فیزیک ۲
میدان‌های الکتریکی

محمدرضا مظفری

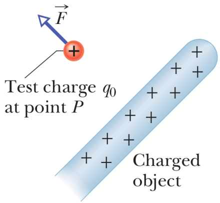
گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

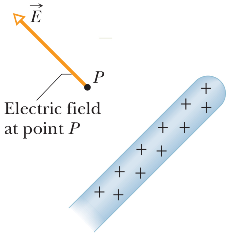
بهمن ۱۴۰۰

میدان‌های الکتریکی

- میدان الکتریکی یک میدان برداری است که شامل جهت و اندازه می‌باشد.
- میدان الکتریکی مسئول انتقال اطلاعات نیروی الکترواستاتیک می‌باشد.
- میدان الکتریکی در هر نقطه پرامون جسم باردار تعریف کرد.
- برای بدست آوردن میدان الکتریکی، ابتدا بار مثبت کوچک q_0 (که بار آزمون نامیده می‌شود) را در نقطه‌ی مورد نظر p قرار می‌دهیم. سپس نیروی الکترواستاتیک $\vec{F}$ را که بر بار آزمون اثر می کند را اندازه‌گیری می کنیم. نهایتا میدان الکتریکی $\vec{E}$ حاصل از جسم باردار در نقطه‌ی p را چنین تعریف می‌کنیم،

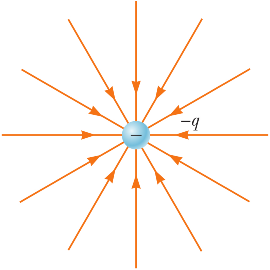
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$





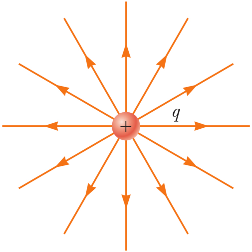
میدان‌های الکتریکی

- واحد میدان الکتریکی در دستگاه SI برابر N/C است.
- می‌توان بار آزمون را به نقاط مختلفی منتقل کرد تا میدان الکتریکی آن نقاط را اندازه‌گیری کرد. بنابراین می‌توان توزیع میدان الکتریکی ایجاد شده توسط باردار در فضای اطرافش اندازه‌گیری کنیم.
- اگر بار آزمون در هر نقطه نزدیک کره‌ای قرار گیرد که بطور یکنواخت با بار **منفی** پوشیده شده است. نیروی الکترواستاتیک وارد بر بار آزمون در هر نقطه در اطراف کره بصورت شعاعی بطرف **داخل** کره است. آنرا **خطوط میدان الکتریکی** ناشی از بار **منفی** می‌نامند.



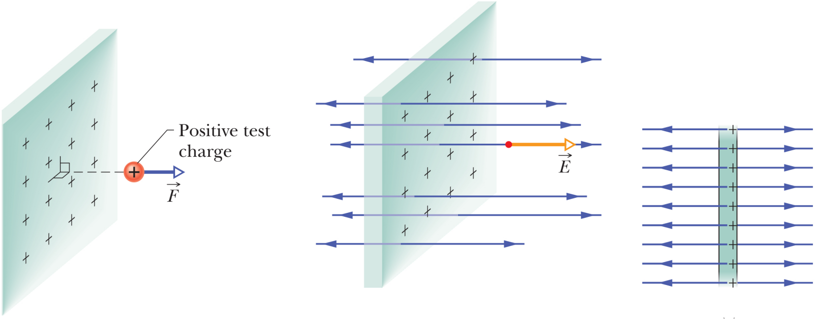
میدان‌های الکتریکی

- واحد میدان الکتریکی در دستگاه SI برابر N/C است.
- می‌توان بار آزمون را به نقاط مختلفی منتقل کرد تا میدان الکتریکی آن نقاط را اندازه‌گیری کرد. بنابراین می‌توان توزیع میدان الکتریکی ایجاد شده توسط باردار در فضای اطرافش اندازه‌گیری کنیم.
- اگر بار آزمون در هر نقطه نزدیک کره‌ای قرار گیرد که بطور یکنواخت با بار **مثبت** پوشیده شده است. نیروی الکترواستاتیک وارد بر بار آزمون در هر نقطه در اطراف کره بصورت شعاعی بطرف **خارج** کره است. آنرا **خطوط میدان الکتریکی** ناشی از بار **مثبت** می‌نامند.



میدان‌های الکتریکی

◂ خطوط میدان در نزدیکی یک صفحه‌ی نارسانا بی‌نهایت بزرگ با توزیع بار یکنواخت

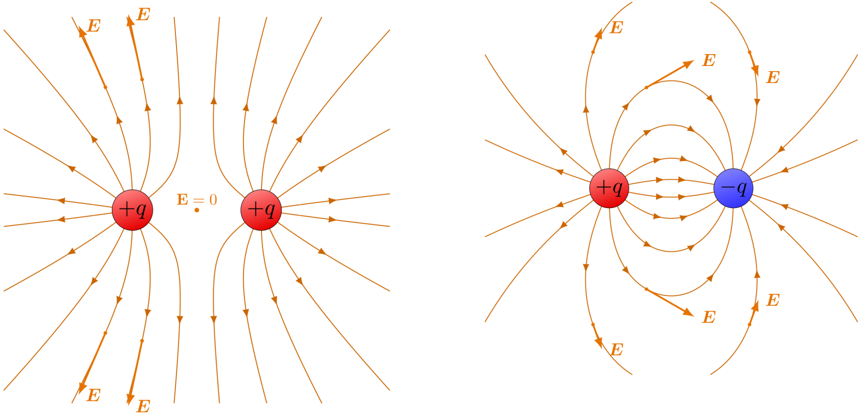


◂ چون بار روی صفحه یکنواخت است، خطوط میدان نیز یکنواخت هستند که به چنین میدانی، **میدان الکتریکی یکنواخت** می‌گویند. یعنی در هر نقطه میدان الکتریکی دارای اندازه و جهت یکسانی است.

◂ لازم به اشاره است که صفحه‌ی بزرگ نامتناهی وجود ندارد. این موضوع روشی برای بیان اندازه میدان در نقاط نزدیک به صفحه نسبت به اندازه‌ی صفحه است. در صفحات متناهی همواره اثرات لبه وجود دارد.

میدان‌های الکتریکی

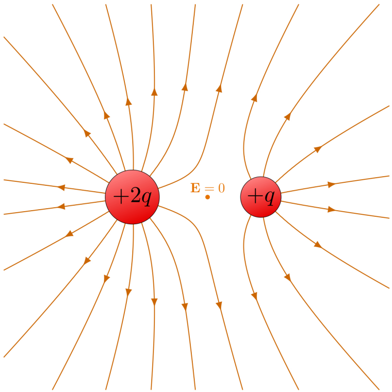
- خطوط میدان ناشی از دو بار همنام و دوبار غیر همنام در نزدیک یکدیگر

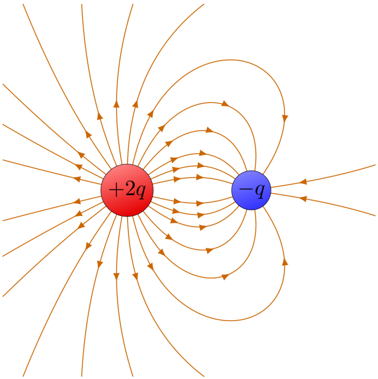


- فاصله کم بین خطوط به معنی اندازه میدان بزرگتر است.
- برای تجسم سه‌بعدی خطوط میدان در اطراف ذرات می‌توان شکلهای بالا را حول محور تقارنی بچرخانید که خط افقی عبوری از هر دو ذره باشد.

میدان‌های الکتریکی

- خطوط میدان ناشی از دو بار همنام و دوبار غیر همنام در نزدیک یکدیگر وقتی بارها اندازه‌های یکسانی ندارند





میدان‌های الکتریکی

میدان الکتریکی ذره‌ی باردار

بزرگی میدان الکتریکی یک بار نقطه‌ای q در هر نقطه به فاصله‌ی r برابر است با

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

در رابطه‌ی بالا، q مستقل از علامت است. برای qهای مثبت جهت میدان الکتریکی بطرف خارج ذره است و برای qهای منفی جهت میدان بطرف داخل ذره است.

