فیزیک ۲
مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

حروف یونانی پر کاربرد

alpha	α	آلفا
beta	β	بِتا
gamma	γ	گاما
delta	δ	دلتا
theta	θ	تَتا
eta	η	اِتا
zeta	ζ	زِتا

kappa	κ	کاپا
nu	ν	نوو
mu	μ	میو
psi	ψ	سای
phi	ϕ	فی
chi	χ	خی
sigma	σ	سیگما

omega	ω	اُمگا
lambda	λ	لامبدا
xi	ξ	کِسی
rho	ρ	رُ
tau	τ	تاو
epsilon	ϵ	اپسیلون
pi	π	پی

Delta	Δ	دلتا
Omega	Ω	اُمگا
Tehta	Θ	تِتا
Phi	Φ	فِی
Psi	Ψ	سای
Sigma	Σ	سیگما

مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

ثوابت خاص

$$\pi = 3.14159265359\cdots$$
$$\sqrt{2} = 1.41421356237\cdots$$
$$\sqrt{3} = 1.73205080757\cdots$$

اتحادهای ریاضی

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

فاکتوریل (Factorial)

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

حالت خاص

$$0! = 1! = 1$$

ضرایب دوتایی (Binomial Coefficients)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

اتحاد دوتایی

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

ریشه‌های معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

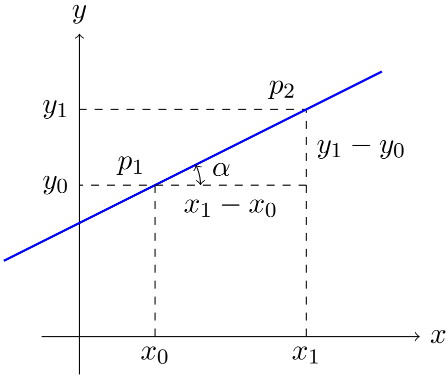
اگر $\Delta > 0$

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

اگر $\Delta = 0$

$$x_\pm = -\frac{b}{2a}$$

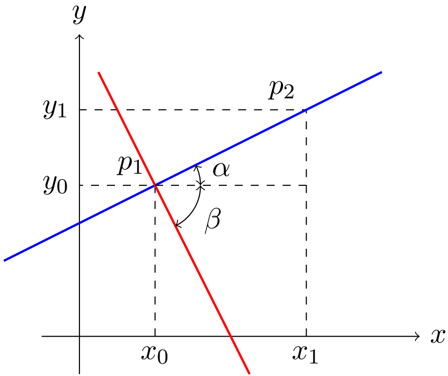
معادله خط



$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{یا} \quad \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\text{شیب خط} : \; m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \tan\alpha$$

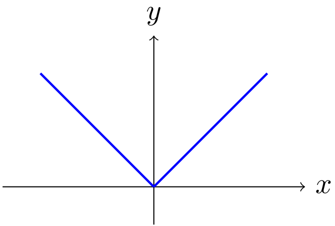
معادله خط



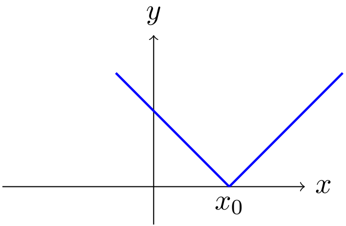
$$y - y_0 = m'(x - x_0), \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

شیب خط عمودی : $m' = -\dfrac{1}{m}$ یا $\tan\beta = -\dfrac{1}{\tan\alpha}$ یا $\tan\alpha\tan\beta = -1$

تعریف قدرمطلق

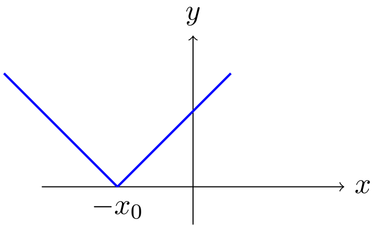


$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



$$|x - x_0| = \begin{cases} x - x_0 & x \geq x_0 \\ -(x - x_0) & x < x_0 \end{cases}$$

تعریف قدرمطلق



$$|x+x_0| = \begin{cases} x+x_0 & x \geq -x_0 \\ -(x+x_0) & x < -x_0 \end{cases}$$

توان‌های کسری

$$\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad x \geq 0$$

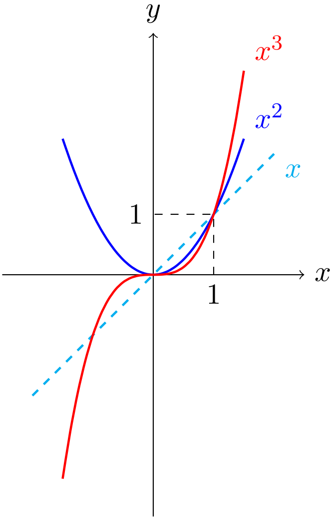
$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

$$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

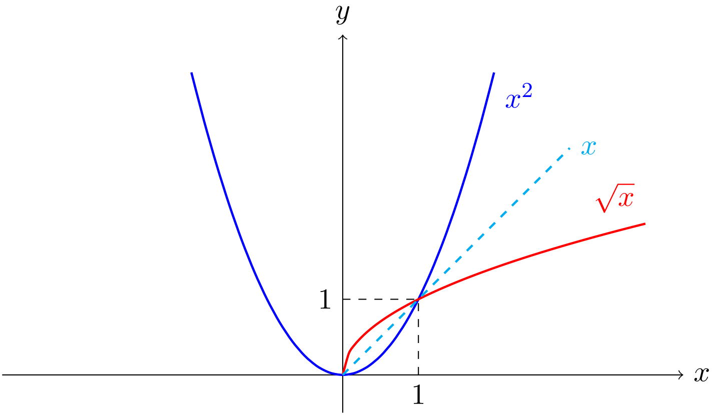
$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

معادله منحنی



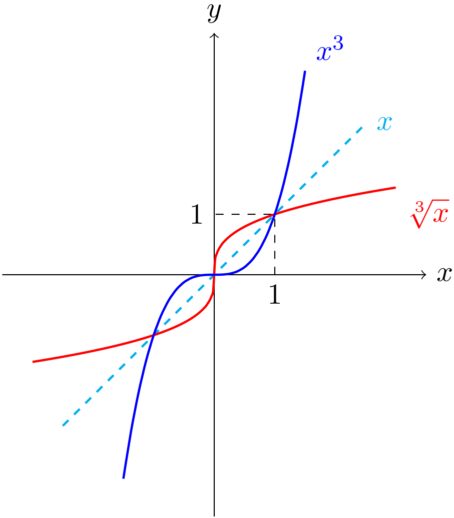
مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

معادله منحنی

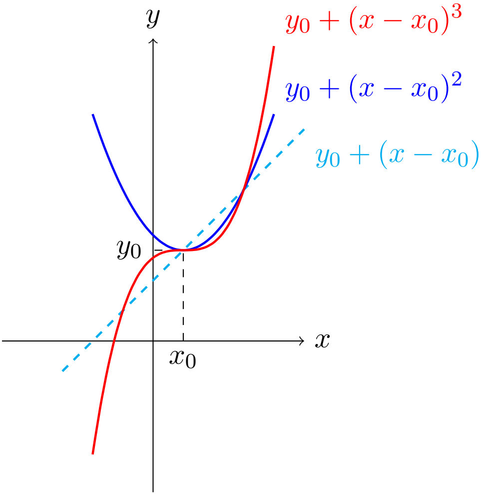


مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

معادله منحنی

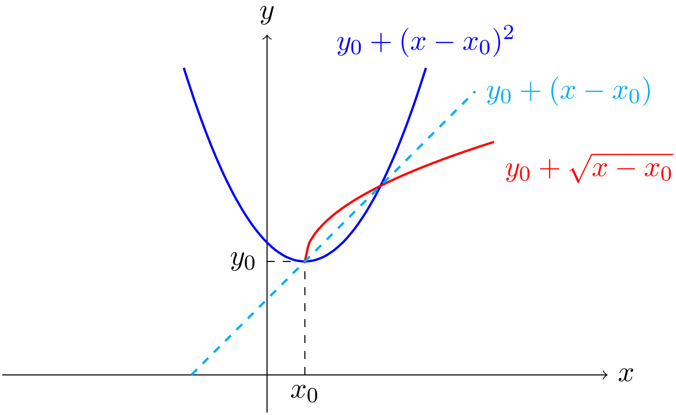


معادله منحنی



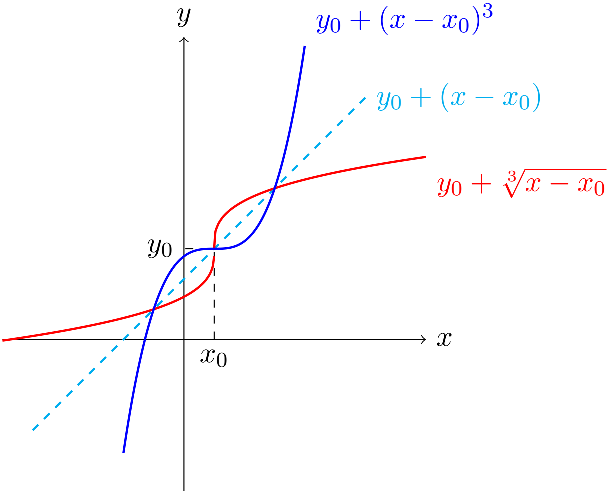
مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

معادله منحنی



مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

معادله منحنی



معادله منحنی

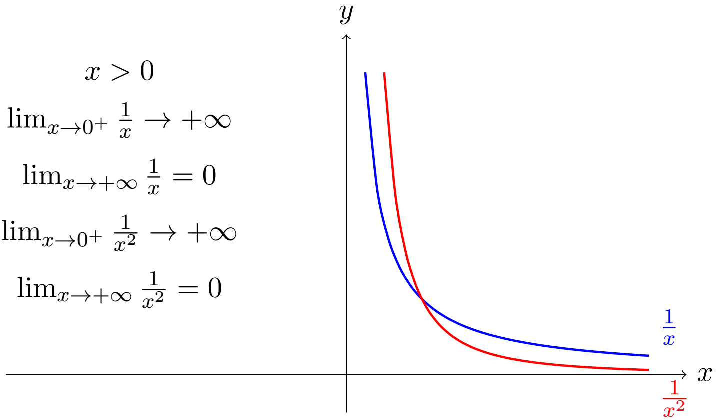
$$x > 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \to +\infty$$

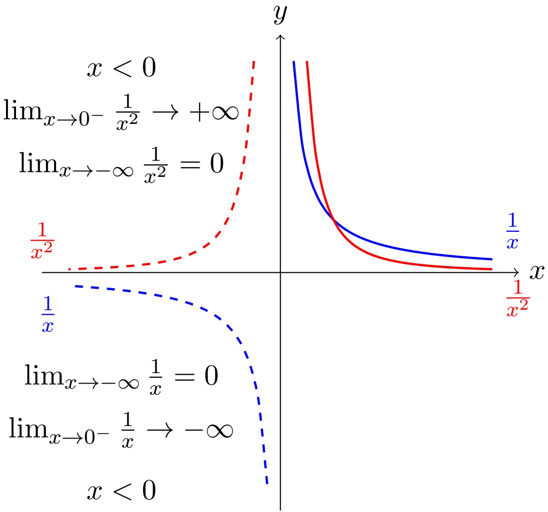
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} \to +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

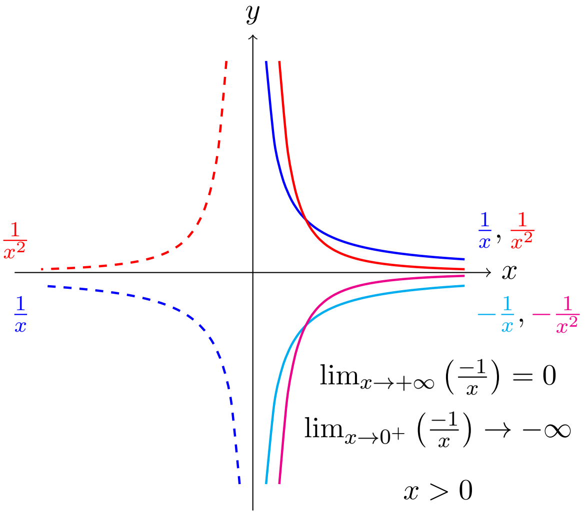


معادله منحنی

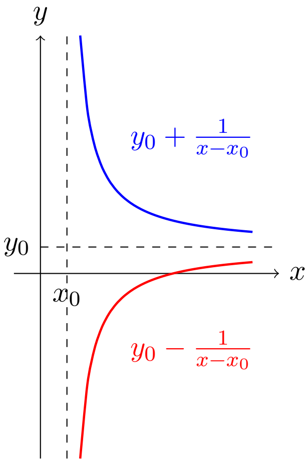


مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

معادله منحنی



معادله منحنی



$$\lim_{x\to+\infty}\left(y_0+\frac{1}{x-x_0}\right)=y_0$$

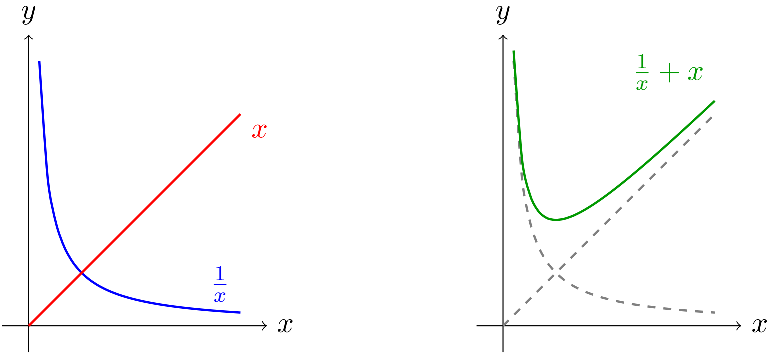
$$\lim_{x\to+\infty}\left(y_0-\frac{1}{x-x_0}\right)=y_0$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\left(y_0+\frac{1}{x-x_0}\right)\to+\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\left(y_0-\frac{1}{x-x_0}\right)\to-\infty$$

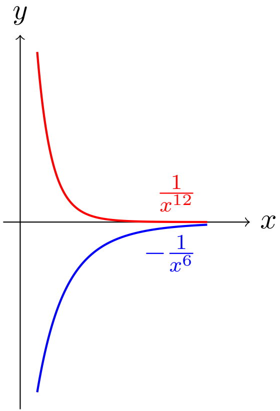
برهم‌نهی منحنی‌ها

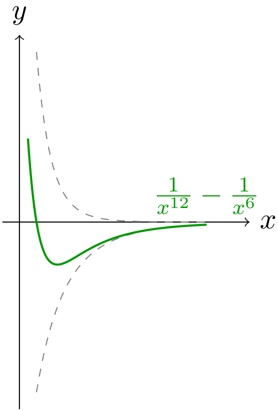
$$f(x) = \frac{1}{x} + x$$



برهم‌نهی منحنی‌ها

$$\text{پتانسیل لنارد-جونز}: \quad f(x)=\frac{1}{x^{12}}-\frac{1}{x^{6}}$$





ماتریس‌ها

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس A شامل m سطر و n ستون است.
اگر $m = n$ باشد ماتریس A رایک ماتریس مربعی می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌ها

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

اگر $m = 1$ باشد ماتریس A را یک بردار سطری می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

اگر $n = 1$ باشد ماتریس A را یک بردار ستونی می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌ها

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

اگر تعداد سطرها و ستون‌های دو ماتریس با هم برابر باشند، می‌توان دو ماتریس را با هم جمع، تفریق و مقایسه کرد.

جمع،

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} = B + A$$

ماتریس‌ها

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

اگر تعداد سطرها و ستون‌های دو ماتریس با هم برابر باشند، می‌توان دو ماتریس را با هم جمع، تفریق و مقایسه کرد.

تفریق،

$$c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}, \quad i=1,\cdots,m, \quad j=1,\cdots,n$$

$$C=A-B=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌ها

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix}$$

در ضرب ماتریسی $C = AB$، تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B باید یکسان باشد. یعنی

$$[C]_{m\times n} = [A]_{m\times l}[B]_{l\times n}.$$

ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد،

$$AB \neq BA$$

نمایش اندیسی ضرب دو ماتریس

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n$$

ماتریس‌ها

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ml} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1} & b_{l2} & \cdots & b_{ln} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{il} \\ & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & b_{1j} & \\ & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & b_{kj} & \cdots \\ & & \vdots & \\ & & b_{lj} & \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{il}b_{lj}$$

ماتریس‌ها

ماتریس واحد

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad AI = IA = A, \quad \mathbf{I}_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ماتریس متقارن

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

ماتریس 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس 2×2

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline \end{array}$$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

وارون ماتریس 2×2

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}, \quad |A| \neq 0$$

حل دستگاه معادلات خطی به روش کرامر (Cramer)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

نمایش ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

جوابهای دستگاه معادلات

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

حل دستگاه معادلات خطی به روش کرامر (Cramer)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

نمایش ماتریسی

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

جوابهای دستگاه معادلات

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{A^{-1}} A^{-1}A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \qquad \boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbf{I}}$$

$$\boxed{\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}, \qquad \mathbf{I} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس 3×3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array}$$

دترمینان ماتریس 3×3

$$|A| = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array}$$

$$|A| = a_{11} \begin{array}{|c|c|}\hline a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} - a_{12} \begin{array}{|c|c|}\hline a_{21} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{33} \\ \hline \end{array} + a_{13} \begin{array}{|c|c|}\hline a_{21} & a_{22} \\ \hline a_{31} & a_{32} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{21} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{33} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline a_{21} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{33} \\ \hline \end{array} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

دترمینان ماتریس 3×3

$$|A| = a_{11} \begin{array}{|c|c|} \hline a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} \; - a_{12} \begin{array}{|c|c|} \hline a_{21} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{33} \\ \hline \end{array} \; + a_{13} \begin{array}{|c|c|} \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline a_{31} & a_{32} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{21} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{33} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline a_{21} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{33} \\ \hline \end{array} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c|} \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline a_{31} & a_{32} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|} \hline a_{21} & a_{22} \\ \hline a_{31} & a_{32} \\ \hline \end{array} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

دترمینان ماتریس 3×3

$$|A| = a_{11}\begin{array}{|c|c|}\hline a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} - a_{12}\begin{array}{|c|c|}\hline a_{21} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{33} \\ \hline \end{array} + a_{13}\begin{array}{|c|c|}\hline a_{21} & a_{22} \\ \hline a_{31} & a_{32} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{32} & a_{33} \\ \hline \end{array} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{21} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{33} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline a_{21} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{33} \\ \hline \end{array} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{array}{|c|c|}\hline a_{21} & a_{22} \\ \hline a_{31} & a_{32} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|}\hline a_{21} & a_{22} \\ \hline a_{31} & a_{32} \\ \hline \end{array} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

واران ماتریس 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

واران ماتریس 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

واران ماتریس 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

واران ماتریس 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} , \qquad |A| \neq 0$$

وارون ماتریس 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}, \qquad |A| \neq 0$$

حل دستگاه معادلات خطی به روش کرامر (Cramer)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

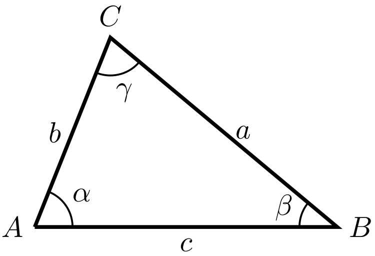
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

جوابهای دستگاه معادلات

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$|A| \neq 0$$

اشکال هندسی
مثلث



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

قانون سینوسها

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

قانون کسینوسها

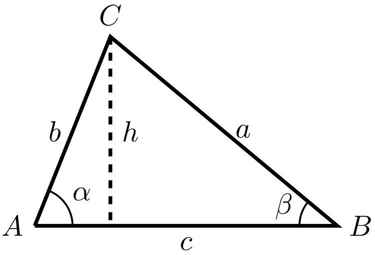
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$$

