فیزیک ۲
ظرفیت

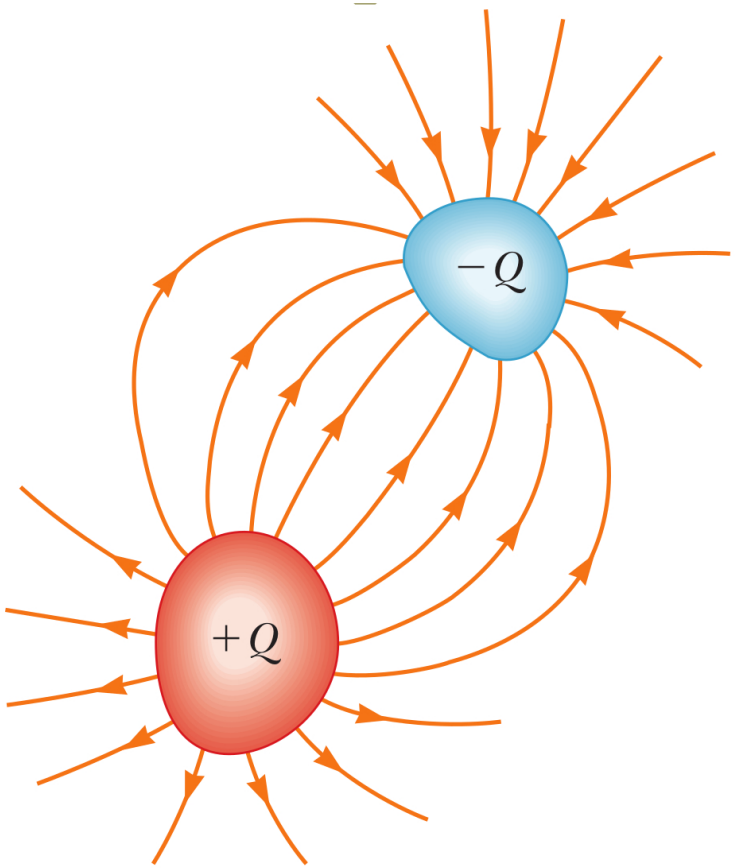
محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

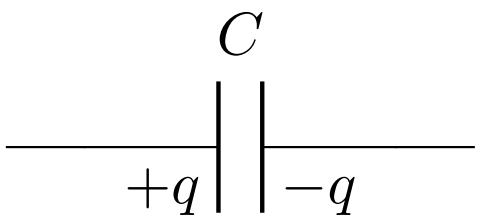
ظرفیت

- خازن وسیله‌ای الکتریکی است که می‌تواند بار الکتریکی و در نتیجه انرژی الکتریکی را ذخیره کند.
- خازن از دو رسانای منزوی با هر شکل دلخواه تشکیل شده است که بارهای یکسان و غیر همنام بر روی آنها قرار می‌گیرند.

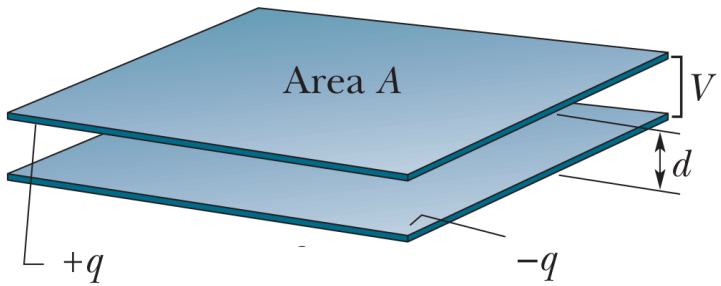


ظرفیت

- به این رساناهای منزوی (صرفه‌نظر از اینکه تخت باشند یا نباشند) صفحات خازن گفته می‌شود. نماد نشان دهنده‌ی خازن بر اساس خازن تخت بصورت زیر داده می‌شود،



