فیزیک ۲
قانون گاوس

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

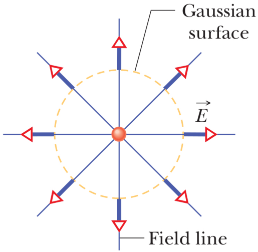
بهمن ۱۴۰۰

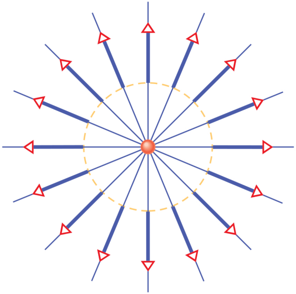
قانون گاوس

- یادآوری
در فصل قبل، با زحمت زیاد میدان الکتریکی را در نقاط نزدیک به اجسام باردار پیوسته بدست آوریم. در آن روش ابتدا توزیع بار را به عناصر $\mathrm{d}q$ تقسیم کردیم و میدان $\mathrm{d}\vec{E}$ ناشی از آن را بدست می‌آوردیم
- در این فصل رابطه‌ی زیبایی بین بار و میدان الکتریکی مطرح می‌شود که به ما اجازه می‌دهد در **وضعیت‌های تقارنی مشخصی**، محاسبه‌ی میدان الکتریکی جسم باردار با یک عملیات جبری انجام شود. این رابطه را **قانون گاوس** می‌نامند که توسط ریاضیدان و فیزیکدان آلمانی، کارل فردریک گاوس (۱۷۷۷–۱۸۵۵)، بنا نهاده شده است.
- هدف این فصل
در این فصل با دونوع مسئله روبرو هستیم. ۱) بعضی مواقع بار معلوم است و با استفاده از قانون گاوس میدان الکتریکی را در نقاط مختلف را بدست می‌آوریم. ۲) بعضی مواقع میدان الکتریکی روی سطح گاوسی معلوم است و با استفاده از قانون گاوس بار محصور شده توسط سطح را بدست می‌آوریم.

قانون گاوس

سطح گاوسی





- ذره‌ی $+Q$ (شکل بالایی) و ذره‌ی $+2Q$ (شکل پایینی) توسط کره‌ی هم مرکز فرضی یکسان محصور شده‌اند.
- در نقاط روی کره (که سطح گاوسی نامیده می‌شود) بردارهای میدان الکتریکی دارای اندازه مناسب و بصورت شعاعی در جهت دور شدن از ذره هستند.
- برای ذره‌ی محصور شده با بار $+2Q$، اندازه‌ی بردارهای میدان الکتریکی عبوری از سطح گاوسی های یکسان دو برابر میدان الکتریکی عبوری با بار $+Q$ است. همچنین چگالی خطوط میدان الکتریکی نیز دو برابر بار $+Q$ است.

قانون گاوس-شار الکتریکی

- میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ عمود بر صفحه‌ی به مساحت A است. در این حالت شار عبوری از صفحه برابر است با

$$\Phi = EA$$

- میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ زاویه‌ی θ با راستای عمود بر صفحه‌ی به مساحت A می‌سازد. در این حالت شار عبوری از صفحه برابر است با

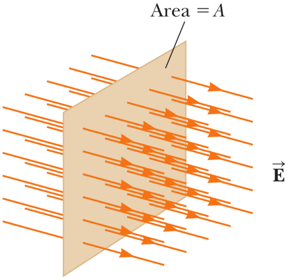
$$\Phi = EA\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{A}$$

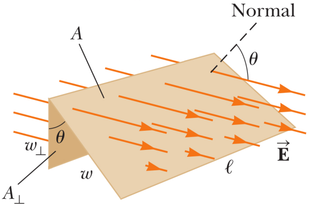
- در اینجا دو تعبیر وجود دارد: ۱) تصویر عمود بر صفحه‌ی A در امتداد میدان $\vec{E}$

$$\Phi = EA_{\perp} = E(A\cos\theta) = EA\cos\theta$$

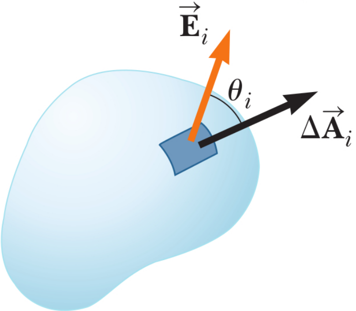
۲) تصویر میدان $\vec{E}$ در امتداد عمود بر صفحه A

$$\Phi = (E\cos\theta)A = EA\cos\theta$$





قانون گاوس-شار الکتریکی



برای هر عنصر $\Delta\vec{A}_i$ شار عبوری برابر است با

$$\Phi_i = \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

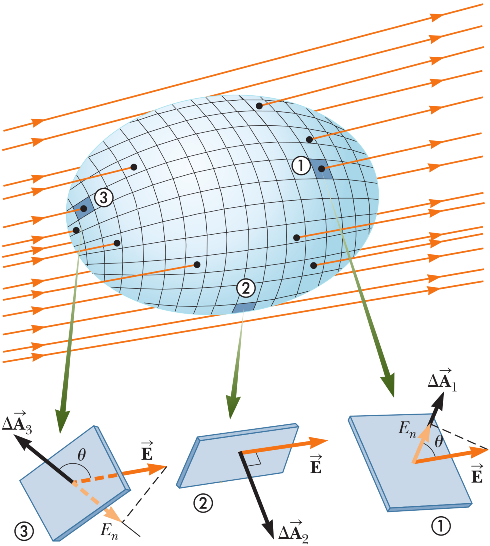
که بردار $\Delta\vec{A}_i$ عمود بطرف خارج سطح است.
برای محاسبه کل شار عبوری از سطح می‌بایست شار عبور تکه تکه عناصر تشکیل دهینده سطح را با هم جمع کرد،

$$\Phi_{\text{کل}} = \sum_i \Phi_i = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{A}_i$$

برای حالت پیوسته جمع در کل شار عبوری به انتگرال تغییر می‌کند،

$$\Phi_{\text{کل}} = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

قانون گاوس-شار الکتریکی



- شار عبوری از عنصر سطحی (1) کمیت مثبتی است.
- شار عبوری از عنصر سطحی (2) کمیت صفر است.
- شار عبوری از عنصر سطحی (3) کمیت منفی است.

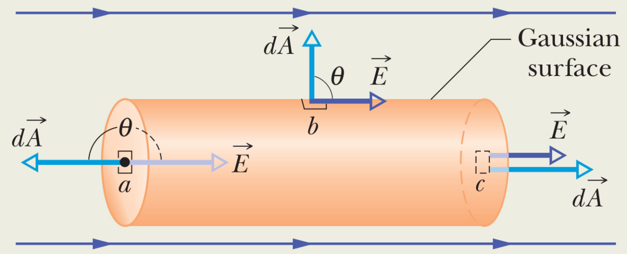
شار عبوری از یک سطح

$$\Phi = \int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

شار عبوری از یک سطح بسته

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

مسئله–۱: شکل زیر، سطح گاوسی به شکل استوانه بسته به شعاع R را نشان می‌دهد. استوانه در داخل میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ قرار دارد و محور مرکزی استوانه به موازات میدات است. کل شار Φ میدان الکتریکی عبوری از استوانه چقدر است؟

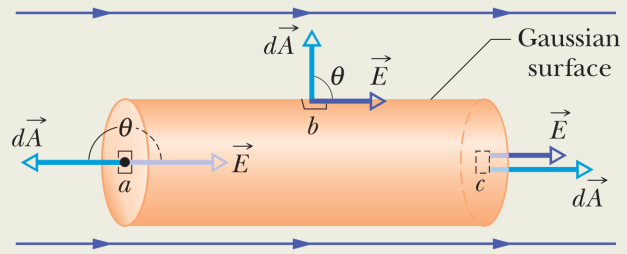


$$\text{شار عبوری کل} : \ \Phi = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\text{سطح سمت چپ} : \ a, \quad \text{سطح جانبی} : \ b, \quad \text{سطح سمت راست} : \ c$$

$$\text{شار عبوری کل} : \ \Phi = \Phi_a + \Phi_b + \Phi_c$$

مسئله–۱:



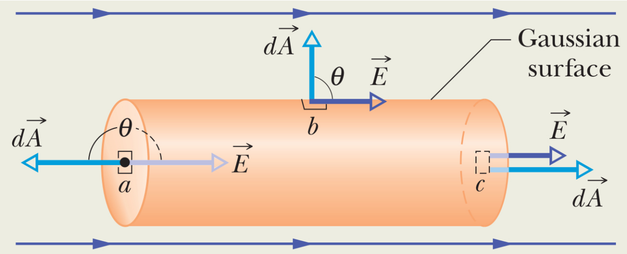
$$\text{شار عبوری کل}:\ \Phi = \Phi_a + \Phi_b + \Phi_c$$

$$\Phi_a = \int_a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -E\mathrm{d}A$$

$$\Phi_a = \int_a \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\int E\mathrm{d}A = -E\int \mathrm{d}A = -E\pi R^2$$

مسئله–۱:



$$\text{شار عبوری کل}:\ \Phi = -E\pi R^2 + \Phi_b + \Phi_c$$

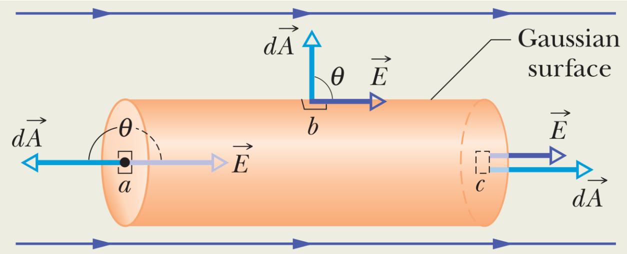
$$\Phi_b = \int_a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\Phi_b = 0$$

قانون گاوس

مسئله-۱:



$$\text{شار عبوری کل} : \; \Phi = -E\pi R^2 + 0 + \Phi_c$$

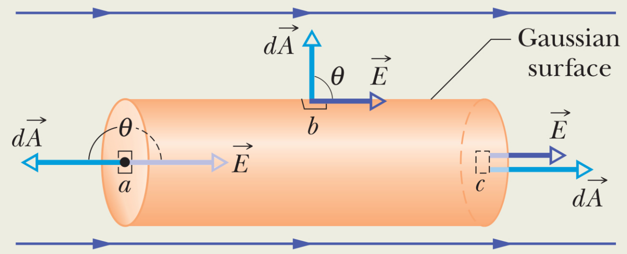
$$\Phi_c = \int_a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E\mathrm{d}A$$

$$\Phi_c = \int_a \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int E\mathrm{d}A = E \int \mathrm{d}A = E\pi R^2$$

قانون گاوس

مسئله-۱:

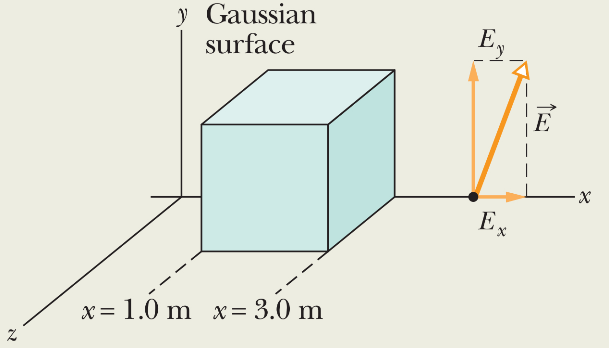


$$\text{شار عبوری کل} :\ \Phi = -E\pi R^2 + 0 + E\pi R^2$$

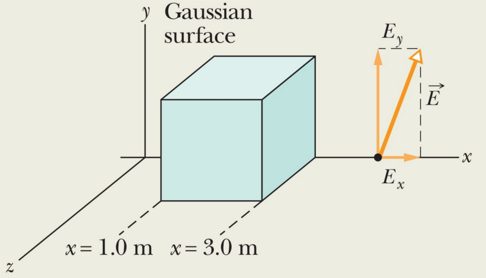
$$\Phi = 0$$

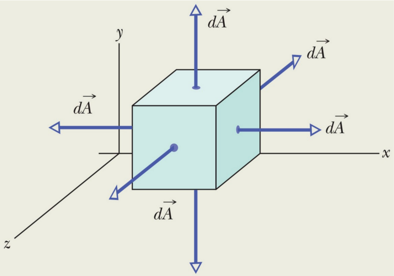
بنابراین شار کل عبوری یک میدان یکنواخت از یک سطح بسته برابر صفر است.

مسئله-۲: میدان الکتریکی غیر یکنواخت $\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$ از مکعب گاوسی شکل زیر می‌گذرد (E برحسب نیوتن بر کولن و x بر حسب متر است است). شار عبوری کل از تمام وجوه مکعب را بدست آورید.



مسئله–۲:





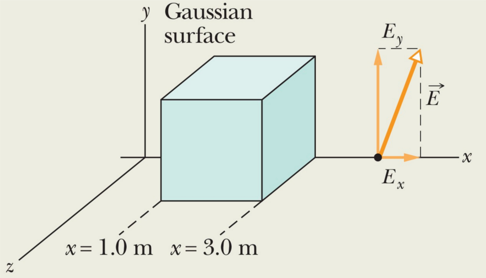
$$\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$$

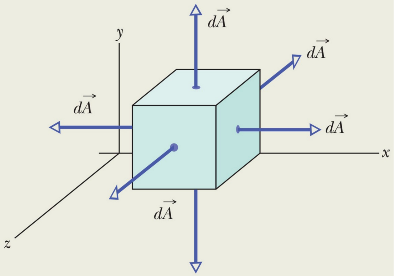
$$\text{سطح عقب} : \mathrm{d}\vec{A} = -\hat{k}\mathrm{d}A$$

$$\text{سطح عقب} : \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = 0 \Rightarrow \Phi_{\text{سطح عقب}} = \int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = 0$$

قانون گاوس

مسئله–۲:





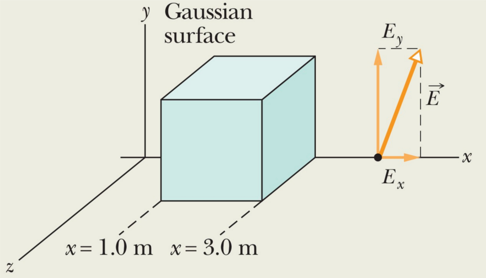
$$\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$$

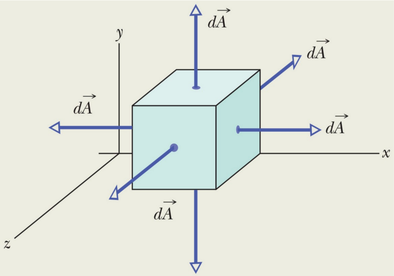
$$\text{سطح جلو} : \mathrm{d}\vec{A} = \hat{k}\mathrm{d}A$$

$$\text{سطح جلو} : \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = 0 \Rightarrow \Phi_{\text{سطح جلو}} = \int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = 0$$

قانون گاوس

مسئله–۲:





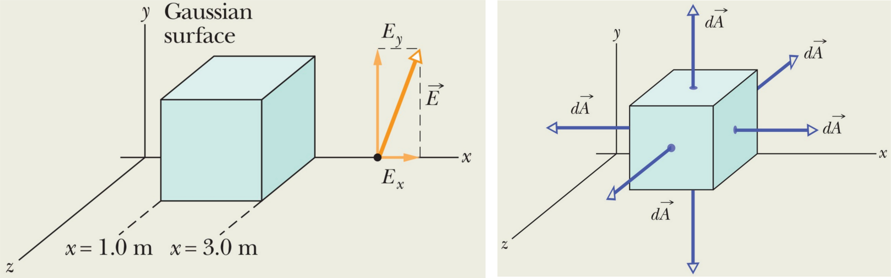
$$\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$$

$$\text{سطح پایین} : \mathrm{d}\vec{A} = -\hat{j}\mathrm{d}A$$

$$\text{سطح پایین} : \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = -4\mathrm{d}A \Rightarrow \Phi_{\text{سطح پایین}} = \int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = -4\times 4 = -16\mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}$$

قانون گاوس

مسئله-۲:



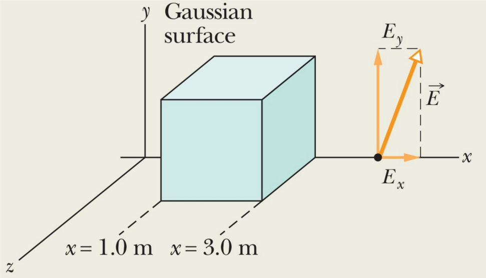
$$\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$$

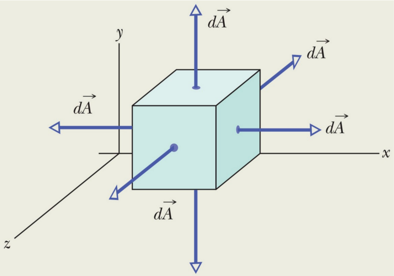
$$\text{سطح بالا} : \mathrm{d}\vec{A} = \hat{j}\mathrm{d}A$$

$$\text{سطح بالا} : \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = 4\mathrm{d}A \Rightarrow \Phi_{\text{سطح بالا}} = \int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = 4\times 4 = 16\,\mathrm{Nm^2/C}$$

قانون گاوس

مسئله–۲:





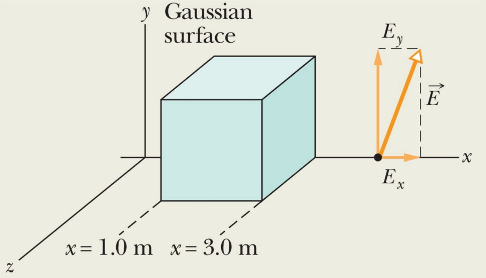
$$\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$$

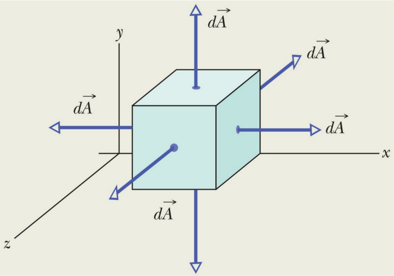
$$\text{سطح چپ} : \mathrm{d}\vec{A} = -\hat{i}\mathrm{d}A, \quad x = 1$$

$$\text{سطح چپ} : \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = -3\mathrm{d}A \Rightarrow \Phi_{\text{سطح چپ}} = \int \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = -3\times 4 = -12\,\mathrm{Nm^2/C}$$

قانون گاوس

مسئله–۲:





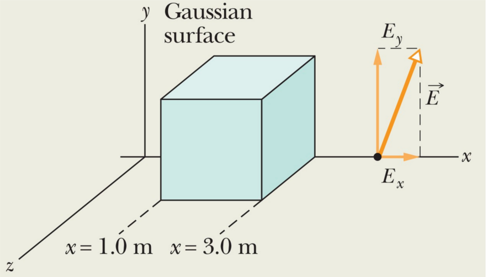
$$\vec{E} = 3x\hat{i} + 4\hat{j}$$

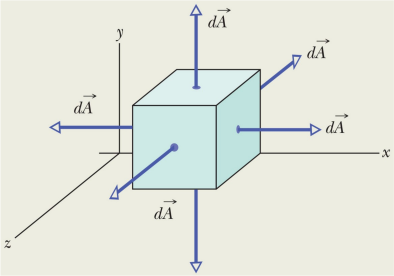
$$\text{سطح راست} : \mathrm{d}\vec{A} = \hat{i}\mathrm{d}A, \quad x = 3$$

$$\text{سطح راست} : \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 9\mathrm{d}A \Rightarrow \Phi_{\text{سطح راست}} = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 9 \times 4 = 36\,\mathrm{Nm^2/C}$$

قانون گاوس

مسئله–۲:





$$\Phi_{\text{کل}} = \Phi_{\text{سطح جلو}} + \Phi_{\text{سطح عقب}} + \Phi_{\text{سطح بالا}} + \Phi_{\text{سطح پایین}} + \Phi_{\text{سطح راست}} + \Phi_{\text{سطح چپ}}$$

$$\Phi_{\text{کل}} = 24\ \mathrm{Nm^2/C}$$

قانون گاوس

قانون گاوس، **کل شار** عبوری از یک سطح بسته (سطح گاوس) $\Phi_{\text{کل}}$ را به **کل بار** محصور شده توسط سطح $q_{\text{محصور}}$ مرتبط می‌کند،

$$\boxed{\epsilon_0 \Phi_{\text{کل}} = q_{\text{محصور}}}$$

که می‌توان با استفاده از تعریف شار کل عبوری از یک سطح بسته،

$$\Phi_{\text{کل}} = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

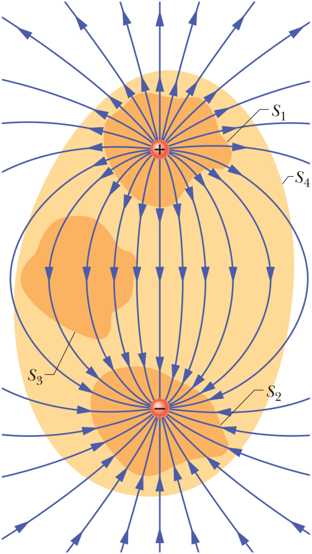
تعریف قانون گاوس را بصورت زیر نوشت،

$$\boxed{\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}}$$

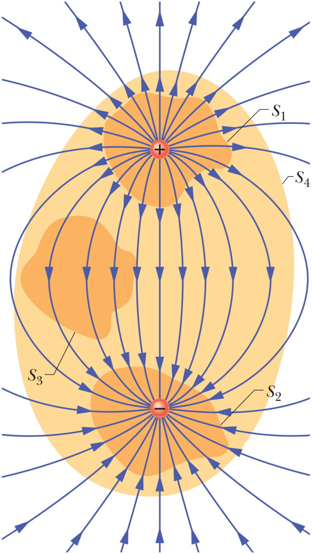
در اینجا $q_{\text{محصور}}$ جمع جبری همه‌ی بارهای مثبت و منفی محصور شده توسط سطح گاوسی است، یعنی

$$q_{\text{محصور}} = \sum_i q_i$$

قانون گاوس



- مطابق سطح S_1: اگر شار میدان الکتریکی عبوری از سطحی **بطرف خارج** باشد، بار محصور شده (یا بار خالص محصور شده) **مثبت** است.
- مطابق سطح S_2: اگر شار میدان الکتریکی عبوری از سطحی **بطرف داخل** باشد، بار محصور شده (یا بار خالص محصور شده) **منفی** است.