اشکال هندسی

مثلث



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$h = b\sin\alpha = a\sin\beta$$

$$\text{مساحت} = S = \frac{1}{2}hc$$

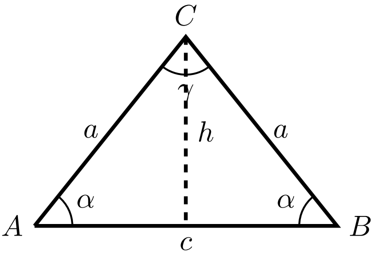
$$S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

مثلث متساوی الساقین

$$a = b, \quad \alpha = \beta$$

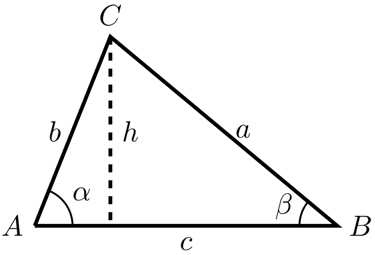
$$2\alpha + \gamma = 180^\circ$$

$$h = a\sin\alpha, \quad S = \frac{1}{2}ac\sin\alpha$$



اشکال هندسی

مثلث



$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

$$h=b\sin\alpha=a\sin\beta$$

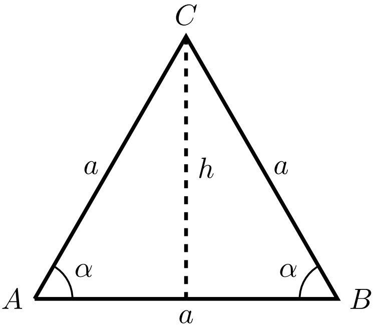
$$S=\frac{1}{2}hc=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$$

مثلث متساوی الاضلاع

$$a=b=c,\quad \alpha=\beta=\gamma$$

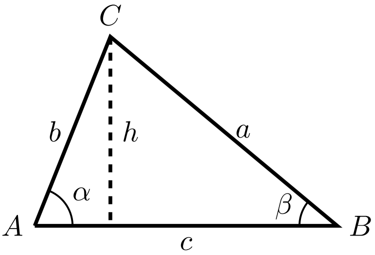
$$3\alpha=180^\circ\Rightarrow\alpha=30^\circ$$

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\quad S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



اشکال هندسی

مثلث

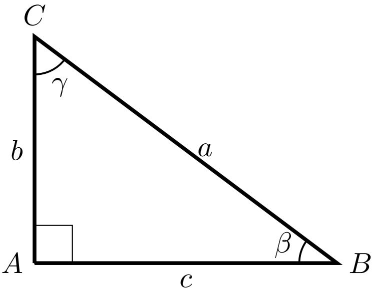


$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

$$h=b\sin\alpha=a\sin\beta$$

$$S=\frac{1}{2}hc=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$$

مثلث قائم الزاویه



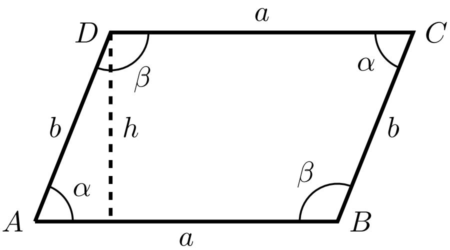
$$\alpha=90^\circ,\quad \beta+\gamma=90^\circ$$

فیثاقورس : $a^2=b^2+c^2$

$$S=\frac{1}{2}ab$$

اشکال هندسی

متوازی الاضلاع

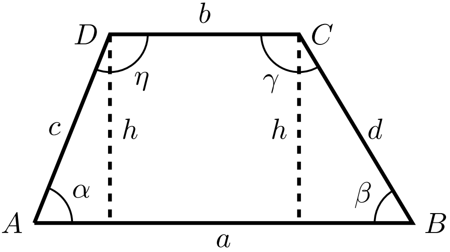


$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC, \quad h = b\sin\alpha$$

$$S = ha = ba\sin\alpha$$

ذوزنقه



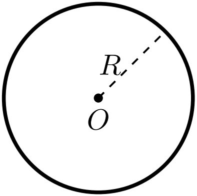
$$\alpha + \eta = \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$AB \parallel DC, \quad h = c\sin\alpha = d\sin\beta$$

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h$$

اشکال هندسی

دایره



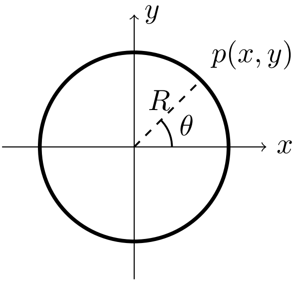
$$\text{محیط} = P = 2\pi R$$

$$S = \pi R^2$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

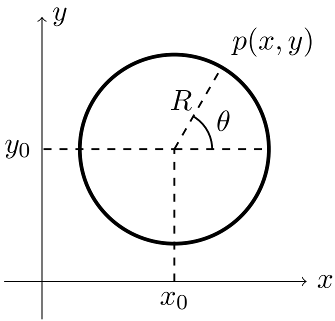
$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$



اشکال هندسی

دایره

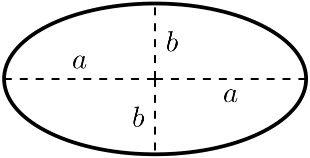


$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$$

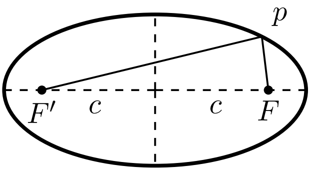
$$\begin{cases} x=x_0+R\cos\theta \\ y=y_0+R\sin\theta \end{cases} \quad , \quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

اشکال هندسی

بیضی



$$S = \pi ab$$



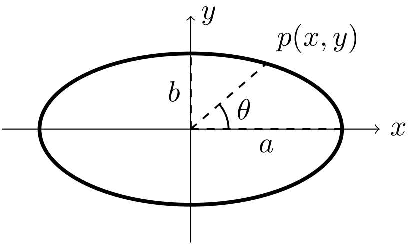
$$a^2 = b^2 + c^2$$

خروج از مرکز : $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$

$$|pF'| + |pF| = 2a$$

اشکال هندسی

بیضی

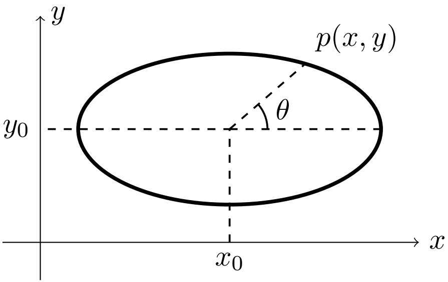


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

اشکال هندسی

بیضی

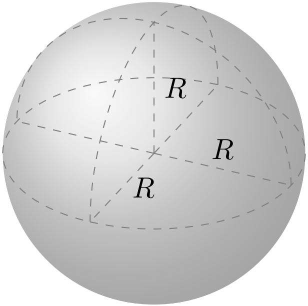


$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$$\begin{cases} x = x_0 + a\cos\theta \\ y = y_0 + b\sin\theta \end{cases} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

اشکال هندسی

کُره

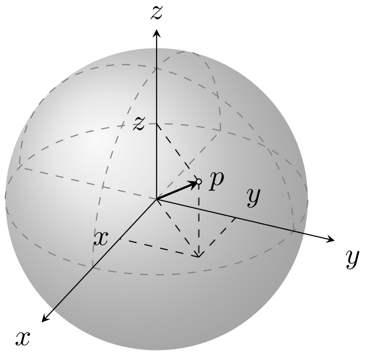


$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

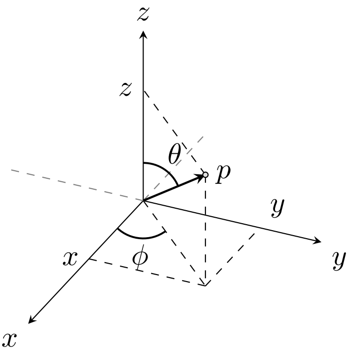
اشکال هندسی

کُره



نقطه‌ی p : (x, y, z)

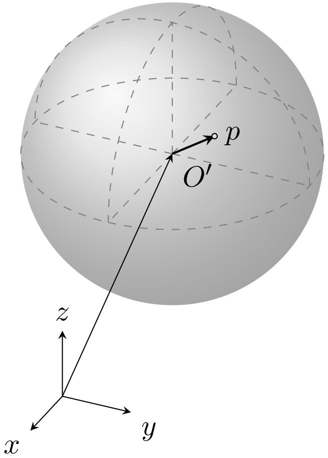
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



$$\begin{cases} x = R\sin\theta\cos\phi \\ y = R\sin\theta\sin\phi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \quad , \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

اشکال هندسی

کُره



$$(x_0, y_0, z_0) \ : \ \text{نقطه‌ی } O' \text{ مرکز کُره}$$

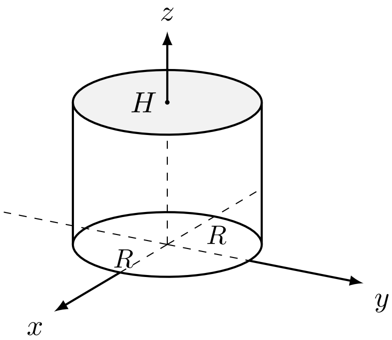
$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \ : \ \text{نقطه‌ی } p$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$

$$\begin{cases} x = x_0 + R\sin\theta\cos\phi \\ y = y_0 + R\sin\theta\sin\phi \\ z = z_0 + R\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

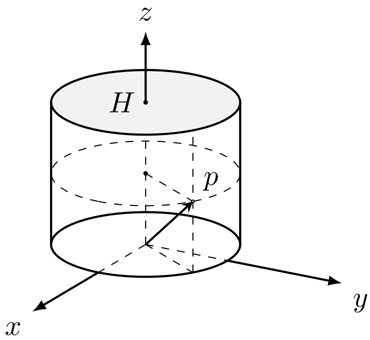
اشکال هندسی
استوانه



$$V = \pi R^2 H, \quad \begin{cases} S_{\text{جانبی}} = 2\pi R H \\ S_{\text{مقطع بالا}} = \pi R^2 \\ S_{\text{مقطع پایین}} = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow S_{\text{کل}} = 2\pi R(H+R)$$

اشکال هندسی

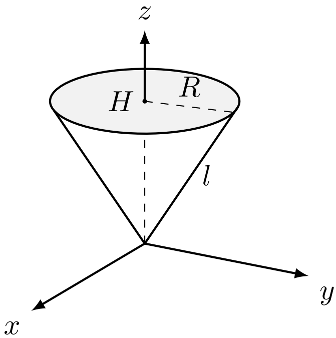
استوانه



$$p \text{ نقطه‌ی } : \ (x, y, z), \quad \begin{cases} x = R\cos\phi \\ y = R\sin\phi \\ z \end{cases}, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \quad 0 \le z \le H$$

اشکال هندسی

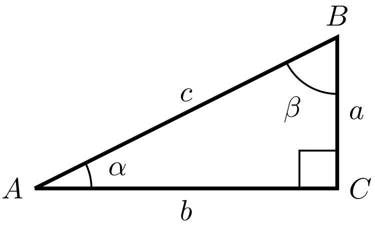
مخروط



$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$\begin{cases} S_{\text{جانبی}} = \pi R l = \pi R\sqrt{R^2 + H^2} \\ S_{\text{مقطع بالایی}} = \pi R^2 \end{cases} \Rightarrow S_{\text{کل}} = \pi R^2 \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{H}{R}\right)^2}\right]$$

اتحادهای مثلثاتی



در یک مثلث قائم الزاویه

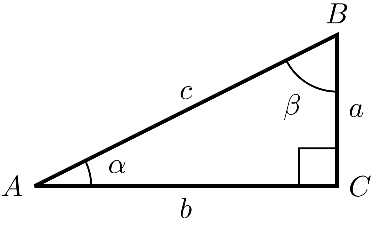
$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2},\quad a^2+b^2=c^2$$

تبدیل درجه D به رادیان R و بالعکس

$$R=\frac{\pi D}{180},\quad D=\frac{180R}{\pi}$$

نکته: در اتحادهای مثلثاتی زوایا همیشه برحسب رادیان هستند.

اتحادهای مثلثاتی



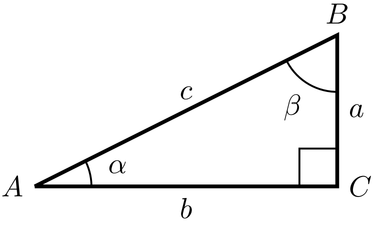
در یک مثلث قائم الزاویه $(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}, \quad a^2+b^2=c^2)$

$$\sin\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}, \qquad \sin\beta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}, \qquad \cos\beta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$$

مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

اتحادهای مثلثاتی

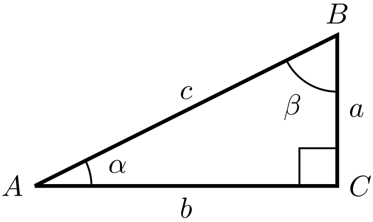


در یک مثلث قائم الزاویه $(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}, \quad a^2+b^2=c^2)$

$$\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{a}{b}, \qquad \tan\beta=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}=\frac{b}{a}$$

$$\cot\alpha=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}=\frac{b}{a}, \qquad \cot\beta=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}=\frac{a}{b}$$

اتحادهای مثلثاتی



در یک مثلث قائم الزاویه $(a^2 + b^2 = c^2, \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2})$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\alpha = \dfrac{a}{c}, & \cos\alpha = \dfrac{b}{c} \\ \tan\alpha = \dfrac{a}{b}, & \cot\alpha = \dfrac{b}{a} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\beta = \dfrac{b}{c}, & \cos\beta = \dfrac{a}{c} \\ \tan\beta = \dfrac{b}{a}, & \cot\beta = \dfrac{a}{b} \end{array}}$$

اتحادهای مثلثاتی در یک مثلث قائم الزاویه $(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}, \quad a^2+b^2=c^2)$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\alpha=\dfrac{a}{c}, & \cos\alpha=\dfrac{b}{c} \\ \tan\alpha=\dfrac{a}{b}, & \cot\alpha=\dfrac{b}{a} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\beta=\dfrac{b}{c}, & \cos\beta=\dfrac{a}{c} \\ \tan\beta=\dfrac{b}{a}, & \cot\beta=\dfrac{a}{b} \end{array}}$$

$$\sin\alpha=\cos\beta \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ \sin(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cos\beta \end{cases}$$

$$\cos\alpha=\sin\beta \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sin\beta \end{cases}$$

اتحادهای مثلثاتی در یک مثلث قائم الزاویه $(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}, \quad a^2+b^2=c^2)$

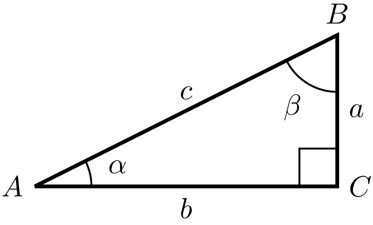
$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\alpha = \dfrac{a}{c}, & \cos\alpha = \dfrac{b}{c} \\ \tan\alpha = \dfrac{a}{b}, & \cot\alpha = \dfrac{b}{a} \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{ll} \sin\beta = \dfrac{b}{c}, & \cos\beta = \dfrac{a}{c} \\ \tan\beta = \dfrac{b}{a}, & \cot\beta = \dfrac{a}{b} \end{array}}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha\cot\alpha = 1}, \qquad \tan\beta = \frac{1}{\cot\beta} \Rightarrow \boxed{\tan\beta\cot\beta = 1}$$

$$\tan\alpha = \cot\beta \Rightarrow \begin{cases} \tan\alpha = \cot(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ \tan(\frac{\pi}{2}-\beta) = \cot\beta \end{cases}$$

$$\cot\alpha = \tan\beta \Rightarrow \begin{cases} \cot\alpha = \tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) \\ \cot(\frac{\pi}{2}-\beta) = \tan\beta \end{cases}$$

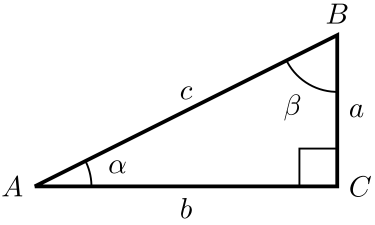
اتحادهای مثلثاتی



در یک مثلث قائم الزاویه $\left(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}, \quad a^2+b^2=c^2\right)$

$$\tan\alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{a}{b} = \frac{\left(\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}\right)}{\left(\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}\right)} = \frac{\left(\frac{a}{c}\right)}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

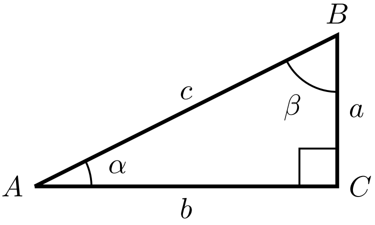
اتحادهای مثلثاتی



در یک مثلث قائم الزاویه $(\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2)$

$$\cot\alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{b}{a} = \frac{\left(\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}\right)}{\left(\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}\right)} = \frac{\left(\frac{b}{c}\right)}{\left(\frac{a}{c}\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \boxed{\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

اتحادهای مثلثاتی

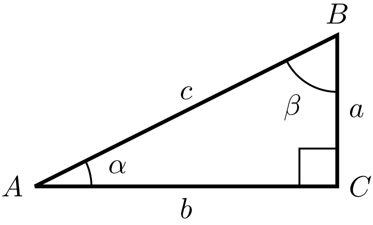


در یک مثلث قائم الزاویه $(\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \quad a^2 + b^2 = c^2)$

$$a^2 + b^2 = c^2 \xrightarrow{\div c^2} \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow \boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

اتحادهای مثلثاتی



در یک مثلث قائم الزاویه $(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2},\quad a^2+b^2=c^2)$

$$a^2+b^2=c^2 \xrightarrow{\div c^2} \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$$

$$\sin\beta=\frac{b}{c},\quad \cos\beta=\frac{a}{c} \Rightarrow \boxed{\sin^2\beta+\cos^2\beta=1}$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\tan\alpha\cot\alpha = 1$$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ تابع فرد

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ تابع زوج

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ تابع فرد

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$ تابع فرد

تعریف تابع فرد و تابع زوج:

تابع زوج $f(-x) = f(x)$ تابع فرد, $f(-x) = -f(x)$

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha \qquad \cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha \qquad \cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos\alpha \qquad \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$$
$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha \qquad \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$
$$\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$
$$\cos^3\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \mp \cot\beta}{1 \pm \cot\alpha\cot\beta}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\begin{array}{l} \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) \\ \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha-\beta) + \\ \hline 2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \end{array}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\begin{array}{l} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) + \\ \hline 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \end{array}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

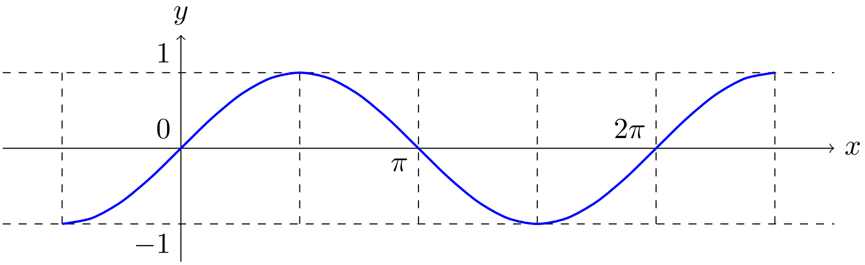
اتحادهای مثلثاتی

$$
\begin{array}{r}
\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)\\
\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)\;-\\
\hline
2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)
\end{array}
$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