- خازن تخت



- اختلاف پتانسیل بین دو صفحه ΔV را با V نمایش می‌دهیم.
- در خازنها بار q (مستقل از علامت) و اختلاف پتانسیل V با هم متناسب هستند،

$$q \propto V$$

که ثابت تناسب را ظرفیت خازن C می‌نامند، بنابراین

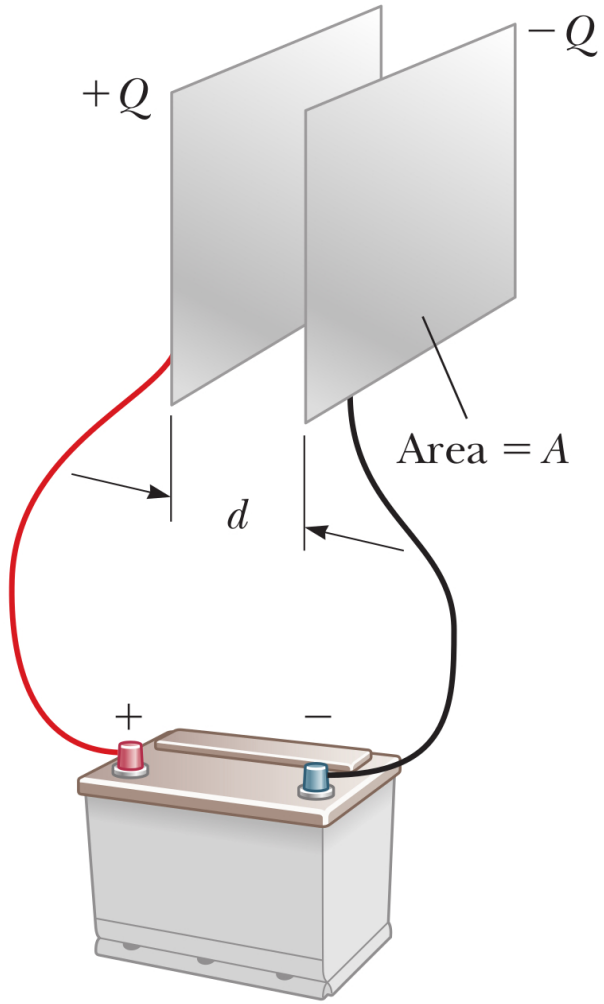
$$q = CV$$

ظرفیت

- اگرچه بار و اختلاف پتانسیل خازنها توسط رابطه‌ی $q = CV$ داده می‌شود، ولی ظرفیت خازن C به بار و اختلاف پتانسیل بستگی ندارد و به هندسی صفحات و نحوی قرارگرفتن آنها بستگی دارد.
- بطور کلی، **ظرفیت**، مقدار باری است که باید روی صفحات قرارگیرد تا اختلاف پتانسیل معین بین آنها ایجاد شود.
- بر اساس رابطه‌ی $q = CV$ و برای یک اختلاف پتانسیل معین، **ظرفیت بزرگتر، بار بیشتری لازم دارد.**
- واحد ظرفیت خازن کولن بر ولت است که در دستگاه SI آنرا فاراد F می‌نامند،

$$1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C/V} \quad , \quad 1 \text{ فاراد} = 1 \text{ ولت/کولن}$$