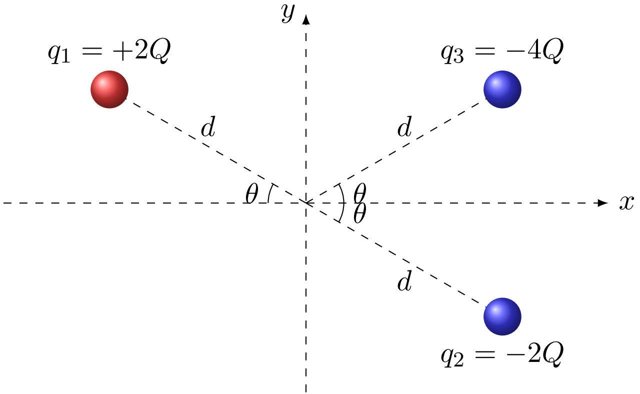
- بزرگی نیروی وارد بر ذره‌ی آزمون بوسیله رابطه‌ی زیر داده می‌شود،

$$F = Eq_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}$$

اینکه بار آزمون جذب یا دفع می‌شود به علامت بار q بستگی دارد.

- اگر بیش از یک ذره‌ی باردار، میدان الکتریکی را در نقطه‌ای ایجاد کنند، میدان الکتریکی برایند برابر جمع برداری تک تک میدانهای الکتریکی است. **میدان الکتریکی از اصل برهم‌نهی پیروی می‌کند.**

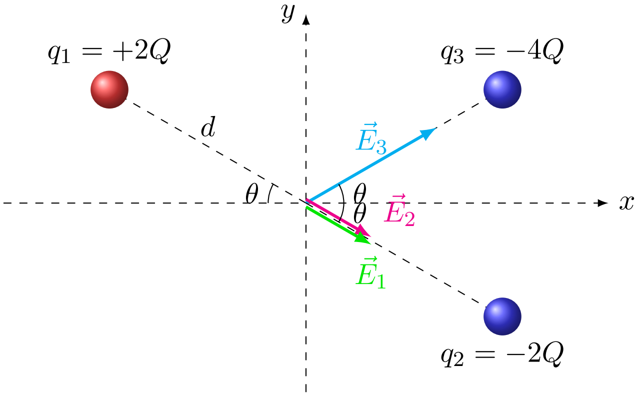
مسئله–۱: سه ذره با بارهای $q_1 = +2Q$، $q_2 = -2Q$ و $q_3 = -4Q$ را نشان می‌دهد که هریک به فاصله‌ی d از مبدا قرار دارند. میدان الکتریکی برآیند $\vec{E}$ ایجاد شده در مبدا چقدر است؟



$$E_2 = E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2Q}{d^2}, \quad E_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4Q}{d^2} = 2E_1$$

میدان‌های الکتریکی

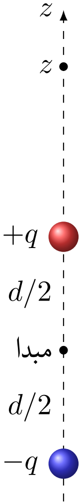
مسئله–۱:



$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1 = E_1(\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j}), \quad \vec{E}_3 = 2E_1(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j})$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 4E_1\cos\theta\hat{i} = \frac{2Q}{\pi\epsilon_0 d^2}\cos\theta\hat{i}$$

میدان الکتریکی دو قطبی الکتریکی



$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(z-d/2)^2} - \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(z+d/2)^2}$$

$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(z-d/2)^2} - \frac{1}{(z+d/2)^2}\right]$$

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + mx + \cdots\,, \qquad x \ll 1}$$

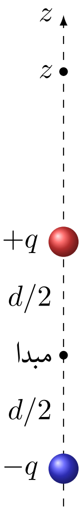
$$\frac{1}{(z-d/2)^2} = \frac{1}{z^2}[1-(d/2z)]^{-2}$$

$$d/2z \ll 1$$

$$[1-(d/2z)^2]^{-2} = 1 + (d/z) + \cdots$$

$$\frac{1}{(z-d/2)^2} = \frac{1}{z^2}[1 + (d/z) + \cdots]$$

میدان الکتریکی دو قطبی الکتریکی



$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(z-d/2)^2} - \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(z+d/2)^2}$$

$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(z-d/2)^2} - \frac{1}{(z+d/2)^2}\right]$$

$$\boxed{(1+x)^m = 1 + mx + \cdots, \quad x \ll 1}$$

$$\frac{1}{(z+d/2)^2} = \frac{1}{z^2}[1+(d/2z)]^{-2}$$

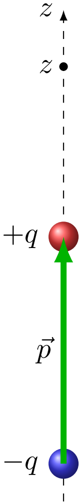
$$d/2z \ll 1$$

$$[1+(d/2z)^2]^{-2} = 1 - (d/z) + \cdots$$

$$\frac{1}{(z+d/2)^2} = \frac{1}{z^2}[1-(d/z)+\cdots]$$

میدان‌های الکتریکی

میدان الکتریکی دو قطبی الکتریکی



$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(z-d/2)^2} - \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(z+d/2)^2}$$

$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(z-d/2)^2} - \frac{1}{(z+d/2)^2}\right]$$

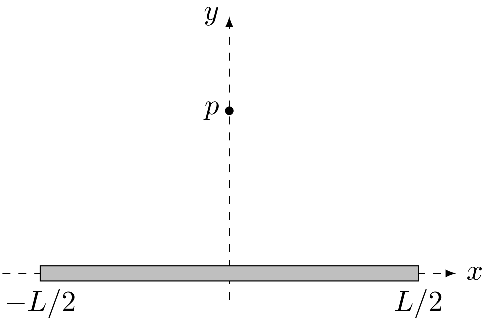
$$\frac{1}{(z-d/2)^2} = \frac{1}{z^2}[1+(d/z)+\cdots]$$

$$\frac{1}{(z+d/2)^2} = \frac{1}{z^2}[1-(d/z)+\cdots]$$

$\vec{E}_p = \hat{k}\dfrac{qd}{2\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{z^3},\quad \vec{p} = \hat{k}qd$: گشتاور دو قطبی الکتریکی

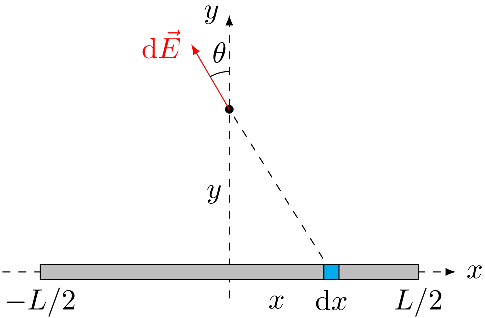
$$\vec{E}_p = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}}{z^3}$$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت میله‌ای بطول L و بار q



$$\lambda = \frac{q}{L},\ \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}q = \frac{q}{L}\mathrm{d}x, \quad -L/2 \leq x \leq L/2$$

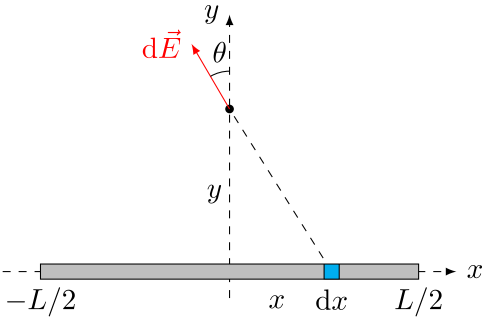
میدان الکتریکی خط بار یکنواخت میله‌ای بطول L و بار q



$$\lambda = \frac{q}{L},\ \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}q = \frac{q}{L}\mathrm{d}x, \quad -L/2 \leq x \leq L/2$$

بزرگی میدان الکتریکی : $\mathrm{d}E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\mathrm{d}q}{x^2+y^2} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 L}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت میله‌ای بطول L و بار q



$$\mathrm{d}E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}, \qquad -L/2 \leq x \leq L/2$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}E(-\hat{\imath}\sin\theta + \hat{\jmath}\cos\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\left(-\hat{\imath}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \hat{\jmath}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت میله‌ای بطول L و بار q

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\left(-\hat{i}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \hat{j}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\vec{E} = -\hat{i}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \hat{j}\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

انتگرال تابع فرد در یک بازه متقارن برابر صفر است : $\int_{-L/2}^{L/2}\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

$$\vec{E} = \hat{j}\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}},$ تغییر متغیر : $x = y\tan\theta \Rightarrow \mathrm{d}x = y(1+\tan^2\theta)\mathrm{d}\theta$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2}\int\frac{(1+\tan^2\theta)}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{y^2}\int\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{y^2}\sin\theta$$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت میله‌ای بطول L و بار q

$$\vec{E} = \hat{j}\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

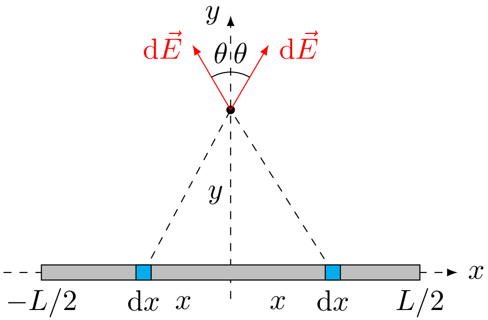
$$x = y\tan\theta, \quad \sin\theta = x/\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{L}{y^2}\frac{1}{\sqrt{(L/2)^2+y^2}}$$

$$\vec{E} = \hat{j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y}\frac{1}{\sqrt{(L/2)^2+y^2}}$$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت میله‌ای بطول L و بار q (ساده سازی حل با روش تقارن)



$$\mathrm{d}\vec{E} = \hat{j}\mathrm{d}E_y$$

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\theta$$

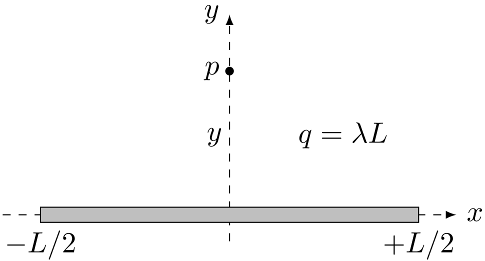
$$\mathrm{d}E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$E_y = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 L}\int_{-L/2}^{L/2}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L y}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-L/2}^{L/2}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y}\frac{1}{\sqrt{(L/2)^2+y^2}} \Rightarrow \vec{E} = \hat{j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{y}\frac{1}{\sqrt{(L/2)^2+y^2}}$$