نمودار توابع مثلثاتی

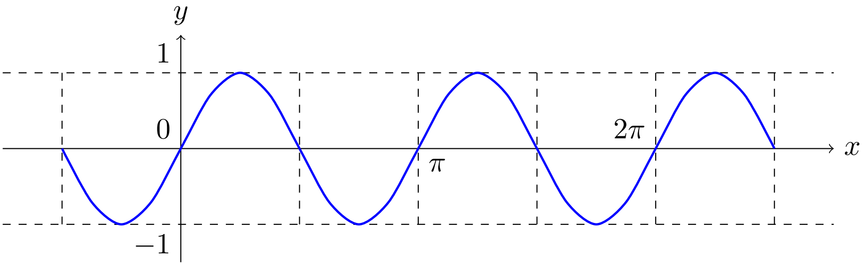
$$y = \sin x$$



$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0	x
1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$\sin(x)$

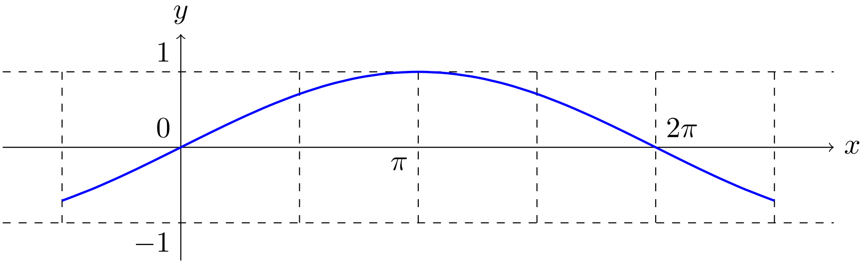
نمودار توابع مثلثاتی

$$y = \sin 2x$$

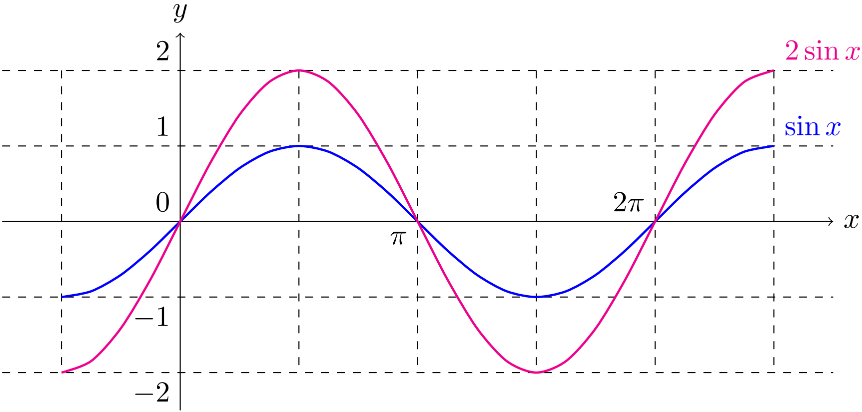


نمودار توابع مثلثاتی

$$y = \sin \frac{x}{2}$$

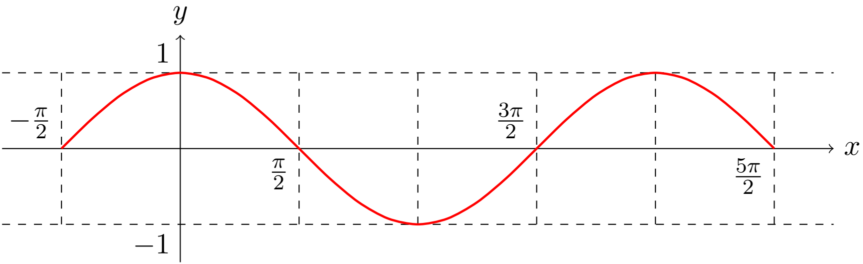


نمودار توابع مثلثاتی



نمودار توابع مثلثاتی

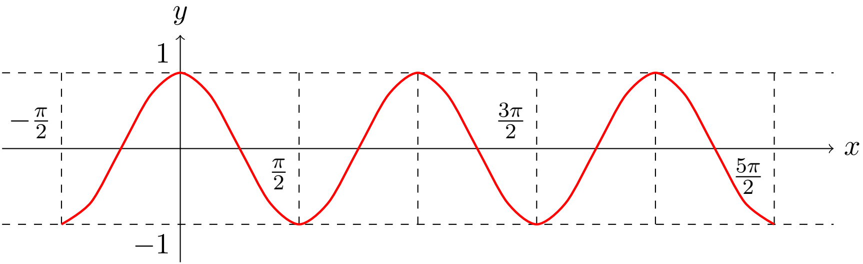
$$y = \cos x$$



$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0	x
0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\cos(x)$

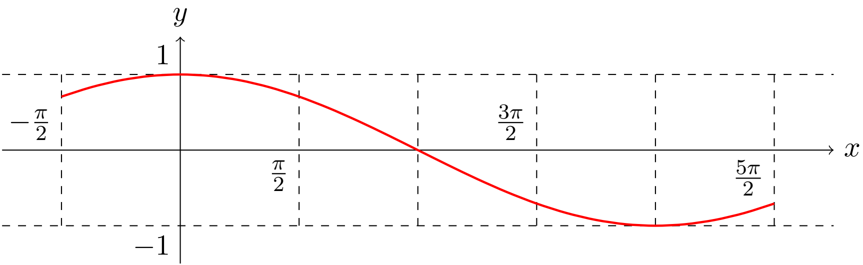
نمودار توابع مثلثاتی

$$y = \cos 2x$$

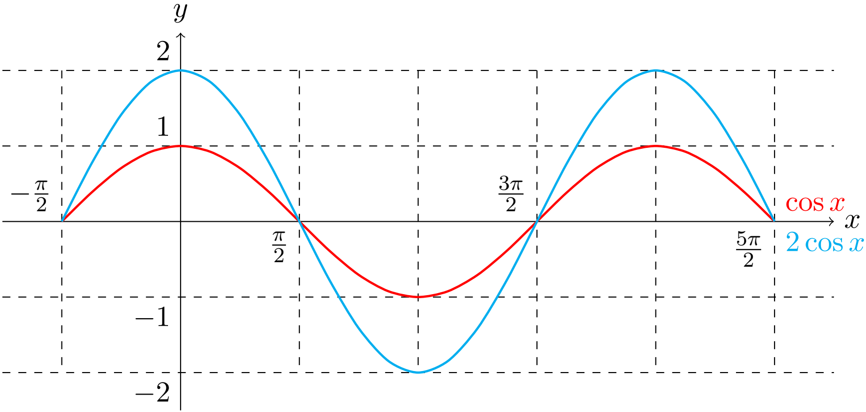


نمودار توابع مثلثاتی

$$y = \cos\frac{x}{2}$$

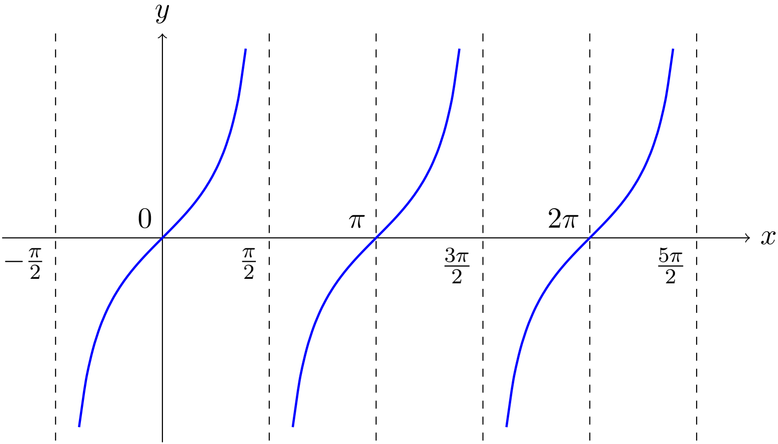


نمودار توابع مثلثاتی



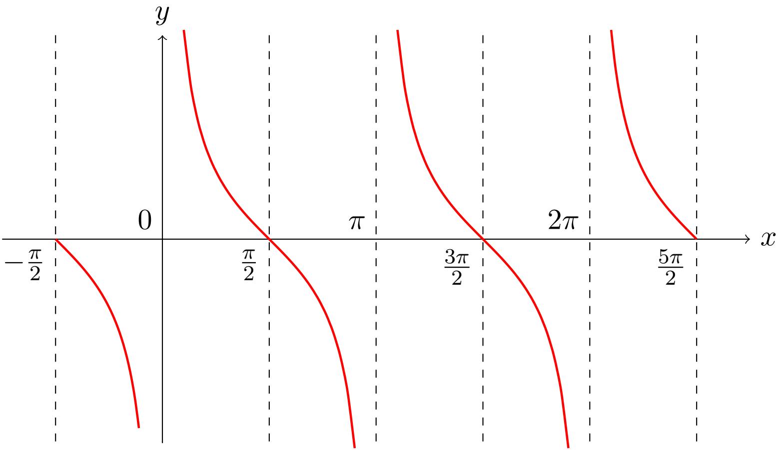
نمودار توابع مثلثاتی

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \pm\infty = \pm\frac{1}{0}$$



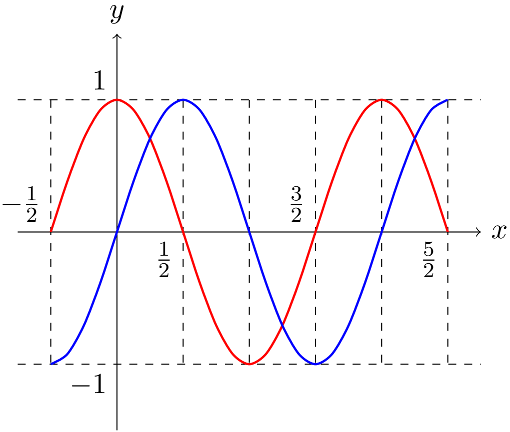
نمودار توابع مثلثاتی

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \pm\infty = \pm\frac{1}{0}$$



نمودار توابع مثلثاتی

$$\color{red}{\cos \pi x}, \quad \color{blue}{\sin \pi x}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$$



مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

فاز در توابع مثلثاتی

نوسانات وابسته به زمان

$$y = A\sin(\omega t + \phi), \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

- دیمانسیون فرکانس f

$$[f] = \frac{1}{\text{زمان}}$$

- دیمانسیون دوره تناوب T

$$[T] = \text{زمان}$$

- دیمانسیون فرکانس زاویه‌ای ω

$$[\omega] = \frac{\text{رادیان}}{\text{زمان}}$$

- دیمانسیون فاز ϕ

$$[\phi] = \text{رادیان}$$

دیمانسیون آرگومان تابع سینوس (یا تابع کوسینوس) $\omega t + \phi$

$$[\omega t + \phi] = \text{رادیان}$$

فاز در توابع مثلثاتی
نوسانات وابسته به مکان

$$y = A\sin(kx+\phi), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

- دیمانسیون طول موج λ

$$[\lambda] = \text{طول}$$

- دیمانسیون عدد موج k

$$[k] = \frac{\text{رادیان}}{\text{طول}}$$

- دیمانسیون فاز ϕ

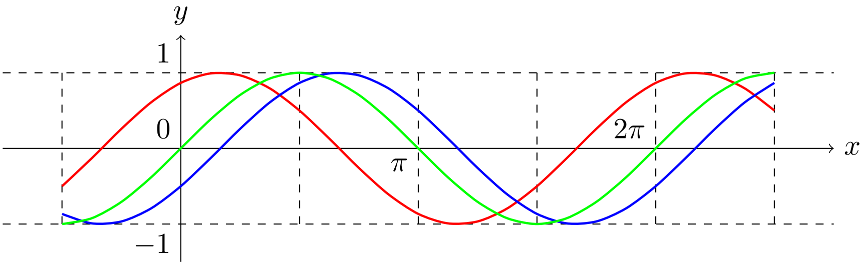
$$[\phi] = \text{رادیان}$$

دیمانسیون آرگومان تابع سینوس (یا تابع کسینوس) $kx+\phi$

$$[kx+\phi] = \text{رادیان}$$

نمودار توابع مثلثاتی با فاز اولیه

$$\sin(x+\pi/3), \quad \sin(x-\pi/6), \quad \sin x$$

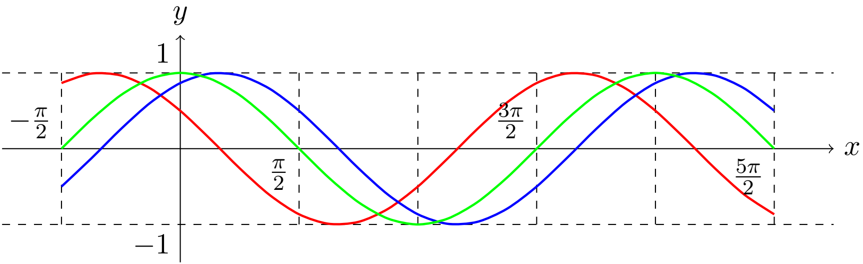


$$\sin(x+\pi/3) = \sin x \cos \pi/3 + \cos x \sin \pi/3 = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

$$\sin(x-\pi/6) = \sin x \cos \pi/6 - \cos x \sin \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

نمودار توابع مثلثاتی با فاز اولیه

$$\cos(x+\pi/3),\quad \cos(x-\pi/6),\quad \cos x$$



$$\cos(x+\pi/3)=\cos x\cos\pi/3-\cos x\cos\pi/3=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

$$\cos(x-\pi/6)=\cos x\cos\pi/6+\sin x\sin\pi/6=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$$

مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

برهم‌نهی نوسانات مثلثاتی متعامد با فرکانس نوسانات یکسان

اگر $A, B > 0$

- حالت اول

$$A\sin\omega t + B\cos\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \phi)$$

$$A\sin\omega t - B\cos\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t + \phi \pm \pi)$$

$$-A\sin\omega t + B\cos\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t + \phi)$$

که

$$\tan\phi = \frac{A}{B}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$$

برهم‌نهی نوسانات مثلثاتی متعامد با فرکانس نوسانات یکسان

اگر $A, B > 0$

◂ حالت دوم

$$A\sin\omega t + B\cos\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t+\psi)$$

$$A\sin\omega t - B\cos\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t-\psi)$$

$$-A\sin\omega t + B\cos\omega t = \sqrt{A^2+B^2}\sin(\omega t+\psi\pm\pi)$$

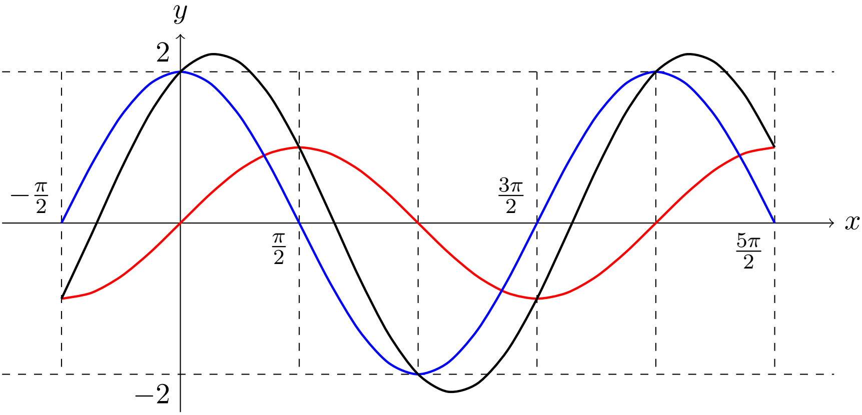
که

$$\tan\psi = \frac{B}{A}$$

$$\psi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

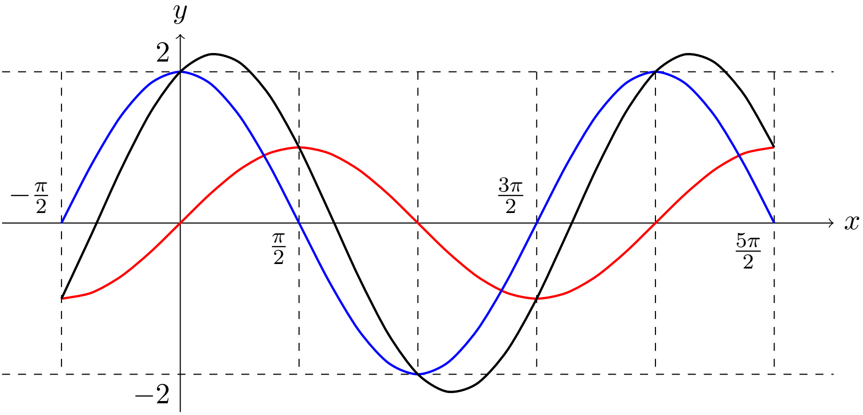
نمودار برهم‌نهی نوسانات مثلثاتی متعامد با فرکانس نوسانات یکسان

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{5}\cos(x - \tan^{-1}(1/2))$$



نمودار برهم‌نهی نوسانات مثلثاتی متعامد با فرکانس نوسانات یکسان

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{5}\sin(x + \tan^{-1}(2))$$



معکوس توابع مثلثاتی

$$y = \sin x \ : \quad x = \sin^{-1} y$$
$$y = \cos x \ : \quad x = \cos^{-1} y$$

1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	y
$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0	$\sin^{-1}(y)$
0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\cos^{-1}(y)$

$$\sin^{-1}(y) + \cos^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^{-1}(-y) = -\sin^{-1} y$$
$$\cos^{-1}(-y) = \pi - \cos^{-1} y$$

معکوس توابع مثلثاتی

$$y = \tan x \; : \qquad x = \tan^{-1} y$$

$$y = \cot x \; : \qquad x = \cot^{-1} y$$

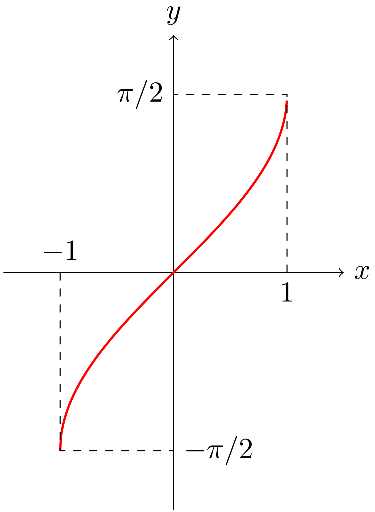
∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	y
$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0	$\tan^{-1}(y)$
0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\cot^{-1}(y)$

$$\tan^{-1}(y) + \cot^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan^{-1}(-y) = -\tan^{-1} y$$

$$\cot^{-1}(-y) = \pi - \cot^{-1} y$$

معکوس توابع مثلثاتی

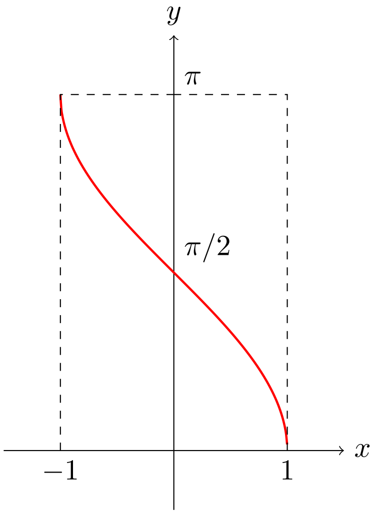


$$y = \sin^{-1} x$$

$$-1 \le x \le 1$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$$

معکوس توابع مثلثاتی

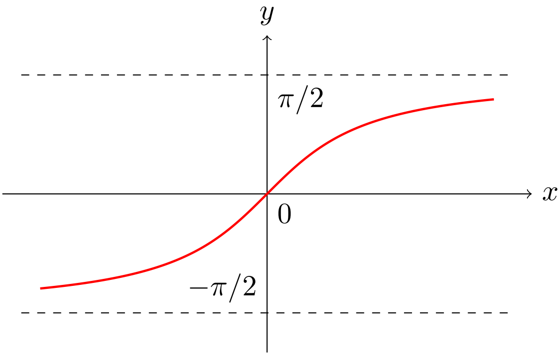


$$y = \cos^{-1} x$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$$

معکوس توابع مثلثاتی

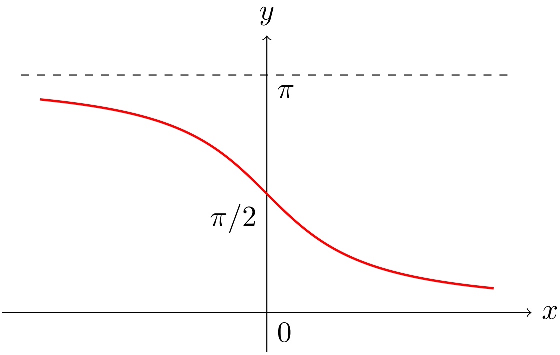


$$y = \tan^{-1} x$$

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

معکوس توابع مثلثاتی



$$y = \cot^{-1} x$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$$

$$-\infty \leq x \leq \infty$$

$$0 \leq \cot^{-1} x \leq \pi$$

اعداد مختلط

$$\text{عدد مختلط} = \text{قسمت حقیقی} + i \times \text{قسمت موهومی}$$

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1$$

$$\mathcal{R}[z] = x, \quad \mathcal{I}[z] = y$$

- تساوی دو عدد مختلط

$$z = z' : \quad x + iy = x' + iy'$$

$$x = x', \quad y = y'$$

- همیوغ مختلط یا مزدوج مختلط (Complex Conjugate)

$$z = x + iy \xrightarrow{\text{همیوغ مختلط}} z^* = x - iy$$

$$|z|^2 = zz^* = z^*z = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

اعداد مختلط

- جمع و تفریق دو عدد مختلط

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2)$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$\mathcal{R}[z_1 \pm z_2] = x_1 \pm x_2, \quad \mathcal{I}[z_1 \pm z_2] = y_1 \pm y_2$$

