

فیزیک ۲

قانون کولن

محمدرضا مظفری

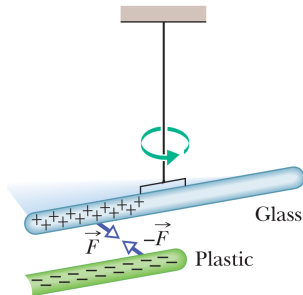
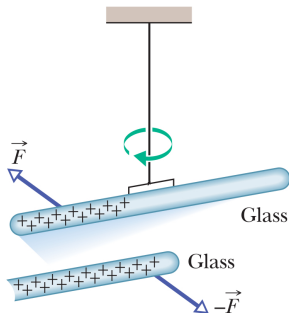
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

- ◀ هر جسم دارای مقدار فراوانی بار الکتریکی است. بار الکتریکی مشخصه ذاتی ذرات بنیادی است که اجسام از آن ساخته می‌شوند.
- ◀ دو نوع بار الکتریکی وجود دارد که بار مثبت و بار منفی نامیده می‌شود.
- ◀ در بیشتر اجسامی که روزمره با آنها سروکار داریم دارای بار کل صفر هستند، یعنی تعداد ذرات با بار مثبت تقریباً با تعداد ذرات با بار منفی در آنها یکسان هستند. چنین اجسامی از نظر الکتریکی خنثی هستند.
- ◀ اجسام خنثی در تماس اصطکاکی با اجسام دیگر ممکن است در نقطه‌ی تماس بار مثبت یا منفی اضافی پیدا کنند. برای مثال،
 - ▶ وقتی میله‌ی شیشه‌ای خنثی توسط پارچه ابریشمی مالش داده می‌شود، مقدار کمی بار منفی از میله به پارچه ابریشمی می‌رود و میله دارای اندکی بار اضافی مثبت می‌شود.
 - ▶ وقتی میله‌ی پلاستیکی خنثی با خز مالش داده می‌شود، مقدار کمی بار مثبت از میله به خز می‌رود و میله دارای اندکی بار اضافی منفی می‌شود.

قانون کولن

- ◀ اجسام با بار مثبت یا منفی اضافی را اجسام باردار می‌نامند. تخلیه شدن بار اضافی از اجسام باردار که در تماس با اجسام دیگر حاصل می‌شود همواره با جرقه‌ای همراه است. در اثر تخلیه شدن بار اضافی، جسم باردار به جسمی خنثی تبدیل می‌شود.
- ◀ اجسام با بار الکتریکی همانم یکدیگر را دفع و با بار الکتریکی غیرهمنام یکدیگر را جذب می‌کنند.



◀ مواد بر اساس قابلیت حرکت بار در داخل آنها دسته بندی می‌شوند،

▶ رساناها موادی هستند که بار می‌تواند در آنها آزادانه حرکت کند. موادی مانند فلزات، بدن انسان و آب

▶ نارساناها (یا عایق‌ها) موادی هستند که بار نمی‌تواند در آنها آزادانه حرکت کند. موادی مانند شیشه، لاستیک، پلاستیک و آب خالص

▶ نیمرساناها موادی هستند که بین رساناها و عایقها قرار دارند که شامل سیلیسیم و ژرمانیوم در تراشه‌های کامپیوتری

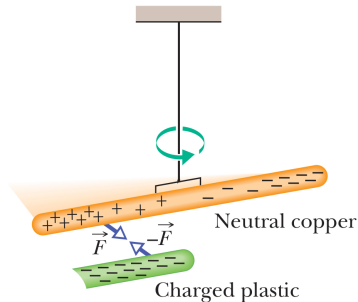
◀ وقتی جسم رسانا بارداری از طریق دستها به زمین (که یک رسانای بزرگ است) متصل می‌شود، بار اضافه جسم رسانا تخلیه می‌شود. اگر بجای اینکه میله رسانا را با دستها بگیرید، آنرا با یک دستگیره‌ی عایق نگه دارید مسیر رسانش به زمین قطع می‌شود.

◀ وقتی چنین مسیری بین جسم رسانا و زمین برقرار باشد، گفته می‌شود که جسم اتصال به زمین شده است.

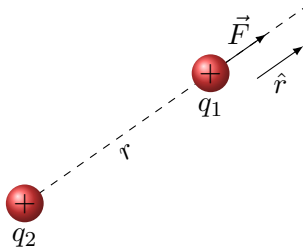
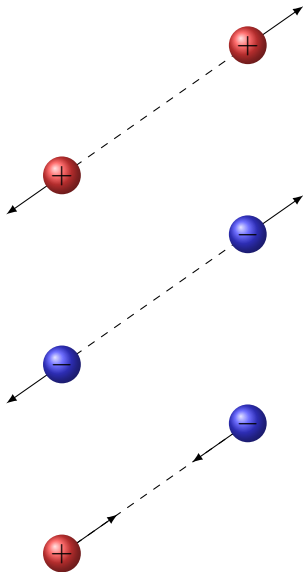
◀ خواص اجسام رسانا و عایق ناشی از ماهیت الکتریکی اتمهای آنها است. اتمها از بار مثبت، پروتون، بار منفی، الکترونها و نوترونها خنثی از نظر الکتریکی تشکیل شده‌اند.

قانون کولن

- ▶ بیرونی ترین الکترونها در اتمها یک جسم رسانا را الکترونها رسانش می نامند که وظیفه انتقال جریانهای الکتریکی و گرمایی در یک جسم رسانا را بر عهده دارند.
- ▶ میله‌ی مسی خنثی توسط یک نخ نارسانا آویخته شده است و از محیط اطرافش منزوی شده است.
- ▶ وقتی یک میله‌ی پلاستیکی با بار منفی را به یک انتهای میله‌ی مسی خنثی نزدیک می‌کنیم. الکترونها رسانش میله‌ی مسی، به انتهای دورتر میله‌ی مسی دفع می‌شود و میله‌ی پلاستیکی با بار منفی، انتهای نزدیک میله مسی با بار مثبت را جذب می‌کند.