اگر طول میله نامحدود باشد، یعنی $L/y \to \infty$ یا $y/L \to 0$

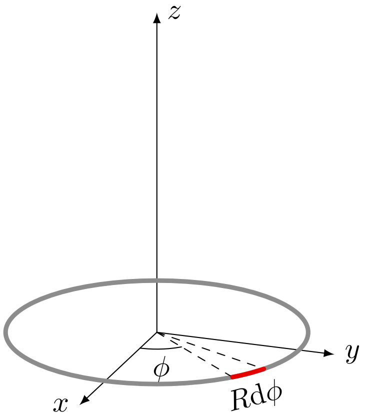


$$\lim_{L/y \to \infty} E_y = \lim_{L/y \to \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{y} \frac{1}{\sqrt{(L/2)^2 + y^2}}$$

$$\lim_{L/y \to \infty} E_y = \lim_{L/y \to \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} \frac{L/y}{\sqrt{1/4(L/y)^2 + 1}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y} 2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y}$$

$$\boxed{\text{میدان الکتریکی در نزدیکی میله‌ای نامحدود} \quad : \quad \lim_{L/y \to \infty} E_y = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{y}}$$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q

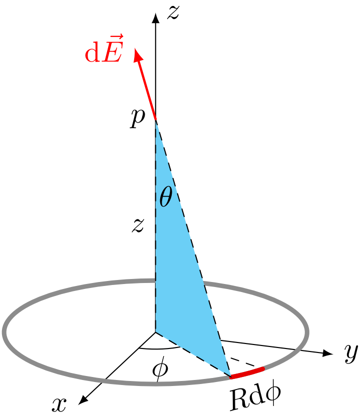


$$\lambda = \frac{q}{2\pi R} \qquad \mathrm{d}\ell = R\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}\ell$$

$$\mathrm{d}q = \frac{q}{2\pi}\mathrm{d}\phi, \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q



$$\mathrm{d}q = \frac{q}{2\pi}\mathrm{d}\phi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

بزرگی میدان الکتریکی بار $\mathrm{d}q$ در روی محور z

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2+z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q/2\pi)\mathrm{d}\phi}{R^2+z^2}$$

$$\sin\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}E(-\hat{i}\cos\phi\sin\theta - \hat{j}\sin\phi\sin\theta + \hat{k}\cos\theta)$$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q/2\pi)\mathrm{d}\phi}{R^2+z^2}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

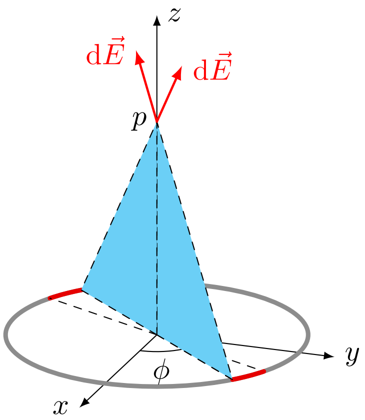
$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q/2\pi)\mathrm{d}\phi}{R^2+z^2}\left(-\hat{i}\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\cos\phi - \hat{j}\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\sin\phi + \hat{k}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

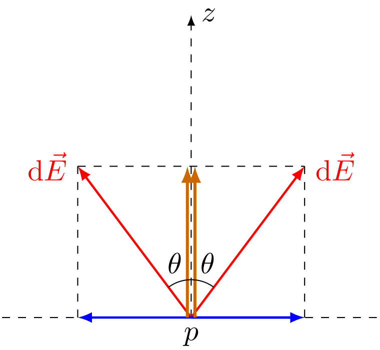
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q/2\pi)}{(R^2+z^2)^{3/2}}\left(-\hat{i}R\int_0^{2\pi}\cos\phi\mathrm{d}\phi - \hat{j}R\int_0^{2\pi}\sin\phi\mathrm{d}\phi + \hat{k}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\cos\phi\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\sin\phi\mathrm{d}\phi = 0, \quad \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = 2\pi$$

$$\vec{E} = \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q (ساده سازی حل با روش تقارن)





$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\cos\theta$$

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q/2\pi)\mathrm{d}\phi}{R^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q (ساده سازی حل با روش تقارن)

$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\cos\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q/2\pi)\mathrm{d}\phi}{R^2+z^2}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

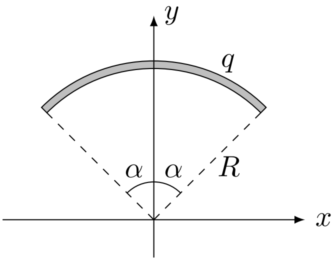
$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z(1/2\pi)}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi$$

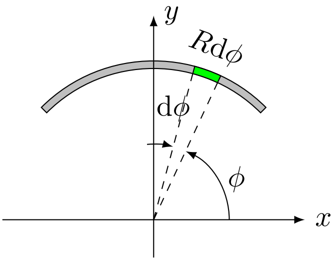
$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

میدان‌های الکتریکی

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت کمان دایره‌ای به شعاع R، زاویه‌ی 2α و بار q



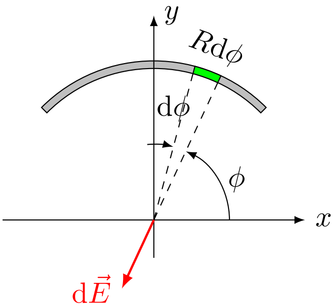


$$\lambda = \frac{q}{2\alpha R}, \quad \mathrm{d}\ell = R\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}\ell \Rightarrow \mathrm{d}q = \frac{q}{2\alpha}\mathrm{d}\phi, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2\alpha}\frac{\mathrm{d}\phi}{R^2}$$

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت کمان دایره‌ای به شعاع R، زاویه‌ی 2α و بار q



$$\frac{\pi}{2}-\alpha \le \phi \le \frac{\pi}{2}+\alpha$$

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2\alpha}\frac{\mathrm{d}\phi}{R^2}$$

$$\mathrm{d}\vec{E}=-\mathrm{d}E(\hat{i}\cos\phi+\hat{j}\sin\phi)$$

$$\vec{E}=-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2\alpha R^2}\left(\hat{i}\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha}\cos\phi\mathrm{d}\phi+\hat{j}\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha}\sin\phi\mathrm{d}\phi\right)$$

$$\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha}\cos\phi\mathrm{d}\phi=0,\qquad \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha}\sin\phi\mathrm{d}\phi=2\sin\alpha$$

میدان‌های الکتریکی

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت کمان دایره‌ای به شعاع R، زاویه‌ی 2α و بار q

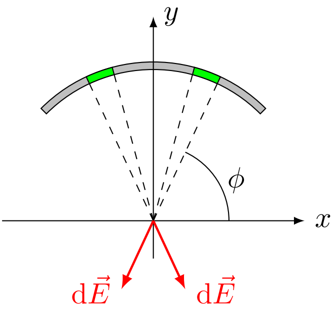
$$\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \cos\phi \mathrm{d}\phi = 0, \qquad \int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \sin\phi \mathrm{d}\phi = 2\sin\alpha$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{2\alpha R^2}\left(\hat{i}\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \cos\phi \mathrm{d}\phi + \hat{j}\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \sin\phi \mathrm{d}\phi\right)$$

$$\vec{E} = -\hat{j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q\sin\alpha}{\alpha R^2}$$