- ضرب دو عدد مختلط

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

$$\mathcal{R}[z_1 z_2] = x_1 x_2 - y_1 y_2, \quad \mathcal{I}[z_1 z_2] = y_1 x_2 + x_1 y_2$$

اعداد مختلط

◄ تقسیم دو عدد مختلط

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\mathcal{R}\left[\frac{z_1}{z_2}\right] = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad \mathcal{I}\left[\frac{z_1}{z_2}\right] = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

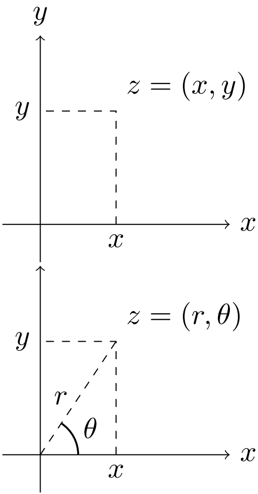
مثال:

$$z = \frac{1}{i} = \frac{i}{ii} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

اعداد مختلط

فرمول اولر (Euler)



$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$$

$$z = r \left(\frac{x}{r} + i \frac{y}{r} \right)$$

اگر

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$x/r = \cos\theta, \quad y/r = \sin\theta$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \quad \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

اعداد مختلط

فرمول اولر (Euler)

$$z = x + iy$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(y/x)$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$\boxed{\text{فرمول اولر}: \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$ عدد اولر یا ثابت نِپِر :$e = 2.71828182842\cdots$

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

- توان در اعداد مختلط

$$z^n = (x + iy)^n = (re^{i\theta})^n$$

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n\cos n\theta + ir^n\sin n\theta$$

$$\mathcal{R}[z] = r^n\cos n\theta, \quad \mathcal{I}[z] = r^n\sin n\theta$$

مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

اعداد مختلط

فرمول اولر (Euler)

$$\boxed{\text{رابطه اولر}:\ \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$$

توابع مثلثاتی با استفاده از فرمول اولر

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \xrightarrow[i\to -i]{\text{همیوغ مختلط}} \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

$$\begin{array}{l} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \ + \\ \hline \quad 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \end{array}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}}$$

نکته: بعد (یا دیمانسیون) کمیت θ رادیان است.

اعداد مختلط

فرمول اولر (Euler)

$$\boxed{\text{رابطه اولر:}\ \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$$

توابع مثلثاتی با استفاده از فرمول اولر

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \xrightarrow[i\to -i]{\text{همیوغ مختلط}} \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$$

$$\begin{array}{r} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}\ - \\ \hline 2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \end{array}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

اعداد مختلط

فرمول اولر (Euler)

$$\boxed{\text{رابطه اولر}:\ \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$$

توابع مثلثاتی با استفاده از فرمول اولر

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{i}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\right)$$

$$\tan\theta = \frac{i}{i^2}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\right), \quad i^2 = -1$$

$$\boxed{\tan\theta = -i\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\right)}$$

اعداد مختلط

فرمول اولر (Euler)

$$\boxed{\text{رابطه اولر}:\ \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$$

توابع مثلثاتی با استفاده از فرمول اولر

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\tan\theta = -i\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\right)$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\boxed{\cot\theta = i\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)}$$

اعداد مختلط

فرمول اولر (Euler)

$$\boxed{\text{رابطه اولر}:\ \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$$

توابع مثلثاتی با استفاده از فرمول اولر

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\tan\theta = -i\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\right)$$

$$\cot\theta = i\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\right)$$

اعداد مختلط

فرمول اولر (Euler)

بعد (یا دیمانسیون) θ در $e^{\pm i\theta}$ رادیان است:

- اگر در

$$e^{\pm ikx}$$

کمیت x بعد طول داشته باشد، در این صورت کمیت k بعد رادیان بر روی طول خواهد داشت،

$$[k] = \frac{\text{رادیان}}{\text{طول}}.$$

- اگر در

$$e^{\pm i\alpha t}$$

کمیت t بعد زمان داشته باشد، در این صورت کمیت α بعد رادیان بر روی زمان خواهد داشت،

$$[\alpha] = \frac{\text{رادیان}}{\text{زمان}}.$$

اعداد مختلط

بررسی اتحادهای مثلثاتی با استفاده از فرمول اولر (Euler)

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha &= \left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}\right)\\
&+\left(\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)\\
&=\frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha-\beta)}-e^{i(-\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i}\\
&+\frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\beta-\alpha)}-e^{i(-\beta+\alpha)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i}\\
&=\frac{2e^{i(\alpha+\beta)}-2e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i}\\
&=\frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i}=\sin(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

اعداد مختلط

بررسی اتحادهای مثلثاتی با استفاده از فرمول اولر (Euler)

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha &= \left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}\right) \\
&- \left(\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha-\beta)}-e^{i(-\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i} \\
&- \frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\beta-\alpha)}-e^{i(-\beta+\alpha)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i} \\
&= \frac{2e^{i(\alpha-\beta)}-2e^{-i(\alpha-\beta)}}{4i} \\
&= \frac{e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}}{2i} = \sin(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

اعداد مختلط

بررسی اتحادهای مثلثاتی با استفاده از فرمول اولر (Euler)

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-i\alpha}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}\right) \\
&- \left(\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right) \\
&= \frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha-\beta)}+e^{i(-\alpha+\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}}{4} \\
&- \frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(\beta-\alpha)}-e^{i(-\beta+\alpha)}+e^{-i(\alpha+\beta)}}{(-4)} \\
&= \frac{2e^{i(\alpha+\beta)}+2e^{-i(\alpha+\beta)}}{4} \\
&= \frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}}{2} = \cos(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

اعداد مختلط

بررسی اتحادهای مثلثاتی با استفاده از فرمول اولر (Euler)

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha &= \left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}\right)\\
&+\left(\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)\\
&=\frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha-\beta)}+e^{i(-\alpha+y)}+e^{-i(\alpha+\beta)}}{4}\\
&+\frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(y-\alpha)}-e^{i(-y+\alpha)}+e^{-i(\alpha+\beta)}}{(-4)}\\
&=\frac{2e^{i(\alpha-\beta)}+2e^{-i(\alpha-\beta)}}{4}\\
&=\frac{e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}}{2}=\cos(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

اعداد مختلط

توابع مثلثاتی معکوس با استفاده از فرمول اولر (Euler)

$$y = \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}, \quad \theta = \sin^{-1} y$$

$$y = \frac{e^{2i\theta} - 1}{2ie^{i\theta}}$$

$$e^{2i\theta} - 2iye^{i\theta} - 1 = 0$$

$$e^{i\theta} = iy \pm \sqrt{1 - y^2}$$

$$\theta = \frac{1}{i}\ln(iy \pm \sqrt{1 - y^2})$$

$$\boxed{\sin^{-1} y = \frac{1}{i}\ln(iy \pm \sqrt{1 - y^2})}$$

اعداد مختلط

توابع مثلثاتی معکوس با استفاده از فرمول اولر (Euler)

$$y = \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \theta = \cos^{-1} y$$

$$y = \frac{e^{2i\theta} + 1}{2e^{i\theta}}$$

$$e^{2i\theta} - 2ye^{i\theta} + 1 = 0$$

$$e^{i\theta} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\theta = \frac{1}{i}\ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

$$\boxed{\cos^{-1} y = \frac{1}{i}\ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})}$$

اعداد مختلط

توابع مثلثاتی معکوس با استفاده از فرمول اولر (Euler)

$$y = \tan\theta = \frac{1}{i}\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}, \quad \theta = \tan^{-1} y$$

$$y = \frac{1}{i}\frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1}$$

$$iye^{2i\theta} + iy = e^{2i\theta} - 1$$

$$e^{2i\theta} = \frac{1 + iy}{1 - iy}$$

$$\theta = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1 + iy}{1 - iy}\right)$$

$$\boxed{\tan^{-1} y = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1 + iy}{1 - iy}\right)}$$

اعداد مختلط

توابع مثلثاتی معکوس با استفاده از فرمول اولر (Euler)

$$y = \cot\theta = i\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}, \quad \theta = \cot^{-1} y$$

$$y = i\frac{e^{2i\theta} + 1}{e^{2i\theta} - 1}$$

$$ye^{2i\theta} - y = ie^{2i\theta} + i$$

$$e^{2i\theta} = \frac{y+i}{y-i}$$

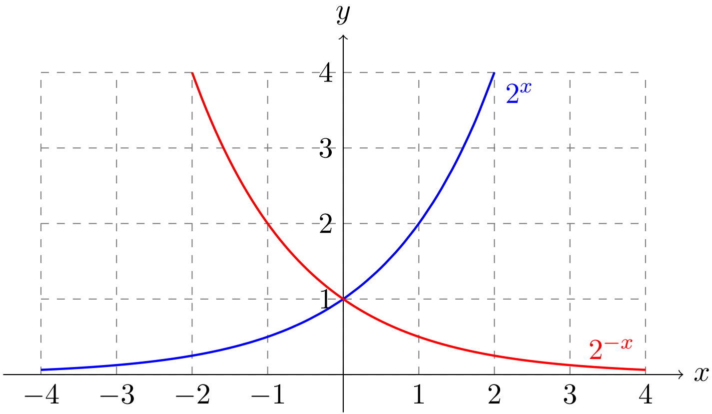
$$\theta = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{y+i}{y-i}\right)$$

$$\boxed{\cot^{-1} y = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{y+i}{y-i}\right)}$$

توابع نمایی (Exponential)

$$a^{\pm x}, \quad x \in [-\infty, \infty]$$

مثال

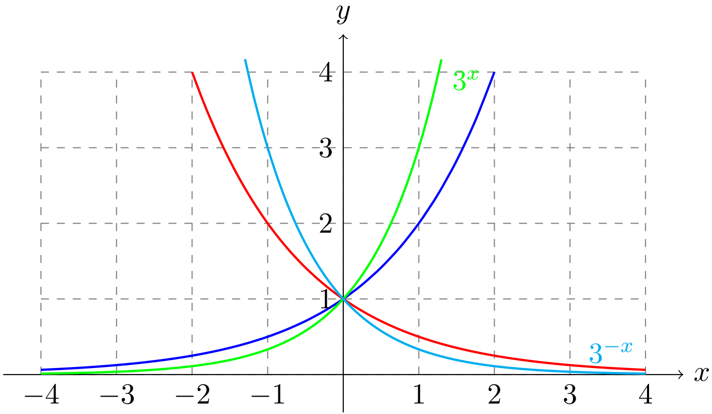


نکته: هر عددی به توان صفر، مقداری برابر با یک دارد، $a^0 = 1$.

توابع نمایی (Exponential)

$$a^{\pm x}, \quad x \in [-\infty, \infty], \quad a^{\pm x} > 0$$

مثال



توابع نمایی (Exponential)

$$a^{\pm x}, \quad x \in [-\infty, \infty], \quad a^{\pm x} > 0$$

رفتار حدی

$$\lim_{x \to +\infty} a^x \to +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

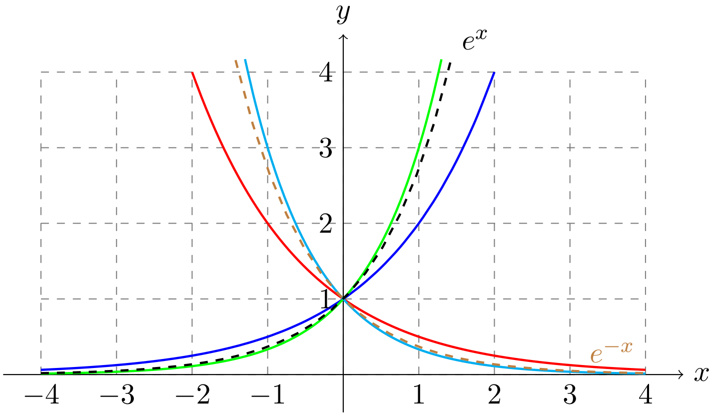
$$\lim_{x \to +\infty} a^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^{-x} \to +\infty$$

توابع نمایی (Exponential)

$$e^{\pm x}, \quad x \in [-\infty, \infty], \quad e^{\pm x} > 0$$

مثال



توابع نمایی (Exponential)

$$e^{\pm x}, \quad x \in [-\infty, \infty], \quad e^{\pm x} > 0$$

رفتار حدی

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x} \to +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$$

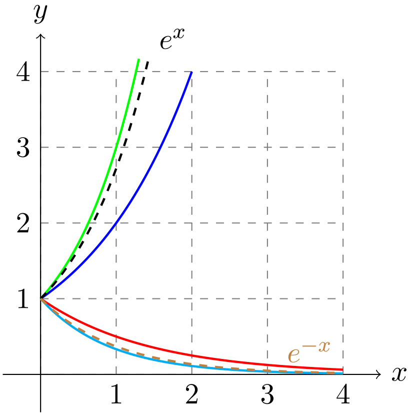
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} \to +\infty$$

توابع نمایی (Exponential)

$$e^{\pm x}, \quad x \in [0, \infty]$$

رفتار حدی



$$\lim_{x \to +\infty} e^{x} \to +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^{x} \to \infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} a^{-x} = 0$$

توابع نمایی (Exponential)

آرگومان توابع نمایی **بدون بعد (یا بدون دیمانسیون)** هستند:

- اگر در

$$e^{\pm kx}$$

کمیت x بعد طول داشته باشد، در این صورت کمیت k بعد یک بر روی طول خواهد داشت،

$$[k] = \frac{1}{\text{طول}}.$$

- اگر در

$$e^{\pm \alpha t}$$

کمیت t بعد زمان داشته باشد، در این صورت کمیت α بعد یک بر روی زمان خواهد داشت،

$$[\alpha] = \frac{1}{\text{زمان}}.$$

توابع لگاریتمی (Logarithm)

$$\log_b x, \quad b = \text{پایه (Base)}, \quad x > 0$$

- مقادیر مجاز پایه

$$b > 0 \quad \text{و} \quad b \neq 1$$

- اگر $x = b$ باشد،

$$\log_b b = 1$$

- اگر $x = b^a$ باشد،

$$\log_b b^a = a \log_b b = a$$

- تابع لگاریتم معکوس تابع نمایی است. اگر

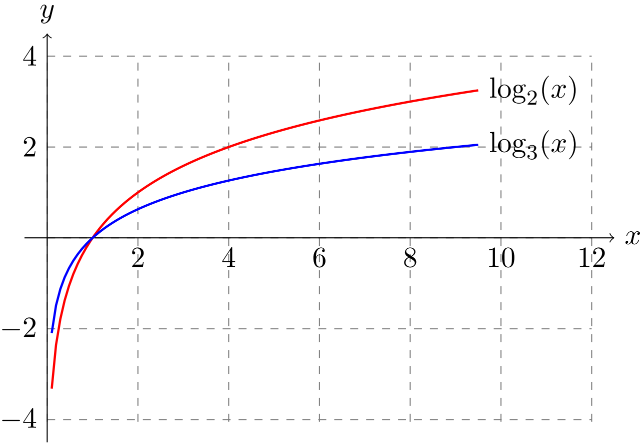
$$x = b^y$$

و از طرفین لگاریتم گرفته شود،

$$\log_b x = \log_b(b^y) = y \log_b b = y$$

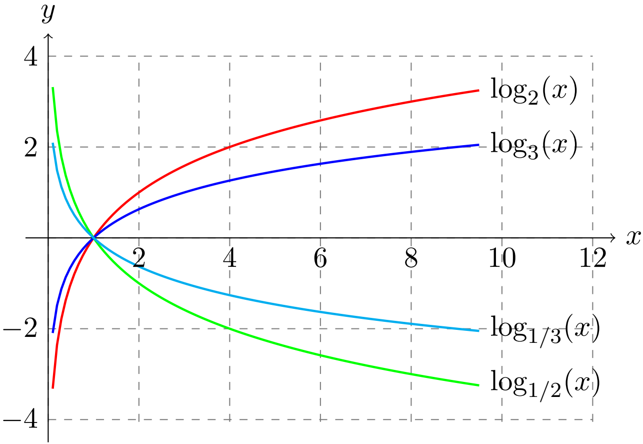
توابع لگاریتمی (Logarithm)

$$\log_b x, \quad b = \text{پایه (Base)}, \quad x > 0$$



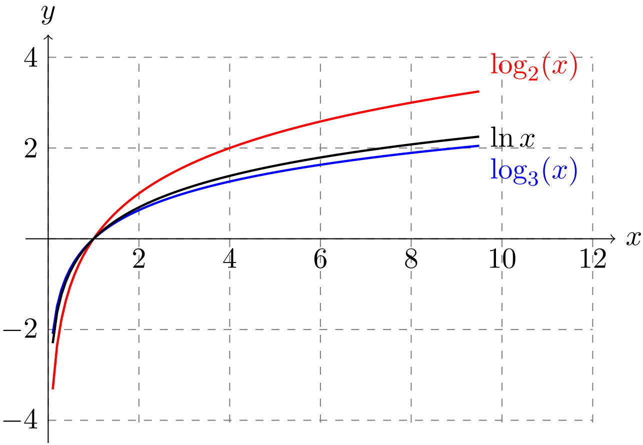
توابع لگاریتمی (Logarithm)

$$\log_b x, \quad b = \text{پایه (Base)}, \quad x > 0$$



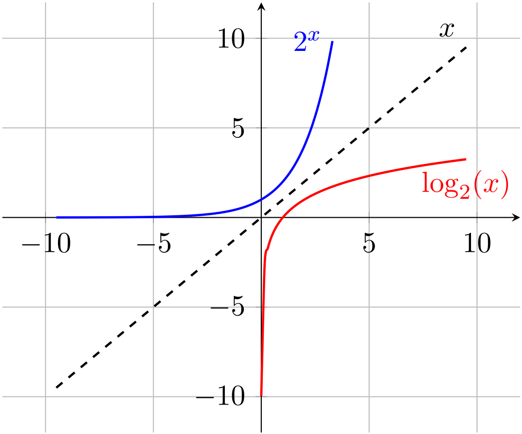
توابع لگاریتمی (Logarithm)

$$\log_e x = \log x = \ln x, \quad x > 0$$



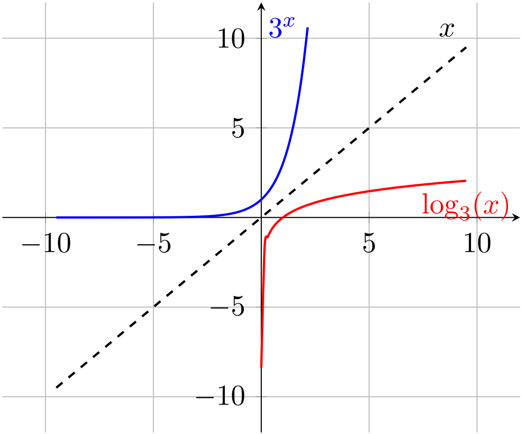
توابع لگاریتمی (Logarithm)

$$\log_b x, \quad b^x$$



توابع لگاریتمی (Logarithm)

$$\log_b x, \quad b^x$$



توابع لگاریتمی (Logarithm)

$$\log_b x, \quad b = \text{پایه}\ (\text{Base}), \quad x > 0$$

- تغییر پایه،

$$\frac{\log_b x}{\log_b c} = \log_c x$$

- جمع،

$$\log_b x_1 + \log_b x_2 = \log_b (x_1 x_2)$$

- تفریق،

$$\log_b x_1 - \log_b x_2 = \log_b \left(\frac{x_1}{x_2} \right)$$

توابع هیپربولیکی

- کوسینوس هیپربولیک

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- سینوس هیپربولیک

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- تانژانت هیپربولیک

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

- کُتانژانت هیپربولیک

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

توابع هیپربولیکی

- کوسینوس هیپربولیک یک تابع زوج است،

$$x \to -x: \quad \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \cosh x$$