قانون کولن



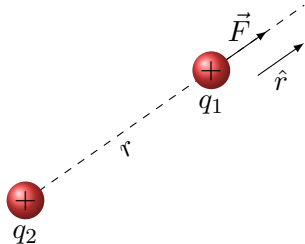
نیروی الکترواستاتیکی که بار q_2 به بار q_1 وارد می‌کند،

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

واحد بار در دستگاه SI برابر با کولن C است،

$$1 \text{ C} = (1 \text{ A})(1 \text{ s})$$

قانون کولن



r فاصله‌ی بین دو بار q_1 و q_2 است.
 \hat{r} بردار یکه‌ی در امتداد بردار \vec{r} است،

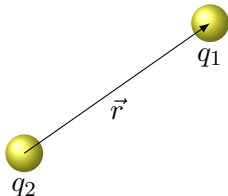
$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$$

نیروی الکترو استاتیکی که بار q_2 به بار q_1 وارد می‌کند،

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

واحد بار در دستگاه SI برابر با کولن C است،

$$1 \text{ C} = (1 \text{ A})(1 \text{ s})$$



کمیت

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

ثابت گذردهی خلا نامیده می‌شود

قضایای پوسته

- ◀ قضیه اول: پوسته‌ای با بار یکنواخت، ذره‌ی باردار در خارج از پوسته را به صورتی جذب یا دفع می‌کند که گویی بار پوسته در مرکز آن متمرکز شده است.
- ◀ قضیه دوم: اگر ذره‌ی بارداری در داخل پوسته‌ای با بار یکنواخت قرار داشته باشد، هیچ نیروی الکترواستاتیک خالصی از پوسته به ذره وارد نمی‌شود.

رسانهای کروی

اگر بار اضافی روی پوسته‌ای کروی قرار گیرد، آن بار اضافی بطور یکنواخت روی سطح خارجی پخش می‌شود. طبق قضیه‌ی اول، پوسته کروی یک بار خارجی را بصورتی جذب یا دفع می‌کند که گویی همه‌ی بار اضافی پوسته در مرکز آن قرار دارد.

- ◀ اگر الکترونهاى اضافی را روی یک پوسته کروی قرار دهیم، الکترونهاى روی پوسته کروی یکدیگر را می‌رانند و از هم دور می‌شوند. الکترونها آنقدر پخش می‌شوند تا اینکه بطور یکنواخت روی سطح کره توزیع شوند.

- ◀ اگر بار منفی را از روی یک پوسته کروی خنثی برداریم، بار مثبت بجای مانده نیز بطور یکنواخت روی سطح پوسته پخش می‌شود.

قانون کولن

بار یک کمیت کوانتیده است

بار کمیت پیوسته نیست و بصورت مضربی از بار بنیادی تشکیل شده است. هر بار q مثبت و منفی را می‌توان بصورت

$$q = ne, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

نوشت که e بار بنیادی نامیده می‌شود و دارای مقدار تقریبی زیر است

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

ذره	نماد	بار
الکترون	e	$-e$
پروتون	p	$+e$
نوترون	n	0

نکته ۱: کوارکها ذرات سازنده‌ی پروتون و نوترون هستند که دارای بارهای $\pm e/3$ و $\pm 2e/3$ هستند ولی ظاهراً نمی‌توان آنها را بطور جداگانه آشکار کرد. از این رو بار آنها را بار بنیادی در نظر نمی‌گیرند.

قانون کولن

بار یک کمیت کوانتیده است

بار کمیت پیوسته نیست و بصورت مضربی از بار بنیادی تشکیل شده است. هر بار q مثبت و منفی را می‌توان بصورت

$$q = ne, \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

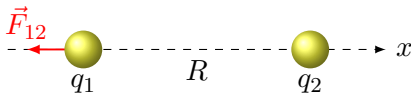
نوشت که e بار بنیادی نامیده می‌شود و دارای مقدار تقریبی زیر است

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

ذره	نماد	بار
الکترون	e	$-e$
پروتون	p	$+e$
نوترون	n	0

نکته ۲: وقتی یک کمیتی فیزیکی مانند بار بجای هر مقدار فقط می‌تواند مقادیر گسسته‌ای داشته باشد به چنین کمیتی، کوانتیده گفته می‌شود. برای مثال ممکن است درون ذره‌ی $+10e$ یا $-6e$ بار یافت شود ولی ذره‌ای با بار $7.25e$ وجود ندارد.

مسئله-۱: مطابق شکل دو ذره باردار $q_1 = q$ و $q_2 = 2q$ در مکانهای خود بر روی محور x ثابت شده‌اند. فاصله‌ی بارها R است. بزرگی و جهت نیروی الکترواستاتیکی F_{12} وارد بر ذره 1 از طرف ذره 2 را بدست آورید.



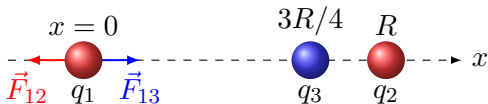
دو ذره با بارهای همنام یکدیگر را دفع می‌کنند، بزرگی نیروی وارد بر ذره 1 از طرف ذره 2

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{R^2}$$

جهت نیرو در خلاف جهت مثبت محور x است، بنابراین

$$\vec{F}_{12} = -\hat{i}F_{12} = -\hat{i}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{R^2}$$

مسئله-۲: مطابق شکل ذره ۳ با بار $q_3 = -2q$ بین دو ذره باردار $q_1 = q$ و $q_2 = 2q$ بر روی محور x قرار دارد. فاصله‌ی بار q_3 از بار q_1 برابر $3R/4$ است. بزرگی و جهت نیروی الکترواستاتیکی خالص وارد بر ذره ۱ از طرف دو ذره ۲ و ۳ را بدست آورید.



