فیزیک ۲
پتانسیل الکتریکی

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

پتانسیل الکتریکی

یادآوری از فیزیک ۱، وقتی کار نیروی F در یک مسیر رفت و برگشت برابر صفر شود و یا کار نیروی F به مسیر بستگی نداشته باشد و فقط به نقاط اولیه و نهایی مسیر حرکت بستگی داشته باشد، نیروی F را نیروی پایستار می‌نامند. در این شرایط، کار نیروهای پایستار و تغییرات انرژی پتانسیل سیستم بصورت زیر داده می‌شود،

$$\Delta U = U_{\text{حالت نهایی}} - U_{\text{حالت اولیه}} = -W_{\text{نیروی پایستار}} = -\int_{\text{حالت اولیه}}^{\text{حالت نهایی}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

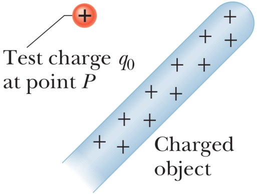
معمولا حالت اولیه را بعنوان مرجع پتانسیل انتخاب می‌کنیم و مقدار آنرا برابر با صفر قرار می‌دهیم $(U_{\text{مرجع}} = 0)$،

$$U_{\text{حالت نهایی}} - U_{\text{مرجع}} = -\int_{\text{مرجع}}^{\text{حالت نهایی}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$U_{\text{حالت نهایی}} = -\int_{\text{مرجع}}^{\text{حالت نهایی}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

پتانسیل الکتریکی

انرژی پتانسیل U مربوط به به بار آزمون مثبت q_0 ناشی از میله‌ی باردار



> برای پیدا کردن انرژی پتانسیل، ابتدا به یک نقطه مرجع نیاز داریم که در آن $U_\infty = 0$ باشد.

> یک انتخاب معقول این است که بار آزمون در ابتدا در فاصله بینهایت از میله باردار قرار داشته باشد. چون در بینهایت بار آزمون و میله‌ی باردار هیچ برهمکنشی با یکدیگر ندارد.

> سپس بار آزمون را از بینهایت به نقطه‌ی p آورده می‌شود. در طی مسیر، کار انجام شده توسط نیروی الکتریکی وارد بر بار آزمون q_0 ناشی از میله باردار را محاسبه می‌کنم.

$$U_{\text{انرژی پتانسیل الکتریکی}} = -W_{\text{نیروی الکتریکی}}$$

پتانسیل الکتریکی

رابطه نیروی الکتریکی و میدان الکتریکی

$\vec{E}_{\text{میدان الکتریکی}}$

$\vec{F}_{\text{نیروی الکتریکی}}$

$$\vec{F}_{\text{نیروی الکتریکی}} = q\vec{E}_{\text{میدان الکتریکی}}$$

رابطه‌ی انرژی پتانسیل الکتریکی و پتانسیل الکتریکی در مقایسه با رابطه‌ی نیروی الکتریکی و میدان الکتریکی

$V_{\text{پتانسیل الکتریکی}}$

$U_{\text{انرژی پتانسیل الکتریکی}}$

$$U_{\text{انرژی پتانسیل الکتریکی}} = qV_{\text{پتانسیل الکتریکی}}$$

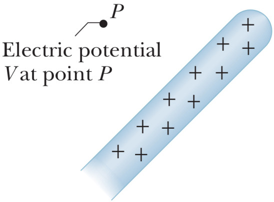
پتانسیل الکتریکی

رابطه‌ی انرژی پتانسیل الکتریکی و پتانسیل الکتریکی

$U_{\text{انرژی پتانسیل الکتریکی}}$

$V_{\text{پتانسیل الکتریکی}}$

$$U_{\text{انرژی پتانسیل الکتریکی}} = qV_{\text{پتانسیل الکتریکی}}$$



- پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ی p صرف‌نظر از بار آزمون در آن نقطه بررسی می‌شود.
- پتانسیل الکتریکی یک کمیت اسکالر است و واحد آن ولت است که $1\ \text{V} = 1\ \text{J/C}$.

پتانسیل الکتریکی

بدست آوردن **پتانسیل الکتریکی** از **میدان الکتریکی**

> نیروی الکتریکی یک نیروی پایستار است.

$$U_{\text{نهایی}} - U_{\text{اولیه}} = -W_{\text{نیروی الکتریکی}} = -\int_{\text{اولیه}}^{\text{نهایی}} \vec{F}_{\text{الکتریکی}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

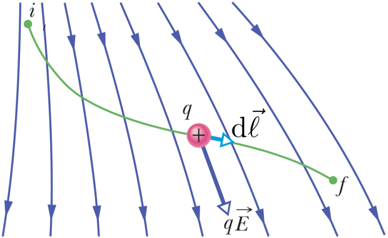
از آنجایی که

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad U = qV$$

برای یک بار دلخواه q داریم

$$q(V_{\text{نهایی}} - V_{\text{اولیه}}) = -W_{\text{میدان الکتریکی}}$$

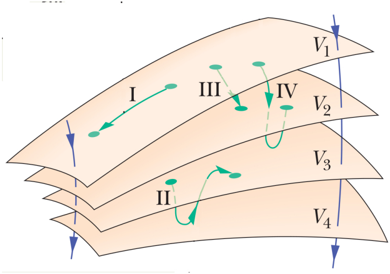
$$W_{\text{میدان الکتریکی}} = q\int_{\text{اولیه}}^{\text{نهایی}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$



$$\boxed{V_{\text{نهایی}} - V_{\text{اولیه}} = -\int_{\text{اولیه}}^{\text{نهایی}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \quad \text{یا} \quad V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}$$

پتانسیل الکتریکی-سطوح همپتانسیل

سطوح هم پتانسیل مکان هندسی نقاطی هستند که دارای پتانسیل یکسانی هستند.



وقتی ذره‌ای باردار بین دو نقطه i و f بر روی یک سطح هم پتانسیل حرکت می‌کند، یعنی

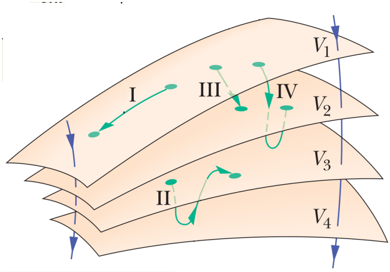
$$V_f = V_i$$

مستقل ار مسیر، کاری بر روی ذره‌ی باردار توسط میدان الکتریکی انجام نمی‌شود،

$$V_f = V_i \Rightarrow V_f - V_i = 0 \Rightarrow \int_i^f \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0 \Rightarrow W_{\text{میدان الکتریکی}} = 0$$

پتانسیل الکتریکی-سطوح همپتانسیل

سطوح هم پتانسیل مکان هندسی نقاطی هستند که دارای پتانسیل یکسانی هستند.



> کار انجام شده در مسیرهای I و II برابر صفر است. چون هر یک از مسیرها از یک سطح هم پتانسیل شروع می‌شود و به همان سطح هم پتانسیل ختم می‌شود، هیچ تغییری در پتانسیل ایجاد نمی‌شود و کار انجام شده بر روی ذره‌ی باردار برابر صفر است.

> کار انجام شده بر روی ذره باردار هنگام حرکت از نقطه اولیه به نقطه نهایی بر روی مسیرهای III و IV برابر صفر نیست. ولی کار انجام شده بر روی هر دو مسیر یکسان هستند زیرا هر دو مسیرها پتانسیل اولیه و نهایی یکسانی دارند. در حقیقت مسیرها دو سطح هم پتانسیل V_1 و V_2 را به هم وصل می‌کنند.