- مطابق سطح S_3: وقتی بار محصور شده (یا بار خالص محصور شده) برابر **صفر** است، کل شار عبوری **بطرف خارج** و **بطرف داخل** از سطح برابر **صفر** است.
- مطابق سطح S_4: جمع جبری بار کل توسط این سطح برابر صفر است. بنابراین مطابق سطح S_3 ، کل شار عبوری **بطرف خارج** و **بطرف داخل** از سطح برابر **صفر** است.

قانون گاوس-تقارن کروی

قانون گاوس برای یک بار نقطه‌ای و قانون کولن

سمت چپ

$$\vec{E} = \hat{n}E$$

نکته کلیدی: بزرگی میدان E روی تمام نقاط سطح گاوس کروی یکسان است.

$$\mathrm{d}\vec{A} = \hat{n}\mathrm{d}A$$

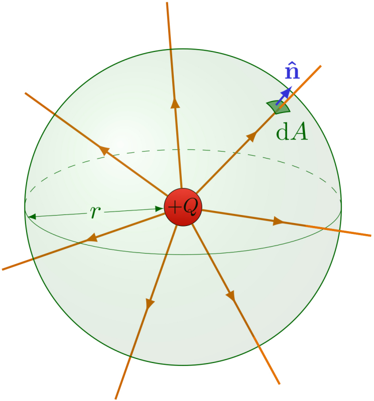
$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = E\oint \mathrm{d}A = E(4\pi r^2)$$

سمت راست

$$q_{\text{محصور}} = Q$$

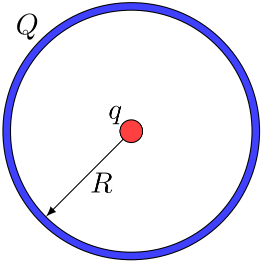
$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} \Rightarrow \epsilon_0 E(4\pi r^2) = Q$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad : \text{قانون کولن}$$



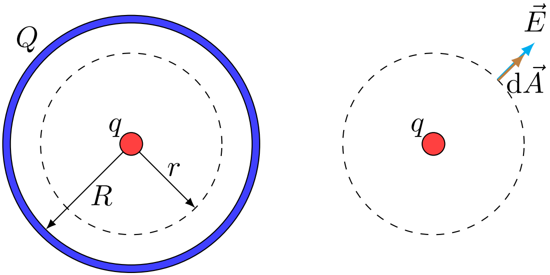
$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

مسئله-۳: مطابق شکل سطح مقطع پوسته‌ی کروی پلاستیکی با بار یکنواخت $Q = -16e$ و شعاع R را نشان می‌دهد. ذره‌ای با بار $q = +5e$ در مرکز آن است (اندازه و جهت) میدان الکتریکی را الف) برای $r \leq R$ و ب) برای $r \geq R$ بدست آورید.



$$E(r) = \begin{cases} ?, & r \leq R \\ ?, & r \geq R \end{cases}$$

مسئله-۳: مقطعی از سطح گاوس کروی برای $r \leq R$



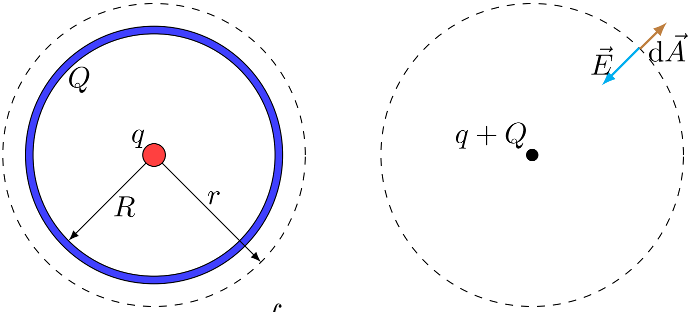
$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

در اینجا بار محصور شده $q_{\text{محصور}} = q = +5e$ یک بار مثبت می‌باشد. بزرگی میدان E روی تمام نقاط سطح گاوس کروی یکسان است. خطوط میدان بطرف خارج است و با بردار سطحی $\mathrm{d}\vec{A}$ روی سطح کروی هم جهت است.

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q = +5e \Rightarrow E = \frac{5e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$ بطرف بیرون سطح گاوسی

قانون گاوس-تقارن کروی

مسئله-۳: مقطعی از سطح گاوس کروی برای $r \geq R$



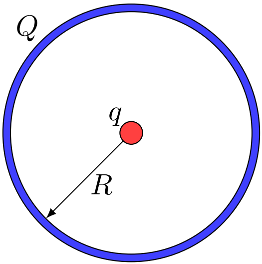
$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

در اینجا بار محصور شده $q_{\text{محصور}} = q + Q = -11e$ یک بار منفی می‌باشد. بزرگی میدان E روی تمام نقاط سطح گاوس کروی یکسان است. خطوط میدان بطرف داخل است و با بردار سطحی $\mathrm{d}\vec{A}$ روی سطح کروی غیر هم جهت است.

$$-\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q + Q = -11e \Rightarrow E = \frac{11e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$ بطرف داخل سطح گاوسی

قانون گاوس-تقارن کروی

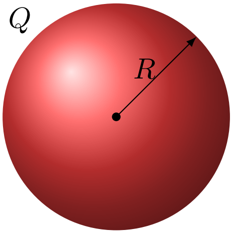
مسئله-۳:



$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{5e}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \le R \\ \dfrac{11e}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \ge R \end{cases}$$: بزرگی میدان الکتریکی

قانون گاوس-تقارن کروی

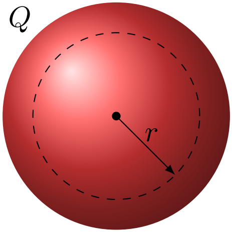
مسئله-۴: بار $+Q$ در حجم کره‌ای غیر رسانا به شعاع R بطور یکنواخت توزیع شده است. اندازه و جهت میدان الکتریکی را را الف) برای $R \leq r$ و ب) برای $R \geq r$ بدست آورید.



$$E(r) = \begin{cases} ?, & r \leq R \\ ?, & r \geq R \end{cases}$$

قانون گاوس-تقارن کروی

مسئله-۴: مقطعی از سطح گاوس کروی $r \leq R$



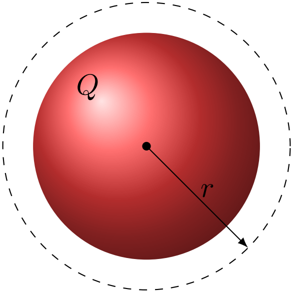
$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

در اینجا بار محصور شده $q_{\text{محصور}} = Qr^3/R^3$ یک بار مثبت می‌باشد. بزرگی میدان E روی تمام نقاط سطح گاوس کروی یکسان است. خطوط میدان بطرف خارج است و با بردار سطحی $\mathrm{d}\vec{A}$ روی سطح کروی هم جهت است.

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = Q\frac{r^3}{R^3} \Rightarrow E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$ بطرف بیرون سطح گاوسی

قانون گاوس-تقارن کروی

مسئله-۴: مقطعی از سطح گاوس کروی $r \geq R$



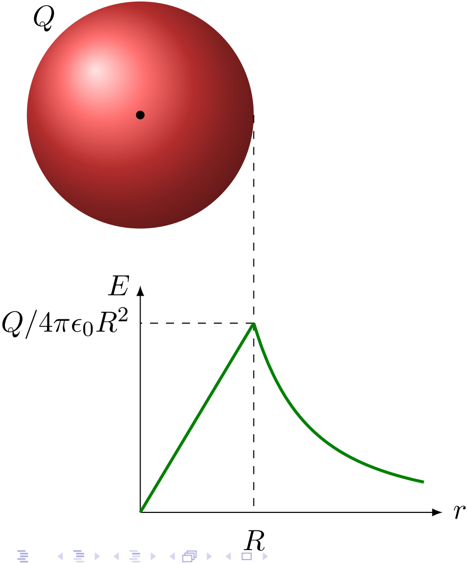
$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

در اینجا بار محصور شده $q_{\text{محصور}} = Q$ یک بار مثبت می‌باشد. بزرگی میدان E روی تمام نقاط سطح گاوس کروی یکسان است. خطوط میدان آن بطرف خارج است و با بردار سطحی $\mathrm{d}\vec{A}$ روی سطح کروی هم جهت است.

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = Q \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{بطرف بیرون سطح گاوسی}$$

قانون گاوس-تقارن کروی

مسئله-۴:



$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

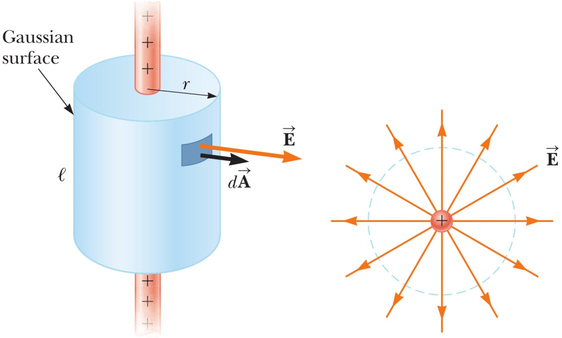
برای $r = R$

$$E(r=R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

قانون گاوس-تقارن استوانه‌ای

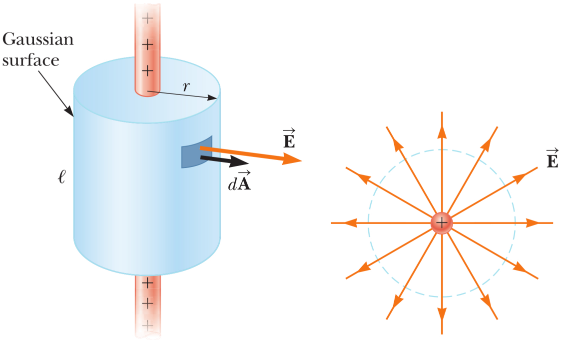
شکل، میله‌ای استوانه‌ای بلند، مستقیم و نامحدود با چگالی بار یکنواخت λ را نشان می‌دهد. با توجه به تقارن میله می‌توان یک سطح گاوس استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع l در نظر گرفت که محور آن با راستای میله همزمان است.