- سینوس هیپربولیک یک تابع فرد است،

$$x \to -x: \quad \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh x$$

- تانژانت هیپربولیک یک تابع فرد است،

$$x \to -x: \quad \tanh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = -\tanh x$$

- کتانژانت هیپربولیک یک تابع فرد است،

$$x \to -x: \quad \coth(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{e^{-x} - e^{x}} = -\frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = -\coth x$$

توابع هیپربولیکی

$$\cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}, \quad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

- رابطه کوسینوس و کوسینوس هیپربولیک

$$x \to ix: \quad \cosh(ix) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x \Rightarrow \boxed{\cosh(ix) = \cos(x)}$$

و

$$x \to -ix: \quad \cosh(-i^2 x) = \cos(-ix) \Rightarrow \boxed{\cosh(x) = \cos(ix)}$$

توابع هیپربولیکی

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

◄ رابطه سینوس و سینوس هیپربولیک

$$x \to ix : \quad \sinh(ix) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin x \Rightarrow \boxed{\sinh(ix) = i \sin(x)}$$

و

$$x \to -ix : \quad \sinh(-i^{2}x) = i \sin(-ix) \Rightarrow \sinh(x) = -i \sin(ix)$$

$$\boxed{i \sinh(x) = \sin(ix)}$$

توابع هیپربولیکی

$$\cosh(ix) = \cos(x), \quad \cosh(x) = \cos(ix)$$
$$\sinh(ix) = i\sin(x), \quad i\sinh(x) = \sin(ix)$$

- رابطه تانژانت و تانژانت هیپربولیک

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = -i\frac{\sin(ix)}{\cos(ix)} = -i\tan(ix)$$

$$\tanh(ix) = \frac{\sinh(ix)}{\cosh(ix)} = \frac{i\sin(x)}{\cos(x)} = i\tan(x)$$

توابع هیپربولیکی

$$
\cosh(ix) = \cos(x), \quad \cosh(x) = \cos(ix)
$$
$$
\sinh(ix) = i\sin(x), \quad i\sinh(x) = \sin(ix)
$$
$$
\tanh(ix) = i\tan(x), \quad i\tanh x = \tan(ix)
$$

- رابطه کتانژانت و کتانژانت هیپربولیک

$$
\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = i\frac{\cos(ix)}{\sin(ix)} = i\cot(ix)
$$

$$
\coth(ix) = \frac{\cosh(ix)}{\sinh(ix)} = \frac{\cos x}{i\sin x} = -i\cot x
$$

توابع هیپربولیکی

- رابطه توابع مثلثاتی با توابع هیپربولیکی

$$\cosh(ix) = \cos(x), \quad \cosh(x) = \cos(ix)$$

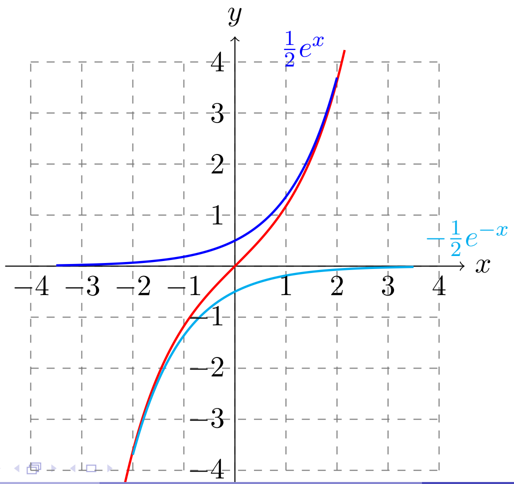
$$\sinh(ix) = i\sin(x), \quad i\sinh(x) = \sin(ix)$$

$$\tanh(ix) = i\tan(x), \quad i\tanh x = \tan(ix)$$

$$\coth x = i\cot(ix), \quad \coth(ix) = -i\cot x$$

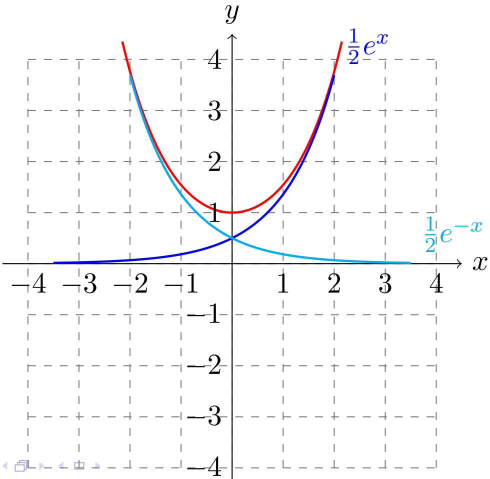
توابع هیپربولیکی

$$y = \sinh x = \frac{1}{2}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$



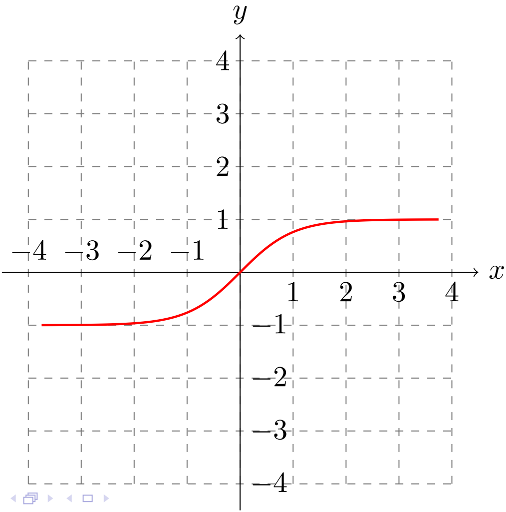
توابع هیپربولیکی

$$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 1 \leq y < \infty$$



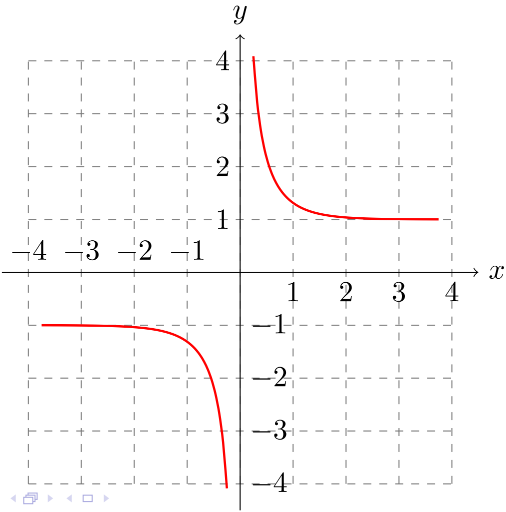
توابع هیپربولیکی

$$y = \tanh x, \quad -\infty < x < \infty, \quad -1 < y < 1$$



توابع هیپربولیکی

$$y = \coth x, \quad x > 0, \quad x < 0, \quad y > 1, \quad y < -1$$



اتحادهای هیپربولیکی

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\boxed{\cosh x + \sinh x = e^x}$$

$$\boxed{\cosh x - \sinh x = e^{-x}}$$

$$\tanh = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{1}{\coth x} \Rightarrow \boxed{\tanh x \coth x = 1}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$$

اتحادهای هیپربولیکی

$$\frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$\boxed{\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x}$$

$$\frac{1}{\sinh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sinh^2 x} = \coth^2 x - 1}$$

اتحادهای هیپربولیکی

$$\begin{aligned}
\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \\
&+ \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&+ \frac{e^{y+x} + e^{y-x} - e^{-y+x} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{y+x} - 2e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \sinh(x+y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x = \sinh(x+y)}$$

اتحادهای هیپربولیکی

$$\begin{aligned}
\sinh x\cosh y - \sinh y\cosh x &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \\
&- \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&- \frac{e^{y+x} + e^{y-x} - e^{-y+x} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{x-y} - 2e^{-(x-y)}}{4} \\
&= \sinh(x-y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sinh x\cosh y - \sinh y\cosh x = \sinh(x-y)}$$

اتحادهای هیپربولیکی

$$
\begin{aligned}
\cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x &= \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) \\
&+ \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{-x+y}+e^{-(x+y)}}{4} \\
&+ \frac{e^{y+x}-e^{y-x}-e^{-y+x}+e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \cosh(x-y)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x = \cosh(x+y)}
$$

اتحادهای هیپربولیکی

$$
\begin{aligned}
\cosh x \cosh y - \sinh y \sinh x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \\
&- \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-(x+y)}}{4} \\
&- \frac{e^{y+x} - e^{y-x} - e^{-y+x} + e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{x-y} + 2e^{-(x-y)}}{4} \\
&= \cosh(x-y)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\cosh x \cosh y - \sinh y \sinh x = \cosh(x-y)}$$

اتحادهای هیپربولیکی

$$\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x = \sinh(x+y)$$

$$\boxed{\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x}$$

$$\cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x = \cosh(x+y)$$

$$\boxed{\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x}$$

اگر

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \cosh 2x &= 2\cosh^2 x - 1 \\ &= 2\sinh^2 x + 1 \end{aligned}$$

اتحادهای هیپربولیکی

$$\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x = \sinh(x+y)$$

$$\cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x = \cosh(x+y)$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \frac{\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x}$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\frac{\sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y}}{\frac{\cosh x \cosh y + \sinh y \sinh x}{\cosh x \cosh y}}$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x} + \frac{\sinh y}{\cosh y}}{1 + \frac{\sinh y \sinh x}{\cosh x \cosh y}} \Rightarrow \boxed{\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}}$$

اتحادهای هیپربولیکی

$$\sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x = \sinh(x-y)$$

$$\cosh x \cosh y - \sinh y \sinh x = \cosh(x-y)$$

$$\tanh(x-y) = \frac{\sinh(x-y)}{\cosh(x-y)} = \frac{\sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y - \sinh y \sinh x}$$

$$\tanh(x-y) = \frac{\frac{\sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y}}{\frac{\cosh x \cosh y - \sinh y \sinh x}{\cosh x \cosh y}}$$

$$\tanh(x-y) = \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\sinh y}{\cosh y}}{1 - \frac{\sinh y \sinh x}{\cosh x \cosh y}} \Rightarrow \boxed{\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}}$$

توابع هیپربولیکی معکوس

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

معکوس سینوس هیپربولیک

$$x = \sinh^{-1} y$$
$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

چون همواره $e^x > 0$ است. بنابراین

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$$
$$x = \ln[y + \sqrt{y^2 + 1}]$$
$$x = \sinh^{-1} y$$
$$\boxed{\sinh^{-1} y = \ln[y + \sqrt{y^2 + 1}]}$$

توابع هیپربولیکی معکوس

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 1 \leq y < \infty$$

معکوس کسینوس هیپربولیک

$$x = \cosh^{-1} y$$

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

چون همواره $e^x > 0$ است. بنابراین

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$x = \ln[y + \sqrt{y^2 - 1}]$$

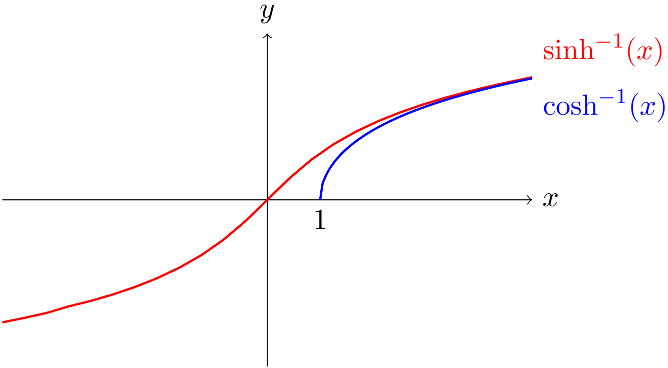
$$x = \cosh^{-1} y$$

$$\boxed{\cosh^{-1} y = \ln[y + \sqrt{y^2 - 1}]}$$

توابع هیپربولیکی معکوس

$$y = \sinh^{-1} x, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

$$y = \cosh^{-1} x, \quad x \geq 1, \quad y > 0$$



توابع هیپربولیکی معکوس

$$y = \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 1 < y < 1$$

معکوس تانژانت هیپربولیک

$$x = \tanh^{-1} y$$

$$ye^{2x} + y = e^{2x} - 1 \Rightarrow (1-y)e^{2x} = 1 + y$$

$$e^{2x} = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$x = \tanh^{-1} y$$

$$\boxed{\tanh^{-1} y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$$

توابع هیپربولیکی معکوس

$$y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x > 0, \quad x < 0, \quad y > 1, \quad y < -1$$

معکوس کُتانژانت هیپربولیک

$$x = \coth^{-1} y$$

$$ye^{2x} - y = e^{2x} + 1 \Rightarrow (y-1)e^{2x} = y + 1$$

$$e^{2x} = \ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

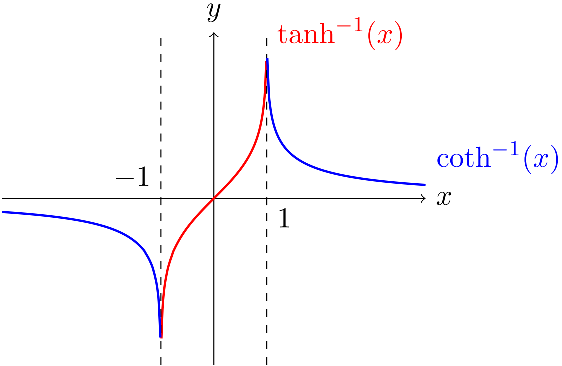
$$x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)$$

$$x = \coth^{-1} y$$

$$\boxed{\coth^{-1} y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)}$$

توابع هیپربولیکی معکوس

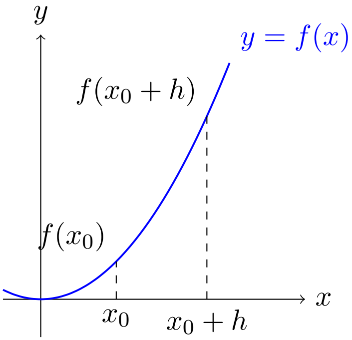
$$y = \tanh^{-1} x, \quad -1 < x < 1, \quad -\infty < y < \infty$$
$$y = \coth^{-1} x, \quad x > 1 (y > 0), \quad x < 1 (y < 0)$$



مشتق مرتبه اول

اگر $y=f(x)$، مشتق اول f یا y نسبت به x_0 بصورت زیر تعریف می شود،

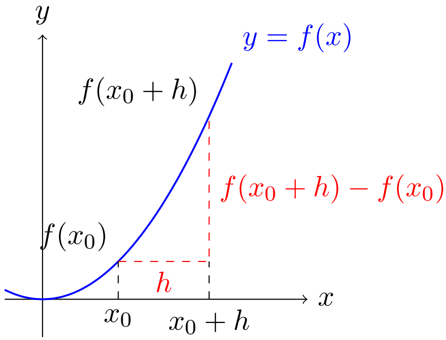
$$f'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



مشتق مرتبه اول

اگر $y = f(x)$، مشتق اول f یا y نسبت به x_0 بصورت زیر تعریف می شود،

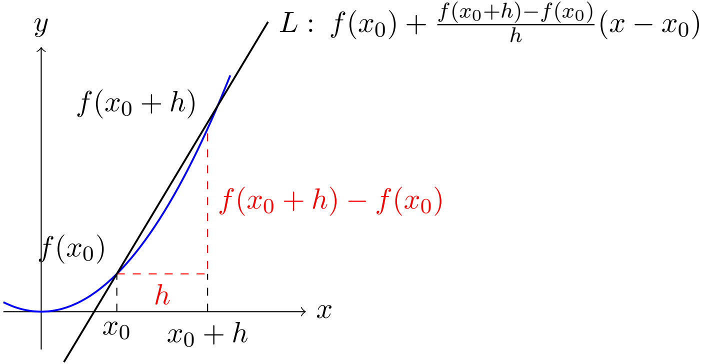
$$f'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$



مشتق مرتبه اول

اگر $y = f(x)$، مشتق اول f یا y نسبت به x_0 بصورت زیر تعریف می شود،

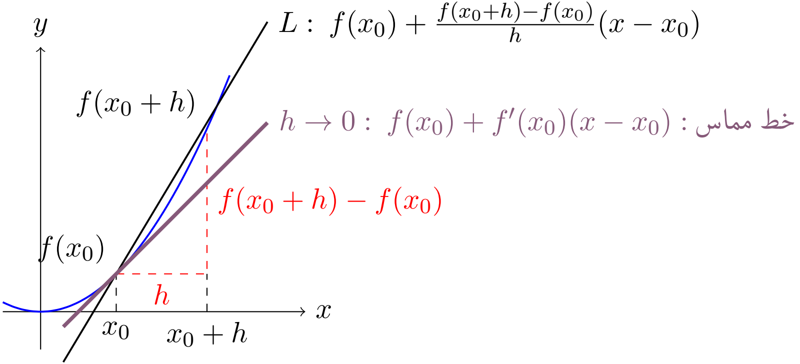
$$f'(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



مشتق مرتبه اول

اگر $y=f(x)$، مشتق اول f یا y نسبت به x_0 بصورت زیر تعریف می شود،

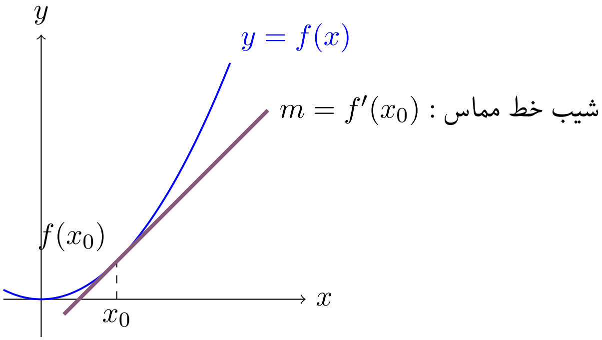
$$f'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