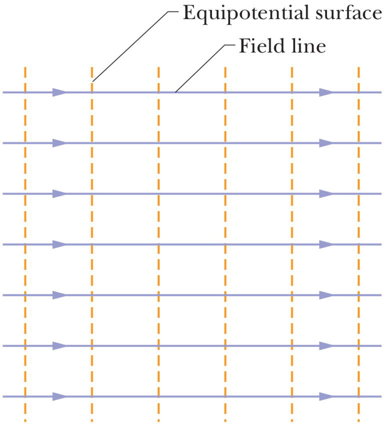
پتانسیل الکتریکی-سطوح همپتانسیل

- سطوح هم پتانسیل هموار عمود بر خطوط میدان الکتریکی $\vec{E}$ است.
- اگر میدان الکتریکی بر سطوحی عمود نباشد، می‌بایست مولفه‌ای در امتداد آن سطح داشته باشد. حضور چنین مولفه‌ای باعث می‌شود که کار روی ذره‌ی باردار در امتدا مسیری بر روی سطوح هم پتانسیل مخالف صفر باشد. این نتیجه در تناقض با ماهیت سطوح هم پتانسیل است که کار نیروی انجام شده برابر صفر است.

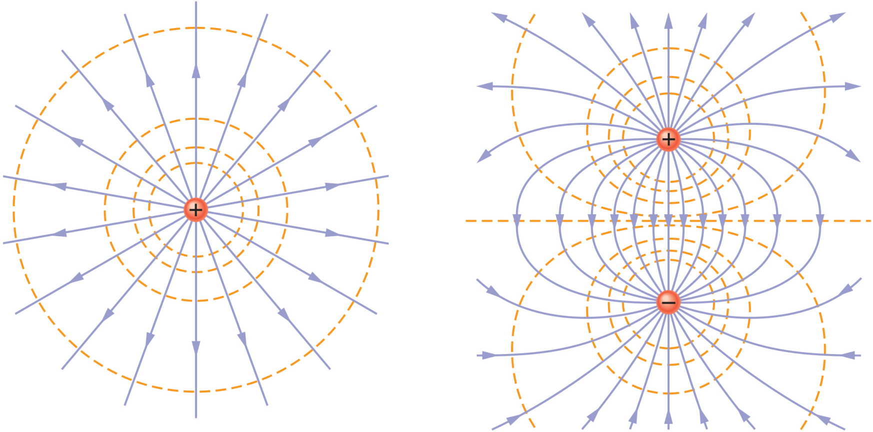
$$V_f = V_i \Rightarrow V_f - V_i = 0$$

$$\int_i^f \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

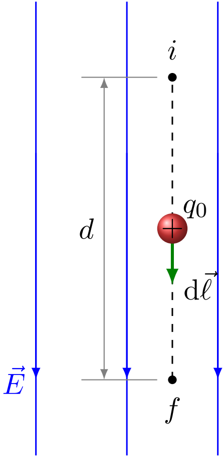
$$W_{\text{میدان الکتریکی}} = 0$$



پتانسیل الکتریکی-سطوح هم‌پتانسیل



پتانسیل الکتریکی-محاسبه پتانسیل از میدان



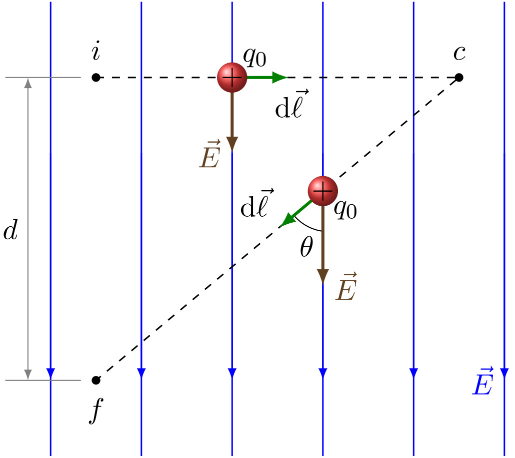
$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = E\mathrm{d}\ell$$

$$V_f - V_i = -\int_i^f E\mathrm{d}\ell = -E\int_i^f \mathrm{d}\ell$$

$$\Delta V = V_f - V_i = -Ed$$

پتانسیل الکتریکی-محاسبه پتانسیل از میدان



$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_i^c \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_c^f \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

پتانسیل الکتریکی-محاسبه پتانسیل از میدان

$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_i^c \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} - \int_c^f \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$i \to c: \quad \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$

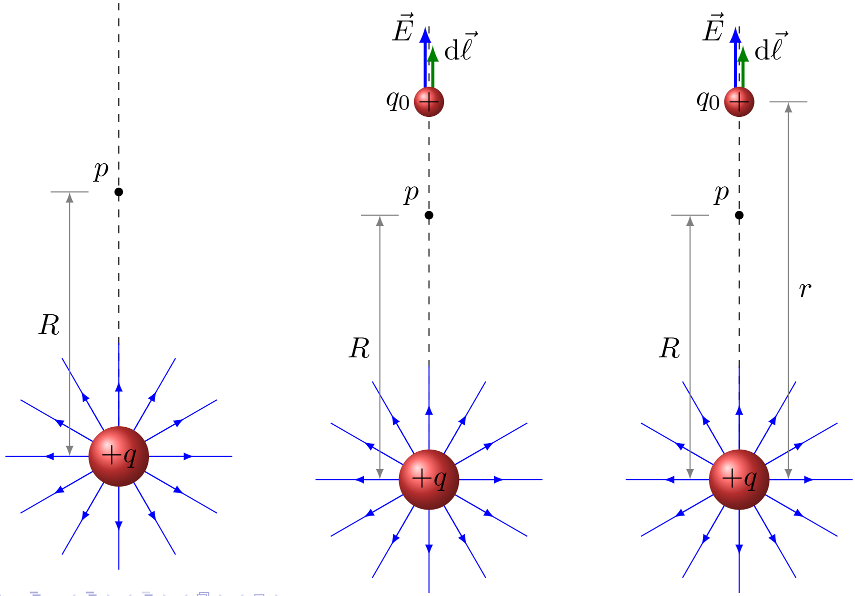
$$c \to f: \quad \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = E\mathrm{d}\ell \cos\theta$$

$$\Delta V = V_f - V_i = 0 - E\cos\theta \int_c^f \mathrm{d}\ell = -E\cos\theta \ell_{cf}, \qquad \cos\theta \ell_{cf} = d$$

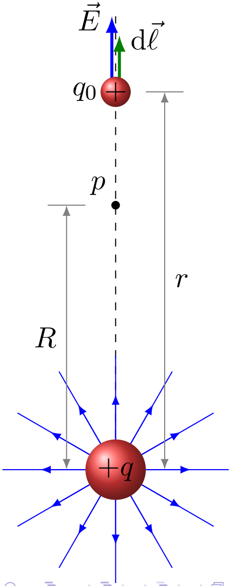
$$\Delta V = V_f - V_i = -Ed$$

تغییرات پتانسیل بین دو نقطه‌ی i و f به مسیر حرکت بستگی ندارند.