نیروی خالص وارد بر ذره ۱ : $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$

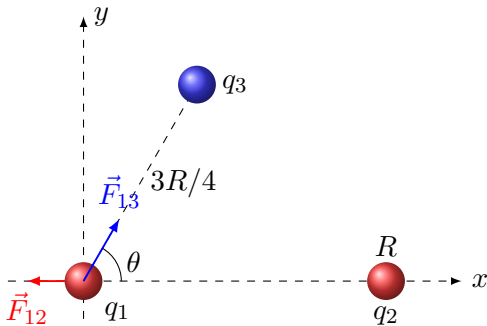
$$\vec{F}_{12} = -\hat{i}F_{12} = -\hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{R^2}$$

$$\vec{F}_{13} = \hat{i}F_{13} = \hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{9R^2/16}$$

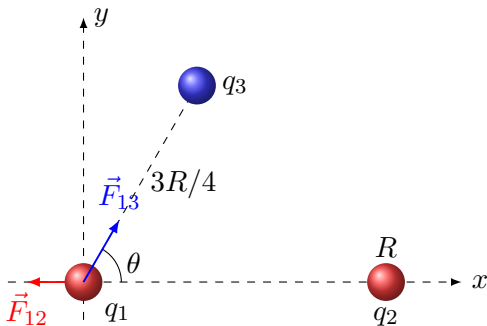
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} = \hat{i} \left(-1 + \frac{16}{9} \right) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{R^2} = \hat{i} \frac{7}{9} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{R^2}$$

قانون کولن

مسئله-۳: مطابق شکل ذره ۳ با بار $q_3 = -2q$ تحت زاویه‌ی θ نسبت به محور x از بار q_1 فاصله‌ی $3R/4$ دارد. بزرگی و جهت نیروی الکترواستاتیکی خالص وارد بر ذره ۱ از طرف دو ذره ۲ و ۳ را بدست آورید.



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} : \text{نیروی خالص وارد بر ذره ۱}$$



$$\vec{F}_{12} = -\hat{i}F_{12} = -\hat{i}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2}{R^2}$$

$$\vec{F}_{13} = F_{13}(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2}{9R^2/16}(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

$$\vec{F}_{12} = -\hat{i}F_{12} = -\hat{i}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2}{R^2}$$

$$\vec{F}_{13} = F_{13}(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2}{9R^2/16}(\hat{i}\cos\theta + \hat{j}\sin\theta)$$

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2}{R^2}\left[\hat{i}\left(-1 + \frac{16}{9}\cos\theta\right) + \hat{j}\left(\frac{16}{9}\sin\theta\right)\right]$$

$$\text{جهت نیروی خالص} : \tan\phi = \frac{(16/9)\sin\theta}{-1 + (16/9)\cos\theta} = \frac{16\sin\theta}{-9 + 16\cos\theta}$$

$$\text{بزرگی نیروی خالص} : F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q^2}{R^2}\sqrt{\left(-1 + \frac{16}{9}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{16}{9}\sin\theta\right)^2}$$

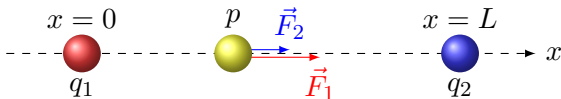
قانون کولن

مسئله-۴: دو ذره $q_1 = +8q$ در مبدا و $q_2 = -2q$ در $x = L$ ثابت شده‌اند. در چه نقطه‌ای غیر از بینهایت دور یک پروتون می‌توان قرار داده شود بطوریکه که در تعادل باشد. تعادل پایدار است یا ناپایدار است؟

در نقاط تعادل برآیند نیروهای وارد بر پروتون برابر صفر است،

$$\sum F = 0$$

در $0 < x < L$ هر دو نیرو در یک جهت قرار دارند. بنابراین برآیند نیروها صفر نخواهد شد.



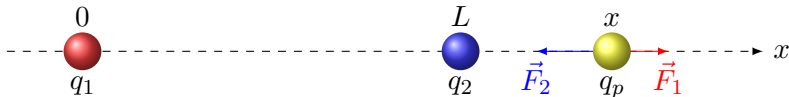
در $x < 0$ اگرچه نیروها در خلاف جهت هستند اما بزرگی نیروی F_1 همواره بزرگتر از F_2 می‌باشد، بنابراین برآیند نیروها صفر نخواهد شد.



قانون کولن

مسئله-۴:

در $x > L$ نیروها در خلاف جهت هستند.



$$\sum \vec{F} = \hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_p}{x^2} - \hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_p}{(x-L)^2} = \hat{i} \frac{2qq_p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{(x-L)^2} \right)$$

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{4}{x^2} - \frac{1}{(x-L)^2} = 0$$

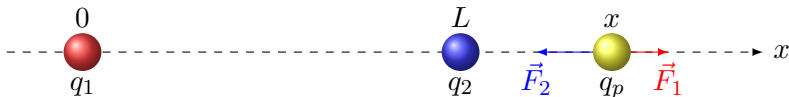
غیرقابل قبول چون جواب در بازه‌ی 0 و L قرار دارد : $x = 2L/3$ ، نقطه تعادل : $x = 2L$

$$0 < \left. \frac{dF}{dx} \right|_{\text{نقطه تعادل}} \text{ : نقطه تعادل ناپایدار} \quad , \quad \left. \frac{dF}{dx} \right|_{\text{نقطه تعادل}} < 0 \text{ : نقطه تعادل پایدار}$$

قانون کولن

مسئله-۴:

در $x > L$ نیروها در خلاف جهت هستند.