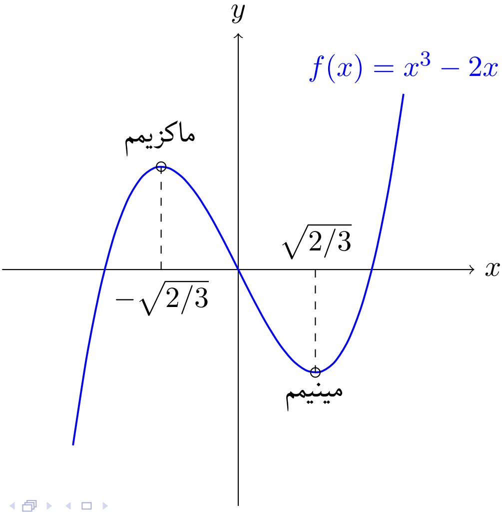
مشتق مرتبه اول

اگر $y=f(x)$، مشتق اول f یا y نسبت به x_0 بصورت زیر تعریف می شود،

$$f'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

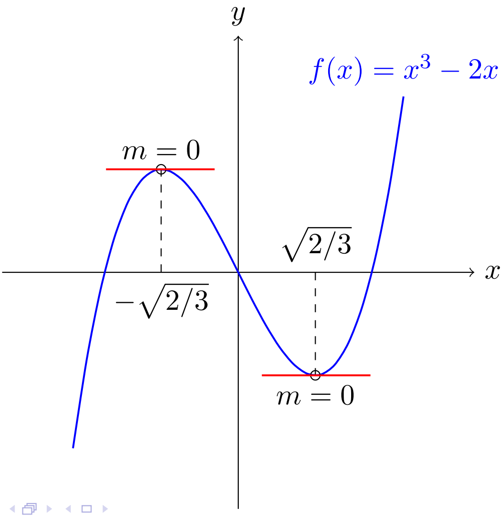


مشتق مرتبه اول
ماکزیمم و مینیمم

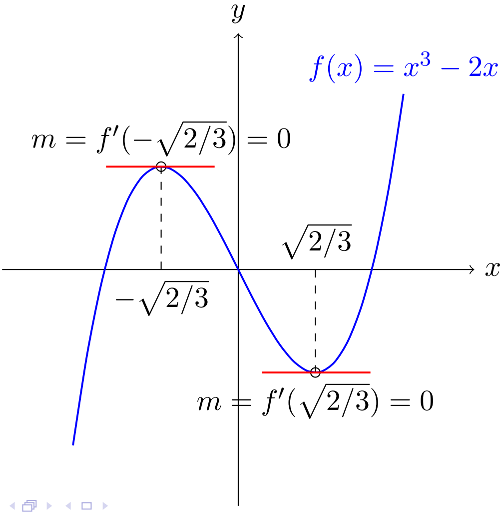


مشتق مرتبه اول

ماکزیمم و مینیمم

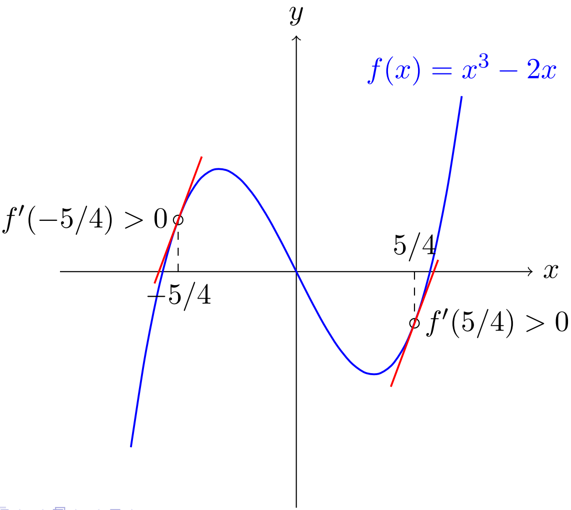


مشتق مرتبه اول
ماکزیمم و مینیمم



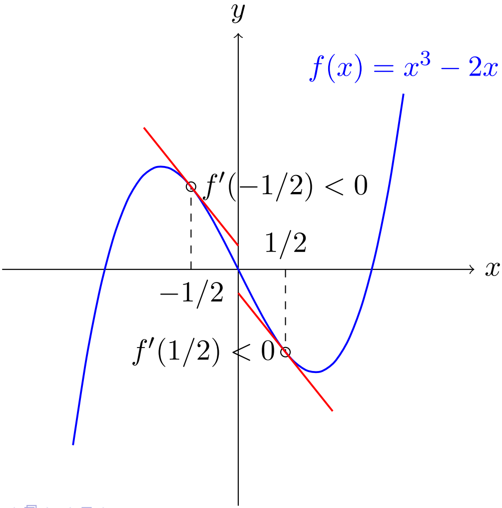
مشتق مرتبه اول

تغییرات منحنی (شیب مثبت)



مشتق مرتبه اول

تغییرات منحنی (شیب منفی)



مشتق مرتبه اول

توابع

$$\boxed{f(x) = ax^n, \quad a = \text{ثابت}}$$

$$\boxed{f'(x) = nax^{n-1}}$$

مثال:

$$f(x) = 2x^4, \quad f'(x) = 8x^3$$

مثال:

$$f(x) = 8\sqrt{x} = 8x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}8x^{(\frac{1}{2}-1)x} = 4x^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{f(x) = a, \quad a = \text{ثابت}}$$

$$\boxed{f'(x) = 0}$$

مثال:

$$f(x) = -2.5, \quad f'(x) = 0$$

$$\boxed{f(x) = ax, \quad a = \text{ثابت}}$$

$$\boxed{f'(x) = a}$$

مثال:

$$f(x) = 5x - 1, \quad f'(x) = 5$$

مشتق مرتبه اول

توابع

$$f(x) = [u(x)]^n$$

$$f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$$

مثال:

$$f(x) = (1+x^2)^3$$

$$f'(x) = 3(2x)(1+x^2)^{3-1} = 6x(1+x^2)^2$$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(2x)(1+x^2)^{-\frac{1}{3}-1}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x(1+x^2)^{-\frac{4}{3}}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$$

$$f(x) = u(x) \pm v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

مثال:

$$f(x) = 2x^3 - \sqrt{1+x^2}$$

$$f(x) = 6x^2 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

مشتق مرتبه اول

توابع

$$f'(x) = 4x + 3$$

$$\boxed{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

مثال:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f(x) = u(x)v(x)}$$

$$\boxed{f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)}$$

مثال:

$$f(x) = x\sqrt{1+x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

مثال:

$$f(x) = (2x-1)(x+2)$$

$$f'(x) = 2(x+2) + (2x-1)$$

مشتق مرتبه اول

توابع

مثال:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{0\times\sqrt{1+x^2}-1\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{1+x^2}}{[\sqrt{1+x^2}]^2}$$

$$f'(x)=\frac{-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{[\sqrt{1+x^2}]^2}$$

$$f'(x)=-\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

مثال:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f(x)=\left[\frac{x+1}{x-1}\right]^{1/2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\left[\frac{x+1}{x-1}\right]^{-1/2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}\left[\frac{x+1}{x-1}\right]^{-1/2}$$

مشتق مرتبه اول

توابع

$$f(x) = \sin u(x)$$
$$f'(x) = u'(x) \cos x$$

$$f(x) = \cos u(x)$$
$$f'(x) = -u'(x) \sin u(x)$$

$$f(x) = \tan u(x)$$
$$f'(x) = u'(x)(1 + \tan^2 u(x))$$

$$f(x) = \cot u(x)$$
$$f'(x) = -u'(x)(1 + \cot^2 u(x))$$

$$f(x) = \sin x$$
$$f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$
$$f'(x) = - \sin x$$

$$f(x) = \tan x$$
$$f'(x) = (1 + \tan^2 x)$$

$$f(x) = \cot x$$
$$f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$$

مشتق مرتبه اول

توابع

مثال:

$$f(x) = \cos(3x) = \cos u(x)$$

$$u(x) = 3x,\ u'(x) = 3$$

$$f'(x) = -u'(x) \sin u(x)$$

$$f'(x) = -3 \sin(3x)$$

مثال:

$$f(x) = \sin(2x) = \sin u(x)$$

$$u(x) = 2x,\ u'(x) = 2$$

$$f'(x) = u'(x) \cos u(x)$$

$$f'(x) = 2 \cos(2x)$$

مثال:

$$f(x) = \cos^3(3x) = \cos^3 u(x)$$

$$u(x) = 3x,\ u'(x) = 3$$

$$f'(x) = -3[u'(x) \sin u(x)] \cos^{3-1} u(x)$$

$$f'(x) = -9 \sin(3x) \cos^2(3x)$$

مثال:

$$f(x) = \sin^2(2x) = \sin^2 u(x)$$

$$u(x) = 2x,\ u'(x) = 2$$

$$f'(x) = 2[u'(x) \cos u(x)] \sin^{2-1} u(x)$$

$$f'(x) = 4 \cos(2x) \sin(2x) = 2 \sin(4x)$$

مشتق مرتبه اول

توابع

مثال:

$$f(x) = \cot(3x) = \cot u(x)$$

$$u(x) = 3x,\ u'(x) = 3$$

$$f'(x) = -u'(x)(1 + \cot^2 u(x))$$

$$f'(x) = -3(1 + \cot^2(3x))$$

مثال:

$$f(x) = \tan(2x) = \tan u(x)$$

$$u(x) = 2x,\ u'(x) = 2$$

$$f'(x) = u'(x)(1 + \tan^2 u(x))$$

$$f'(x) = 2(1 + \tan^2(2x))$$

مثال:

$$f(x) = \tan^2(2x) = \tan^2 u(x)$$

$$u(x) = 2x,\ u'(x) = 2$$

$$f'(x) = 2[u'(x)(1 + \tan^2 u(x))] \tan^{2-1} u(x)$$

$$f'(x) = 4(1 + \tan^2(2x)) \tan(2x)$$

مشتق مرتبه اول

توابع

مثال:

$$f(x) = \cot^3(3x) = \cot^3 u(x)$$

$$u(x) = 3x,\ u'(x) = 3$$

$$f'(x) = 3[-u'(x)(1+\cot^2 u(x))]\cot^{3-1} u(x)$$

$$f'(x) = -9(1+\cot^2(3x))\cot^2(3x)$$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^4 x}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{-2\sin x \cos x}{\sin^4 x}$$

$$f'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

مشتق مرتبه اول

توابع

$$f(x) = \sin^{-1} u(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} u'(x)$$

$$f(x) = \sin^{-1} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \cos^{-1} u(x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} u'(x)$$

$$f(x) = \cos^{-1} x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

مثال:

$$f(x) = \cos^{-1}(3x)$$

$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$$

مثال:

$$f(x) = \sin^{-1}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$$

مشتق مرتبه اول

توابع

$$f(x) = \tan^{-1} u(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+[u(x)]^2} u'(x)$$

$$f(x) = \tan^{-1} x$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \cot^{-1} u(x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+[u(x)]^2} u'(x)$$

$$f(x) = \cot^{-1} x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

مثال:

$$f(x) = \cot^{-1}(3x)$$

$$f'(x) = -\frac{3}{1+9x^2}$$

مثال:

$$f(x) = \tan^{-1}(2x)$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

مشتق مرتبه اول

توابع

$$f(x) = \log_e x = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$f(x) = \log_a e \frac{\log_a x}{\log_a e}$$

$$f(x) = (\log_a e) \log_e x$$

$$f(x) = (\log_a e) \ln x$$

$$f'(x) = (\log_a e) \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \log_e u(x) = \ln u(x)$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f(x) = \log_a u(x),\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$f(x) = \log_a e \frac{\log_a u(x)}{\log_a e}$$

$$f(x) = (\log_a e) \log_e u(x)$$

$$f(x) = (\log_a e) \ln u(x)$$

$$f'(x) = (\log_a e) \frac{u'(x)}{u(x)}$$

مشتق مرتبه اول

توابع

$$\boxed{f(x) = e^{u(x)}}$$

$$\boxed{f'(x) = u'(x)e^{u(x)}}$$

$$\boxed{f(x) = a^{u(x)}}$$

$$\ln f(x) = \ln a^{u(x)} = u(x)\ln a$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x)\ln a)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = u'(x)\ln a$$

$$\boxed{f'(x) = f(x)u'(x)\ln a = u'(x)a^{u(x)}\ln a}$$

$$\boxed{f(x) = e^{x}}$$

$$\boxed{f'(x) = e^{x}}$$

$$\boxed{f(x) = a^{x}}$$

$$\ln f(x) = \ln a^{x} = x\ln a$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln a)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln a$$

$$\boxed{f'(x) = f(x)\ln a = a^{x}\ln a}$$

مشتق مرتبه اول

توابع

مثال:

$$f(x) = (2x+1)^x$$

$$\ln f(x) = \ln(2x+1)^x$$

$$\ln f(x) = x\ln(2x+1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x\ln(2x+1)]$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(2x+1) + \frac{2x}{2x+1}$$

$$f'(x) = (2x+1)^x\ln(2x+1) + \frac{2x(2x+1)^x}{2x+1}$$

$$f'(x) = (2x+1)^x\ln(2x+1) + 2x(2x+1)^{x-1}$$

مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

مشتق مرتبه اول

توابع

مثال:

$$f(x) = \log_x(2x+1)$$

تغییر پایه

$$\log_x(2x+1) = \frac{\log_e(2x+1)}{\log_e x} = \frac{\ln(2x+1)}{\ln x}$$

بنابراین

$$f(x) = \frac{\ln(2x+1)}{\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{[\ln x]^2}(2\ln x - \ln(2x+1))$$

مشتق مرتبه اول

توابع

مثال:

$$f(x) = e^{-ix}$$

$$u(x) = ix,\ u'(x) = -i$$

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

$$f'(x) = -ie^{-ix}$$

مثال:

$$f(x) = e^{ix}$$

$$u(x) = ix,\ u'(x) = i$$

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

$$f'(x) = ie^{ix}$$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sin x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2i}(ie^{ix} + ie^{-ix})$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cos x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(ie^{ix} - ie^{-ix})$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = -\sin x$$

مشتق مرتبه اول

توابع

مثال:

$$f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x}$$

مثال:

$$f(x) = e^{x}$$

$$f'(x) = e^{x}$$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \sinh x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cosh x$$

$$\boxed{f(x) = \sinh x}$$

$$\boxed{f'(x) = \cosh x}$$

مثال:

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cosh x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \sinh x$$

$$\boxed{f(x) = \cosh x}$$

$$\boxed{f'(x) = \sinh x}$$

مشتق مرتبه اول
توابع

مثال:

$$f(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \coth x$$

$$f'(x) = \frac{\sinh x \sinh x - \cosh x \cosh x}{[\sinh x]^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x}$$

$$f'(x) = 1 - \coth^2 x$$

$$\boxed{f(x) = \coth x}$$

$$\boxed{f'(x) = 1 - \coth^2 x}$$

مثال:

$$f(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \tanh x$$

$$f'(x) = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{[\cosh x]^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$

$$f'(x) = 1 - \tanh^2 x$$

$$\boxed{f(x) = \tanh x}$$

$$\boxed{f'(x) = 1 - \tanh^2 x}$$

مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

مشتق مرتبه اول

توابع

$$f(x) = \tanh u(x)$$

$$f'(x) = u'(x)[1 - \tanh^2 u(x)]$$

$$f(x) = \coth u(x)$$

$$f'(x) = u'(x)[1 - \coth^2 u(x)]$$

مثال:

$$f(x) = \tanh^2 x$$

$$f'(x) = 2(1 - \tanh^2 x)\tanh x$$

$$f(x) = \coth^3(2x)$$

$$f'(x) = 6(1 - \coth^2(2x))\coth^2(2x)$$

$$f(x) = \sinh u(x)$$

$$f'(x) = u'(x)\cosh u(x)$$

$$f(x) = \cosh u(x)$$

$$f'(x) = u'(x)\sinh u(x)$$

مثال:

$$f(x) = \sinh^2 x$$

$$f'(x) = 2\cosh x \sinh x$$

$$f(x) = \cosh^3(2x)$$

$$f'(x) = 6\sinh(2x)\cosh^2(2x)$$

مشتق مرتبه اول

توابع

$$f(x) = \sinh^{-1} x$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f(x) = \cosh^{-1} x$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$f(x) = \tanh^{-1} x$$
$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$
$$f(x) = \coth^{-1} x$$
$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f(x) = \sinh^{-1} u(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{[u(x)]^2+1}} u'(x)$$
$$f(x) = \cosh^{-1} u(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{[u(x)]^2-1}} u'(x)$$
$$f(x) = \tanh^{-1} u(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{1-[u(x)]^2} u'(x)$$
$$f(x) = \coth^{-1} u(x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{1-[u(x)]^2} u'(x)$$

مشتق مرتبه اول

توابع

مثال:

$$f(x) = e^{-x}\cos x$$

$$u(x) = e^{-x},\ u'(x) = -e^{-x}$$

$$v(x) = \cos x,\ v'(x) = -\sin x$$

$$f'(x) = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x$$

مثال:

$$f(x) = \ln x \sin x$$

$$u(x) = \ln x,\ u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) = \sin x,\ v'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x$$

مثال:

$$f(x) = x\sin x$$

$$u(x) = x,\ u'(x) = 1$$

$$v(x) = \sin x,\ v'(x) = \cos x$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$f'(x) = \sin x + x\cos x$$

مثال:

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

$$u(x) = x^2,\ u'(x) = 2x$$

$$v(x) = e^{-x},\ v'(x) = -e^{-x}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$$

مشتق مرتبه اول

دیفرانسیل

$$y = f(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

$$\boxed{\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x}$$

مثال:

$$y = f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = -e^{-x}$$

$$\mathrm{d}y = -e^{-x}\mathrm{d}x$$

مثال:

$$y = f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

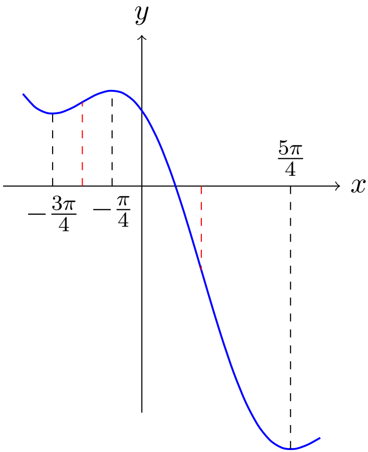
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\mathrm{d}x$$

مشتق مرتبه دوم

نقطه عطف (Inflection Point)

در نقطه عطف تقعر تابع عوض می‌شود.



$$f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$$

$$-\pi \leq x \leq 3\pi/2$$

نقاط اکسترمم:

$$f'(x) = 0 : \ -2\sin x - \sqrt{2} = 0$$

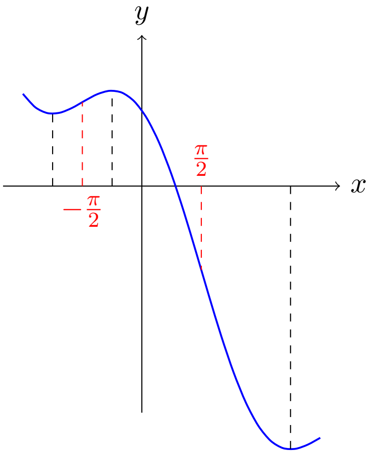
نقاط مینیمم:

$$x = -\frac{3\pi}{4}, \ \frac{5\pi}{4}$$

نقطه ماکزیمم:

$$x = -\frac{\pi}{4}$$

مشتق مرتبه دوم
نقطه عطف (Inflection Point)
در نقطه عطف تقعر تابع عوض می‌شود.



$$f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$$

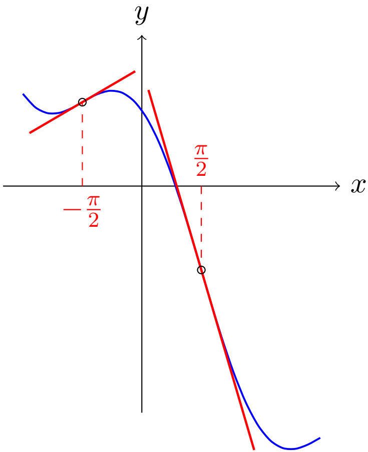
$$-\pi \leq x \leq 3\pi/2$$

نقاط عطف:

$$f''(x) = 0 : \ \cos x = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}$$

مشتق مرتبه دوم
نقطه عطف (Inflection Point)
در نقطه عطف تقعر تابع عوض می‌شود.