میدان‌های الکتریکی

میدان الکتریکی خط بار یکنواخت کمان دایره‌ای به شعاع R، زاویه‌ی 2α و بار q (ساده سازی حل به روش تقارن)



$$\frac{\pi}{2} - \alpha \le \phi \le \frac{\pi}{2} + \alpha$$

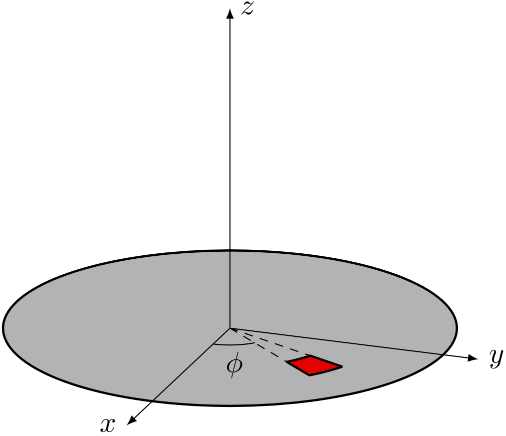
$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\alpha} \frac{\mathrm{d}\phi}{R^2}$$

$$\mathrm{d}E_y = -\mathrm{d}E \sin\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\alpha} \frac{\mathrm{d}\phi}{R^2} \sin\phi$$

$$\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \sin\phi \mathrm{d}\phi = 2\sin\alpha$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\sin\alpha}{\alpha R^2}$$

میدان الکتریکی قرص یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q



$$\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$$

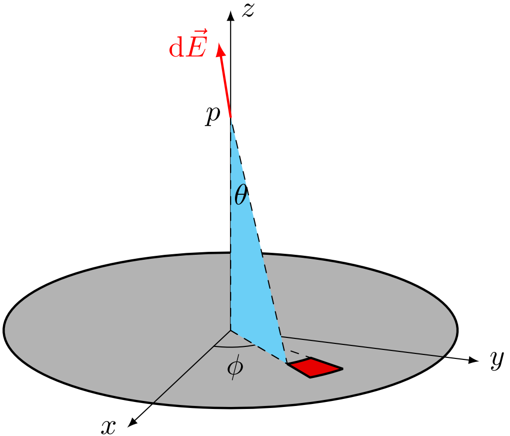
$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S$$

$$\mathrm{d}q = \frac{q}{\pi R^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

میدان الکتریکی قرص یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q



$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2+z^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\pi R^2}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi}{r^2+z^2}, \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

میدان الکتریکی قرص یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\pi R^2}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi}{r^2+z^2},\quad 0\leq r\leq R,\quad 0\leq\phi\leq 2\pi$$

$$\mathrm{d}\vec{E}=\mathrm{d}E(-\hat{i}\cos\phi\sin\theta-\hat{j}\sin\phi\sin\theta+\hat{k}\cos\theta)$$

$$\sin\theta=\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}},\quad \cos\theta=\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\pi R^2}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi}{r^2+z^2}\left(-\hat{i}\cos\phi\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}-\hat{j}\sin\phi\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}+\hat{k}\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right.$$

چون : $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\phi\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\sin\phi\mathrm{d}\phi=0$

$$\vec{E}=\hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qz}{\pi R^2}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

میدان الکتریکی قرص یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q

$$\vec{E} = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qz}{\pi R^2}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\right)\left(\int_0^{R}\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

$$\int\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}}, \quad r^2+z^2=u \Rightarrow 2e\mathrm{d}r=\mathrm{d}u$$

$$\int\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{2}\int u^{-3/2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(-3/2+1)}u^{-3/2+1}\right) = -\frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$\boxed{\int\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}}$$

$$\vec{E} = \hat{k}\frac{1}{2\epsilon_0}\frac{qz}{\pi R^2}\left(\frac{1}{|z|}-\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right), \quad \sigma=\frac{q}{\pi R^2}$$

$$\vec{E} = \hat{k}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|}-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

میدان الکتریکی قرص یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q برای $z/R \to 0$ یا $R/z \to \infty$

$$\vec{E} = \hat{k}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

برای $z > 0$

$$\vec{E} = \hat{k}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

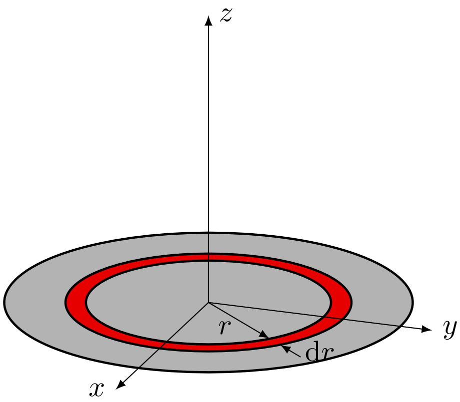
$$\boxed{\lim_{z/R\to 0} \vec{E} = \hat{k}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

برای $z < 0$

$$\vec{E} = \hat{k}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

$$\boxed{\lim_{z/R\to 0} \vec{E} = -\hat{k}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

میدان الکتریکی قرص یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q (استفاده از میدان الکتریکی ناشی از یک حلقه)



میدان الکتریکی یک حلقه به شعاع R

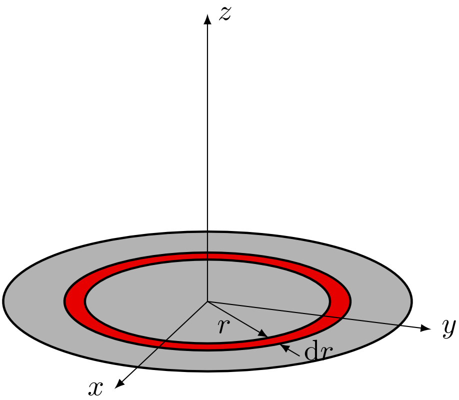
$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

فرم دیفرانسیلی یک حلقه با ضخامت $\mathrm{d}r$

$$\begin{cases} R \to r \\ q \to \mathrm{d}q \\ E_z \to \mathrm{d}E_z \end{cases}$$

$$\mathrm{d}E_z = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

میدان الکتریکی قرص یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q



$$\mathrm{d}E_z = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$\mathrm{d}q$ بار نوار نازک قرمز رنگ به ضخامت $\mathrm{d}r$

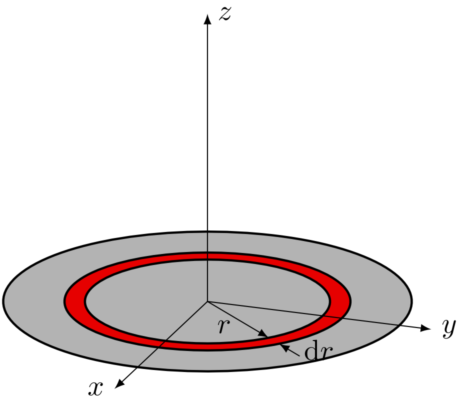
$$\mathrm{d}q = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}E_z = \frac{\sigma 2\pi r \mathrm{d}r}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

میدان الکتریکی قرص یکنواخت دایره‌ای به شعاع R و بار q



$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\int \frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}}$$

$$\vec{E} = \hat{k}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

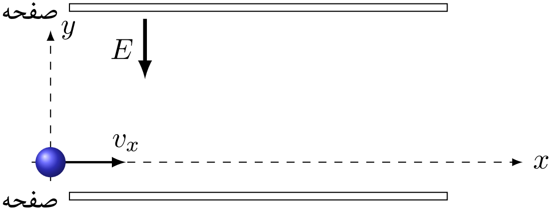
بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی خارجی

- نیروی الکترواستاتیک $\vec{F}$ وارد بر ذره‌ی باردار به بار q در میدان الکتریکی $\vec{E}$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

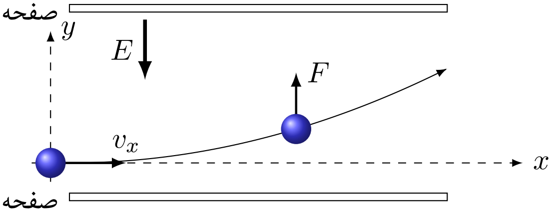
- نیروی الکترواستاتیک برای ذره‌ای با بار q مثبت در جهت $\vec{E}$ است و برای ذره‌ای با بار q منفی در خلاف جهت $\vec{E}$ است.

قطره‌ای به جرم m و بار $-q$ وارد ناحیه‌ی بین دو صفحه‌ی موازی باردار به طول L می‌شود که میدان الکتریکی یکنواخت و بطرف پایین E ایجاد می‌کند. قطره ابتدا در امتداد محور x با سرعت v_x حرکت می کند. انحراف قائم قطره در لبه دورتر را بدست آورید (اثر گرانش قابل صرفه‌نظر است).