ظرفیت-پر شدن خازن

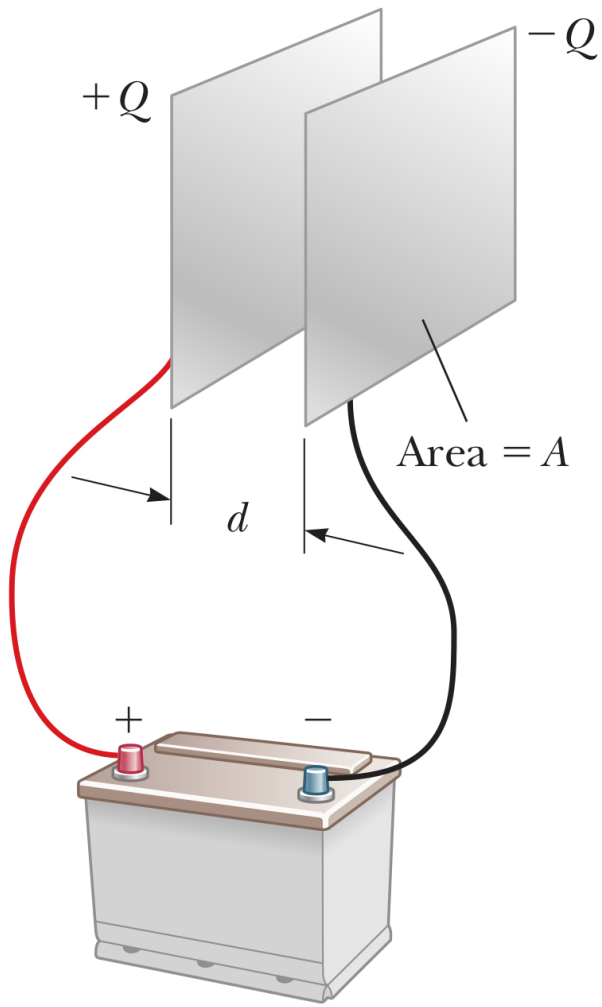


◄ در اثر میدان الکتریکی که باتری در سیمها ایجاد می کند، الکترونها از طریق سیم‌ها عبور می‌کنند.

◄ میدان، الکترونها را از صفحه‌ی سمت چپ به قطب مثبت باتری سوق می‌دهد. بنابراین صفحه‌ی سمت چپ الکترون از دست می‌دهد و دارای بار مثبت می‌شود.

◄ باتری دقیقا همان الکترونها را از طریق قطب منفی بطرف صفحه‌ی سمت راست سوق می دهد. بنابراین صفحه‌ی سمت راست دارای همان مقدار بار منفی می‌شود که صفحه سمت چپ با از دست دادن الکترونها دارای بار مثبت شده است.

ظرفیت-پر شدن خازن



◄ در ابتدا که صفحات بدون بار هستند، اختلاف پتانسیل بین آنها صفر است. وقتی صفحات دارای بارهای مخالف می‌شوند، اختلاف پتانسیل بین آنها افزایش می‌یابد تا برابر با اختلاف پتانسیل V بین قطب‌های باتری شود.

◄ وقتی خازن بطور کامل پر می‌شود، صفحه‌ی سمت چپ و قطب مثبت باتری به پتانسیل یکسانی می‌رساند و بطور مشابه صفحه‌ی سمت راست و قطب منفی باتری به پتانسیل یکسانی می‌رساند. در این حالت، میدان صفر است و سوق الکترونی بین باتری و صفحات وجود ندارد

◄ وقتی خازن بطور کامل پر می‌شود، اختلاف پتانسیل V و بار Q از طریق رابطه‌ی

$$Q = CV$$

به هم مربوط می‌شوند.

ظرفیت-محاسبه ظرفیت

بطور خلاصه برای محاسبه ظرفیت مراحل زیر را پیگیری می کنیم،

- بار q را بر روی صفحات در نظر می گیریم.
- با استفاده از قانون گاوس

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{\text{محصور}}$$

میدان الکتریکی $\vec{E}$ بین صفحات را بر حسب بار q بدست می‌آوریم.

- اختلاف پتانسیل بین صفحات V را با استفاده از رابطه‌ی

$$V_f - V_i = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

بدست می‌آوریم.