پتانسیل الکتریکی-ذره‌ی باردار



پتانسیل الکتریکی-ذره‌ی باردار



$$V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = E\mathrm{d}\ell\cos\theta$$

در اینجا $\vec{E}$ و $\mathrm{d}\vec{\ell}$ هم راستا هستند $(\theta = 0)$،

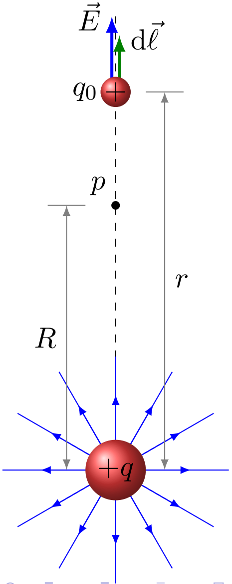
$$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = E\mathrm{d}\ell$$

$$V_f - V_i = -\int_i^f E\mathrm{d}\ell$$

برای $\mathrm{d}r = \mathrm{d}\ell$ و اگر بار آزمون q_0 را بصورت شعاعی از بینهایت به ذره q نزدیک کنیم

$$\boxed{V(R) - V_\infty = -\int_\infty^R E\mathrm{d}r}$$

پتانسیل الکتریکی-ذره‌ی باردار



$$V(R) - V_\infty = -\int_\infty^R E\mathrm{d}r = -\int_\infty^R \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\right)\mathrm{d}r$$

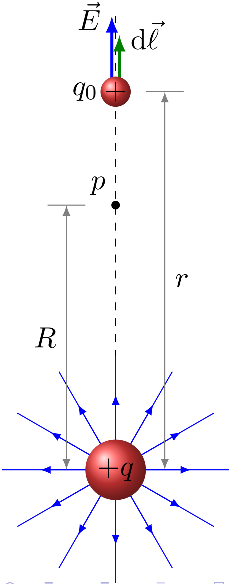
$$V(R) - V_\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}$$

اگر $V_\infty = 0$

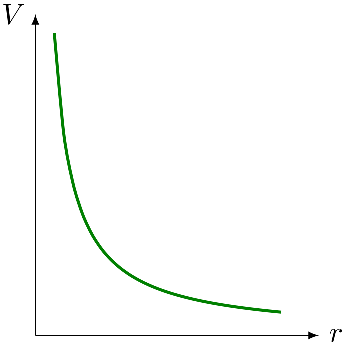
$$\boxed{V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}}$$

ذره‌ی باردار مثبت پتانسیل الکتریکی مثبت ایجاد می‌کند و ذره‌ی باردار منفی پتانسیل الکتریکی منفی ایجاد می‌کند.

پتانسیل الکتریکی-ذره‌ی باردار



$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$



پتانسیل الکتریکی-کره‌ی باردار

$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

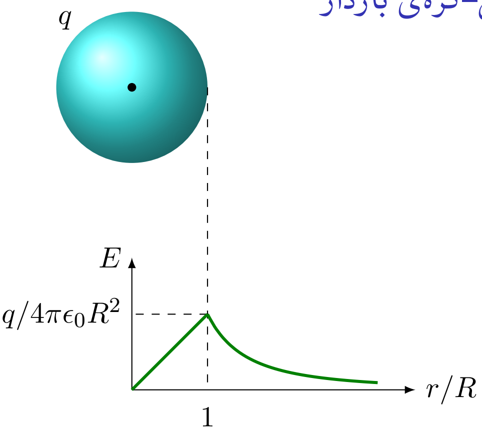
$$0 \le r \le R:\ \epsilon_0 E(4\pi r^2) = \frac{3q}{4\pi R^3}\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{qr^3}{R^3} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

$$r \ge R:\ \epsilon_0 E(4\pi r^2) = q \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{r}{R^3}, & 0 \le r \le R \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \ge R \end{cases}$$

$$\text{برای رسم نمودار}:\ E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(\dfrac{r}{R}\right), & 0 \le r/R \le 1 \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(\dfrac{R}{r}\right)^2, & r/R \ge 1 \end{cases}$$

پتانسیل الکتریکی-کره‌ی باردار



$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(\dfrac{r}{R}\right), & 0 \leq r/R \leq 1 \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(\dfrac{R}{r}\right)^2, & r/R \geq 1 \end{cases}$$

پتانسیل الکتریکی-کره‌ی باردار

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{r}{R^3}, & 0 \leq r \leq R \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r \geq R:\ V &= -\int_\infty^r E\mathrm{d}r = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \end{aligned}$$

پتانسیل الکتریکی-کره‌ی باردار

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{r}{R^3}, & 0 \leq r \leq R \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

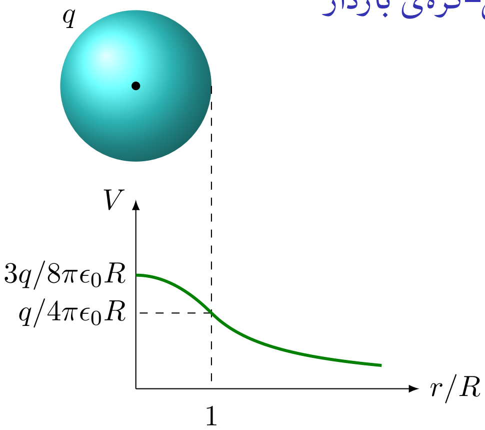
$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq R: \ V &= -\int_\infty^r E\mathrm{d}r = -\int_\infty^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r - \int_R^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r\mathrm{d}r \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^R \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\int_R^r r\mathrm{d}r \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^R - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_R^r \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{1}{2}(r^2 - R^2)\right] \\ &= \frac{3q}{8\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} - \frac{q}{8\pi\epsilon_0}\frac{r^2}{R^3} \end{aligned}$$

پتانسیل الکتریکی-کره‌ی باردار

$$V = \begin{cases} \dfrac{q}{8\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{3}{R} - \dfrac{r^2}{R^3}\right), & 0 \leq r \leq R \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r}, & r \geq R \end{cases}$$

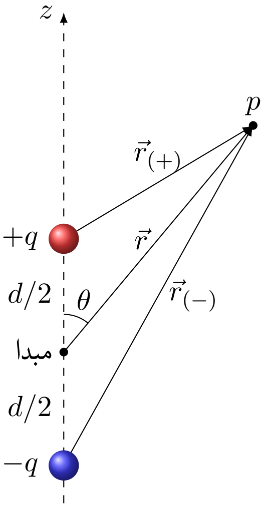
برای رسم نمودار : $V = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right), & 0 \leq (r/R) \leq 1 \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\dfrac{R}{r}\right), & (r/R) \geq 1 \end{cases}$

پتانسیل الکتریکی-کره‌ی باردار



$$V = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\dfrac{3}{2} - \left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right), & 0 \leq (r/R) \leq 1 \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\dfrac{R}{r}\right), & (r/R) \geq 1 \end{cases}$$

پتانسیل الکتریکی-پتانسیل دوقطبی الکتریکی



$$V = V_{(+)} + V_{(-)}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{(+)}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{(-)}}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{(+)}} - \frac{1}{r_{(-)}}\right)$$

$$r_{(+)} = \sqrt{d^2/4 + r^2 - rd\cos\theta}$$

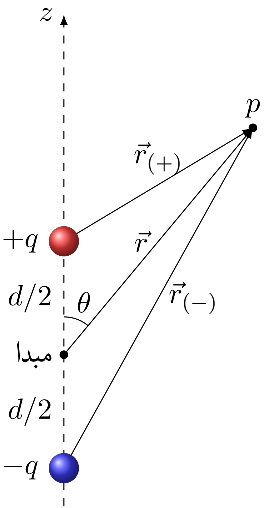
$$r_{(-)} = \sqrt{d^2/4 + r^2 + rd\cos\theta}$$

$$\frac{1}{r_{(+)}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2/4 - dr\cos\theta}}$$

$$\frac{1}{r_{(-)}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2/4 + dr\cos\theta}}$$