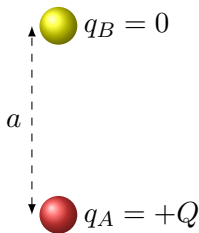


$$F(x) = \frac{2qq_p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{(x-L)^2} \right), \quad x = 2L : \text{نقطه تعادل}$$

$\frac{dF}{dx} \Big|_{\text{نقطه تعادل}} < 0$, نقطه تعادل پایدار : $\frac{dF}{dx} \Big|_{\text{نقطه تعادل}} > 0$, نقطه تعادل ناپایدار

$$\frac{dF(x)}{dx} \Big|_{x=2L} = \frac{2qq_p}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{8}{x^3} + \frac{2}{(x-L)^3} \right) \Big|_{x=2L} = \frac{2qq_p}{4\pi\epsilon_0 L^3} > 0 : \text{تعادل ناپایدار}$$

مسئله-۵: دو کره‌ی رسانای مشابه A و B از نظر الکتریکی منزوی بوده و در فاصله‌ی مرکز به مرکز a از هم قرار دارند. فاصله‌ی کره‌ها در مقایسه با کره‌ها بزرگ است. کره‌ی A دارای بار مثبت $+Q$ است و کره‌ی B از نظر الکتریکی خنثی است. در ابتدا هیچ نیروی الکترواستاتیکی بین دو کره وجود ندارد. الف) فرض کنید کره‌ها برای چند لحظه توسط سیمی نازک به هم وصل می‌شوند. سیم به حد کافی نازک است که بار کل روی آن ناچیز است. پس از جدا کردن سیم نیروی الکترواستاتیکی بین کره‌ها چقدر است؟ ب) حالا فرض کنید کره‌ی A بطور لحظه‌ای به زمین وصل شود و سپس اتصال برداشته شود. نیروی الکترواستاتیکی بین کره‌ها چقدر است؟



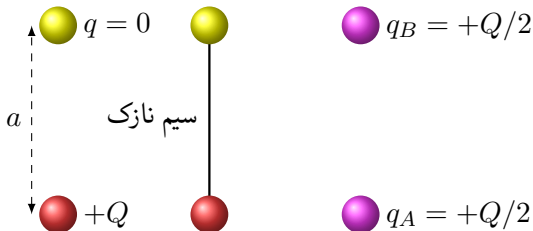
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2}$$

بزرگی نیرو الکترواستاتیک :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0 \times Q}{a^2} = 0$$

مسئله-۵:

با توجه به اینکه کره‌ها یکسان اند، وقتی با سیم کره‌ها را به یکدیگر متصل می‌کنیم، بار $+Q$ نهایتاً بطور یکسان روی کره‌ها پخش می‌شود.



$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2}$$

بزرگی نیرو الکترواستاتیک :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Q/2)(Q/2)}{a^2} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}$$

قانون کولن

مسئله-۵:

وقتی کره‌ی A با سیم به زمین وصل می‌شود، بار $-Q/2$ از زمین به کره منتقل می‌شود و کره نهایتاً تخلیه و خنثی می‌شود.

$$\text{●} +Q/2 \quad \text{●} +Q/2$$

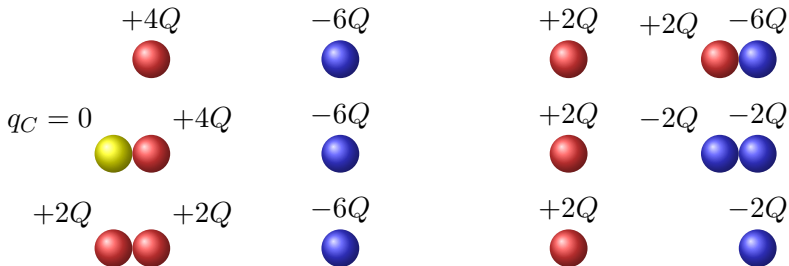


$$\text{بزرگی نیرو الکترواستاتیک} : F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2}$$

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{0 \times (Q/2)}{a^2} = 0$$

قانون کولن

مسئله-۵: سه کره‌ی رسانا یکسان در ابتدا دارای بارهای، کره‌ی A ، $4Q$ کره‌ی B ، $-6Q$ و کره‌ی C ، 0 هستند. کره‌های A و B در جای خود ثابت هستند و فاصله‌ی مراکز آنها خیلی بزرگتر از شعاع شان می‌باشد. دو آزمایش انجام می‌دهیم. در آزمایش ۱: کره‌ی C با کره‌ی A تماس داده می‌شود. سپس جدا شده و با کره‌ی B تماس داده می‌شود و سپس دور می‌شود. در آزمایش ۲: با همان شرایط اولیه شروع می‌شود و مراحل بالا بصورت معکوس تکرار می‌شود، ابتدا کره‌ی C با کره‌ی B تماس داده می‌شود. سپس جدا شده و با کره‌ی A تماس داده می‌شود و سپس دور می‌شود. نسبت نیروهای الکترواستاتیک بین کره‌ی A و B در آزمایش ۲ به آزمایش ۱ را بدست آورید. آزمایش ۱:



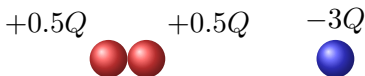
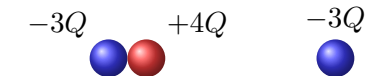
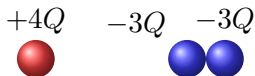
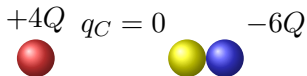
قانون کولن

مسئله-۵:

آزمایش ۱:



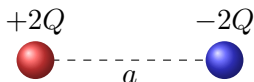
آزمایش ۲:



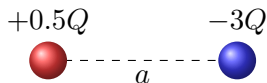
قانون کولن

مسئله-۵:

آزمایش ۱:



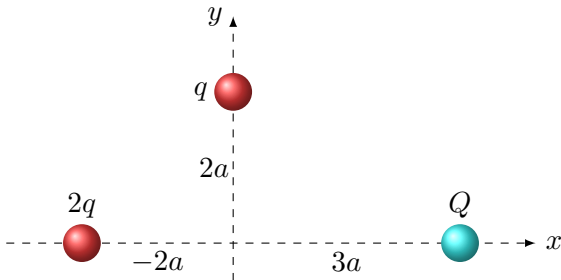
آزمایش ۲:

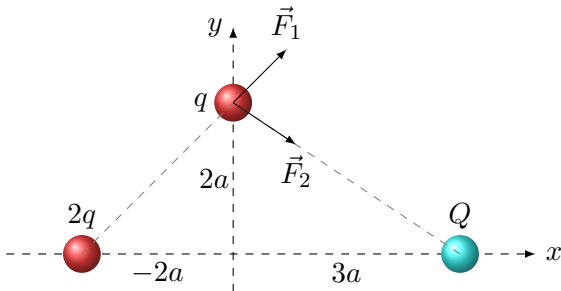


$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q^2}{a^2} \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{1.5}{4} = \frac{3}{8}$$
$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1.5Q^2}{a^2}$$

قانون کولن

مسئله-۶: دو ذره بر روی محور x ثابت شده‌اند. ذره‌ی ۱ با بار $2q$ در $x = -2a$ و ذره‌ی ۲ با بار Q در $x = 3a$ قرار دارند. ذره‌ی ۳ با بار q بر روی محور $y = 2a$ از حال سکون رها می‌شود. اگر شتاب اولیه‌ی ذره‌ی ۳ در جهت مثبت محور x باشد، مقدار و علامت Q را بر حسب a و q بدست آورید.





$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{8a^2} (\hat{i} \cos 45 + \hat{j} \sin 45) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \left(\hat{i} \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{j} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\text{بار } Q \text{ را مخالف بار } q \text{ در نظر می‌گیریم: } \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{13a^2} \left(\hat{i} \frac{3}{\sqrt{13}} - \hat{j} \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$$

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \left(\hat{i} \frac{\sqrt{2}}{2} + \hat{j} \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{13a^2} \left(\hat{i} \frac{3}{\sqrt{13}} - \hat{j} \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$$

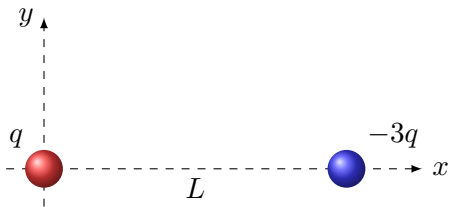
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$F_y = 0$: چون شتاب اولیه در امتداد محور x است

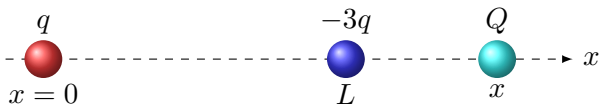
$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{13a^2} \frac{2}{\sqrt{13}} = 0$$

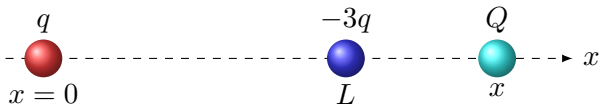
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \left(\frac{q\sqrt{2}}{4 \cdot 2} - \frac{Q}{13} \frac{2}{\sqrt{13}} \right) = 0 \Rightarrow Q = \frac{13\sqrt{26}}{16} q \quad \text{با علامت منفی}$$

مسئله-۷: مطابق شکل ذره‌ای با بار q و ذره‌ی ۲ با بار $-3q$ در فاصله‌ی L از هم قرار دارند. اگر بخواهیم ذره‌ای با بار Q را طوری قرار دهیم که نیروی الکترواستاتیکی وارد بر آن از طرف ذرات ۱ و ۲ برابر صفر شود، الف) مختصه‌ی x و ب) مختصه‌ی y ذره‌ی ۳ را بدست آورید.



مطابق مسئله-۴، حالت تعادل فقط وقتی ذره بر روی محور x قرار دارد اتفاق می‌افتد (یعنی $y = 0$). با توجه به اینکه بارها غیر همنام هستند، نقطه‌ی تعادل در فاصله‌ی بین دو بار نخواهد بود.





اگر $Q > 0$ باشد (لازم به اشاره است برای $Q < 0$ سمت راست رابطه پایین در یک منفی ضرب می‌شود)

$$\vec{F} = \hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{x^2} - \hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3qQ}{(L-x)^2}$$

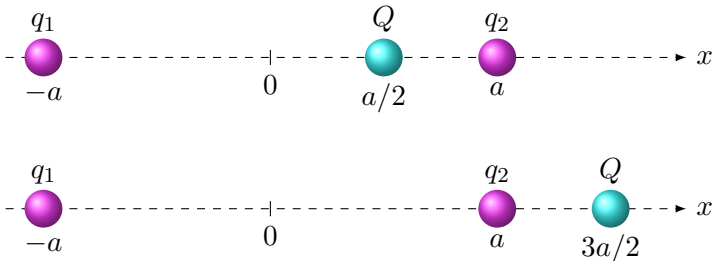
$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} - \frac{3}{(L-x)^2} = 0 \Rightarrow \pm\sqrt{3}x = L-x$$

غیرقابل قبول چون جواب در بازه‌ی 0 و L قرار دارد : $x_+ = \frac{L}{\sqrt{3}+1}$

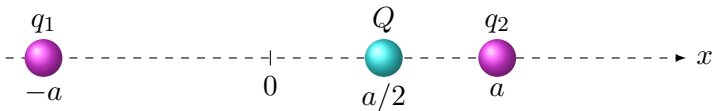
نقطه تعادل : $x_- = -\frac{L}{\sqrt{3}-1} < 0$

قانون کولن

مسئله-۸: سه ذره بر روی محور x قرار دارند. ذره ۱ با بار q_1 در $x = -a$ و ذره ۲ با بار q_2 در $x = +a$ قرار دارند. اگر نیروی برآیند وارد بر ذره ۳ با بار $+Q$ واقع در الف) $x = a/2$ و ب) $x = 3a/2$ برابر صفر باشد نسبت q_1/q_2 را بدست آورید.
< برای نقطه‌ی تعادل $x = a/2$ بارهای q_1 و q_2 باید همنام باشند.