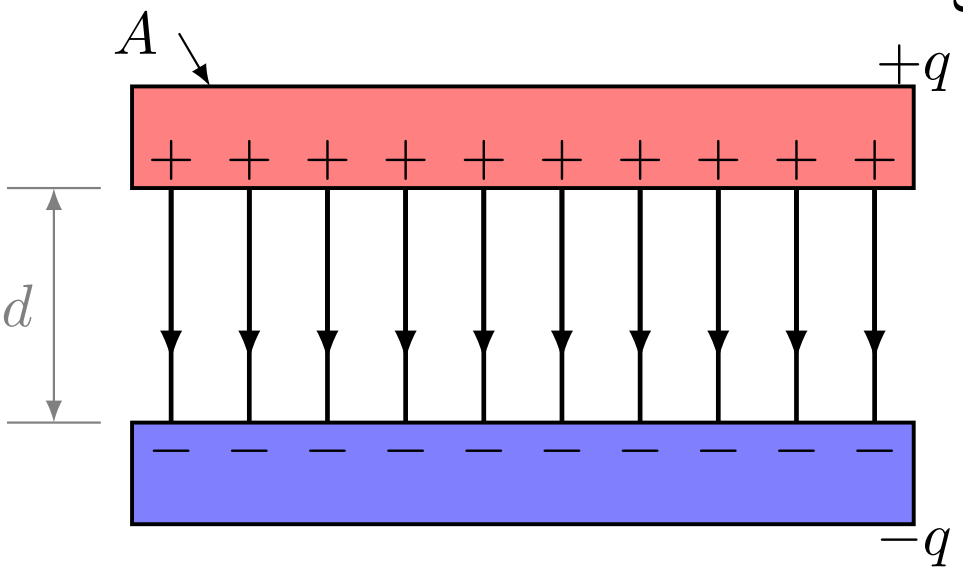
- نهایتا با استفاده از رابطه‌ی

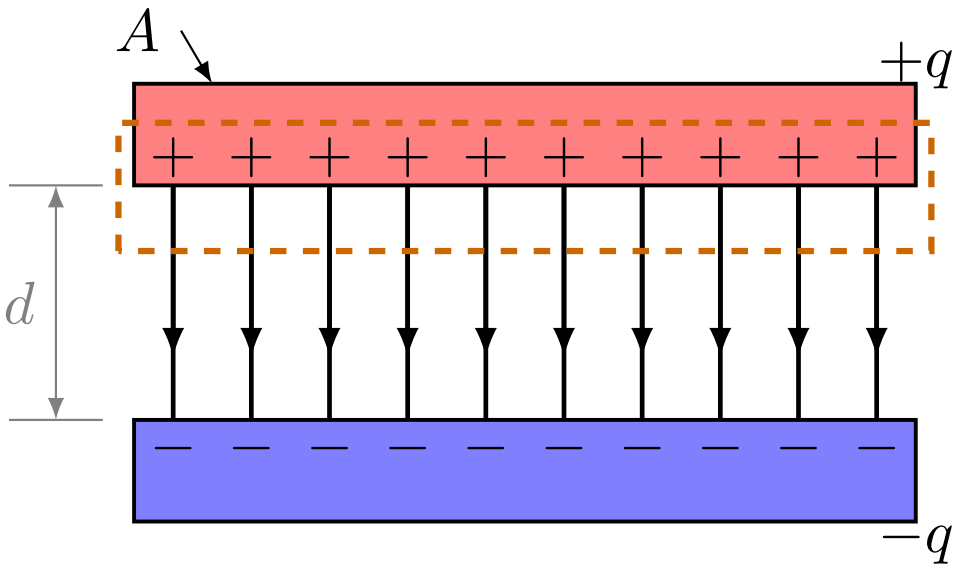
$$q = CV$$

ظرفیت را بدست می‌آوریم.