$$\boxed{x \ll 1 \text{ برای } : \quad (1+x)^m \simeq 1 + mx + \cdots}$$

برای $d \gg r$ یا $(d/r) \ll 1$



$$\frac{1}{r_{(+)}} = \frac{1}{r}(1 + [(d/2r)^2 - (d/r)\cos\theta])^{-1/2}$$

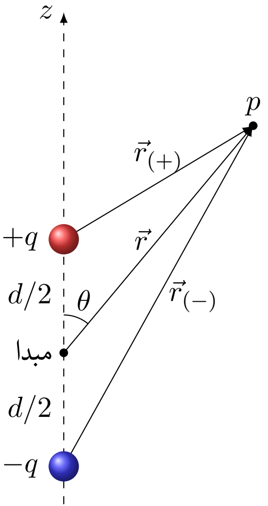
$$\frac{1}{r_{(+)}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left[(d/2r)^2 - (d/r)\cos\theta\right] + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{r_{(-)}} = \frac{1}{r}(1 + [(d/2r)^2 + (d/r)\cos\theta])^{-1/2}$$

$$\frac{1}{r_{(+)}} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\left[(d/2r)^2 + (d/r)\cos\theta\right] + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{r_{(+)}} - \frac{1}{r_{(-)}} = \frac{1}{r}\left[(d/r)\cos\theta + \cdots\right]$$

پتانسیل الکتریکی-پتانسیل دوقطبی الکتریکی



$$V = V_{(+)} + V_{(-)}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{(+)}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r_{(-)}}$$

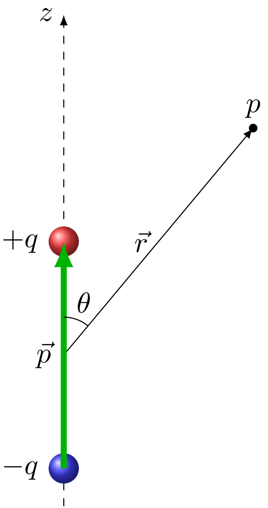
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_{(+)}} - \frac{1}{r_{(-)}}\right)$$

برای $r \gg d$

$$\frac{1}{r_{(+)}} - \frac{1}{r_{(-)}} = \frac{1}{r}\left[(d/r)\cos\theta + \cdots\right]$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2}$$

پتانسیل الکتریکی-پتانسیل دوقطبی الکتریکی



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qd\cos\theta}{r^2}$$

اندازه گشتاور دوقطبی الکتریکی بصورت $p = qd$ داده می‌شود،

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}}$$ پتانسیل دوقطبی الکتریکی

نمایش دیگر

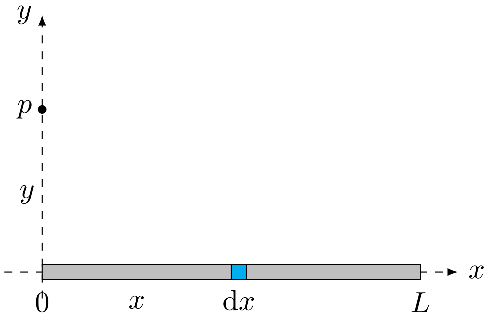
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p\textcolor{red}{r}\cos\theta}{r^{\textcolor{red}{3}}}$$

$$pr\cos\theta = \vec{p}\cdot\vec{r}, \quad \vec{p} = q\vec{d}$$

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}$$ پتانسیل دوقطبی الکتریکی

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

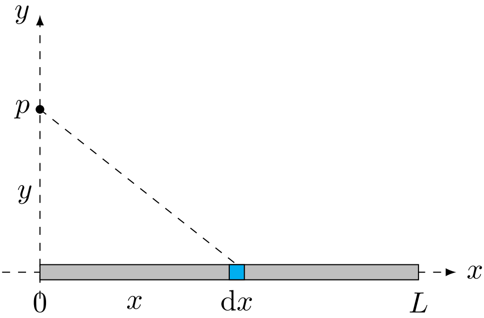
میله‌ای بطول L و چگالی خطی λ



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x, \quad 0 \leq x \leq L$$

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

میله‌ای بطول L و چگالی خطی λ



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x, \quad 0 \le x \le L$$

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

میله‌ای بطول L و چگالی خطی λ

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x, \quad 0 \le x \le L$$

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow V - V_\infty = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln[x+\sqrt{x^2+y^2}]}$$

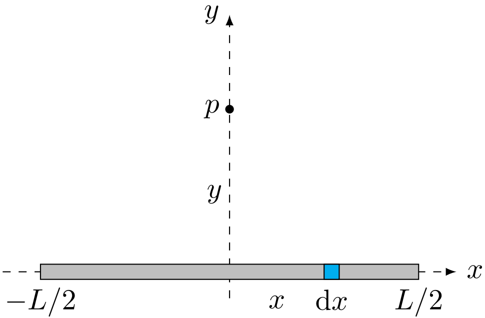
$$V - V_\infty = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}(\ln[L+\sqrt{L^2+y^2}] - \ln[y])$$

اگر $V_\infty = 0$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{L+\sqrt{L^2+y^2}}{y}\right]$$

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

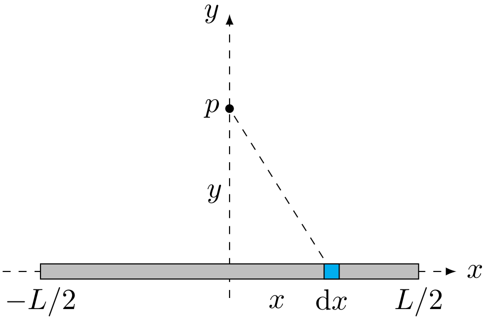
میله‌ای بطول L و چگالی خطی λ



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x, \quad -L/2 \leq x \leq L/2$$

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

میله‌ای بطول L و چگالی خطی λ



$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x, \quad -L/2 \leq x \leq L/2$$

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

میله‌ای بطول L و چگالی خطی λ

$$\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x, \quad -L/2 \leq x \leq L/2$$

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow V - V_\infty = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln[x + \sqrt{x^2+y^2}]}$$

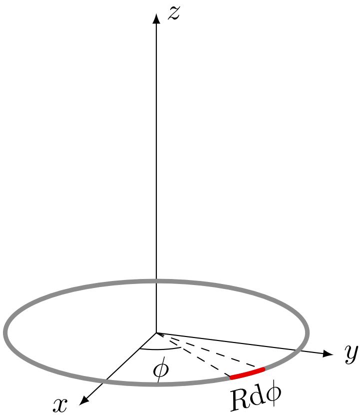
$$V - V_\infty = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} (\ln[L/2 + \sqrt{L^2/4+y^2}] - \ln[-L/2 + \sqrt{L^2/4+y^2}])$$

اگر $V_\infty = 0$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{L + \sqrt{L^2+4y^2}}{-L + \sqrt{L^2+4y^2}}\right]$$

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

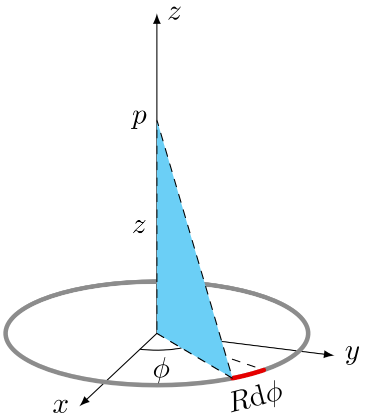
دایره‌ای به شعاع R و چگالی خطی λ



$$\mathrm{d}q = \lambda R \mathrm{d}\phi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

دایره‌ای به شعاع R و چگالی خطی λ



$$\mathrm{d}q = \lambda R \mathrm{d}\phi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