- میدان الکتریکی بصورت شعاعی و عمود بر سطح جانبی گاوسی است و بزرگی یکسانی در روی هر نقطه از آن دارد.
- میدان الکتریکی مماس بر قاعده‌های بالا و پایین سطح گاوسی است.



قانون گاوس-تقارن استوانه‌ای

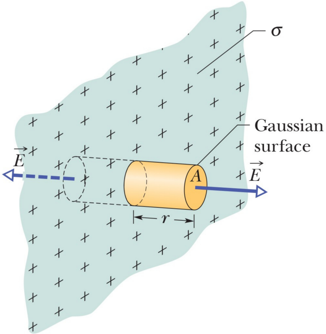
در اینجا بار محصور شده $\lambda l = q_{\text{محصور}}$ یک بار مثبت می‌باشد. شار عبوری روی دو مقطع بالا و پایینی سطح گاوس استوانه‌ای برابر صفر است. بزرگی میدان E روی سطح جانبی استوانه گاوسی یکسان است. خطوط میدان آن بطرف خارج است و با بردار سطحی $\mathrm{d}\vec{A}$ روی سطح کروی هم جهت است.

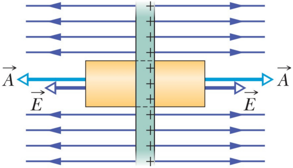


$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} \Rightarrow \epsilon_0 E(2\pi r l) = \lambda l \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$ بطرف بیرون سطح جانبی

قانون گاوس-تقارن صفحه‌ای

شکل، قسمتی از صفحه‌ی نارسانای نامحدود نازک با چگالی سطحی یکنواخت σ است. قصد داریم میدان الکتریکی را در فاصله‌ی r جلوی صفحه بدست آورد.

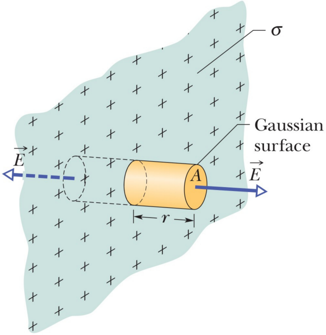


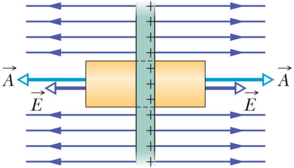


سطح گاوسی مناسب، استوانه‌ای بسته‌ای با مساحت قاعده‌ی A است که بطور عمودی در صفحه فرو رفته است.

قانون گاوس-تقارن صفحه‌ای

سطح گاوسی مناسب، استوانه‌ای بسته‌ای با مساحت قاعده‌ی A است که بطور عمودی در صفحه فرو رفته است.

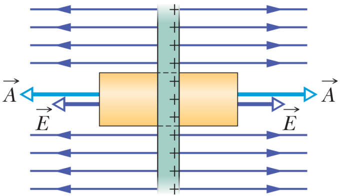




- خطوط میدان عمود بر عنصر سطح $\mathrm{d}\vec{A}$ در سطح جانبی استوانه است. بنابراین شار عبوری از سطح جانبی استوانه گاوسی برابر صفر است.
- خطوط میدان در قاعده سمت چپ و سمت راست بطرف بیرون و هم راستا با عنصر سطح است.

قانون گاوس-تقارن صفحه‌ای

خطوط میدان در قاعده سمت چپ و سمت راست بطرف بیرون و هم راستا با عنصر سطح است.



بار محصور شده در داخل پوسته‌ی استوانه‌ای $q_{\text{محصور}} = \sigma A$ و شار کل

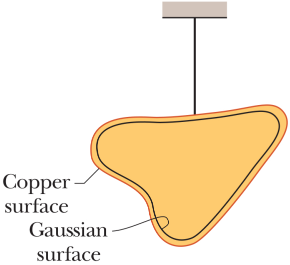
$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\text{قاعده‌ی سمت چپ}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{سطح جانبی}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{قاعده‌ی سمت راست}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = EA + 0 + EA \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 2EA$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} \Rightarrow \epsilon_0(2EA) = \sigma A \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

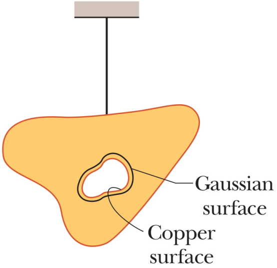
قانون گاوس-رسانا

- **میدان در داخل یک رسانا باید صفر باشد.**
  اگر این طور نباشد، میدان الکتریکی، عامل اصلی نیرو به الکترونهای آزاد رسانش خواهد بود. نتیجه‌ی این نیرو یک جریان الکتریکی همیشگی در داخل رسانا خواهد بود که چنین جریان وجود ندارد.
- **میدان الکتریکی داخلی فقط وقتی ظاهر می شود که رسانا در حال باردار شدن است.**
  در این وضعیت، بارهای اضافی به سرعت طوری توزیع می‌شوند که میدان الکتریکی داخلی برابر صفر شود و بارها دوباره در تعادل الکترواستاتیکی قرار بگیرند.



چون $\vec{E}$ داخل رسانا برابر صفر باشد، شار عبوری از سطح گاوسی نیز برابر صفر خواهد بود. بدین ترتیب بار اضافی بطور کامل به سطح رسانا منتقل می‌شود و هیچ بار اضافه‌ای در داخل جسم رسانا باقی نمی‌ماند.

قانون گاوس-رسانا

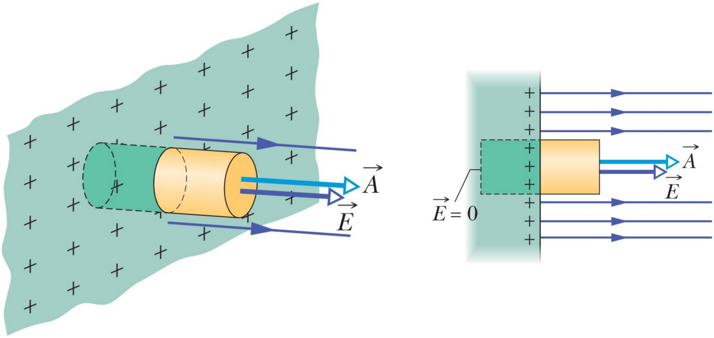


رسانای دارای کاواک

چون در داخل رسانا $\vec{E}$ برابر صفر است هیچ شاری در داخل سطح گاوسی که کاواک را احاطه کرده است، وجود ندارد. طبق قانون گاوس، این سطح هیچ باری را احاطه نکرده است. بنابراین باری روی دیواره‌ی کواک وجود ندارد و مانند حالت قبل همه‌ی بارها روی سطح خارجی رسانا جمع می‌شود.

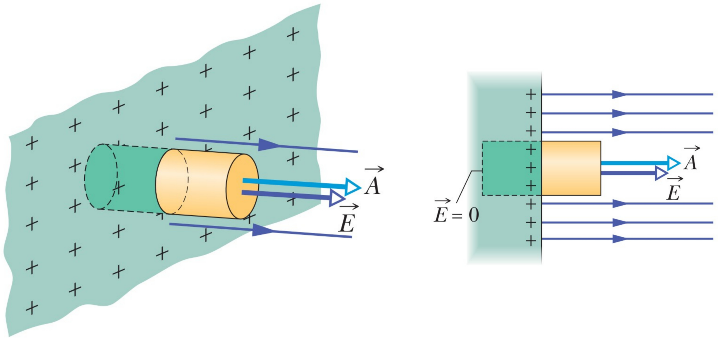
در رسانا، میدان الکتریکی توسط بارها ایجاد می‌شوند و رسانا فقط مسیر ساده‌ی برای بارها ایجاد می کند تا به مکانهایشان که در آنجا در تعادل الکترواستاتیکی هستند بروند.

قانون گاوس-رسانا



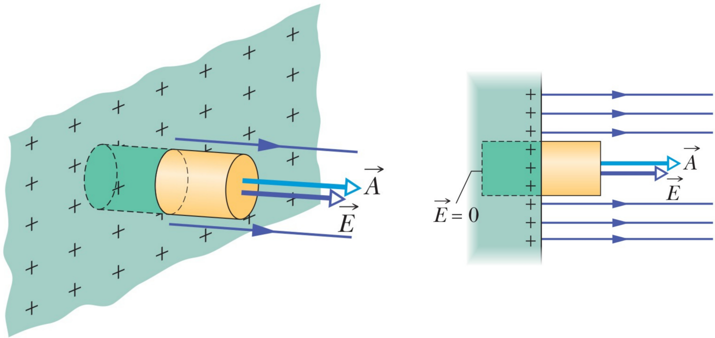
- با توجه به اینکه بار اضافی بطور کامل بطرف سطح رسانا می‌رود و بجز برای رسانای کروی که بار بطور یکنواخت توزیع می‌شود، در سایر رساناها بار بطور یکنواخت توزیع نمی‌شود.
- بنابراین بر بروی سطح غیر کروی تغییر می‌کند و باعث می‌شود تا محاسبه میدان الکتریکی ایجاد شده توسط بارهای سطحی خیلی سخت باشد.
- با این وجود محاسبه‌ی میدان درست در خارج جسم رسانا با استفاده از قانون گاوس امکان‌پذیر است.

قانون گاوس-رسانا



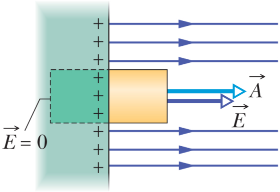
- سطح گاوس استوانه‌ای در حالی که محور آن عمود بر سطح رسانا است در داخل رسانا فرو برده شده است.
- میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است. بنابراین هیچ شاری از قسمت فرو برده شده‌ی سطح گاوسی در داخل رسانا عبور نمی‌کند
- میدان الکتریکی عمود بر قاعده‌ی سطح گاوسی در بیرون رسانا است. بنابراین هیچ شاری از قسمت جانبی سطح گاوس در بیرون رسانا عبور نمی‌کند.

