
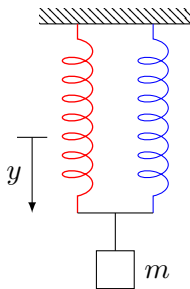
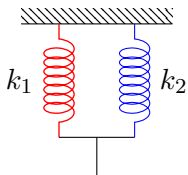
اگر از رابط اول  $y_1$  و از رابطه دوم  $y_2$  را در رابطه سوم قرار دهیم،

$$-\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_1} = -\frac{F}{k}$$

بنابراین

$$\boxed{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_1} = \frac{1}{k}}$$

## سری و موازی کردن فنرها



به فنر معادل با ثابت  $k$  تحت تاثیر جابجایی  $y$  نیروی

$$F = -ky \Rightarrow F_1 + F_2 = -ky$$

وارد می شود.

به فنر  $k_1$  تحت تاثیر جابجایی  $y$  نیروی

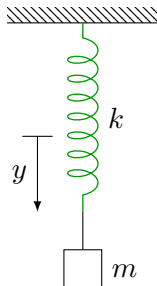
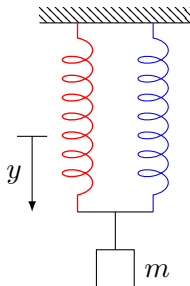
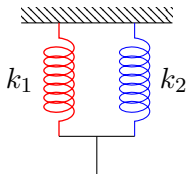
$$F_1 = -k_1 y$$

وارد می شود و به فنر  $k_2$  تحت تاثیر جابجایی  $y$  نیروی

$$F_2 = -k_2 y$$

وارد می شود

## سری و موازی کردن فنرها



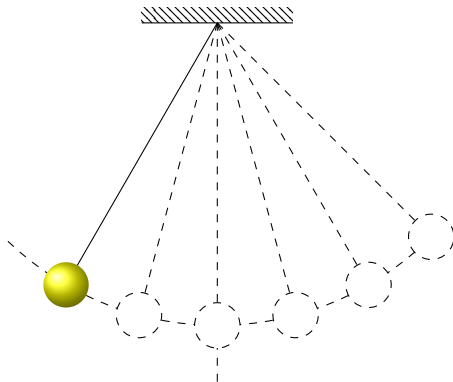
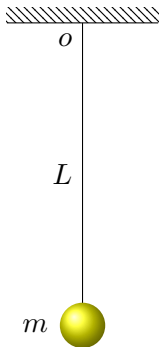
$$F_1 = -k_1 y$$

$$F_2 = -k_2 y$$

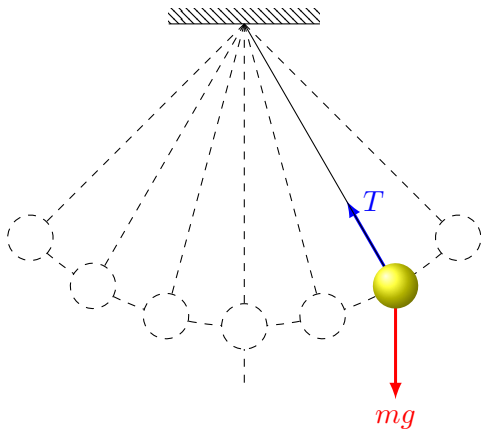
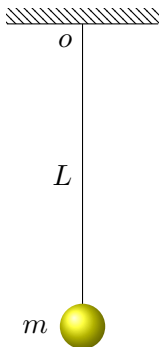
$$F = -ky \Rightarrow F_1 + F_2 = -ky$$

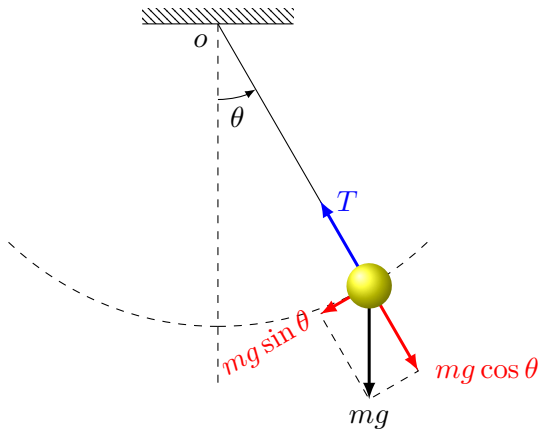
$$-k_2 y - k_1 y = -ky$$

$$\boxed{k_2 + k_1 = k}$$



# آونگ ساده







بررسی نیروها و گشتاور نیروی وارد بر گوی

$$\sum F_r = 0$$

$$mg \sin \theta - T = 0$$

$$F_{\text{موثر}} = \sum F_\theta = -mg \sin \theta$$

$$\tau_{\text{گشتاور نیرو}} = \sum \tau_o = -Lmg \sin \theta$$

دینامیک دورانی آونگ حول نقطه  $o$

$$\sum \tau_o = \mathbb{I}_o \ddot{\theta}, \quad \text{لختی دورانی آونگ: } \mathbb{I}_o = mL^2$$

$$-Lmg \sin \theta = mL^2 \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

# آونگ ساده

دینامیک دورانی آونگ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

برای زوایای کوچک  $\theta < 7^\circ$  داریم

$$\sin \theta \sim \theta$$

بنابراین

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0.$$

## یادآوری

معادله بالا همان معادله دیفرانسیل حرکت هماهنگ ساده

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

است که در آن فرکانس نوسانات است.  $\omega = \sqrt{k/m}$



# آونگ ساده

دینامیک دورانی آونگ

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta \sim \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

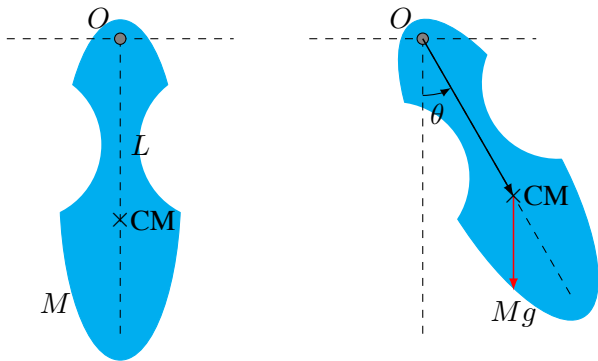
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

برای زوایای کوچک  $\theta < 7^\circ$  داریم

بنابراین

و

فرکانس نوسانات آونگ ساده است.



$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{M}g$$

$\tau_O = -MgL \sin \theta$ ,  $L$  : فاصله محور دوران تا مرکز جرم

$$\mathbb{I}_O \ddot{\theta} = \tau_O$$

$$\tau_O = -MgL \sin \theta, \quad L : \text{فاصله محور دوران تا مركز جرم}$$

$$\mathbb{I}_O \ddot{\theta} = -MgL \sin \theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{\mathbb{I}_O} \sin \theta = 0$$

## يادآوري

معادله بالا همان معادله ديفرانسيال حركت هماهنگ ساده

$$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

است كه در آن فرکانس نوسانات است.  $\omega = \sqrt{k/m}$



# آونگ فیزیکی

دینامیک دوران آونگ فیزیکی

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{\mathbb{I}_O} \sin \theta = 0$$

برای زوایای کوچک  $\theta < 7^\circ$  داریم

$$\sin \theta \sim \theta$$

بنابراین

$$\ddot{\theta} + \frac{MgL}{\mathbb{I}_O} \theta = 0$$

که  $L$  فاصله محور دوران تا مرکز جرم و

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{\mathbb{I}_O}}$$

فرکانس نوسانات آونگ فیزیکی است.