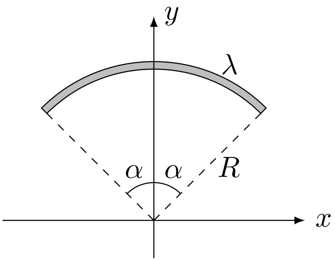
$$V - V_\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{R^2 + z^2}} \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \right)$$

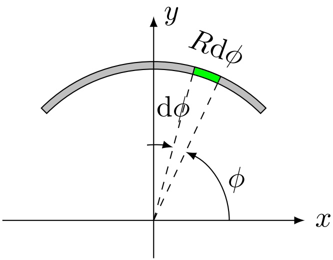
اگر $V_\infty = 0$

$$V = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

کمان دایره‌ای به شعاع R، زاویه‌ی 2α و چگالی خطی λ





$$\mathrm{d}q = \lambda R \mathrm{d}\phi, \qquad \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\mathrm{d}\phi$$

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

کمان دایره‌ای به شعاع R، زاویه‌ی 2α و چگالی خطی λ

$$\mathrm{d}V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\mathrm{d}\theta, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$$

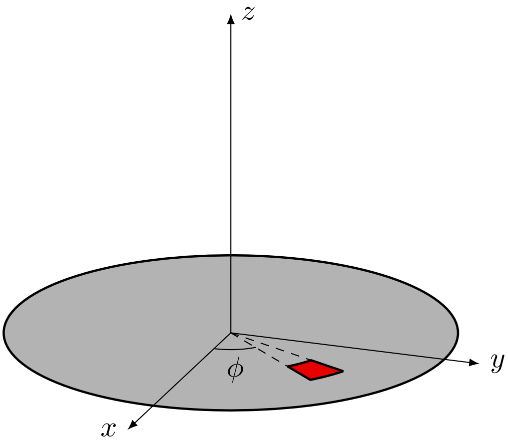
$$V - V_\infty = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2+\alpha} \mathrm{d}\theta$$

اگر $V_\infty = 0$

$$V = \frac{\lambda\alpha}{2\pi\epsilon_0}$$

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

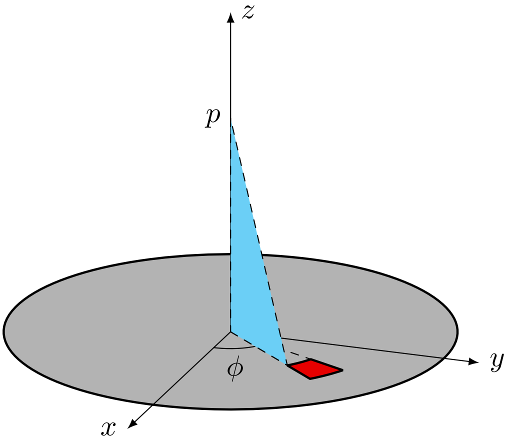
قرص دایره‌ای به شعاع R و چگالی سطحی σ



$$\mathrm{d}q = \sigma r \mathrm{d}r \mathrm{d}\phi, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

پتانسیل الکتریکی-توزیع بار پیوسته

قرص دایره‌ای به شعاع R و چگالی سطحی σ



$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi}{\sqrt{r^2+z^2}}, \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

قرص دایره‌ای به شعاع R و چگالی سطحی σ

$$dV = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\,dr\,d\phi}{\sqrt{r^2+z^2}}, \quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

$$V - V_\infty = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_0^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)$$

$$\boxed{\int \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = \sqrt{r^2+z^2}}$$

$$V - V_\infty = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right][2\pi]$$

اگر $V_\infty = 0$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\sqrt{R^2+z^2} - |z|), \quad -\infty < z < \infty$$

پتانسیل الکتریکی-کره‌ی رسانا

$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$0 \le r \le R:\ \ E = 0$$

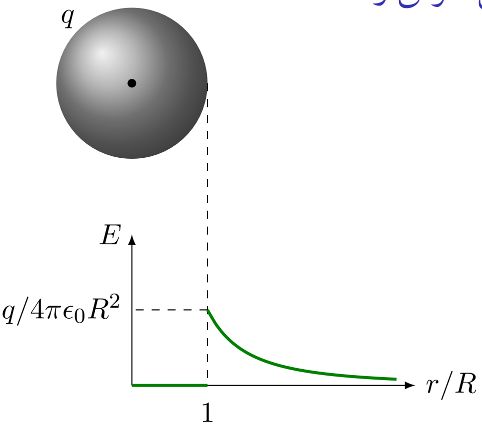
$$r > R:\ \ \epsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$E = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le R \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

برای رسم نمودار : $E = \begin{cases} 0, & 0 \le r/R \le 1 \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(\dfrac{R}{r}\right)^2, & r/R > 1 \end{cases}$

پتانسیل الکتریکی-کره‌ی رسانا



$$E = \begin{cases} 0, & 0 \leq r/R \leq 1 \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\left(\dfrac{R}{r}\right)^2, & r/R > 1 \end{cases}$$

پتانسیل الکتریکی-کره‌ی رسانا

$$E = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le R \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \ge R \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r \ge R: \ V &= -\int_\infty^r E\mathrm{d}r = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^r \frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \end{aligned}$$

پتانسیل الکتریکی-کره‌ی رسانا

$$E = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

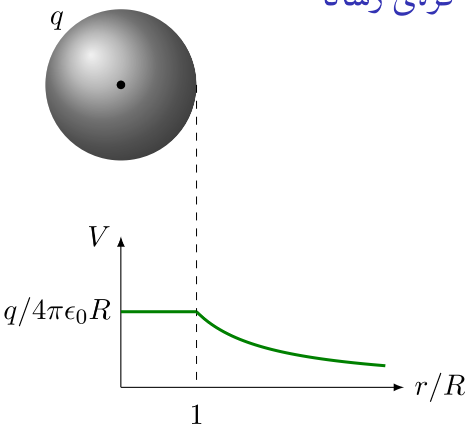
$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq R:\ V &= -\int_{\infty}^{r} E\mathrm{d}r = -\int_{\infty}^{R} \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r - 0 \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{\infty}^{R}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{R} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} \end{aligned}$$

$$V = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{R}, & 0 \leq r \leq R \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r}, & r \geq R \end{cases}$$

بار اضافی واقع بر روی رسانای منزوی، خودش را طوری بر روی سطح توزیع می‌کند که همه‌ی نقاط رسانا در روی سطح آن یا داخل آن دارای پتانسیل یکسانی باشد.

برای رسم نمودار : $V = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & 0 \leq r/R \leq 1 \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\dfrac{R}{r}\right), & r/R \geq 1 \end{cases}$

پتانسیل الکتریکی-کره‌ی رسانا



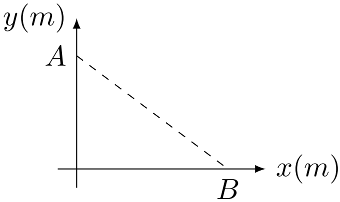
$$V = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, & 0 \le r \le R \\ \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\dfrac{R}{r}\right), & r \ge R \end{cases}$$