قانون گاوس-رسانا



- سطح گاوس استوانه‌ای در حالی که محور آن عمود بر سطح رسانا است در داخل رسانا فرو برده شده است.
- میدان الکتریکی در داخل رسانا صفر است. بنابراین هیچ شاری از قسمت فرو برده شده‌ی سطح گاوسی در داخل رسانا عبور نمی‌کند
- میدان الکتریکی عمود بر قاعده‌ی سطح گاوسی در بیرون رسانا است. بنابراین هیچ شاری از قسمت جانبی سطح گاوس در بیرون رسانا عبور نمی‌کند.

قانون گاوس-رسانا



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$q_{\text{محصور}} = \sigma A$$

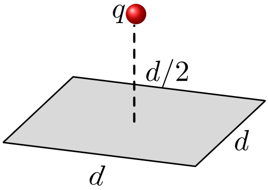
$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\text{قاعده داخلی}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{سطح جانبی داخلی}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{سطح جانبی خارجی}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{قاعده خارجی}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0 + 0 + 0 + EA = EA$$

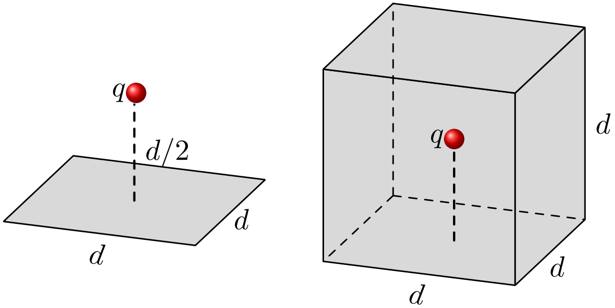
$$\epsilon_0 EA = \sigma A \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

قانون گاوس

مسئله–۵: بار q در فاصله‌ی $d/2$ درست بالای مرکز یک سطح مربعی به ضلع d قرار دارد. شار الکتریکی عبوری از این سطح مربعی را بدست آورید.



مسئله–۵:



اگر بار q را در مرکز مکعبی به ضلع d قرار دهیم. شار عبور از تمامی وجوه مکعب با هم برابر می‌باشد،

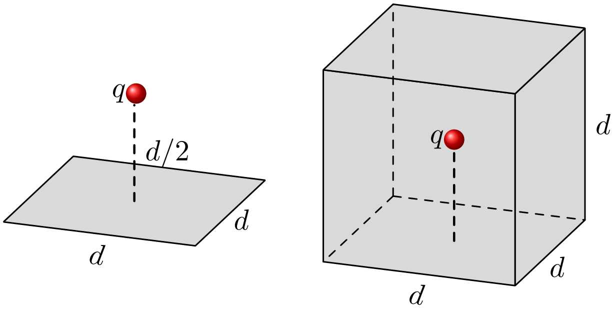
$$\oint_{\text{مکعب}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 6\int_{\text{یک وجه}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

استفاده از قانون گاوس، وقتی سطح گاوس مکعبی با بار محصور شده‌ی $q = q_{\text{محصور}}$ باشد،

$$\epsilon_0 \oint_{\text{مکعب}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} = q$$

قانون گاوس

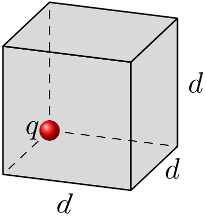
مسئله–۵:



$$\oint_{\text{مکعب}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 6\int_{\text{یک وجه}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

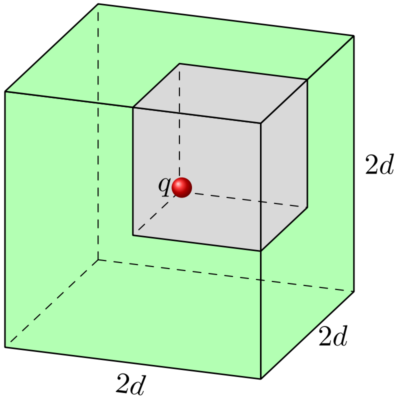
$$\epsilon_0 \oint_{\text{مکعب}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q \Rightarrow 6\epsilon_0 \int_{\text{یک وجه}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q \Rightarrow \int_{\text{یک وجه}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

مسئله–۶: ذره‌ای به بار q در گوشه‌ی سطح گاوسی مکعبی قرار دارد. شار عبور هر وجه را بدست آورید



- شار عبوری از سه وجه مکعب که بار q در گوشه‌ای از آنها قرار گرفته برابر صفر است، چون خطوط میدان ناشی از بار q دقیقا در داخل آن وجوه خوابیده است.
- شار عبور از هر وجه مقابل بار q با هم برابرند.
- برای بدست آوردن شار عبوری از وجوه مقابل به بار q، یک سطح گاوس مکعبی جدید (به رنگ سبز) به ضلع $2d$ در نظر می‌گیریم که بار q در مرکز مکعب (سبز رنگ) و مکعب مسئله در یک گوشه‌ی آن قرار دارد.

مسئله-۶:

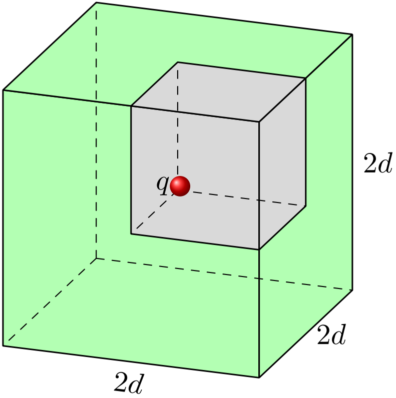


با استفاده از قانون گاوس، شار عبوری از هر وجه سطح گاوس مکعب سبز رنگ برابر است

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} \Rightarrow \epsilon_0 \left(6 \int_{\text{وجه مکعب سبز رنگ}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} \right) = q$$

قانون گاوس

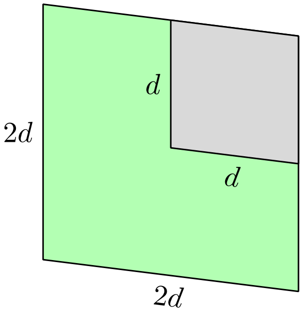
مسئله-۶:



شار عبوری از هر وجه سطح گاوس مکعب سبز رنگ،

$$\int_{\text{وجه مکعب سبز رنگ}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

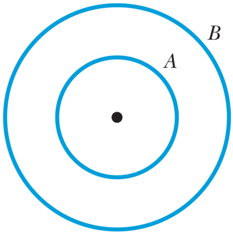
مسئله–۶:

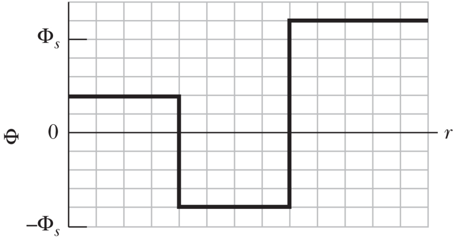


شار عبوری از هر وجه سطح گاوس مکعب خاکستری رنگ $1/4$ شار عبوری از هر وجه سطح گاوس مکعب سبز رنگ است،

$$\int_{\text{وجه مکعب خاکستری رنگ}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{4}\int_{\text{وجه مکعب سبز رنگ}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{q}{24\epsilon_0}$$

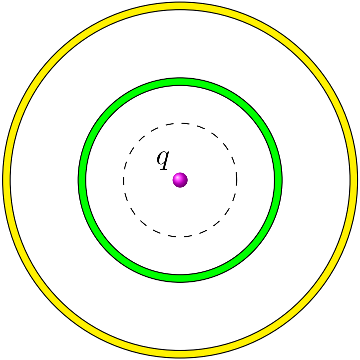
مسئله–۷: یک ذره‌ی باردار در مرکز دو پوسته کروی (هم مرکز، نازک و نارسانا) قرار دارد. شکل زیر سطح مقطع پوسته‌ها را نشان می دهد. نم.دار شار عبوری بر حسب تابعی از شعاع r که نشان داده شده است. الف) بار ذره‌ی مرکزی، ب) بار روی پوسته‌ی A و ج) بار روی پوسته‌ی B را بدست آورید.





قانون گاوس

مسئله-۷:



قانون گاوس برای سطح گاوسی به شعاع r

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} = q \quad \text{نامعلوم}$$

مطابق نمودار شار عبوری Φ از سطح گاوس برای $0 < r \leq R_A$

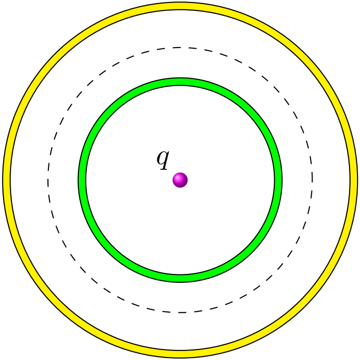
$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{2}{5}\Phi_s$$

از دو عبارت بالا می‌توان بار نامعلوم q را بصورت زیر بدست آورد،

$$q = \frac{2}{5}\epsilon_0 \Phi_s$$

قانون گاوس

مسئله-۷:



قانون گاوس برای سطح گاوسی به شعاع r

$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} = q + q_A \quad \text{نامعلوم}$$

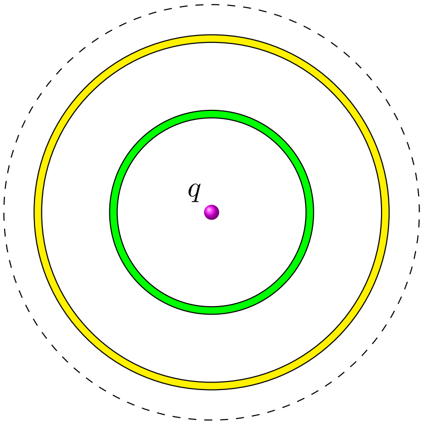
مطابق نمودار شار عبوری Φ از سطح گاوس برای $R_A < r \leq R_B$

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\frac{4}{5}\Phi_s$$

از دو عبارت بالا می‌توان بار نامعلوم q_A را بصورت زیر بدست آورد،

$$q_A = -\frac{6}{5}\epsilon_0 \Phi_s$$

مسئله–۷:



قانون گاوس برای سطح گاوسی به شعاع r

$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} = q+q_A+q_B$$ نامعلوم

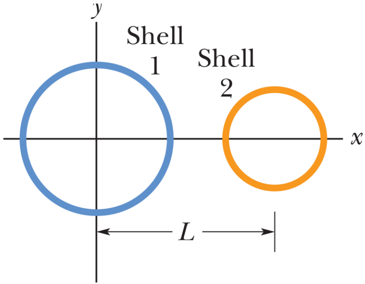
مطابق نمودار شار عبوری Φ از سطح گاوس برای $r > R_B$

$$\Phi = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{6}{5}\Phi_s$$

از دو عبارت بالا می‌توان بار نامعلوم q_B را بصورت زیر بدست آورد،

$$q_B = 2\epsilon_0\Phi_s$$

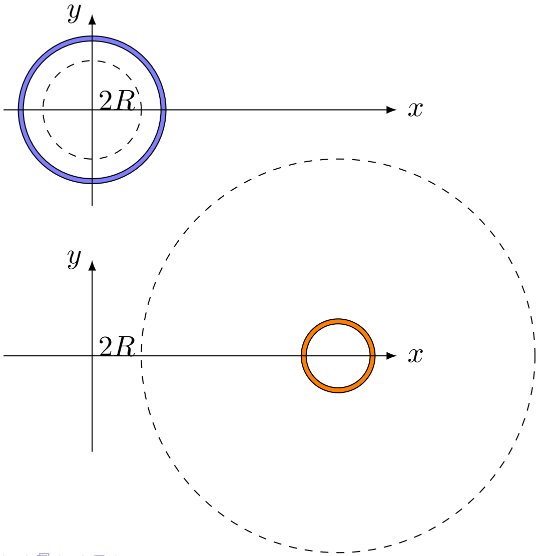
مسئله–۸: شکل دو پوسته کروی نارسانا را نشان می‌دهد. پوسته‌ی ۱ دارای چگالی بار سطحی 3σ و شعاع $3R$ است. پوسته‌ي ۲ دارای چگالی بار سطحی 2σ و شعاع $2R$ است. مراکز پوسته‌ها از هم به اندازه‌ی $L = 10R$ دارند. میدان الکتریکی را برایند در $x = 2R$ را بر حسب بردارهای یکه بدست آورید.