بار نقطه‌ای در میدان الکتریکی خارجی

قطره‌ای به جرم m و بار $-q$ وارد ناحیه‌ی بین دو صفحه‌ی موازی باردار به طول L می‌شود که میدان الکتریکی یکنواخت و بطرف پایین E ایجاد می‌کند. قطره ابتدا در امتداد محور x با سرعت v_x حرکت می کند. انحراف قائم قطره در لبه دورتر را بدست آورید (اثر گرانش قابل صرفه‌نظر است).



$$F = qE, \quad F = ma_y \Rightarrow a_y = \frac{qE}{m}$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2, \quad L = v_x t \Rightarrow y = \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{L^2}{v_y^2} \Rightarrow y = \frac{qEL^2}{2mv_y^2}$$

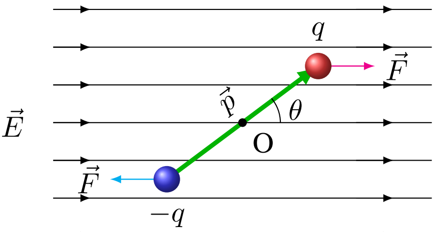
میدان‌های الکتریکی

دوقطبی در میدان الکتریکی

- برای این بررسی، دو قطبی $\vec{p} = q\vec{d}$ را در میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ در نظر بگیرید.
- فرض کنید دوقطبی یک ساختار صلب دارد که دو بار q و $-q$ به اندازه‌ی d از هم تشکیل شده است. θ زاویه‌ای است که دوقطبی با میدان $\vec{E}$ می‌سازد.
- گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی $\vec{p}$ در میدان الکتریکی $\vec{E}$ بصورت

$$\vec{\tau}_{\mathrm{O}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

داده می‌شود که O مرکز جرم دوقطبی می‌باشد.

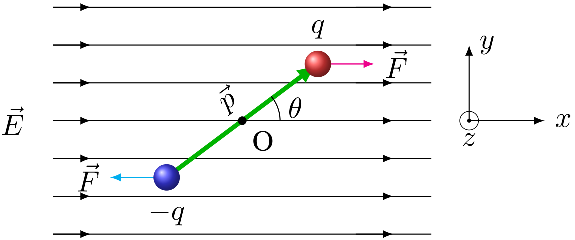


دوقطبی در میدان الکتریکی

- گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی $\vec{p}$ در میدان الکتریکی $\vec{E}$ بصورت

$$\vec{\tau}_{\mathrm{O}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

داده می‌شود.

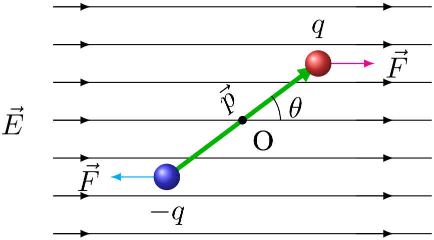


جهت گشتاور نیرو حول نقطه‌ی O ناشی از نیروهای الکترواستانیک دو بار q و $-q$ در میدان الکتریکی $\vec{E}$ عمود برصفحه بطرف پایین است.حول

$$\vec{\tau}_{\mathrm{O}} = -\hat{k}\frac{d}{2}F\sin\theta - \hat{k}\frac{d}{2}F\sin\theta, \quad \text{بزرگی نیرو} : \; F = qE$$

میدان‌های الکتریکی

دوقطبی در میدان الکتریکی



جهت گشتاور نیرو حول نقطه‌ی O ناشی از نیروهای الکترواستاتیک دو بار q و $-q$ در میدان الکتریکی $\vec{E}$ عمود برصفحه بطرف پایین است.حول

$$\vec{\tau}_{\mathrm{O}} = -\hat{k}\frac{d}{2}F\sin\theta - \hat{k}\frac{d}{2}F\sin\theta, \quad \text{بزرگی نیرو} : \ F = qE$$

$$\vec{\tau}_{\mathrm{O}} = -\hat{k}dqE\sin\theta, \quad \text{بزرگی دوقطبی} : \ p = qE$$

$$\vec{\tau}_{\mathrm{O}} = -\hat{k}pE\sin\theta \Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{\mathrm{O}} = \vec{p}\times\vec{E}}$$

انرژي پتانسیل دوقطبی الکتریکی

- انرژی پتانسیل به جهت گیری دوقطبی $\vec{p}$ در میدان الکتریکی مربوط می‌شود.
- وقتی یک دوقطبی در حضور میدان الکتریکی دارای جهت‌گیری تعادلی است که دوقطبی $\vec{p}$ و میدان $\vec{E}$ بطور موضعی هم‌جهت باشند. در این حالت دوقطبی در حضور میدان کمینه انرژی پتانسیل را دارد و در سایر جهتگیری‌ها انرژی پتانسیل بزرگتر است.
- کار میدان الکتریکی $\vec{E}$ بر روی دوقطبی $\vec{p}$ هنگام چرخش دوقطبی به اندازه‌ی زاویه‌ی θ ،

$$W = \int \tau \mathrm{d}\theta$$

- تغییر انرژی پتانسیل

$$\Delta U = -W$$

$$U(\theta) - U(\pi/2) = -\int_{\pi/2}^{\theta} (-pE\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

اگر $\theta = \pi/2$ مرجع پتانسیل باشد، یعنی $U(\pi/2) = 0$ بنابراین

$$U(\theta) = -\int_{\pi/2}^{\theta} (-pE\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

انرژي پتانسيل دوقطبی الکتریکی

- کار میدان الکتریکی $\vec{E}$ بر روی دوقطبی $\vec{p}$ هنگام چرخش دوقطبی به اندازه‌ی زاویه‌ی θ ،

$$W = \int \tau \mathrm{d}\theta$$

- تغییر انرژی پتانسیل

$$\Delta U = -W$$

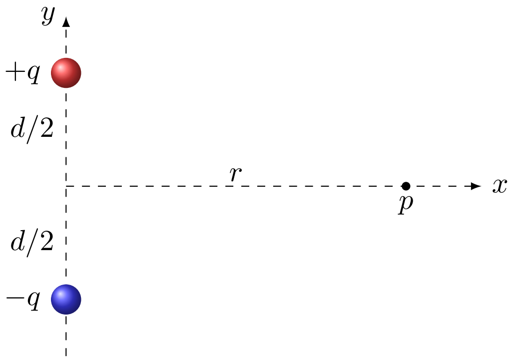
$$U(\theta) - U(\pi/2) = -\int_{\pi/2}^{\theta} (-pE\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$

اگر $\theta = \pi/2$ مرجع پتانسیل باشد، یعنی $U(\pi/2) = 0$ بنابراین

$$U(\theta) = -\int_{\pi/2}^{\theta} (-pE\sin\theta)\mathrm{d}\theta = [-pE\cos\theta]_{\pi/2}^{\theta} = -pE\cos\theta$$

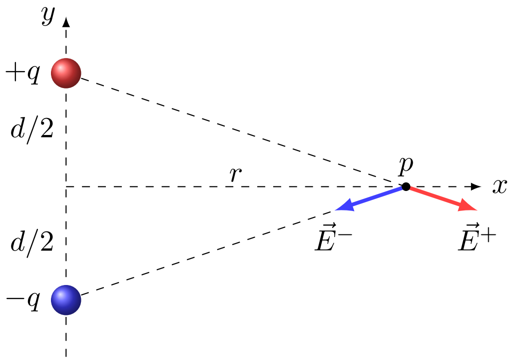
$$\boxed{U(\theta) = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$

مسئله–۲: شکل زیر دوقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد. الف) اندازه ب) جهت میدان الکتریکی دوقطبی را در نقطه‌ی p در $d \gg r$ بدست آورید.



میدان‌های الکتریکی

مسئله–۲:



$$\vec{E}^+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2+d^2/4}\left(\hat{i}\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2/4}} - \hat{j}\frac{d/2}{\sqrt{r^2+d^2/4}}\right)$$

$$\vec{E}^- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2+d^2/4}\left(-\hat{i}\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2/4}} - \hat{j}\frac{d/2}{\sqrt{r^2+d^2/4}}\right)$$

میدان‌های الکتریکی

مسئله-۲:

$$\vec{E}^{+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2 + d^2/4}\left(\hat{i}\frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2/4}} - \hat{j}\frac{d/2}{\sqrt{r^2 + d^2/4}}\right)$$

$$\vec{E}^{-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2 + d^2/4}\left(-\hat{i}\frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2/4}} - \hat{j}\frac{d/2}{\sqrt{r^2 + d^2/4}}\right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}^{+} + \vec{E}^{-} = -\hat{j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2(d/2)q}{(r^2 + d^2/4)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \vec{E}^{+} + \vec{E}^{-} = -\hat{j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{r^3}\frac{1}{(1 + (d/2r)^2)^{3/2}}$$

$$d/2r \ll 1 : \quad \frac{1}{(1 + (d/2r)^2)^{3/2}} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \cdots$$

مسئله–۲:

$$\vec{E} = -\hat{j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{r^3}\frac{1}{(1+(d/2r)^2)^{3/2}}$$

$$d/2r \ll 1: \quad \frac{1}{(1+(d/2r)^2)^{3/2}} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \cdots$$