< برای نقطه‌ی تعادل $x = 3a/2$ بارهای q_1 و q_2 باید غیر همنام باشند.



اگر $q_1, q_2 > 0$ باشد (لازم به اشاره است برای $q_1, q_2 < 0$ سمت راست رابطه پایین در یک منفی ضرب می شود).

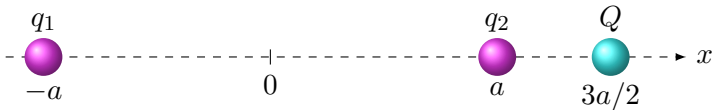
$$\vec{F} = \hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 Q}{(3a/2)^2} - \hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 Q}{(a/2)^2} = 0$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a^2} \left(\frac{q_1}{9} - q_2 \right) = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = 9$$

قانون کولن

مسئله-۸:

(ب)



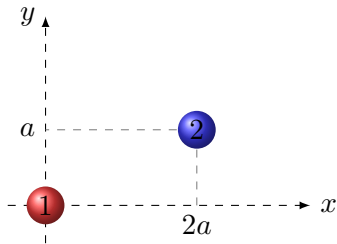
اگر $q_1 > 0$ و $q_2 < 0$ باشد (لازم به اشاره است برای $q_1 < 0$ و $q_2 > 0$ سمت راست رابطه پایین در یک منفی ضرب می‌شود).

$$\vec{F} = \hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 Q}{(5a/2)^2} - \hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 Q}{(a/2)^2} = 0$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4Q}{a^2} \left(\frac{q_1}{25} - q_2 \right) = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = 25 \quad \text{با علامت منفی}$$

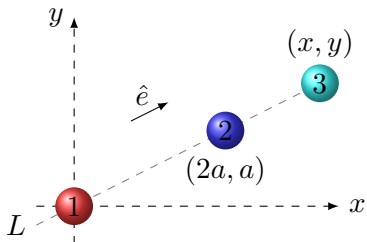
قانون کولن

مسئله-۹: بارها و مختصات دو ذره‌ی باردار ثابت در صفحه‌ی xy بصورت $x_1 = 0, q_1 = +2q$ و $y_1 = 0, q_2 = -q, x_2 = 2a, y_2 = a$ است. ذره‌ی سوم با بار $q_3 = +2q$ را در چه مختصه‌ی x و مختصه‌ی y باید قرار داد تا نیروی الکترواستاتیک وارد بر آن از طرف ذرات ۱ و ۲ برابر صفر شود؟



مسئله-۹:

ذره سوم باید در امتداد خط واصل بین دو ذره قرار داشته باشد. با توجه به اینکه بارهای q_1 و q_2 غیر همنام هستند، بار q_3 بین دو ذره q_1 و q_2 قرار نمی‌گیرد.



$$L \text{ معادله‌ی خط } : y = \frac{1}{2}x$$

$$\vec{F} = \hat{e} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qQ}{x^2 + y^2} - \hat{e} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{(x - 2a)^2 + (y - a)^2}$$

$$L \text{ معادله‌ی خط } : y = \frac{1}{2}x$$

$$\vec{F} = \hat{e} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{1}{(x - 2a)^2 + (y - a)^2} \right)$$

$$\vec{F} = \hat{e} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{x^2 + x^2/4} - \frac{1}{(x - 2a)^2 + (x/2 - a)^2} \right)$$

$$\vec{F} = 0$$

$$2[(x - 2a)^2 + (x/2 - a)^2] = 5x^2/4$$

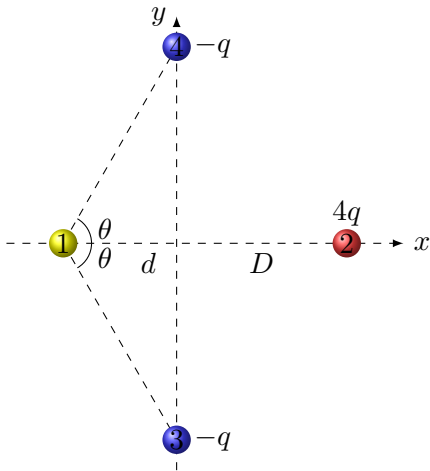
$$x^2 - 8x + 8 = 0 \Rightarrow x_{\pm} = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

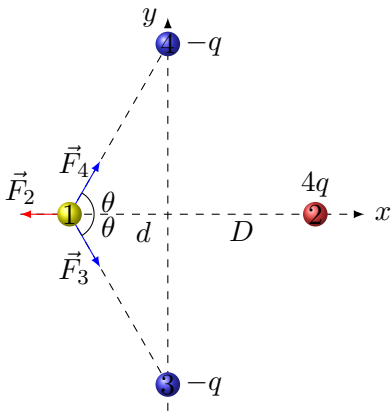
غیرقابل قبول چون x در بازه‌ی 0 و 2 قرار دارد : $x_- = 4 - 2\sqrt{2} < 2$

نقطه تعادل : $(x_+, x_+/2) = (4 + 2\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ $x_+ = 4 + 2\sqrt{2}$

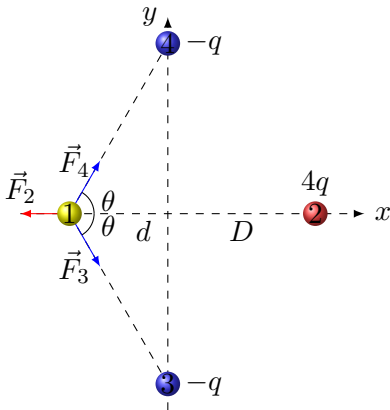
قانون کولن

مسئله-۱۰: شکل زیر پیکربندی چهار ذره را نشان می‌دهد که در آن $\theta = 60^\circ$ است. ذره ۲ دارای بار $+4q$ و ذره ۳ و ۴ دارای بارهای $-q$ هستند. فاصله ی D بین مبدا و ذره ۲ چقدر باشد تا نیروی الکترواستاتیکی برآیند وارد بر ذره ۱ از طرف بقیه ی ذرات برابر صفر باشد.