میدان الکتریکی ناشی از هر دو بار را بطور مستقل در نقطه‌ی $x = 2R$ بدست می‌آوریم.

قانون گاوس

مسئله–۸:



مسئله-۸:

برای پوسته‌ی ۱، سطح گاوس به مرکز پوسته و شعاع $2R$، بار محصور شده‌ای برابر با صفر دارد.
بنابراین میدان ناشی از پوسته‌ی ۱ در نقطه‌ی $x = 2R$ برابر صفر است.

$$\vec{E}_1 = 0$$

برای پوسته‌ی ۲، سطح گاوس به مرکز پوسته و شعاع $8R$، بار محصور شده‌ای برابر با $32\pi\sigma R^2$ دارد. بنابراین میدان ناشی از پوسته‌ی ۲ در نقطه‌ی $x = 2R$ با استفاده از قانون گاوس بصورت زیر داده می‌شود،

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{32\pi\sigma R^2}{(8R)^2} = \frac{\sigma}{8\epsilon_0}$$

جهت میدان بطرف $-x$ می‌باشد. بنابراین

$$\vec{E}_2 = -\hat{i}\frac{\sigma}{8\epsilon_0}$$

مسئله-۸:

برای پوسته‌ی ۱،

$$\vec{E}_1 = 0$$

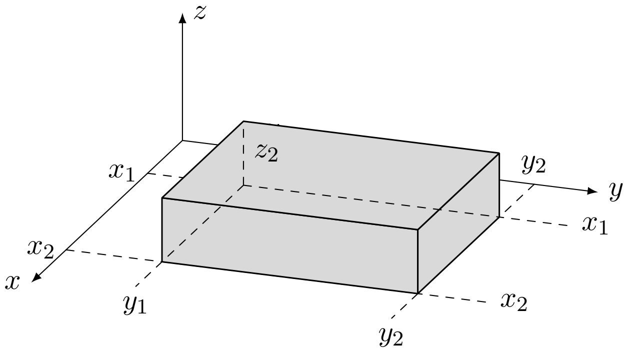
برای پوسته‌ی ۲،

$$\vec{E}_2 = -\hat{i}\frac{\sigma}{8\epsilon_0}$$

برآیند میدان نهایی در $x = 2R$ برابر است با

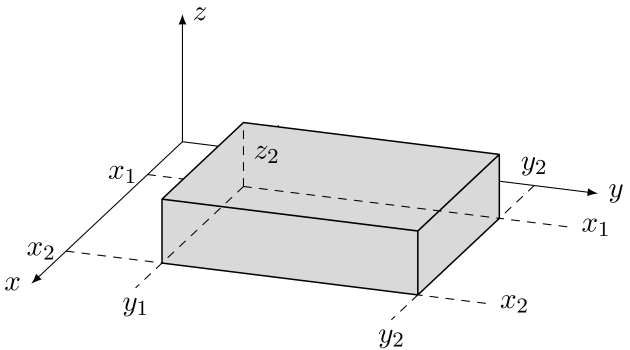
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\hat{i}\frac{\sigma}{8\epsilon_0}$$

مسئله-۹: سطح گاوس جعبه مانند شکل زیر دارای بار $+24\epsilon_0$ است و در میدان الکتریکی $\vec{E} =$ $[bx\hat{i} + (1+2y)\hat{j} - 3\hat{k}]\ \mathrm{N/C}$ قرار دارد. x و y بر حسب متر و b ثابت است. b را بدست آورید ($x_1 = y_1 = 1\ \mathrm{m}$ ، $x_2 = 3\ \mathrm{m}$ ، $y_2 = 4\ \mathrm{m}$ و $z_2 = 1\ \mathrm{m}$).



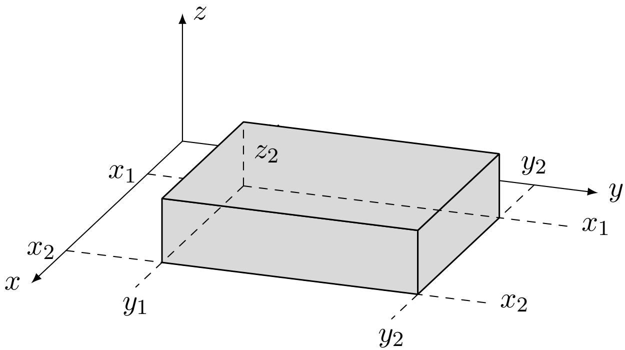
$$\text{قانون گاوس}:\quad \epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} = 24\epsilon_0 \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 24$$

مسئله-۹:



$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\text{وجه سمت چپ}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + + \int_{\text{وجه عقبی}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{وجه پایین}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$
$$+ \int_{\text{وجه سمت راست}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{وجه بالا}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{وجه جلویی}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

مسئله-۹:

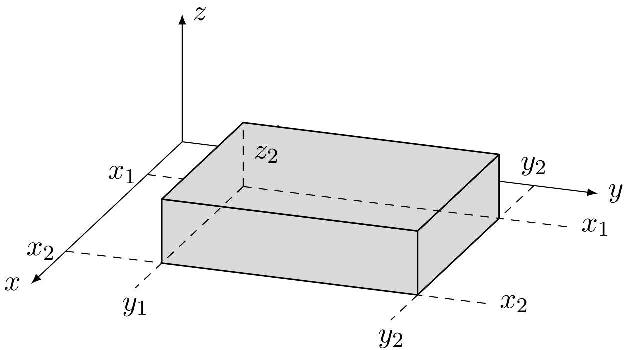


$$y = y_1 = 1: \int_{\text{وجه سمت چپ}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int [bx\hat{i} + (1+2y)\hat{j} - 3\hat{k}] \cdot [-\hat{j}\mathrm{d}x\mathrm{d}z]$$

$$\int_{\text{وجه سمت چپ}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -3\left(\int_{x_1=1}^{x_2=3} \mathrm{d}x\right)\left(\int_{z_1=0}^{z_2=1} \mathrm{d}z\right) = -6$$

قانون گاوس

مسئله–۹:

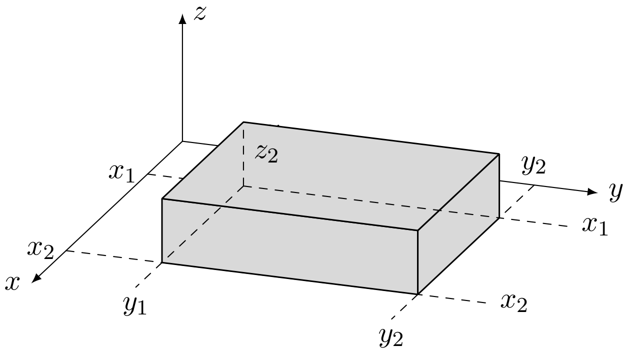


$$y = y_2 = 4 : \int_{\text{وجه سمت راست}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int [bx\hat{i} + (1+2y)\hat{j} - 3\hat{k}] \cdot [\hat{j}\mathrm{d}x\mathrm{d}z]$$

$$\int_{\text{وجه سمت راست}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 9 \left(\int_{x_1=1}^{x_2=3} \mathrm{d}x \right) \left(\int_{z_1=0}^{z_2=1} \mathrm{d}z \right) = 18$$

قانون گاوس

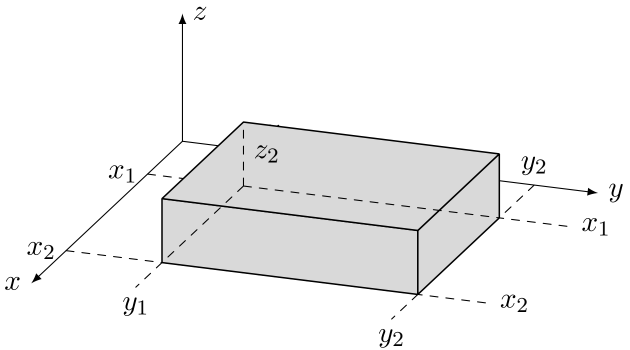
مسئله–۹:



$$x = x_1 = 1 : \int_{\text{وجه عقبی}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int [bx\hat{i} + (1+2y)\hat{j} - 3\hat{k}] \cdot [-\hat{i}\mathrm{d}y\mathrm{d}z]$$

$$\int_{\text{وجه سمت عقبی}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -b \left(\int_{y_1=1}^{y_2=4} \mathrm{d}y \right) \left(\int_{z_1=0}^{z_2=1} \mathrm{d}z \right) = -3b$$

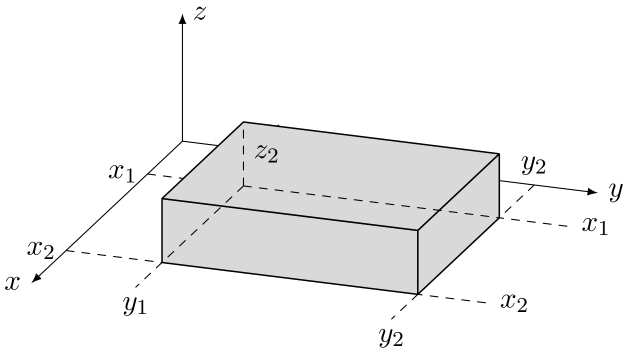
مسئله–۹:



$$x = x_2 = 3 : \int_{\text{وجه سمت جلویی}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int [bx\hat{i} + (1+2y)\hat{j} - 3\hat{k}] \cdot [\hat{i}\mathrm{d}y\mathrm{d}z]$$

$$\int_{\text{وجه سمت جلویی}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 3b \left(\int_{y_1=1}^{y_2=4} \mathrm{d}y \right) \left(\int_{z_1=0}^{z_2=1} \mathrm{d}z \right) = 9b$$