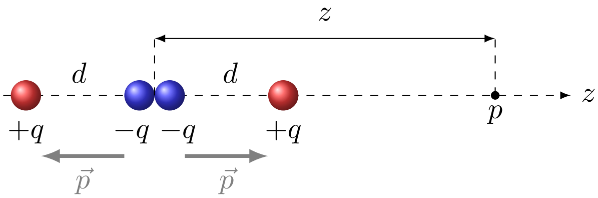
$$\vec{E} = -\hat{j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd}{r^3}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}, \quad \vec{p} = qd\vec{j}$$: گشتاور دوقطبی

مسئله–۳: شکل زیر یک چهارقطبی الکتریکی را نشان می‌دهد که از ۲ دوقطبی الکتریکی تشکیل شده است. اندازه گشتاور دوقطبی‌ها یکسان و در خلاف جهت هم است. اگر p نقطه‌ای بر روی محور و به فاصله‌ی z از مرکز چهارقطبی باشد، نشان دهید (با فرض $z \gg d$) میدان الکتریکی در این نقطه از رابطه‌ی

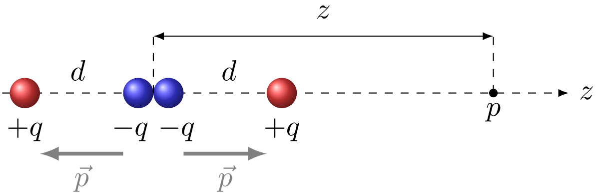
$$E = 3Q/4\pi\epsilon_0 z^4$$

بدست می‌آید. $Q(=2qd^2)$ گشتاور چهارقطبی توزیع بار است.



$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2q}{z^2} + \frac{q}{(z+d)^2} + \frac{q}{(z-d)^2}\right]$$

مسئله–۳:

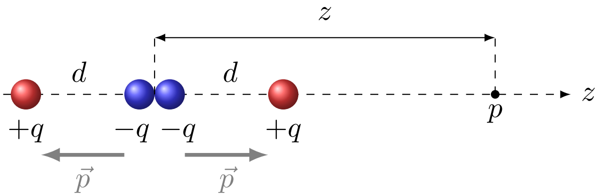


$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2q}{z^2} + \frac{q}{(z+d)^2} + \frac{q}{(z-d)^2}\right]$$

$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{2q}{z^2} + \frac{q}{z^2(1+d/z)^2} + \frac{q}{z^2(1-d/z)^2}\right]$$

$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2}\left[-2 + \frac{1}{(1+d/z)^2} + \frac{1}{(1-d/z)^2}\right]$$

مسئله–۳:



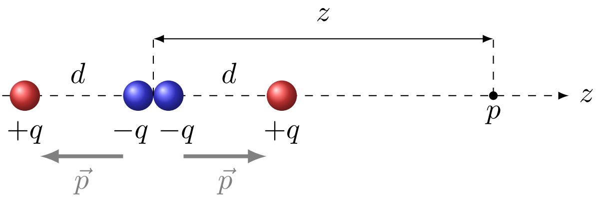
$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2}\left[-2 + \frac{1}{(1+d/z)^2} + \frac{1}{(1-d/z)^2}\right]$$

$$\boxed{\text{برای } x \ll 1: \ (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \cdots}$$

$$\text{برای } d/z \ll 1: \frac{1}{(1+d/z)^2} = (1+d/z)^{-2} = 1 - 2(d/z) + 3(d/z)^2 + \cdots$$

$$\text{برای } d/z \ll 1: \frac{1}{(1-d/z)^2} = (1-d/z)^{-2} = 1 + 2(d/z) + 3(d/z)^2 + \cdots$$

مسئله–۳:



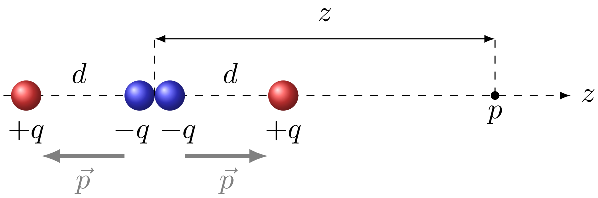
$$\frac{1}{(1+d/z)^2} = (1+d/z)^{-2} = 1 - 2(d/z) + 3(d/z)^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-d/z)^2} = (1-d/z)^{-2} = 1 + 2(d/z) + 3(d/z)^2 + \cdots$$

$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2}\left[-2 + \frac{1}{(1+d/z)^2} + \frac{1}{(1-d/z)^2}\right]$$

$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2}6\left(\frac{d}{z}\right)^2$$

مسئله–۳:

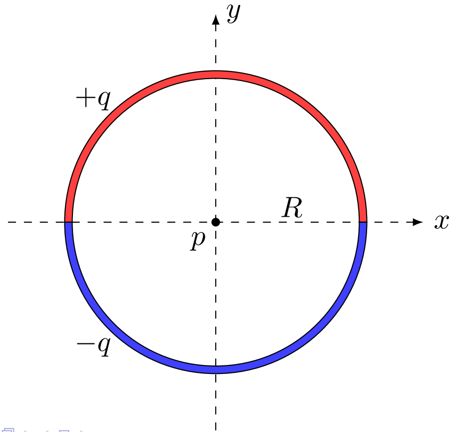


$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{6qd^2}{z^4}$$

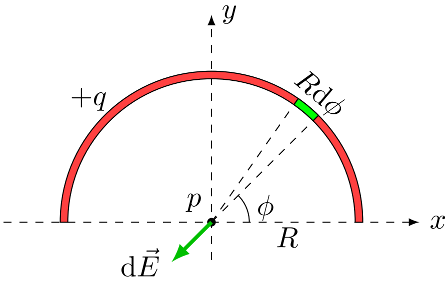
$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3(2qd^2)}{z^4}$$

$$\vec{E}_p = \hat{k}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{3Q}{z^4}, \quad Q = 2qd^2$$: گشتاور چهارقطبی

مسئله–۴: دو میله‌ی پلاستیکی خمیده یکی با بار $+q$ و دیگری با بار $-q$ دایره‌ای به شعاع R در صفحه‌ی xy تشکیل می‌دهند. محور x از دو نقطه اتصال می‌گذرد و بار بطور یکنواخت بر روی هر دو میله توزیع شده است. الف) اندازه ب) جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در نقطه‌ی p مرکز دایره بدست آورید.



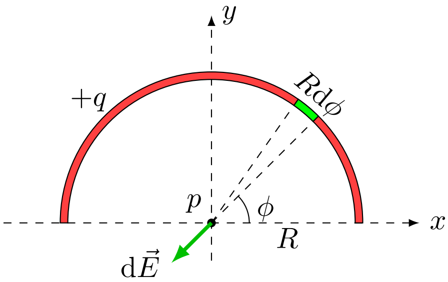
مسئله–۴:
در اینجا ابتدا میدان الکتریکی خط بار یکنواخت نیم دایره‌ای به شعاع R و بار q را در نقطه‌ی p بدست می‌آوریم



$$\lambda = \frac{q}{\pi R},\ \mathrm{d}\ell = R\mathrm{d}\phi,\ \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}\ell \Rightarrow \mathrm{d}q = \frac{q}{\pi}\mathrm{d}\phi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{R^2}$$

مسئله–۴:
در اینجا ابتدا میدان الکتریکی خط بار یکنواخت نیم دایره‌ای به شعاع R و بار q را در نقطه‌ی p بدست می‌آوریم



$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\pi R^2}\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}E(-\hat{i}\cos\phi - \hat{j}\sin\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\pi R^2}(-\hat{i}\cos\phi - \hat{j}\sin\phi)\mathrm{d}\phi$$

مسئله–۴:
در اینجا ابتدا میدان الکتریکی خط بار یکنواخت نیم دایره‌ای به شعاع R و بار q را در نقطه‌ی p بدست می‌آوریم

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\pi R^2}(-\hat{i}\cos\phi - \hat{j}\sin\phi)\mathrm{d}\phi$$

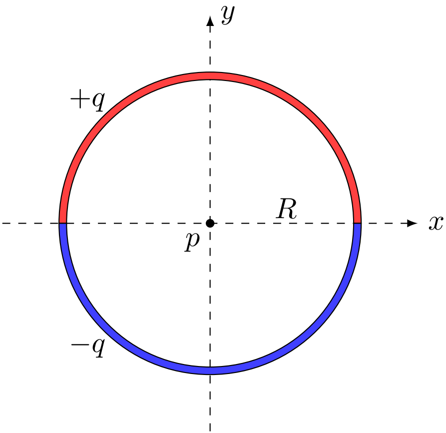
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\pi R^2}\left(-\hat{i}\int_0^\pi \cos\phi\mathrm{d}\phi - \hat{j}\int_0^\pi \sin\phi\mathrm{d}\phi\right)$$

$$\int_0^\pi \cos\phi\mathrm{d}\phi = 0, \quad \int_0^\pi \sin\phi\mathrm{d}\phi = 2$$

$$\vec{E} = -\hat{j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi R^2}$$

میدان‌های الکتریکی

مسئله–۴:



میدان ناشی از توزیع بار $+q$ برابر

$$\vec{E}^{+} = -\hat{j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi R^2}$$

میدان ناشی از توزیع بار $-q$ برابر

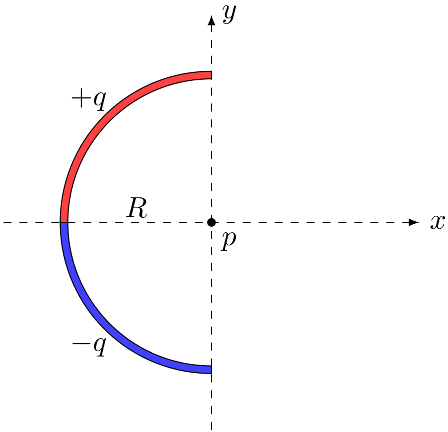
$$\vec{E}^{-} = -\hat{j}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi R^2}$$

میدان نهایی

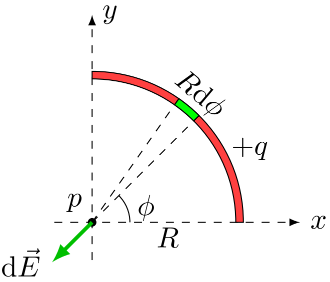
$$\vec{E} = \vec{E}^{+} + \vec{E}^{-} = -\hat{j}\frac{q}{\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

میدان‌های الکتریکی

مسئله–۵: میله‌ای شیشه‌ای باریک به شکل نیمدایره‌ای به شعاع R بار بطور یکنواخت بر روی آن توزیع شده است که در نیمه‌ی بالاب بار $+q$ و در نیمه پایینی بار $-q$ قرار دارد. الف) اندازه ب) جهت میدان الکتریکی $\vec{E}$ را در نقطه‌ی p مرکز دایره بدست آورید.



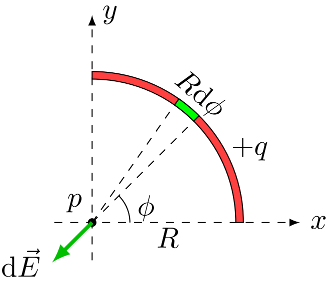
مسئله-۵:
در اینجا ابتدا میدان الکتریکی خط بار یکنواخت یک چهارم دایره‌ای به شعاع R و بار q را در نقطه‌ی p بدست می‌آوریم



$$\lambda = \frac{2q}{\pi R},\ d\ell = R d\theta,\ dq = \lambda d\ell \Rightarrow dq = \frac{2q}{\pi} d\phi, \quad 0 \le \phi \le \pi/2$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi}\frac{d\phi}{R^2}$$

مسئله-۵:
در اینجا ابتدا میدان الکتریکی خط بار یکنواخت یک چهارم دایره‌ای به شعاع R و بار q را در نقطه‌ی p بدست می‌آوریم



$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi}\frac{\mathrm{d}\phi}{R^2}$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}E(-\hat{i}\cos\phi - \hat{j}\sin\phi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi R^2}(-\hat{i}\cos\phi - \hat{j}\sin\phi)\mathrm{d}\phi$$

مسئله-۵:
در اینجا ابتدا میدان الکتریکی خط بار یکنواخت یک چهارم دایره‌ای به شعاع R و بار q را در نقطه‌ی p بدست می‌آوریم

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi R^2}(-\hat{\imath}\cos\phi - \hat{\jmath}\sin\phi)\mathrm{d}\phi$$

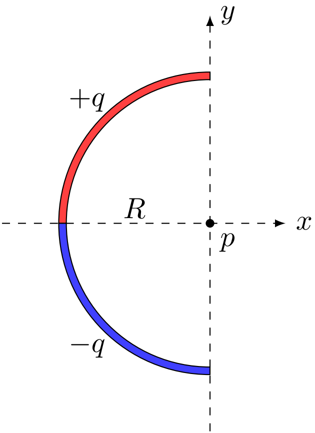
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi R^2}\left(-\hat{\imath}\int_0^{\pi/2}\cos\phi\mathrm{d}\phi - \hat{\jmath}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\phi\right)$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos\phi\mathrm{d}\theta = 1, \quad \int_0^{\pi/2}\sin\phi\mathrm{d}\theta = 1$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi R^2}(\hat{\imath} + \hat{\jmath})$$

میدان‌های الکتریکی

مسئله–۵:



میدان ناشی از توزیع بار $+q$ برابر

$$\vec{E}^{+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi R^2}(\hat{i} - \hat{j})$$

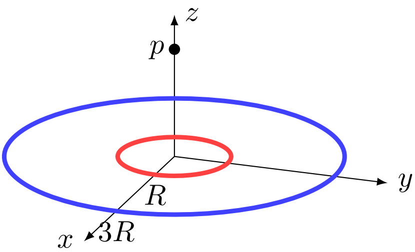
میدان ناشی از توزیع بار $-q$ برابر

$$\vec{E}^{-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{\pi R^2}(-\hat{i} - \hat{j})$$

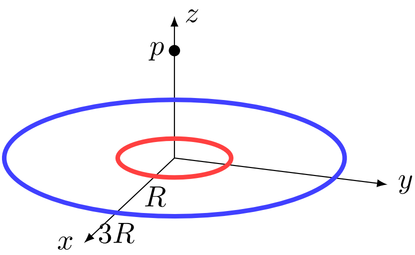
میدان نهایی

$$\vec{E} = \vec{E}^{+} + \vec{E}^{-} = -\hat{j}\frac{q}{\pi^2\epsilon_0 R^2}$$

مسئله–۶: دو حلقه‌ای هم مرکز با شعاعهای R و $3R$ در یک صفحه قرار دارند. نقطه‌ی p روی محور z قرار دارد و از مرکز حلقه‌ها به اندازه‌ی $2R$ فاصله دارد. حلقه‌ی کوچکتر دارای توزیع بار یکنواخت $+Q$ است. بار روی حلقه‌ی بزرگتر چقدر باشد تا میدان الکتریکی برایند در p برابر صفر شود.



مسئله–۶:



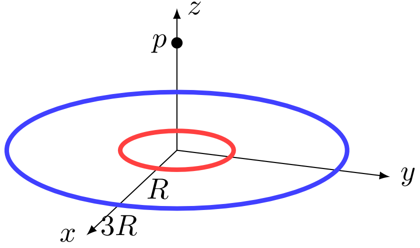
میدان حلقه‌ی به شعاع R

$$\vec{E}_1 = \hat{k}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2R}{(R^2+4R^2)^{3/2}} = \hat{k}\frac{Q}{10\sqrt{5}\pi\epsilon_0 R^2}$$

میدان حلقه‌ی به شعاع $3R$

$$\vec{E}_2 = \hat{k}\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2R}{(9R^2+4R^2)^{3/2}} = \hat{k}\frac{q}{26\sqrt{13}\pi\epsilon_0 R^2}$$

مسئله–۶:



میدان برآیند

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \hat{k}\frac{1}{\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{Q}{10\sqrt{5}} + \frac{q}{26\sqrt{13}}\right)$$

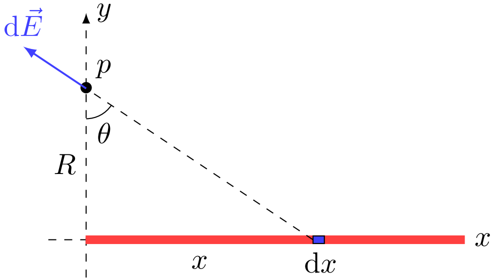
وقتی $\vec{F}$ برابر صفر شود

$$\frac{Q}{10\sqrt{5}} + \frac{q}{26\sqrt{13}} = 0 \Rightarrow q = -\frac{13\sqrt{13}}{5\sqrt{5}}Q$$

مسئله‌ی ۷: میله‌ی نارسانا به شکل نیم‌خط (یعنی از یک انتهای آن تا بینهایت ادامه دارد) دارای چگالی بار یکنواخت λ است. نشان دهید میدان الکتریکی در نقطه‌ی p با میله زاویه‌ی 45° می‌سازد و این نتیجه مستقل از R است.