$$\vec{F}_2 = -\hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1q}{(D+d)^2}$$



$$r_{13} = r_{14} = d / \cos 60 = 2d$$

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{4d^2} (\hat{i} \cos \theta - \hat{j} \sin \theta), \quad \vec{F}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q}{4d^2} (\hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta)$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\vec{F}_2 = -\hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q_1q}{(D+d)^2}$$

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q}{4d^2} (\hat{i}(1/2) - \hat{j}(\sqrt{3}/2))$$

$$\vec{F}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q}{4d^2} (\hat{i}(1/2) + \hat{j}(\sqrt{3}/2))$$

۱ نیروی خالص وارد بر ذره ۱ : $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{4}{(D+d)^2} + \frac{1}{4d^2} \right) \hat{i} = 0$$

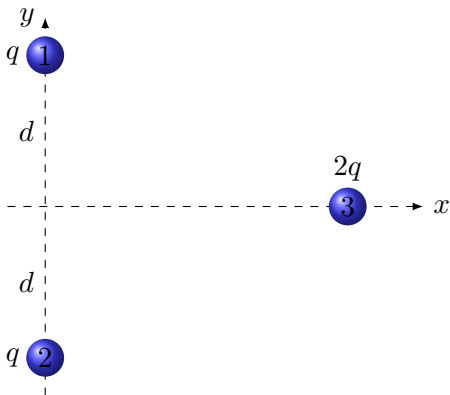
$$D + d = \pm 4d$$

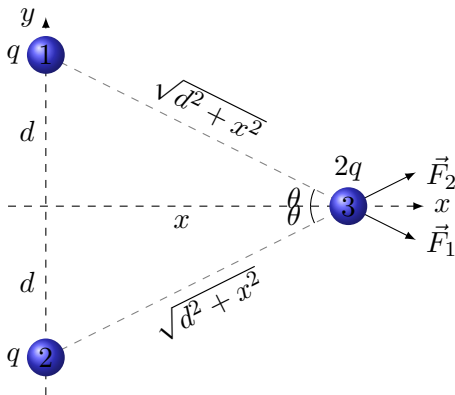
غیرقابل قبول $D_- = -5d$

$$D_+ = 3d$$

قانون کولن

مسئله-۱۱: مطابق شکل ذره‌ی ۱ و ۲ دارای بارهای $q_1 = q_2 = q$ هستند و روی محور y به فاصله‌ی d از مبدا قرار گرفته‌اند. ذره‌ی ۳ با بار $q_3 = 2q$ به آرامی از $x = 0$ به $x = 10d$ حرکت می‌دهیم. در کدام مقادیر x اندازه نیروی الکترواستاتیکی وارد بر ذره‌ی سوم از طرف دو ذره‌ی دیگر (الف) کمینه و (ب) بیشینه می‌شود؟





$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}, \quad \sin \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{d^2 + x^2} (\hat{i} \cos \theta - \hat{j} \sin \theta), \quad \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{d^2 + x^2} (\hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{d^2 + x^2}}, \quad \sin \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{d^2 + x^2} (\hat{i} \cos \theta - \hat{j} \sin \theta), \quad \vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q^2}{d^2 + x^2} (\hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F} = \hat{i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4q^2}{d^2 + x^2} \cos \theta = \hat{i} \frac{q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{(d^2 + x^2)^{3/2}}$$

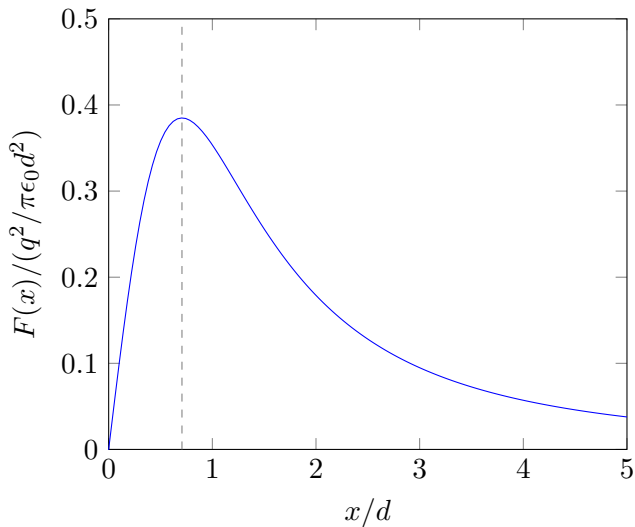
$$F(x) = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0} \frac{x}{(d^2 + x^2)^{3/2}}$$

نقطه تعادل،

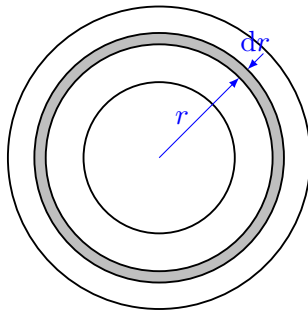
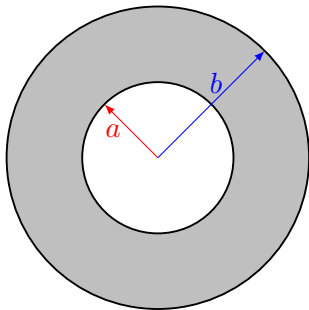
$$F(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