$$f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$$

$$-\pi \leq x \leq 3\pi/2$$

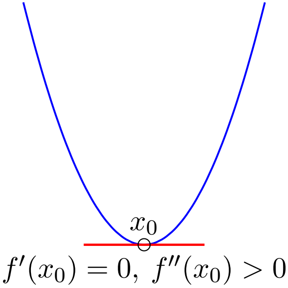
نقاط عطف:

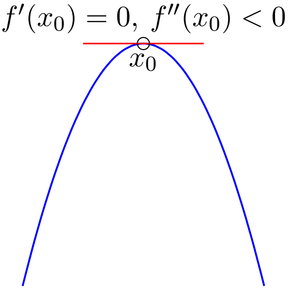
$$f''(x) = 0: \ \cos x = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}$$

مشتق مرتبه دوم

تعیین مینیمم و ماکزیمم تابع با استفاده از مشتق دوم



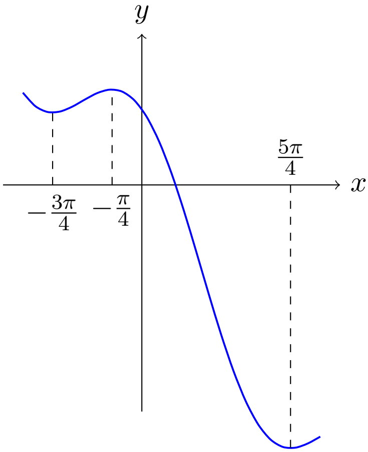


مشتق مرتبه دوم

تعیین مینیمم و ماکزیمم تابع با استفاده از مشتق دوم

$$f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$$

$$-\pi \leq x \leq 3\pi/2$$



نقاط مینیمم:

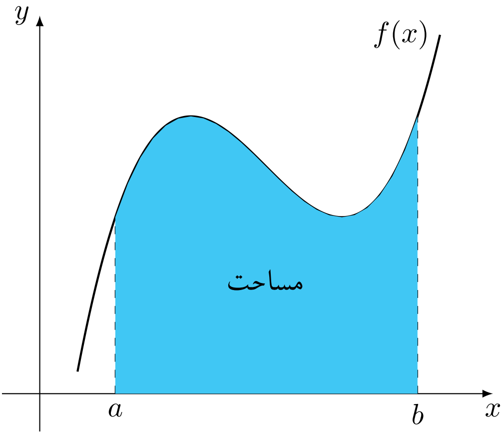
$$f''(x = -\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

$$f''(x = \frac{5\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

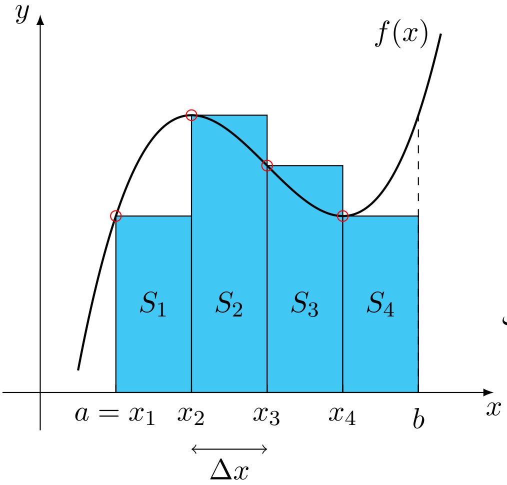
نقطه ماکزیمم:

$$f''(x = -\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

انتگرال



انتگرال



$$\Delta x = \frac{b-a}{4}$$

$$S_1 = f(a)\Delta x$$

$$S_2 = f(a+\Delta x)\Delta x$$

$$S_3 = f(a+2\Delta x)\Delta x$$

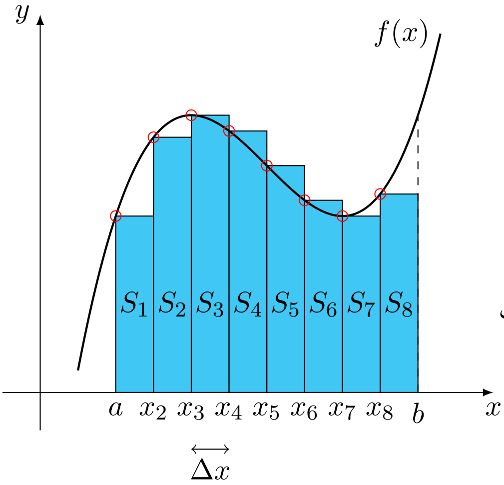
$$S_4 = f(a+3\Delta x)\Delta x$$

$$\text{مساحت} = S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

$$S = \sum_{i=1}^{4} S_i$$

$$S = \sum_{i=1}^{4} f(a+(i-1)\Delta x)\Delta x$$

انتگرال



$$\Delta x = \frac{b-a}{8}$$

$$S_1 = f(a)\Delta x$$

$$S_2 = f(a+\Delta x)\Delta x$$

$$\vdots$$

$$S_8 = f(a+7\Delta x)\Delta x$$

$$\text{مساحت} = S = S_1 + S_2 + \cdots + S_8$$

$$S = \sum_{i=1}^{8} S_i$$

$$S = \sum_{i=1}^{8} f(a+(i-1)\Delta x)\Delta x$$

انتگرال

بطور کلی

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$S_1 = f(x_1)\Delta x = f(a)\Delta x$$

$$S_2 = f(x_2)\Delta x = f(a+\Delta x)\Delta x$$

$$\vdots$$

$$S_i = f(x_i)\Delta x = f(a+(i-1)\Delta x)\Delta x$$

$$\vdots$$

$$S_n = f(x_n)\Delta x = f(a+(n-1)\Delta x)\Delta x$$

$$\text{مساحت} = S = S_1 + S_2 + \cdots + S_i + \cdots + S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

مفاهیم اولیه و متداول ریاضی در فیزیک

انتگرال

بطور کلی

$$\forall n \in \mathbb{Z}^{+} : \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

تعریف انتگرال

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

یا

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

انتگرال

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\text{حد پایین انتگرالگیری}}^{\text{حد بالای انتگرالگیری}} \text{انتگرالده}\ \mathrm{d}x$$

- $\int$ را علامت انتگرالگیری می‌نامند.
- a را حد پایین انتگرالگیری می‌نامند.
- b را حد بالای انتگرالگیری می‌نامند.
- x را متغیر انتگراگیری می‌نامند.
- تابع $f(x)$ را انتگرالده می‌نامند.

انتگرال

انتگرال نامعین

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

$$\mathrm{d}F = f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}F = \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x + C}$$

فرم دیگری

$$\boxed{F(x) = \int^{x} f(t)\mathrm{d}t + C}$$

انتگرال معین

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$\mathrm{d}F = f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}F = \int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

اگر : $F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b))$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x}$$

انتگرال

انتگرال معین

- انتگرال با حد بالا و پایین یکسان برابر صفر است،

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

- اگر $c \in (a, b)$ می‌توان

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

- مقدار متوسط

$$\bar{f} = \langle f \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

انتگرال

انتگرال معین و نامعین

- k یک ثابت است،

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$$

- خاصیت جداسازی جمع و تفریق انتگرالده

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

انتگرال توابع

$$\boxed{\int c\mathrm{d}x = cx, \quad c = \text{ثابت}}$$

$$\boxed{\int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad n \neq 1}$$

مثال:

$$\int (x-2)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x - 2\int \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

مثال:

$$\int (x^2+1)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + x$$

مثال:

$$\int (2x+1)^2\mathrm{d}x = 4\int x^2\mathrm{d}x + 4\int x\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int (x+1)^4 \mathrm{d}x, \quad \text{تغییر متغیر:}\ x+1=u, \quad \mathrm{d}x=\mathrm{d}u$$

$$\int (x+1)^4 \mathrm{d}x = \int u^4 \mathrm{d}u = \frac{1}{5}u^5 = \frac{1}{5}(x+1)^5$$

مثال:

$$\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{1+\frac{1}{2}}x^{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

مثال:

$$\int \sqrt{2x+1}\mathrm{d}x, \quad \text{تغییر متغیر:}\ 2x+1=u, \quad 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$$

$$\int \sqrt{2x+1}\mathrm{d}x = \int u^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+1}}, \quad \text{تغییر متغیر}: \ 2x+1=u, \quad 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}u^{1-\frac{1}{2}} = (2x+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x+1}$$

مثال:

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \text{تغییر متغیر}: \ x^2-1=u, \quad 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}u^{1-\frac{1}{2}} = (x^2-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2-1}$$

مثال:

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)\mathrm{d}x, \quad \text{تغییر متغیر}: \ x^3+x=u, \quad (3x^2+1)\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$$

$$\int (x^3+x)^5(3x^2+1)\mathrm{d}x = \int u^5\mathrm{d}u = \frac{1}{6}u^6 = \frac{1}{6}(x^3+x)^6$$

انتگرال توابع

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x}$$

مثال:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-1}, \quad \text{تغییر متغیر:}\ 2x-1=u, \quad 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(2x-1)$$

مثال:

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}, \quad \text{تغییر متغیر:}\ x^2+1=u, \quad 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln u = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-5x+6} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)(x-2)} = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \ln(x-3) - \ln(x-2) = \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right)$$

مثال:

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x+3} = \int \frac{x+3-3}{x+3}\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{3}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int \mathrm{d}x - 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} = x - 3\ln(x+3)$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x+3} = \int \frac{x^2-9+9}{x+3}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{(x+3)(x-3)}{x+3} + \frac{9}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int (x-3)\mathrm{d}x + 9\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3} = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 9\ln(x+3)$$

مثال:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x-1)} = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = -\ln x + \ln(x-1) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

انتگرال توابع

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{(x-a)(x+a)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln(x-a) - \frac{1}{2a}\ln(x+a)$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \int \frac{1}{(a+x)(a-x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{a+x} + \frac{1}{2a}\int \frac{\mathrm{d}x}{a-x} = \frac{1}{2a}\ln(a+x) - \frac{1}{2a}\ln(a-x)$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)}$$

انتگرال توابع

$$\boxed{\int e^{ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}}$$

مثال:

$$\int xe^{ax}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(xe^{ax}) = e^{ax}\mathrm{d}x + axe^{ax}\mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}(xe^{ax}) - \int e^{ax}\mathrm{d}x = a\int xe^{ax}\mathrm{d}x$$

$$\int xe^{ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \mathrm{d}(xe^{ax}) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\mathrm{d}x$$

$$\int xe^{ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax}$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int x^2 e^{ax} \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}(x^2 e^{ax}) = 2x e^{ax} \mathrm{d}x + a x^2 e^{ax} \mathrm{d}x$$

$$\int \mathrm{d}(x^2 e^{ax}) - 2 \int x e^{ax} \mathrm{d}x = a \int x^2 e^{ax} \mathrm{d}x$$

$$\int x^2 e^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int \mathrm{d}(x^2 e^{ax}) - \frac{2}{a} \int x e^{ax} \mathrm{d}x$$

مثال قبل : $\int x e^{ax} \mathrm{d}x = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax}$

$$\int x^2 e^{ax} \mathrm{d}x = \frac{1}{a} x^2 e^{ax} - \frac{2}{a} \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax}$$

انتگرال

$$\int xe^{ax}\mathrm{d}x$$

مشتق	انتگرال
x	e^{ax}
1	$\frac{1}{a}e^{ax}$
0	$\frac{1}{a^2}e^{ax}$

روش جدول

$$\int xe^{ax}\mathrm{d}x = \left(+\frac{x}{a}e^{ax}\right) + \left(-\frac{1}{a^2}e^{ax}\right)$$

مشتق		انتگرال
x	$+$	e^{ax}
1	$-$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
0		$\frac{1}{a^2}e^{ax}$

$$\int xe^{ax}\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax}$$

انتگرال

$$\int x^2 e^{ax}\mathrm{d}x$$

روش جدول

$$\int x^2 e^{ax}\mathrm{d}x = \left(+\frac{x^2}{a}e^{ax}\right) + \left(-\frac{2x}{a^2}e^{ax}\right) + \left(+\frac{2}{a^3}e^{ax}\right)$$

$$\int x e^{ax}\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax}$$

مشتق	انتگرال
x^2	e^{ax}
$2x$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
2	$\frac{1}{a^2}e^{ax}$
0	$\frac{1}{a^3}e^{ax}$

مشتق		انتگرال
x^2	$+$	e^{ax}
$2x$	$-$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
2	$+$	$\frac{1}{a^2}e^{ax}$
0		$\frac{1}{a^3}e^{ax}$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int a^x \mathrm{d}x, \quad \text{تغییر متغیر:}\ a^x = u \Rightarrow x \ln a = \ln u, \quad (\ln a)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\int u\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{\ln a}u = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\boxed{\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1}$$

مثال:

$$\int \ln x \mathrm{d}x, \quad \text{تغییر متغیر:}\ \ln x = u \Rightarrow x = e^u, \quad \mathrm{d}x = e^u \mathrm{d}u$$

$$\int \ln x \mathrm{d}x = \int u e^u \mathrm{d}u = (u-1)\, e^u = (\ln x - 1)e^{\ln x} = x(\ln x - 1)$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x, \quad \text{تغییر متغیر:} \ \ln x = u \Rightarrow x = e^u, \quad \mathrm{d}x = e^u \mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int \frac{u}{e^u} e^u \mathrm{d}u = \int u \mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

مثال:

$$\int x \ln x \mathrm{d}x, \quad \text{تغییر متغیر:} \ \ln x = u \Rightarrow x = e^u, \quad \mathrm{d}x = e^u \mathrm{d}u$$

$$\int x \ln x \mathrm{d}x = \int u e^{2u} \mathrm{d}u = \left(\frac{u}{2} - \frac{1}{4}\right) e^{2u}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\right) e^{2\ln x} = x^2 \left(\frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{4}\right)$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int xa^x \mathrm{d}x, \quad \text{تغییر متغیر:}\ a^x = e^u \Rightarrow x\ln a = e^u \mathrm{d}u, \quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} e^u \mathrm{d}u$$

$$\int xa^x \mathrm{d}x = \frac{1}{(\ln a)^2}\int ue^u \mathrm{d}u = \frac{1}{(\ln a)^2}(u-1)e^u = \frac{1}{(\ln a)^2}(x\ln a - 1)a^x$$

روش جدول

مشتق		انتگرال
x	$+$	a^x
1	$-$	$\frac{1}{\ln a}a^x$
0		$\frac{1}{(\ln a)^2}a^x$

$$\int xa^x \mathrm{d}x = \left(+\frac{x}{\ln a}a^x\right) + \left(-\frac{1}{(\ln a)^2}a^x\right)$$

$$\int xa^x \mathrm{d}x = \frac{1}{(\ln a)^2}(x\ln a - 1)a^x$$

انتگرال توابع

$$\sin ax = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}$$

$$\int \sin ax \mathrm{d}x = \frac{1}{2i}\left(\int e^{iax}\mathrm{d}x - \int e^{-iax}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{ia}e^{iax} + \frac{1}{ia}e^{-iax}\right)$$

$$\boxed{\int \sin ax \mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax}$$

$$\cos ax = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$$

$$\int \cos ax \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int e^{iax}\mathrm{d}x + \int e^{-iax}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ia}e^{iax} - \frac{1}{ia}e^{-iax}\right)$$

$$\boxed{\int \cos ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin ax}$$

انتگرال توابع

$$\tan ax = \frac{\sin ax}{\cos ax}$$

$$\int \tan ax \mathrm{d}x = \int \frac{\sin ax}{\cos ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\int \frac{(-a\sin ax)}{\cos ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\cos ax$$

$$\boxed{\int \tan ax \mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln\cos ax}$$

$$\cot ax = \frac{\cos ax}{\sin ax}$$

$$\int \cot ax \mathrm{d}x = \int \frac{\cos ax}{\sin ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{a\cos ax}{\sin ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\sin ax$$

$$\boxed{\int \cot ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\sin ax}$$

انتگرال توابع

$$\sinh ax = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$$

$$\int \sinh ax \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int e^{ax}\mathrm{d}x - \int e^{-ax}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}e^{ax} + \frac{1}{a}e^{-ax}\right)$$

$$\boxed{\int \sinh ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cosh ax}$$

$$\cosh ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

$$\int \cosh ax \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int e^{ax}\mathrm{d}x + \int e^{-ax}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}e^{-ax}\right)$$

$$\boxed{\int \cosh ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sinh ax}$$

انتگرال توابع

$$\tanh ax = \frac{\sinh ax}{\cosh ax}$$

$$\int \tanh ax \mathrm{d}x = \int \frac{\sinh ax}{\cosh ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{(a\sinh ax)}{\cosh ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\cosh ax$$

$$\boxed{\int \tanh ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\cosh ax}$$

$$\coth ax = \frac{\cosh ax}{\sinh ax}$$

$$\int \coth ax \mathrm{d}x = \int \frac{\cosh ax}{\sinh ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int \frac{a\cosh ax}{\sinh ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\sinh ax$$

$$\boxed{\int \coth ax \mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln\sinh ax}$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x, \quad \cos x = u, \quad -\sin x \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = -\int u \mathrm{d}u = -\frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{2}\cos^2 x$$

مثال:

$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x, \quad \sin x = u, \quad \cos x \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = \int u \mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\sin^2 x$$

مثال:

$$\int \sin x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin 2x \mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\cos 2x = -\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin^2$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int \sin^2 x \mathrm{d}x, \quad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]$$

مثال:

$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x, \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x, \quad \sin^3 x = \sin x \sin^2 x = \sin x (1 - \cos^2 x) = \sin x - \sin x \cos^2 x$$

$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x = \int (\sin x - \sin x \cos^2 x) \mathrm{d}x = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$$

مثال:

$$\int \cos^3 x \mathrm{d}x, \quad \cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x) = \cos x - \cos x \sin^2 x$$

$$\int \cos^3 x \mathrm{d}x = \int (\cos x - \cos x \sin^2 x) \mathrm{d}x = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

انتگرال توابع

مثال:

مشتق		انتگرال
x	$+$	$\sin x$
1	$-$	$-\cos x$
0		$-\sin x$

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = (-x\cos x) - (-\sin x)$$

$$\int x\sin x\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x$$

مثال:

مشتق		انتگرال
x^2	$+$	$\cos x$
$2x$	$-$	$\sin x$
2	$+$	$-\cos x$
0		$-\sin x$

$$\int x^2\cos x\mathrm{d}x = (x^2\sin x) - (-2x\cos x) + (-2\sin x)$$

$$\int x^2\cos x\mathrm{d}x = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$$

انتگرال توابع

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$ **تغییر متغیر:** $x = a\sin u \Rightarrow \mathrm{d}x = a\cos u\mathrm{d}u$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\cos u\mathrm{d}u}{a\cos u} = \int \mathrm{d}u = u = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2},$$ **تغییر متغیر:** $x = a\tan u \Rightarrow \mathrm{d}x = a(1+\tan^2 u)\mathrm{d}u$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \int \frac{a(1+\tan^2 u)\mathrm{d}u}{a^2(1+\tan^2 u)} = \frac{1}{a}\int \mathrm{d}u = \frac{1}{a}u = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

انتگرال توابع

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \text{تغییر متغیر: } x = a\sinh u \Rightarrow \mathrm{d}x = a\cosh u\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\cosh u\mathrm{d}u}{a\cosh u} = \int \mathrm{d}u = u = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}, \quad \text{تغییر متغیر: } x = a\tanh u \Rightarrow \mathrm{d}x = a(1-\tanh^2 u)\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \int \frac{a(1-\tanh^2 u)\mathrm{d}u}{a^2(1-\tanh^2 u)} = \frac{1}{a}\int \mathrm{d}u = \frac{1}{a}u = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right), \quad x^2 < a^2}$$