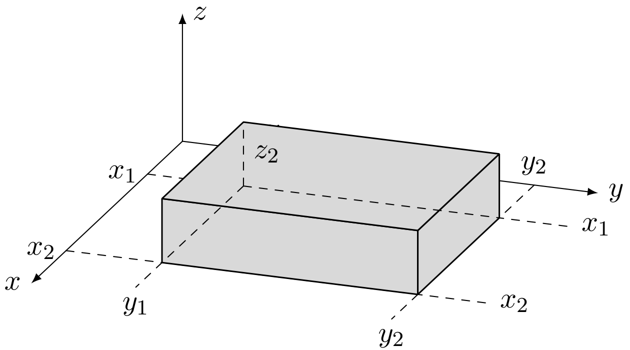
مسئله-۹:



$$z=0:\ \int_{\text{وجه پایینی}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int [bx\hat{i} + (1+2y)\hat{j} - 3\hat{k}]\cdot[-\hat{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$

$$\int_{\text{وجه سمت پایینی}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 3\left(\int_{x_1=1}^{x_2=3} \mathrm{d}x\right)\left(\int_{y_1=1}^{y_2=4} \mathrm{d}y\right) = 18$$

مسئله–۹:



$$z = z_2 = 1: \int_{\text{وجه سمت بالایی}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int [bx\hat{i} + (1+2y)\hat{j} - 3\hat{k}]\cdot[\hat{k}\mathrm{d}x\mathrm{d}y]$$

$$\int_{\text{وجه سمت بالایی}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -3\left(\int_{x_1=1}^{x_2=3}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{y_1=1}^{y_2=4}\mathrm{d}y\right) = -18$$

قانون گاوس

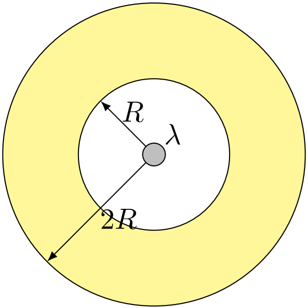
مسئله–۹:

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_{\text{وجه سمت چپ}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + + \int_{\text{وجه عقبی}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{وجه پایین}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$
$$+ \int_{\text{وجه سمت راست}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{وجه بالا}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \int_{\text{وجه جلویی}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -6 - 3b + 18 + 18 + 9b - 18 = 12 + 6b$$

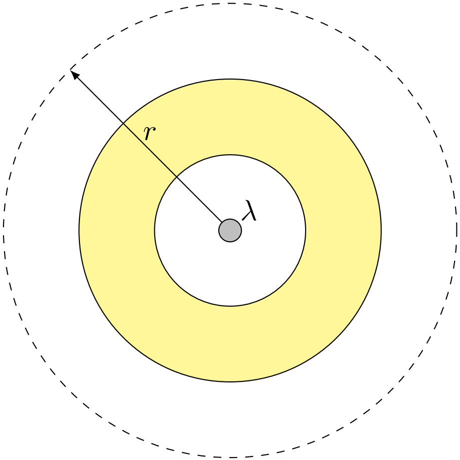
$$\text{قانون گاوس} : \quad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 24 \Rightarrow 12 + 6b = 24 \Rightarrow b = 2$$

مسئله–۱۰: باری با چگالی خطی یکنواخت λ بر روی میله‌ای نازک، بند و رسانا توزیع شده است. میله با استوانه نارسانای بلند با شعاع داخلی R و شعاع خارجی $2R$ هم محور است. کل بار پوسته برابر صفر است. الف) اندازه‌ی میدان الکتریکی در فاصله‌ی $3R$ از محور پوسته چقدر است؟ ب) چگالی سطحی بار وری سطح داخلی و خارجی پوسته را بدست آورید.



قانون گاوس

مسئله- ۱۰:



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

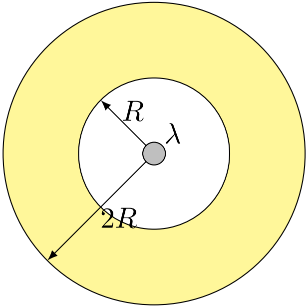
$$\epsilon_0 E(2\pi r) l = \lambda l$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

برای $r = 3R$

$$E = \frac{\lambda}{6\pi\epsilon_0 R}$$

مسئله- ۱۰:



میدان الکتریکی در داخل رسانا برابر صفر است.
با توجه به اینکه خط بار دارای بار مثبت است
برای هر طول دلخواه l بر روی سطح داخلی بار $-\lambda l$ و بر روی سطح خارجی بار $+\lambda l$ قرار می گیرد.

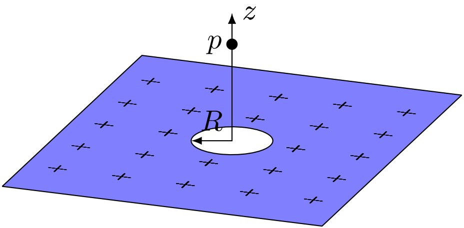
چگالی بار سطحی بر روی سطح داخلی $\sigma_{\text{داخلی}}$ به شعاع R

$$q_{\text{داخلی}} = -\lambda l \Rightarrow (2\pi R l)\sigma_{\text{داخلی}} = -\lambda l \Rightarrow \sigma_{\text{داخلی}} = -\frac{\lambda}{2\pi R}$$

چگالی بار سطحی بر روی سطح خارجی $\sigma_{\text{خارجی}}$ به شعاع $2R$

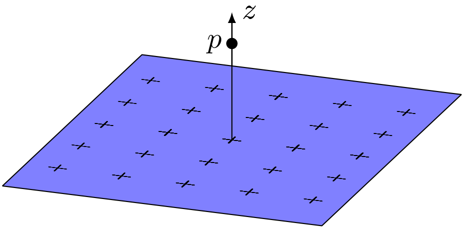
$$q_{\text{خارجی}} = \lambda l \Rightarrow (4\pi R l)\sigma_{\text{خارجی}} = \lambda l \Rightarrow \sigma_{\text{خارجی}} = \frac{\lambda}{4\pi R}$$

مسئله–۱۱: درشکل، سوراخ دایره‌ای کوچکی به شعاع R وسط یک صفحه‌ی نارسانای نامتناهی ایجاد شده و چگالی بار سطحی در روی صفحه σ است.مبدا محور z در مرکز سوراخ عمود بر سطح رسم شده است. با استفاده از اصل برهم نهای میدان در نقطه‌ی p را بدست آورید.



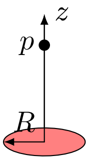
قانون گاوس

مسئله–۱۱:
در اینجا از اصل برهم نهی استفاده می‌کنیم.



در غیاب حفره برای سطح نامتناهی به چگالی بار سطحی σ، میدان بار الکتریکی در بزدیک سطح برابر است با

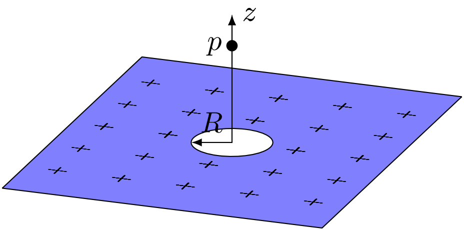
$$E_{\text{سطح نامتناهی}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



برای حفره‌ای با چگالی بار سطحی $-\sigma$، میدان بار الکتریکی در نقطه‌ی p برابر است با

$$E_{\text{حفره}} = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

مسئله–۱۱:



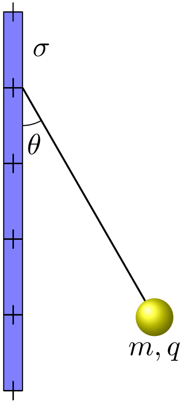
$$E_{\text{سطح نامتناهی}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_{\text{حفره}} = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

میدان برایند

$$E = E_{\text{سطح نامتناهی}} + E_{\text{حفره}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

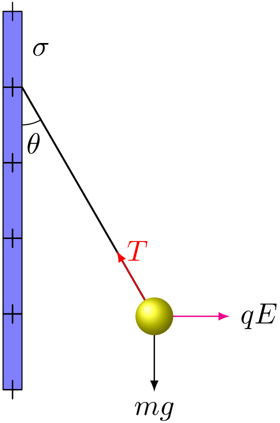
مسئله–۱۲: توپ کوچک نارسانا به جرم m و بار q که بار بطور یکنواخت در حجم آن توزیع شده از یک نخ عایق و سبک آویزان شده است. نخ با صفحه‌ی قائم نارسانایی با توزیع بار سطحی یکنواخت زاویه‌ی θ می‌سازد. با فرض اینکه سطح نامتناهی است، چگالی بار سطحی σ را بدست آورید.



مسئله-۱۲:

میدان الکتریکی در نزدیکی یک صفحه‌ی باردار نامتناهی به چگالی سطحی σ

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



برایند نیروهای وارد بر توپ برابر صفر است

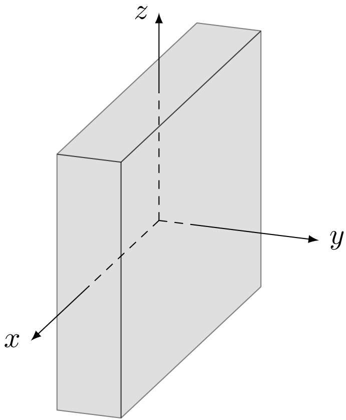
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow qE - T\sin\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\cos\theta - mg = 0$$

$$\tan\theta = \frac{qE}{mg} = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0 mg}$$

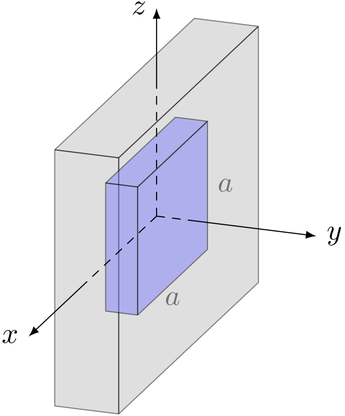
$$\sigma = \left(\frac{2\epsilon_0 mg}{q}\right)\tan\theta$$

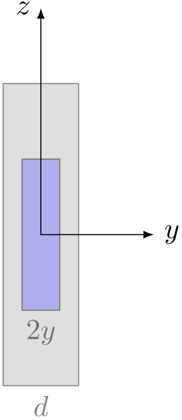
مسئله–۱۳: شکل زیر، سطح مقطع یک بره‌ی خیلی بزرگ و نارسانا را نشان می‌دهد که ضخامت آن d و چگالی حجمی آن ρ است. مبدا محور y در مرکز بره قرار دارد. میدان الکتریکی را در الف) $y=0$، ب) $y<d/2$ و ج) $y>d/2$ را بدست آورید.