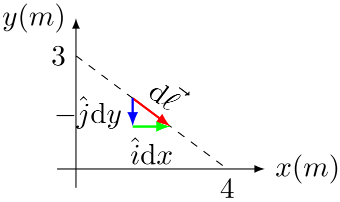
پتانسیل الکتریکی-کره‌ی رسانا

- وقتی یک سطح گاوس در داخل رسانا گرفته شود. بار اضافی روی رسانا در حالت تعادل بطور کامل روی سطح خارجی رسانا قرا می‌گیرد.
- همانطور که در فصل اول اشاره کردیم، فقط در کره‌ی رسانا بار سطحی می‌تواند بطور یکنواخت توزیع شود.
- بر روی رساناهای غیر کروی، بار سطحی در نقاط تیز یا لبه‌های تیز چگالی سطحی و در نتیجه میدان الکتریکی خارجی متناسب با آن دارای مقادیر خیلی بزرگی است.
- هوای پیرامون چنین نقاط تیزی ممکن است یونیزه شود به باعث تخلیه تاجی شکل می‌شود.
- اگر یک رسانای منزوی و بدون بار در داخل میدان الکتریکی خارجی قرار بگیرد، همه‌ی نقاط رسانا دارای پتانسیل یکسان می‌شوند.
  - الکترونهای رسانش خودشان را بر روی سطح طوری توزیع می‌کنند که میدان الکتریکی آنها در نقاط داخل میدان الکتریکی خارجی را خنثی کنند.
  - توزیع الکترونها باعث می‌شود که میدان برآیند در تمام نقاط روی سطح عمود بر سطح باشد. این توزیع به شکلی است که اگر رسانا بطریقی برداشته شود و بارها در مکان خودشان باقی بمانند، میدان الکتریکی داخل و خارج بدون تغییر باقی می ماند.

پتانسیل الکتریکی

مسئله–۱: میدان الکتریکی در ناحیه‌ای از فضا دارای مولفه‌های $E_y = E_z = 0$ و $E_x = 4x(\mathrm{N/C})$ است. نقطه‌ی A بر روی محور y در $y = 3\,\mathrm{m}$ و نقطه‌ی B بر روی محور x در $x = 4\,\mathrm{m}$ قرار دارد. اختلاف پتانسیل $V_B - V_A$ چقدر است؟



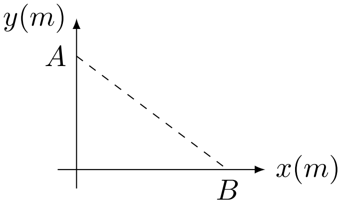


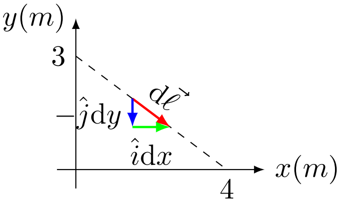
$$\vec{E} = \hat{i}4x$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \hat{i}\mathrm{d}x - \hat{j}\mathrm{d}y, \quad \tan\theta = \frac{3}{4} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{3}{4}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = (\hat{i} - \frac{3}{4}\hat{j})\mathrm{d}x, \quad 0 \le x \le 4$$

مسئله-۱:





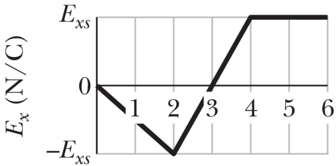
$$\vec{E} = \hat{i}4x$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = (\hat{i} - \frac{3}{4}\hat{j})\mathrm{d}x, \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$V_B - V_A = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$\Delta V = -4\int_0^4 x\mathrm{d}x = -4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = -32 \text{ V}$$

مسئله–۲: نمودار مولفه‌ی x میدان الکتریکی به صورت تابعی از x در ناحیه‌ای از فضا بصورت شکل زیر است. مولفه‌های y و z میدان الکتریکی این ناحیه برابر صفر است. اگر پتانسیل الکتریکی در مبدا $10\ \mathrm{V}$ باشد، الف) پتانسیل الکتریکی در $x = 2\ \mathrm{m}$ چقدر است؟ ب) بزرگترین مقدار مثبت پتانسیل الکتریکی برای نقاط روی محور x در فاصله‌ی $0 \le x \le 6\ \mathrm{m}$ چقدر است؟ ج) برای کدام مقدار پتانسیل الکتریکی برابر صفر است؟ (در محور قائم نمودار $E_{xs} = 20\ \mathrm{N/C}$ است)



$$E = \begin{cases} -10x, & 0 \le x \le 2 \\ 20x - 60, & 2 \le x \le 4 \\ 20, & 4 \le x \le 6 \end{cases}$$

مسئله-۲:

$$E = \begin{cases} -10x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 20x - 60, & 2 \leq x \leq 4 \\ 20, & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 2: \quad V(x) - 10 = -\int_0^x (-10x)\mathrm{d}x = 10\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^x$$

$$V(x) = 10 + 5x^2$$

$$2 \leq x \leq 4: \quad V(x) - 10 = -\int_0^2 (-10x)\mathrm{d}x - \int_2^x (20x - 60)\mathrm{d}x$$

$$V(x) - 10 = 10\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 - 20\left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_2^x = 20 - 20\left[\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x\right) - (-4)\right]$$

$$V(x) = -50 - 10x^2 + 60x$$

مسئله–۲:

$$E = \begin{cases} -10x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 20x - 60, & 2 \leq x \leq 4 \\ 20, & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$4 \leq x \leq 6: \quad V(x) - 10 = -\int_0^2 (-10x)\mathrm{d}x - \int_2^4 (20x - 60)\mathrm{d}x - \int_4^x 20\mathrm{d}x$$

$$V(x) - 10 = 10\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 - 20\left[\frac{1}{2}x^2 - 3x\right]_2^4 - 20\,[x]_4^x$$

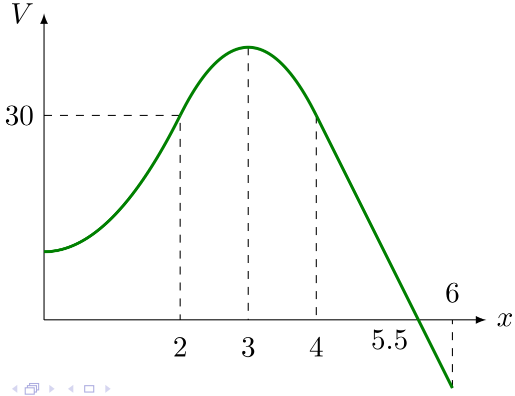
$$V(x) - 10 = 20 + 0 - 20\,[x]_4^x$$

$$V(x) = 110 - 20x$$

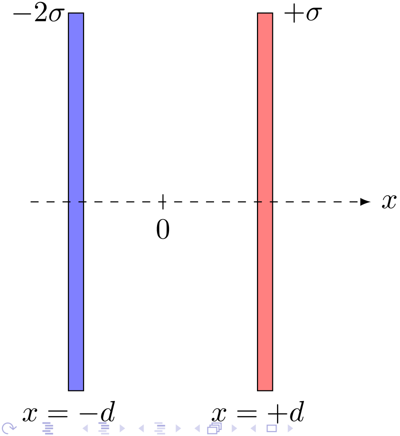
پتانسیل الکتریکی

مسئله–۲:

$$V = \begin{cases} 10 + 5x^2, & 0 \le x \le 2 \\ -50 - 10x^2 + 60x, & 2 \le x \le 4 \\ 110 - 20x, & 4 \le x \le 6 \end{cases}$$



مسئله–۳: دو صفحه‌ی نارسانای بی‌نهایت بطور یکنواختی باردار شده‌اند. این صفحات موازی با صفحه‌ی xy در مکانهای $x=-d$ و $x=d$ قرار دارند. چگالی بار روی صفحات بترتیب -2σ و $+\sigma$ است. اندازه‌ی اختلاف پتانسیل بین مبدا و الف) نقطه‌ای در فاصله‌ی $x<d$ و ب) نقطه‌ای در فاصله‌ی $x>d$ چقدر است؟



برای $x<d$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0(-2E_+A) = \sigma A \Rightarrow E_+ = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