انتگرال توابع

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}, \quad \text{تغییر متغیر:}\ x = a\coth u \Rightarrow \mathrm{d}x = a(1-\coth u)\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \int \frac{a(1-\coth^2 u)\mathrm{d}u}{a^2(\coth^2 u - 1)} = -\frac{1}{a}\int \mathrm{d}u = -\frac{1}{a}u = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right), \quad x^2 > a^2}$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos x} \frac{\frac{1}{\cos x} + \tan x}{\frac{1}{\cos x} + \tan x} \mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{1+\sin x}{\cos x}} \mathrm{d}x$$

$$\frac{1 + \sin x}{\cos x} = u \Rightarrow \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}}{\frac{1+\sin x}{\cos x}} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln u = \ln \left(\frac{1}{\cos x} + \tan x \right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln \left(\frac{1}{\cos x} + \tan x \right) = \ln \left(\sec x + \tan x \right)$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{1}{\sin x} \frac{\frac{1}{\sin x} - \cot x}{\frac{1}{\sin x} - \cot x} \mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}}{\frac{1-\cos x}{\sin x}} \mathrm{d}x$$

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = u \Rightarrow \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}}{\frac{1-\cos x}{\sin x}} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln u = \ln\left(\frac{1}{\sin x} - \cot x\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left(\frac{1}{\sin x} - \cot x\right) = \ln\left(\csc x - \cot x\right)$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x \mathrm{d}x$$

با استفاده از فرمول اولر

$$e^{i\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x$$

می توان

$$\mathcal{R}\left[\int e^{\alpha x}e^{i\beta x}\mathrm{d}x\right]=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\mathrm{d}x$$

$$\mathcal{I}\left[\int e^{\alpha x}e^{i\beta x}\mathrm{d}x\right]=\int e^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x$$

با این شرایط بررسی انتگرال زیر را در دستورکار قرار می‌دهیم

$$\int e^{\alpha x}e^{i\beta x}\mathrm{d}x=\int e^{(\alpha+i\beta)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x}$$

انتگرال توابع

ادامه

$$\int e^{\alpha x} e^{i\beta x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + i\beta} e^{(\alpha + i\beta)x}$$

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} e^{(\alpha+i\beta)x} = \frac{1}{\alpha + i\beta} e^{\alpha x} e^{i\beta x} = \frac{1}{\alpha + i\beta} e^{\alpha x} [\cos \beta x + i \sin \beta x]$$

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} e^{(\alpha+i\beta)x} = \frac{\alpha - i\beta}{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)} e^{\alpha x} [\cos \beta x + i \sin \beta x]$$

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} e^{(\alpha+i\beta)x} = \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2 + \beta^2)} [(\alpha - i\beta)(\cos \beta x + i \sin \beta x)]$$

$$\frac{1}{\alpha + i\beta} e^{(\alpha+i\beta)x} = \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x) + i \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2 + \beta^2)} (-\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x)$$

انتگرال توابع

ادامه

$$\int e^{\alpha x} e^{i\beta x} \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha + i\beta} e^{(\alpha + i\beta)x}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha + i\beta} e^{(\alpha + i\beta)x} &= \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x) \\ &+ i \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2 + \beta^2)} (-\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x)\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}\left[\int e^{\alpha x} e^{i\beta x} \mathrm{d}x\right] = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x)$$

$$\mathcal{I}\left[\int e^{\alpha x} e^{i\beta x} \mathrm{d}x\right] = \int e^{\alpha x} \sin \beta x \mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2 + \beta^2)} (-\beta \cos \beta x + \alpha \sin \beta x)$$

انتگرال توابع

ادامه

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x \mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2+\beta^2)}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)$$
$$= \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\beta x + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\beta x\right]$$

اگر

$$\cos\phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \qquad \sin\phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x \mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\beta x + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\beta x\right]$$
$$= \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\cos\phi\cos\beta x + \sin\phi\sin\beta x)$$

انتگرال توابع

ادامه

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x \mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\cos\phi\cos\beta x + \sin\phi\sin\beta x)$$

اگر

$$\cos\phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \sin\phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\boxed{\int e^{\alpha x}\cos\beta x \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{\alpha x}\cos(\beta x-\phi)}$$

$$\tan\phi = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

انتگرال توابع

ادامه

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{(\alpha^2+\beta^2)}(-\beta\cos\beta x+\alpha\sin\beta x)$$
$$= \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\beta x)$$

اگر

$$\cos\phi=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\qquad \sin\phi=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(-\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\beta x+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\beta x)$$
$$= \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(-\sin\phi\cos\beta x+\cos\phi\sin\beta x)$$

انتگرال توابع

ادامه

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x \mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(-\sin\phi\cos\beta x+\cos\phi\sin\beta x)$$

اگر

$$\cos\phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad \sin\phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\boxed{\int e^{\alpha x}\sin\beta x \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}e^{\alpha x}\sin(\beta x-\phi)}$$

$$\tan\phi = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x$$

اگر $m \neq n$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$$

از تفریق دو طرف تساوی عبارتهای بالا داریم

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \sin\alpha\sin\beta$$

بدین ترتیب

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)x \mathrm{d}x$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = 0$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x$$

اگر $m = n$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2mx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \pi\delta_{mn} = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}}$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x$$

اگر $m \neq n$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\beta\sin\alpha$$

از جمع دو طرف تساوی عبارتهای بالا داریم

$$\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)) = \cos\alpha\cos\beta$$

بدین ترتیب

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m+n)x \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x \mathrm{d}x$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x$$

اگر $m = n$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2mx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2m}\sin 2mx\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \pi\delta_{mn} = \begin{cases} \pi & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}}$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \mathrm{d}x$$

اگر $m \neq n$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

از جمع دو طرف تساوی عبارتهای بالا داریم

$$\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)) = \sin\alpha\cos\beta$$

بدین ترتیب

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m+n)x \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(m-n)x \mathrm{d}x$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0$$

انتگرال توابع

مثال:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \mathrm{d}x$$

اگر $m = n$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin mx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2mx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2m}\cos 2mx\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \mathrm{d}x = 0 = \begin{cases} 0 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}}$$

بسط تیلور (Taylor Expansion)

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \cdots$$

$$f^{(k)}(x_0) = \left(\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\right)_{x_0}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

بسط تیلور (Taylor Expansion)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\quad f^{(k)}(x_0)=\left(\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\right)_{x_0}$$

مثال:

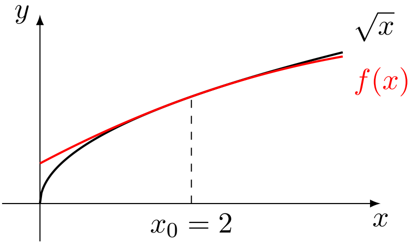
$$f(x)=\sqrt{x},\quad x_0=2$$

$$f^{(0)}(2)=\sqrt{2},\quad f^{(1)}(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad f^{(2)}(2)=-\frac{1}{8\sqrt{2}},\quad f^{(3)}(2)=+\frac{3}{32\sqrt{2}},$$

$$f(x)=\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)-\frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2+\frac{1}{64\sqrt{2}}(x-2)^3+\cdots$$

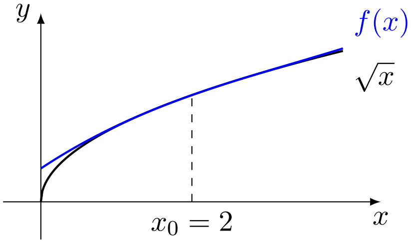
بسط تیلور (Taylor Expansion)

$$f(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) - \frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2$$



بسط تیلور (Taylor Expansion)

$$f(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2) - \frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2 + \frac{1}{64\sqrt{2}}(x-2)^3 + \cdots$$



بسط تیلور (Taylor Expansion)

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\quad f^{(k)}(x_0)=\left(\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\right)_{x_0}$$

مثال:

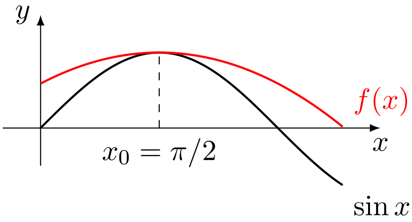
$$f(x)=\sin x,\quad x_0=\pi/2$$

$$f^{(0)}(\pi/2)=1,\quad f^{(1)}(\pi/2)=0,\quad f^{(2)}(\pi/2)=-1,\quad f^{(3)}(\pi/2)=0,\quad\cdots$$

$$f(x)=1-\frac{1}{6}(x-\pi/2)^2+\frac{1}{120}(x-\pi/2)^4+\cdots$$

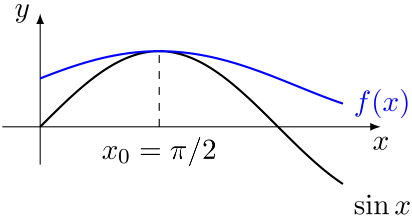
بسط تیلور (Taylor Expansion)

$$f(x) = 1 - \frac{1}{6}(x - \pi/2)^2$$



بسط تیلور (Taylor Expansion)

$$f(x) = 1 - \frac{1}{6}(x-\pi/2)^2 + \frac{1}{120}(x-\pi/2)^4 + \cdots$$



بسط تیلور (Taylor Expansion)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad f^{(k)}(x_0) = \left(\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\right)_{x_0}$$

مثال(پتانسیل لنارد-جونز):

$$f(x) = \frac{1}{x^{12}} - \frac{1}{x^6}, \quad x_0 = \sqrt[6]{2}$$

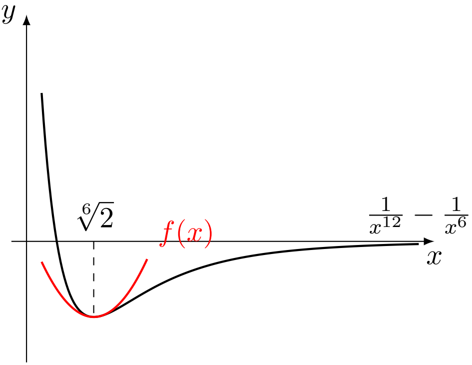
$$f^{(1)}(x_0) = 0 \Rightarrow -\frac{12}{x_0^{13}} + \frac{6}{x_0^7} = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt[6]{2}$$

$$f^{(0)}(\sqrt[6]{2}) = \frac{1}{\sqrt[6]{2^{12}}} - \frac{1}{\sqrt[6]{2^6}}, \quad f^{(1)}(\sqrt[6]{2}) = -\frac{12}{\sqrt[6]{2^{13}}} + \frac{6}{\sqrt[6]{2^7}}$$

$$f^{(2)}(\sqrt[6]{2}) = \frac{12\times 13}{\sqrt[6]{2^{14}}} - \frac{6\times 7}{\sqrt[6]{2^8}}, \quad f^{(3)}(\sqrt[6]{2}) = \frac{12\times 13\times 14}{\sqrt[6]{2^{15}}} - \frac{6\times 7\times 8}{\sqrt[6]{2^9}}$$

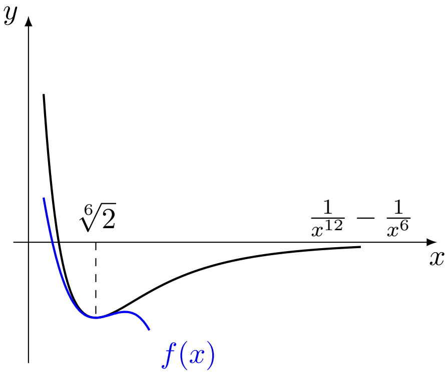
بسط تیلور (Taylor Expansion)

$$f(x) = f(\sqrt[6]{2}) + \frac{f^{(1)}(\sqrt[6]{2})}{1!}(x - \sqrt[6]{2}) + \frac{f^{(2)}(\sqrt[6]{2})}{2!}(x - \sqrt[6]{2})^2$$



بسط تیلور (Taylor Expansion)

$$f(x)=f(\sqrt[6]{2})+\frac{f^{(1)}(\sqrt[6]{2})}{1!}(x-\sqrt[6]{2})+\frac{f^{(2)}(\sqrt[6]{2})}{2!}(x-\sqrt[6]{2})^2+\frac{f^{(3)}(\sqrt[6]{2})}{3!}(x-\sqrt[6]{2})^3$$



بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

$$f^{(k)}(0) = \left(\frac{\mathrm{d}^k f(x)}{\mathrm{d}x^k}\right)_{x=0}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای دوجمله‌ای (Binomial Series)

$$(1+x)^m = \sum_{0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)
بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای دوجمله‌ای (Binomial Series)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

مثال:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای دوجمله‌ای (Binomial Series)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

مثال:

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)
بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای دوجمله‌ای (Binomial Series)

$$(1-x)^m = 1-mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

مثال:

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \cdots, \quad 0 < x < 1$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \cdots, \quad 0 < x < 1$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای هندسی (Geometric Series)

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{1 \times 2}{(1-x)^3}, \quad f^{(2)}(0) = 2!$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{1 \times 2 \times 3}{(1-x)^4} = \frac{3!}{(1-x)^4}, \quad f^{(3)}(0) = 3!$$

$$\vdots$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای هندسی (Geometric Series)

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}, \quad f^{(k)}(0) = k!$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots \Rightarrow \boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای هندسی (Geometric Series)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$$

$$x \to -x : \ \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 + \cdots, \quad |x| < 1}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)
بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای هندسی (Geometric Series)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \quad |x| < 1$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[(-1)^k + 1]x^k$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای هندسی (Geometric Series)

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[(-1)^k + 1]x^k$$

$$k = \text{فرد} :\ 1 + (-1)^k = 0, \quad k = \text{زوج} :\ 1 + (-1)^k = 2 \Rightarrow k \to 2k$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}[(-1)^k + 1]x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots, \quad |x| < 1}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای هندسی (Geometric Series)

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k, \quad |x| < 1$$

از طرفین سری هندسی نسبت به x مشتق می گیریم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty} x^k \Rightarrow \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}$$

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots, \quad |x| < 1}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای هندسی (Geometric Series)

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^k, \quad |x| < 1$$

از طرفین سری هندسی نسبت به x مشتق می گیریم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1+x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \Rightarrow -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k kx^{k-1}$$

$$\boxed{\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}kx^{k-1} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots, \quad |x| < 1}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای هندسی (Geometric Series)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$$

$$f(x) = \ln(1-x), \quad |x| < 1$$

$$\ln(1-x) = -\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -\int \sum_{k=0}^{\infty} x^k \mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{\infty} \int x^k \mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots, \quad |x| < 1}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)
بسط تیلور حول نقطه صفر ($x_0 = 0$) را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای هندسی (Geometric Series)

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k, \quad |x| < 1$$

$$f(x) = \ln(1+x), \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \int \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int x^k \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$$

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots, \quad |x| < 1}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

سریهای هندسی (Geometric Series)

$$\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}x^{k+1}, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(-1)^k + 1]}{k+1}x^{k+1}$$

$$k = \text{فرد} : \ 1 + (-1)^k = 0, \quad k = \text{زوج} : \ 1 + (-1)^k = 2 \Rightarrow k \to 2k$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}x^{2k+1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \cdots, \quad |x| < 1}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

تابع نمایی

$$f(x) = e^{\alpha x}, \quad -\infty < x < \infty$$
$$f^{(1)}(x) = \alpha e^{\alpha x}$$
$$f^{(2)}(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(x) = \alpha^k e^{\alpha x}$$
$$\vdots$$

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{1}{2!}\alpha^2 x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\alpha^k x^k + \cdots \Rightarrow \boxed{e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\alpha^k x^k}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

تابع نمایی

$$\boxed{e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\alpha^k x^k = 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \cdots}$$

$$x \to -x: \;\; e^{-\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\alpha^k (-x)^k$$

$$\boxed{e^{-\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\alpha^k x^k = 1 - \alpha x + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \cdots}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

توابع هیپربولیکی

$$e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\alpha^k x^k, \quad e^{-\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\alpha^k x^k$$

$$\cosh \alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1+(-1)^k]}{k!}\alpha^k x^k$$

$$k = \text{فرد} : \ 1 + (-1)^k = 0, \quad k = \text{زوج} : \ 1 + (-1)^k = 2 \Rightarrow k \to 2k$$

$$\boxed{\cosh \alpha x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!}x^{2k} = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \cdots}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)
بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

توابع هیپربولیکی

$$e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\alpha^k x^k, \quad e^{-\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\alpha^k x^k$$

$$\sinh \alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1-(-1)^k]}{k!}\alpha^k x^k$$

$$k = \text{فرد} :\ 1-(-1)^k = 2, \quad k = \text{زوج} :\ 1-(-1)^k = 0 \Rightarrow k \to 2k+1$$

$$\boxed{\sinh \alpha x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x + \frac{1}{6}\alpha^3 x^3 + \cdots}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر ($x_0 = 0$) را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

توابع مثلثاتی

$$f(x) = \tanh \alpha x$$

$$f^{(1)}(x) = \alpha(1 - \tanh^2 \alpha x), \quad f^{(1)}(0) = \alpha$$

$$f^{(2)}(x) = 2\alpha^2 \tanh \alpha x(1 - \tanh^2 \alpha x), \quad f^{(1)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = 2\alpha^3(1 - \tanh^2 \alpha x)(-1 + 3\tanh^2 \alpha x), \quad f^{(1)}(0) = -2\alpha^3$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\tanh \alpha x = \alpha x - \frac{1}{3}\alpha^3 x^3 + \cdots}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

توابع مثلثاتی

$$e^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\alpha^k x^k$$

$$x \to ix : \; e^{i\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}\alpha^k x^k$$

$$x \to -ix : \; e^{-i\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^k}{k!}\alpha^k x^k$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

توابع مثلثاتی

$$e^{i\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}\alpha^k x^k, \quad e^{-i\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^k}{k!}\alpha^k x^k$$

$$\cos \alpha x = \frac{1}{2}(e^{\alpha x} + e^{-i\alpha x}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k[1+(-1)^k]}{k!}\alpha^k x^k$$

$$k = \text{فرد} : \ 1+(-1)^k = 0, \quad k = \text{زوج} : \ 1+(-1)^k = 2 \Rightarrow k \to 2k$$

$$\cos \alpha x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\alpha^{2k}}{(2k)!}x^{2k}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

توابع مثلثاتی

$$\cos \alpha x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\alpha^{2k}}{(2k)!}x^{2k}, \quad i^{2k} = (-1)^k$$

$$\boxed{\cos \alpha x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\alpha^{2k}}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 + \cdots}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)
بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

توابع مثلثاتی

$$e^{i\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}\alpha^k x^k, \quad e^{-i\alpha x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^k}{k!}\alpha^k x^k$$

$$\sin \alpha x = \frac{1}{2i}(e^{\alpha x} - e^{-i\alpha x}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k[1+(-1)^k]}{k!}\alpha^k x^k$$

$$k = \text{فرد} : \ 1-(-1)^k = 2, \quad k = \text{زوج} : \ 1-(-1)^k = 0 \Rightarrow k \to 2k+1$$

$$\sin \alpha x = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)
بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

توابع مثلثاتی

$$\sin\alpha x = \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}, \quad i^{2k+1} = i(-1)^k$$

$$\boxed{\sin\alpha x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\alpha^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{1}{6}\alpha^3x^3 + \cdots}$$

بسط مکلورن (Maclaurin Expansion)

بسط تیلور حول نقطه صفر $(x_0 = 0)$ را بسط مکلورن می‌نامند.

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots$$

توابع مثلثاتی

$$f(x) = \tan \alpha x, \quad |x| < \pi/2\alpha$$

$$f^{(1)}(x) = \alpha(1 + \tan^2 \alpha x), \quad f^{(1)}(0) = \alpha$$

$$f^{(2)}(x) = 2\alpha^2 \tan \alpha x(1 + \tan^2 \alpha x), \quad f^{(1)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = 2\alpha^3(1 + \tan^2 \alpha x)(1 + 3\tan^2 \alpha x), \quad f^{(1)}(0) = 2\alpha^3$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\tan \alpha x = \alpha x + \frac{1}{3}\alpha^3 x^3 + \cdots}$$