قانون گاوس

مسئله–۱۳:

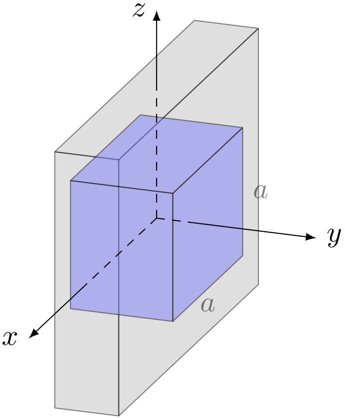


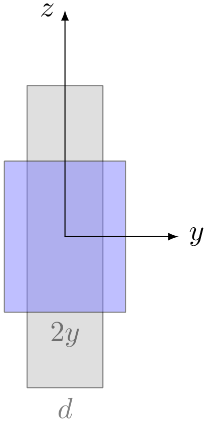


$$0 \le y < d/2;\ \epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} \Rightarrow \epsilon_0(2Ea^2) = \rho(2ya^2) \Rightarrow E = \frac{\rho y}{\epsilon_0}$$

قانون گاوس

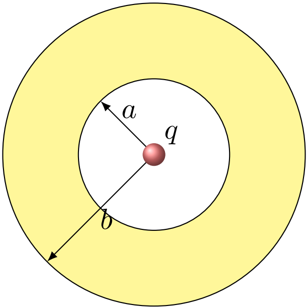
مسئله–۱۳:





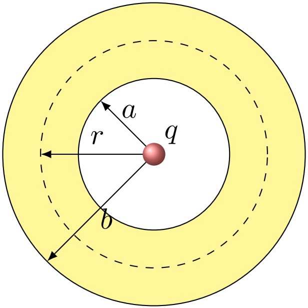
$$y > d/2;\ \epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} \Rightarrow \epsilon_0(2Ea^2) = \rho(da^2) \Rightarrow E = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}$$

مسئله–۱۴: در شکل پوسته کروی نارسانا با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b دارای چگالی حجمی $\rho = A/r$ است A ثابت و r فاصله از مرکز پوسته است. علاوه بر این یک گوی کوچک با بار q در مرکز آن قرار دارد. مقدار A چقدر باشد تا میدان الکتریکی داخل پوسته $(a \leq r \leq b)$ یکنواخت باشد؟



قانون گاوس

مسئله–۱۴:

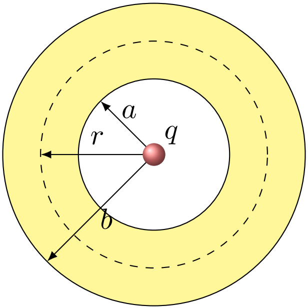


$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q + \int_a^r \frac{A}{r} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = q + 4\pi A \left[\frac{1}{2} r^2\right]_a^r$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q + 2\pi A(r^2 - a^2)$$

مسئله–۱۴:



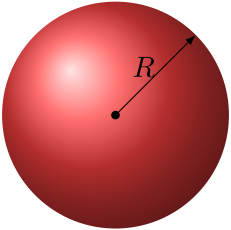
$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q + 2\pi A(r^2 - a^2)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{A}{2\epsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\epsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{A}{2\epsilon_0} + \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\frac{q}{2\pi} - Aa^2\right)\frac{1}{r^2}$$

وقتی میدان الکتریکی داخل پوسته یکنواخت است که ضریب جمله دوم برابر صفر باشد،

$$\frac{q}{2\pi} - Aa^2 = 0 \Rightarrow A = q/2\pi a^2$$

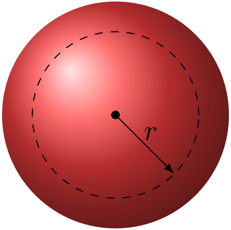
مسئله–۱۵: کره‌ی توپر رسانا به شعاع R دارای بار غیره یکنواخت با چگالی حجمی $\rho = \rho_0 r/R$ در فاصله‌ی شعاعی r از مرکز کره است. الف) کل بار کره چقدر است؟ ب) اندازه میدان الکتریکی E در داخل و خارج کره بدست آورید.



$$\text{بار کل} : \; q_{\text{کل}} = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$q_{\text{کل}} = \frac{4\pi\rho_0}{R}\int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho_0}{R}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R \Rightarrow q_{\text{کل}} = \pi\rho_0 R^3$$

مسئله–۱۵:



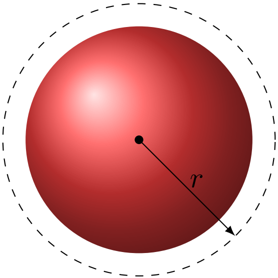
$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = \frac{4\pi \rho_0}{R} \int_0^r r^3 \mathrm{d}r = \frac{4\pi\rho_0}{R}\left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^r$$

$$0 \leq r \leq R: \quad E = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0 R} r^2$$

قانون گاوس

مسئله–۱۵:



$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = \pi\rho_0 R^3$$

$$r \geq R: \quad E = \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2}$$

مسئله–۱۶: یک توزیع بار با تقارن کروی ولی غیر یکنواخت، میدان الکتریکی با اندازه‌ی $E = kr^4$ را در راستای شعاع به طرف خارج ایجاد می کند. r فاصله‌ی شعاعی از مرکز و k ثابت است. چگالی حجمی ρ توزیع بار را بدست آورید.

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = \int_0^r \rho(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$\epsilon_0 k r^6 = \int_0^r \rho(r) r^2 \mathrm{d}r$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\epsilon_0 k r^6\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^r \rho(r) r^2 \mathrm{d}r$$

$$6\epsilon_0 k r^5 = \rho(r) r^2 \Rightarrow \rho(r) = 6\epsilon_0 k r^3$$

قانون گاوس

مسئله–۱۶: با استفاده از قضیه دیورژانس (روشی دیگر)

$$\text{قانون گاوس}: \quad \epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}} = \int \rho(r)\mathrm{d}V$$

$$\text{قضیه دیورژانس}: \quad \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int \nabla\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V$$

از مقایسه‌ی دو رابطه‌ی بالا

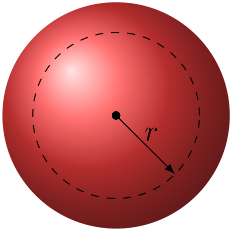
$$\epsilon_0 \int \nabla\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V = \int \rho(r)\mathrm{d}V$$

$$\int \left(\nabla\cdot\vec{E} - \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}\right)\mathrm{d}V = 0 \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} - \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}}$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}(r^2E_r)}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}kr^6 = 6kr^3$$

$$6kr^3 = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho(r) = 6\epsilon_0 kr^3$$

مسئله–۱۷: یک کره‌ی توپر نارسانا دارای چگالی بار حجمی ρ است. فرض کنید r برداری از مرکز کره به یک نقطه دلخواه P در داخل کره است. الف) نشان دهید میدان الکتریکی در P بصورت $\vec{E} = \rho\vec{r}/3\epsilon_0$ است. ب) مطابق شکل حفره‌ای را در درون کره ایجاد می‌کنیم. باستفاده از اصل برهم نهی نشان دهید میدان در داخل تمام نقاط داخل حفره یکنواخت و برابر $\vec{E} = \rho\vec{a}/3\epsilon_0$ است. a بردار مکان از مرکز کره به مرکز حفره است.



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

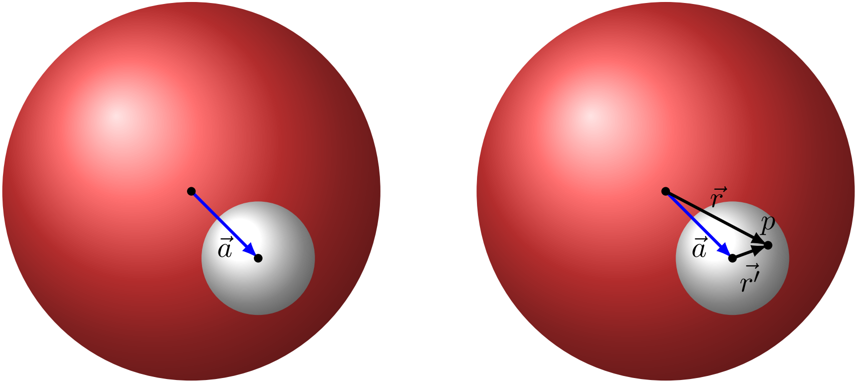
$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$0 \leq r \leq R: \quad E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

میدان بصورت شعاعی می‌باشد

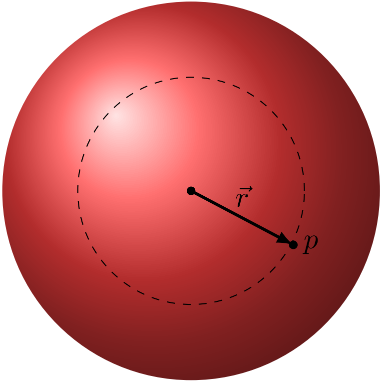
$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r\hat{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}$$

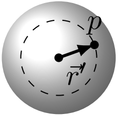
مسئله–۱۷: ب) مطابق شکل حفره‌ای را در درون کره ایجاد می‌کنیم. باستفاده از اصل برهم نهی نشان دهید میدان در داخل تمام نقاط داخل حفره یکنواخت و برابر $\vec{E} = \rho\vec{a}/3\epsilon_0$ است. a بردار مکان از مرکز کره به مرکز حفره است.



$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{r'} \Rightarrow \vec{a} = \vec{r} - \vec{r'}$$

مسئله–۱۷:





$$\vec{E}_{\text{کره بدون حفره}} = \frac{+\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}$$

$$\vec{E}_{\text{حفره به تنهایی}} = \frac{-\rho}{3\epsilon_0}\vec{r'}$$

مسئله–۱۷:

$$\vec{E}_{\text{کره بدون حفره}} = \frac{-\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}$$

$$\vec{E}_{\text{حفره به تنهایی}} = \frac{-\rho}{3\epsilon_0}\vec{r'}$$

با استفاده از اصل برهم نهی

$$\vec{E}_p = \vec{E}_{\text{کره بدون حفره}} + \vec{E}_{\text{حفره به تنهایی}}$$

$$\vec{E}_p = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r} + \frac{-\rho}{3\epsilon_0}\vec{r'} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r} - \vec{r'})$$

از آنجایی که $\vec{a} = \vec{r} - \vec{r'}$ بنابراین

$$\vec{E}_p = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{a}$$