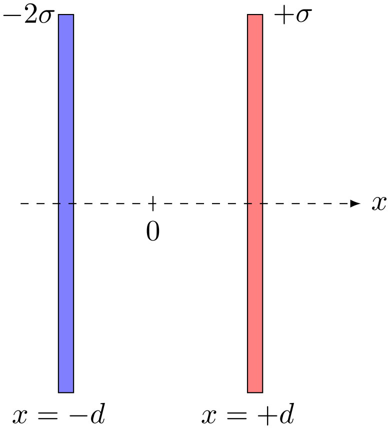
$$\epsilon_0(-2E_-A) = 2\sigma A \Rightarrow E_- = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

بر هم نهی میدان‌ها

$$E = E_+ + E_-$$

$$\vec{E} = -\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i}$$

مسئله–۳:



برای $x > d$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0(2E_+A) = \sigma A \Rightarrow E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0(-2E_-A) = 2\sigma A \Rightarrow E_- = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

بر هم نهی میدان‌ها

$$E = E_+ + E_-$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i}$$

مسئله–۳:

$$\vec{E} = \begin{cases} -\dfrac{3\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i}, & x < d \\ -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{i}, & x > d \end{cases}, \qquad \mathrm{d}\vec{\ell} = \hat{i}\mathrm{d}x$$

◄ برای $x < d$

$$\Delta V = V(x) - V(x=0) = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^x \mathrm{d}x = \frac{3\sigma x}{2\epsilon_0}$$

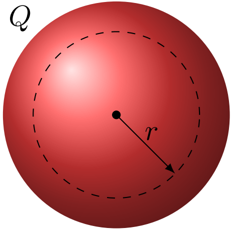
◄ برای $x > d$

$$\Delta V = V(x) - V(x=0) = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^d \mathrm{d}x + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_d^x \mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(2d + x)$$

پتانسیل الکتریکی

مسئله-۴: یک کره‌ی نارسانا دارای شعاع R و توزیع بار یکنواخت Q است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز کره $V_0 = 0$ در نظر بگیرید. V در فاصله شعاعی الف) $r \leq R$ و ب) $r \geq R$ بدست آورید.

< برای $r \leq R$



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

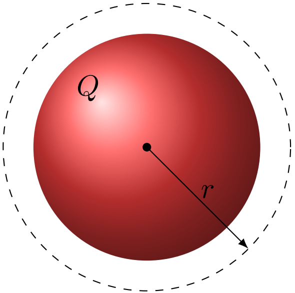
$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

پتانسیل الکتریکی

مسئله–۴:

< برای $r \geq R$



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = Q$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

مسئله-۴:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

< برای $r \leq R$

$$\vec{E} = E(r)\hat{r}, \quad \mathrm{d}\vec{\ell} = \hat{r}\mathrm{d}r, \quad \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = E(r)\mathrm{d}r$$

$$V(r) - V(r=0) = -\int_0^r \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\mathrm{d}r = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^r$$

$$V(r) = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$$

پتانسیل الکتریکی

مسئله–۴:

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & r\leq R\\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r\geq R\end{cases}$$

< برای $r \geq R$

$$\vec{E}=E(r)\hat{r},\quad \mathrm{d}\vec{\ell}=\hat{r}\mathrm{d}r,\quad \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}=E(r)\mathrm{d}r$$

$$V(r)-V(r=0)=-\int_0^R \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\mathrm{d}r-\int_R^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$V(r)=-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^R+\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_R^r$$

$$V(r)=\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(-\frac{3}{2}+\frac{R}{r}\right)$$

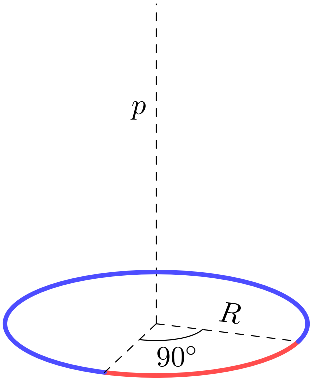
پتانسیل الکتریکی

مسئله-۴:

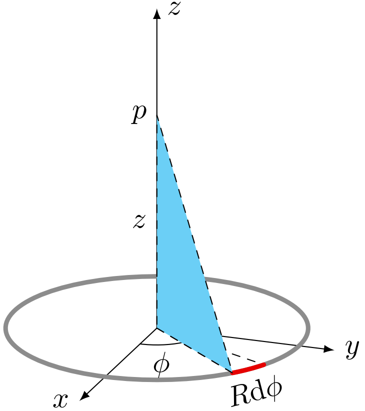
$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r \geq R \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2, & r \leq R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}\left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{R}{r}\right), & r \geq R \end{cases}$$

مسئله–۵: یک میله‌ی پلاستیکی به شکل دایره‌ای به شعاع R است یک ربع میله دارای بار $+Q$ است که بطور یکنواخت توزیع شده است و سه چهارم باقیمانده‌ی محیط دارای بار $-6Q$ است که بطور یکنواخت پخش شده است. پتانسیل الکتریکی را در مرکز و روی محور دایره بدست آورید.



مسئله-۵:



$$\mathrm{d}q = \lambda(\phi) R \mathrm{d}\phi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

$$\lambda(\phi) = \begin{cases} \dfrac{2Q}{\pi R}, & 0 \le \phi \le \pi/2 \\ -\dfrac{4Q}{\pi R}, & \pi/2 \le \phi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\lambda_0 = \frac{2Q}{\pi R}$$

$$\lambda(\phi) = \begin{cases} \lambda_0, & 0 \le \phi \le \pi/2 \\ -2\lambda_0, & \pi/2 \le \phi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(\phi) R \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

مسئله-۵:

$$\lambda(\phi) = \begin{cases} \lambda_0, & 0 \le \phi \le \pi/2 \\ -2\lambda_0, & \pi/2 \le \phi \le 2\pi \end{cases}, \qquad \lambda_0 = \frac{2Q}{\pi R}$$

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda(\phi) R \mathrm{d}\phi}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$V - V_\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_0 R}{\sqrt{R^2+z^2}}\left[\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\phi - 2\int_{\pi/2}^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right]$$

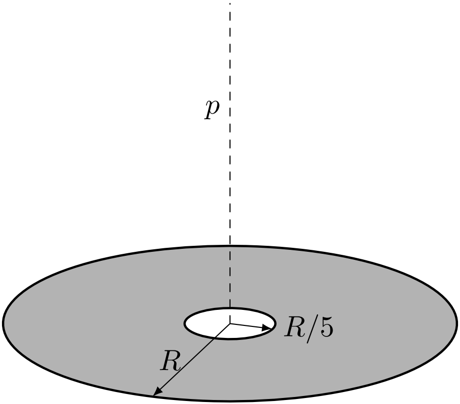
$$V - V_\infty = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda_0 R}{\sqrt{R^2+z^2}}\left[\frac{\pi}{2} - 2\frac{3\pi}{2}\right]$$

اگر $V_\infty = 0$

$$V(z) = -\frac{5}{8\epsilon_0}\frac{\lambda_0 R}{\sqrt{R^2+z^2}} = -\frac{5Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}, \qquad V(z=0) = -\frac{5Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

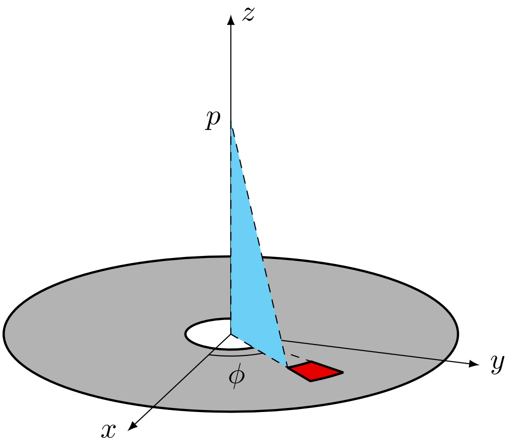
پتانسیل الکتریکی

مسئله–۶: شکل دیسکی با شعاع خارجی R و شعاع داخلی $R/5$ که دارای چگالی بار سطحی σ بطور یکنواخت است. بار فرض اینکه پتانسیل الکتریکی در بینهایت برابر صفر است، پتانسیل الکتریکی را در مرکز و بر روی محور دیسک بدست آورید.