جهت بررسی تابع نیروی از تابع $F(x)$ نسبت به x مشتق گرفته می‌شود،

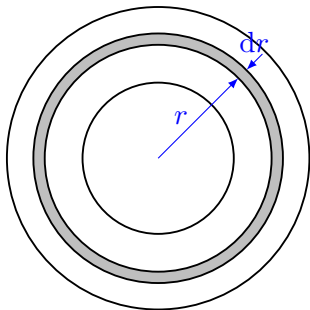
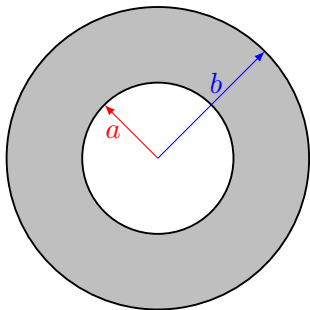
$$\frac{d}{dx} F(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} d$$



مسئله-۱۲: یک پوسته کروی نارسانا به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای بار الکتریکی که بطور غیر یکنواخت داخل حجم در بین شعاع داخلی و خارجی توزیع شده است. چگالی حجمی بار ρ برای این پوسته بصورت $\rho = c/r$ است. r فاصله از مرکز پوسته و c یک کمیت ثابت است. کل بار پوسته را بدست آورید.



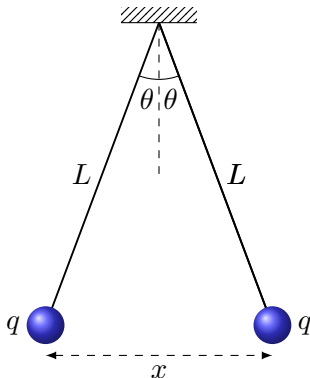
$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV = \frac{c}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi c r dr$$

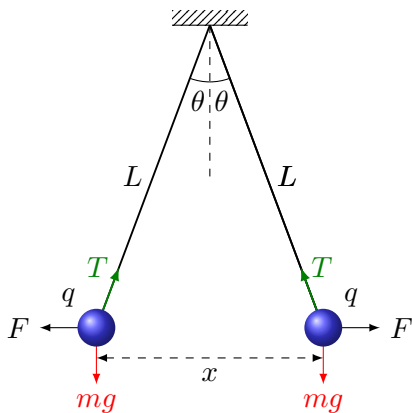


$$\rho = \frac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho dV = \frac{c}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi c r dr$$

$$\int dq = 4\pi c \int_a^b r dr \Rightarrow q = 4\pi c \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_a^b \Rightarrow q = 2\pi c (b^2 - a^2)$$

مسئله-۱۳: دو گوی رسانای کوچک با جرم یکسان m و بار یکسان q از نخ‌های نارسانا بطول L آویزان شده‌اند. فرض کنید که θ آنقدر کوچک باشد که بتوان $\tan \theta$ را تقریباً برابر با $\sin \theta$ قرار داد. نشان دهید $x = (q^2 L / 2\pi\epsilon_0 m g)^{1/3}$ است.





$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T \sin \theta = F$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T \cos \theta = mg$$

$$\tan \theta = \frac{F}{mg}$$

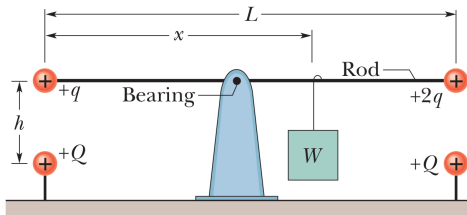
$$\tan \theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2 mg}$$

برای θ های کوچک

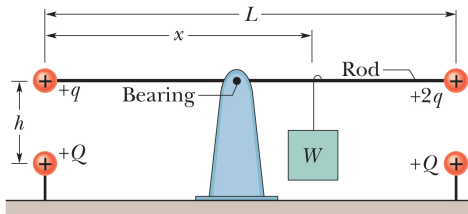
$$\tan \theta \simeq \sin \theta = \frac{x}{2L}$$

$$\frac{x}{2L} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x^2 mg} \Rightarrow x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}$$

مسئله-۱۴: شکل زیر، میله‌ای سبک و نارسانای بدون جرم و بلندی بطول L را نشان می‌دهد که در مرکز لولا شده و با قطعه‌ای به وزن W در فاصله‌ی x از انتهای سمت چپ به تعادل رسیده است. در انتهای چپ و راست میله، کره‌هایی رسانای کوچکی متصل شده است که بار آنها به ترتیب q و $2q$ است. در فاصله‌ی h زیر هر یک، کره‌ای با بار مثبت Q ثابت است. الف) فاصله‌ی x را طوری بدست آورید که میله بصورت افقی در حال تعادل باشد. ب) مقدار h چقدر باشد تا هیچ نیروی عمودی بر پایه‌ی میله وارد نشود و میله افقی در حال تعادل باشد.



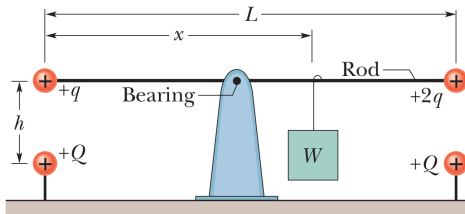
دستگاه در حال تعادل قرار دارد. بنابراین گشتاور نیروی کل حول لولا برابر صفر است و همچنین برآیند نیروها در امتداد قائم نیز برابر صفر است.



$$\sum \tau_{\text{لولا}} = 0 \Rightarrow - \left(x - \frac{L}{2} \right) W - \frac{L}{2} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2} + \frac{L}{2} \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2} = 0$$

$$\left(x - \frac{L}{2} \right) W = - \frac{L}{2} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2} + \frac{L}{2} \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2} = \frac{L}{2} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2}$$

$$x = \frac{L}{2} + \frac{L}{2} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2 W} = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2 W} \right)$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -W + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2} + \frac{2qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2} = 0$$

$$W = \frac{3qQ}{4\pi\epsilon_0 h^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{3qQ}{4\pi\epsilon_0 W}}$$