میدان‌های الکتریکی

مسئله–۷:



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x, \quad x \geq 0$$

$$\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2 + x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}x}{R^2 + x^2}$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \mathrm{d}E(-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j})$$

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}x}{R^2 + x^2}(-\frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}\hat{i} + \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}\hat{j})$$

مسئله–۷:

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}x}{R^2+x^2}(-\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}\hat{i} + \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}}\hat{j})$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\hat{i}\int_0^\infty \frac{x\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}} + \hat{j}R\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}}\right)$$

$$\boxed{\int \frac{x\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = -\frac{x}{R^2\sqrt{R^2+x^2}}}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\hat{i}\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]_0^\infty + \hat{j}\left[-\frac{x}{R\sqrt{R^2+x^2}}\right]_0^\infty\right)$$

مسئله–۷:

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\hat{i}\left[-\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\right]_0^{\infty}+\hat{j}\left[-\frac{x}{R\sqrt{R^2+x^2}}\right]_0^{\infty}\right)$$

$$\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left(-\hat{i}\frac{1}{R}+\hat{j}\frac{1}{R}\right)$$

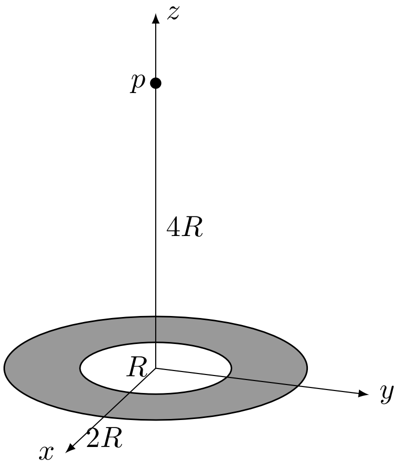
$$\vec{E}=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}(-\hat{i}+\hat{j})$$

$$E_x=-\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R},\quad E_y=\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R}$$

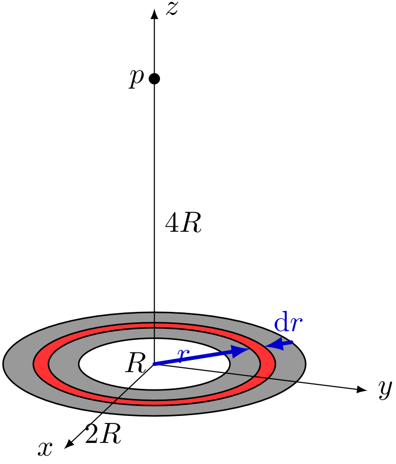
$$\text{جهت میدان الکتریکی}=\tan^{-1}\left(\frac{|E_x|}{|E_y|}\right)=45^\circ$$

میدان‌های الکتریکی

مسئله–۸: یک حلقه نازک به شعاع داخلی R و شعاع خارجی $2R$ بطور یکنواخت با بار $+Q$ باردار شده است. میدان الکتریکی را در نقطه‌ی p بطول $4R$ از مرکز حلقه بدست آورید.



مسئله–۸:



میدان الکتریکی یک حلقه به شعاع R

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

فرم دیفرانسیلی یک حلقه با ضخامت $\mathrm{d}r$

$$\begin{cases} R \to r \\ q \to \mathrm{d}q \\ E_z \to \mathrm{d}E_z \end{cases}$$

$$\mathrm{d}E_z = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\mathrm{d}q = \left(\frac{q}{3\pi R^2}\right)2\pi r\mathrm{d}r = \left(\frac{2q}{3R^2}\right)r\mathrm{d}r$$

مسئله–۸:

$$dq = \left(\frac{2q}{3R^2}\right) r\,dr, \quad R \le r \le 2R$$

$$dE_z = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2qz}{3R^2}\right)\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

با انتگرالگیری از طرفین

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2qz}{3R^2}\right)\int_R^{2R}\frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

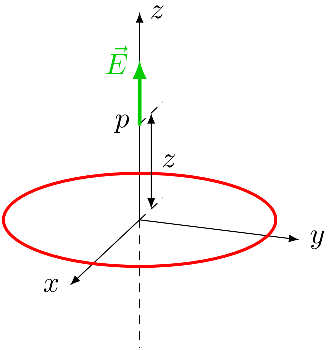
$$\boxed{\int \frac{r\,dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2qz}{3R^2}\right)\int_R^{2R}\left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{4R^2+z^2}}\right]$$

مسئله-۹: یک الکترون بر روی محور مرکزی حلقه‌ای به شعاع R مقید است ($z \ll R$). نشان دهید نیروی الکترو استاتیکی وارد بر الکترون می‌تواند باعث شود تا در امتداد محور مرکزی حلقه با فرکانس زاویه‌ای

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

نوسان کند. q بار حلقه و m جرم الکترون است.



$$\vec{E} = \hat{k} E_z$$

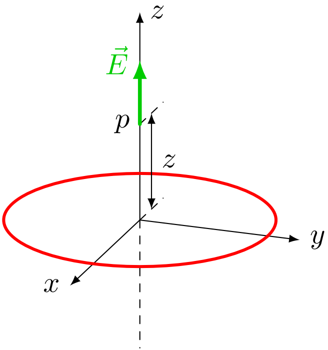
$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

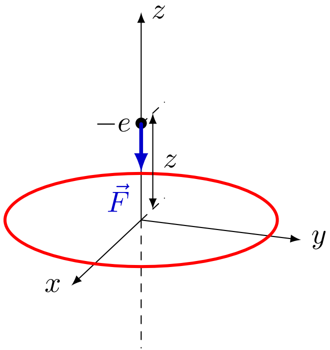
برای $z \ll R$

$$E_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{1}{[1 + (z/R)^2]^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{z}{R}\right)^2 + \cdots\right]$$

مسئله–۹:





$$E_z = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{z}{R}\right)^2 + \cdots\right]$$

برای $z \ll R:\ E_z = \dfrac{qz}{4\pi\epsilon_0 R^3}$

$$F_z = -eE_z$$

$$F_z = -\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R^3} z$$

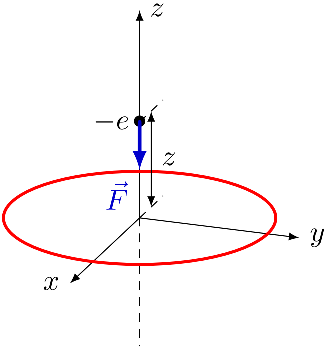
مسئله-۹:

معادله‌ی حرکت الکترون در امتداد محور z

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = F_z$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R^3}z$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}z = 0$$



$$F_z = -eE_z$$

$$F_z = -\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 R^3}z$$

مسئله–۹:

معادله‌ی حرکت الکترون در امتداد محور z

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3} z = 0$$

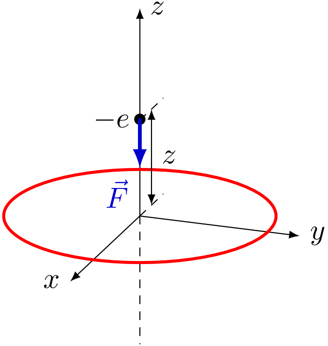
نوسانات هماهنگ ساده فنر

رابطه‌ی بالا مشابه معادله‌ی دیفرانسیل نوسانات هماهنگ ساده یک فنر است

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

که با فرکانس $\omega = \sqrt{k/m}$ نوسان می‌کند.

مسئله–۹:



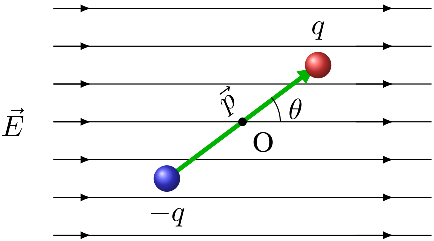
معادله‌ی حرکت الکترون در امتداد محور z

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3} z = 0$$

بنابراین فرکانس نوسانات الکترون روی محوری که از مرکز حلقه عبور می کند برابر است با

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

مسئله‌–۱۰: دو قطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی p و لختی دورانی I در میدان الکتریکی یکنواخت E قرار دارد. فرکانس نوسانات کوچک دوقطبی را حول نقطه‌ی تعادل را بدست آورید.



گشتاور نیروی وارد بر دوقطبی در یک میدان خارجی

$$\tau = -pE\sin\theta$$

دینامیک دورانی یک دوقطبی حول مرکز جرم با لختی دورانی I

$$\tau = I\alpha = I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

میدان‌های الکتریکی

مسئله– ۱۰:
بنابراین

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -pE\sin\theta$$

برای θهای کوچک $\sin\theta \sim \theta$ در این صورت

$$I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -pE\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{pE}{I}\theta = 0$$

نوسانات هماهنگ ساده فنر

رابطه‌ی بالا مشابه معادله‌ی دیفرانسیل نوسانات هماهنگ ساده یک فنر است

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

که با فرکانس $\omega = \sqrt{k/m}$ نوسان می‌کند.

مسئله- ۱۰:

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{pE}{I}\theta = 0$$

بدین ترتیب فرکانس نوسانات دوقطبی در میدان الکتریکی برابر است با

$$\omega = \sqrt{\frac{pE}{I}}$$