پتانسیل الکتریکی

مسئله-۶:



$$\mathrm{d}V=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{r^2+z^2}}=\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi}{\sqrt{r^2+z^2}},\quad R/5\le r\le R,\quad 0\le\phi\le 2\pi$$

مسئله-۶:

$$\mathrm{d}V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi}{\sqrt{r^2+z^2}}, \quad R/5 \le r \le R, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$$

$$V - V_\infty = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_{R/5}^{R}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\right)$$

$$\boxed{\int \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+z^2}} = \sqrt{r^2+z^2}}$$

$$V - V_\infty = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{R^2/25+z^2}\right][2\pi]$$

اگر $V_\infty = 0$

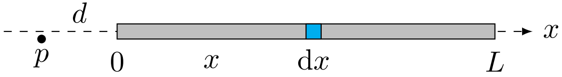
$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2} - \sqrt{R^2/25+z^2}\right], \quad -\infty < z < \infty$$

$$V(z=0) = \frac{2\sigma R}{5\epsilon_0}$$

پتانسیل الکتریکی

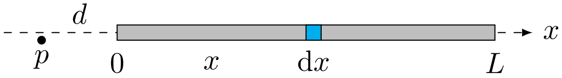
مسئله–۷: میله‌ی پلاستیکی به طول L دارای چگال بار غیر یکنواخت $\lambda(x) = cx$ است. با در نظر گرفتن $V = 0$ در بینهایت، پتانسیل را در نقطه‌ی p بر روی محور x بدست آورید.

$$\lambda = cx, \quad \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}x = cx\mathrm{d}x, \quad 0 \leq x \leq L$$



$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{x+d} = \frac{c}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\mathrm{d}x}{x+d}$$

مسئله–۷:



$$\mathrm{d}V = \frac{c}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\mathrm{d}x}{x+d} = \frac{c}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{x+d-d}{x+d}\right]\mathrm{d}x = \frac{c}{4\pi\epsilon_0}\left[1-\frac{d}{x+d}\right]\mathrm{d}x$$

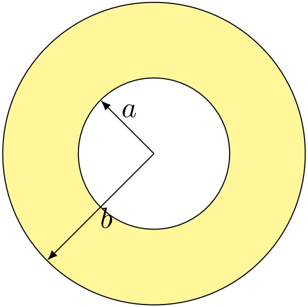
$$V - V_\infty = \frac{c}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L\left[1-\frac{d}{x+d}\right]\mathrm{d}x$$

اگر $V_\infty = 0$

$$V = \frac{c}{4\pi\epsilon_0}\left[L - d\ln\left(1+\frac{L}{d}\right)\right]$$

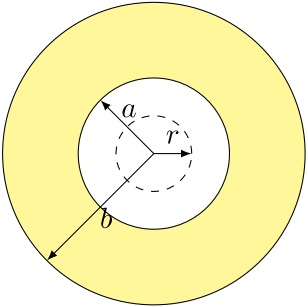
پتانسیل الکتریکی

مسئله–۸: یک پوسته کروی نازک محدود به شعاع های a و b دارای چگالی حجمی یکنواخت ρ است. پتانسیل الکتریکی بصورت تابعی از r از مرکز پوسته در ناحیه‌های الف) $r \leq a$ ب) $a \leq r \leq b$ ج) $r \geq b$ بدست آورید.



پتانسیل الکتریکی

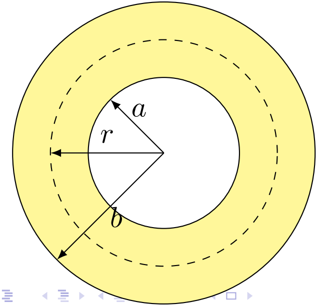
مسئله–۸:



$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = 0$$

$$E = 0$$

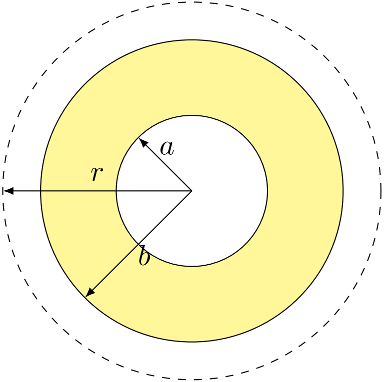


$$\epsilon_0 \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho\frac{4\pi(r^3-a^3)}{3}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)$$

مسئله–۸:



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = \rho \frac{4\pi(b^3 - a^3)}{3}$$

$$E = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$E = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{a^3}{r^3}\right), & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \geq b \end{cases}$$

پتانسیل الکتریکی

مسئله–۸:

$$E = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{a^3}{r^3}\right), & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \geq b \end{cases}$$

◄ برای $r \geq b$

$$V = -\int_{\infty}^{r} E\mathrm{d}r = -\frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

$$V = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

مسئله–۸:

$$E = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right), & a \leq r \leq b \\ \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\frac{1}{r^2}, & r \geq b \end{cases}$$

◄ برای $a \leq r \leq b$

$$V = -\int_{\infty}^{r} E \mathrm{d}r$$

$$V = -\frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\int_{\infty}^{b}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\int_{b}^{r}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\mathrm{d}r$$

$$V = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 b} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{2}r^2 + \frac{a^3}{r}\right) - \left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{a^3}{b}\right)\right]$$

پتانسیل الکتریکی

مسئله–۸:

$$E = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{a^3}{r^3}\right), & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \geq b \end{cases}$$

◄ برای $a \leq r \leq b$

$$V = \frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0 b} - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\left(\frac{1}{2}r^2 + \frac{a^3}{r}\right) - \left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{a^3}{b}\right)\right]$$

$$V = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\frac{3b^2}{2} - \frac{r^2}{2} - \frac{a^3}{r}\right]$$

پتانسیل الکتریکی

مسئله–۸:

$$E = \begin{cases} 0, & r \le a \\ \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{a^3}{r^3}\right), & a \le r \le b \\ \dfrac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \ge b \end{cases}$$

◄ برای $r \le a$

$$V = -\int_{\infty}^{r} E \mathrm{d}r$$

$$V = -\frac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\int_{\infty}^{b}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r - \frac{\rho}{3\epsilon_0}\int_{b}^{a}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\mathrm{d}r$$

$$V = \frac{\rho}{2\epsilon_0}(b^2 - a^2)$$

مسئله–۸:

$$E = \begin{cases} 0, & r \leq a \\ \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\left(1 - \dfrac{a^3}{r^3}\right), & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}, & r \geq b \end{cases}$$

$$V = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\epsilon_0}(b^2 - a^2), & r \leq a \\ \dfrac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\dfrac{3b^2}{2} - \dfrac{r^2}{2} - \dfrac{a^3}{r}\right], & a \leq r \leq b \\ \dfrac{\rho(b^3 - a^3)}{3\epsilon_0}\dfrac{1}{r}, & r \geq b \end{cases}$$