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن تخت

محاسبه میدان الکتریکی

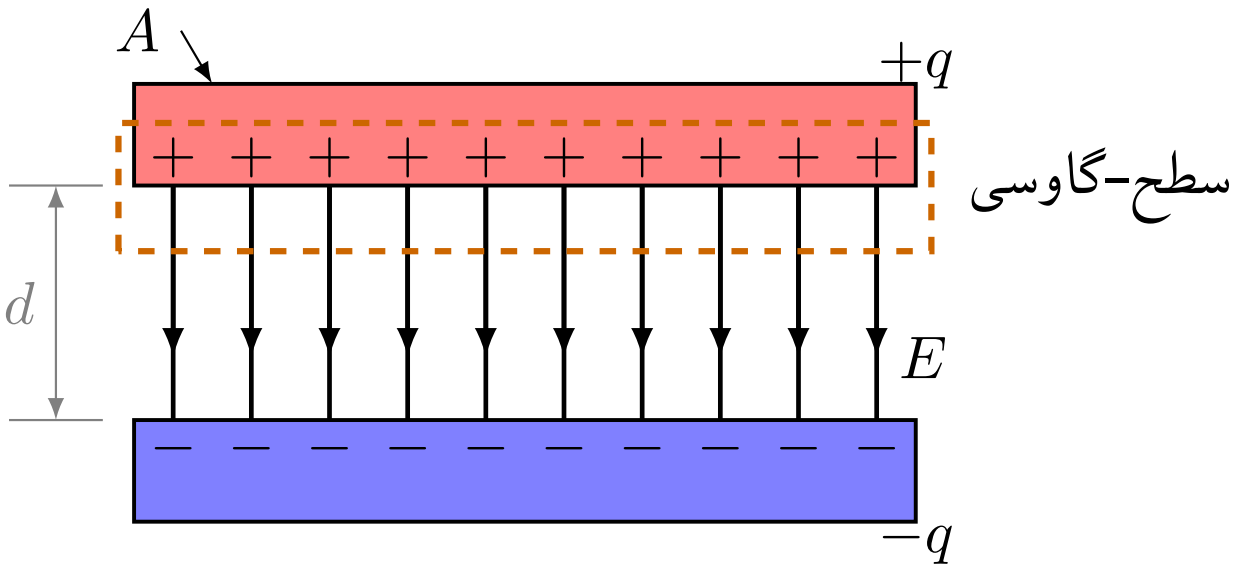




سطح-گاوسی

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن تخت

محاسبه میدان الکتریکی

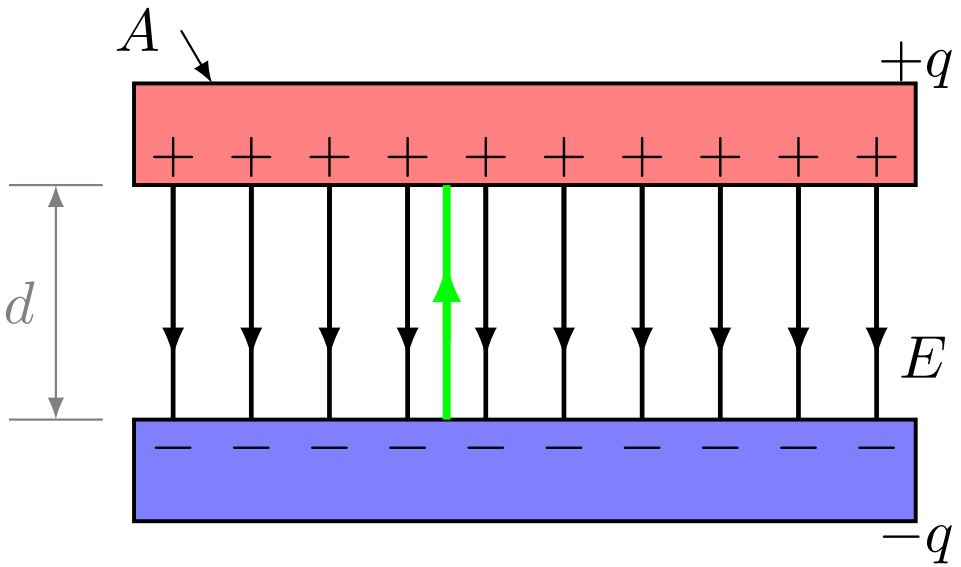


$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E A = q \Rightarrow E = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن تخت

محاسبه اختلاف پتانسیل الکتریکی



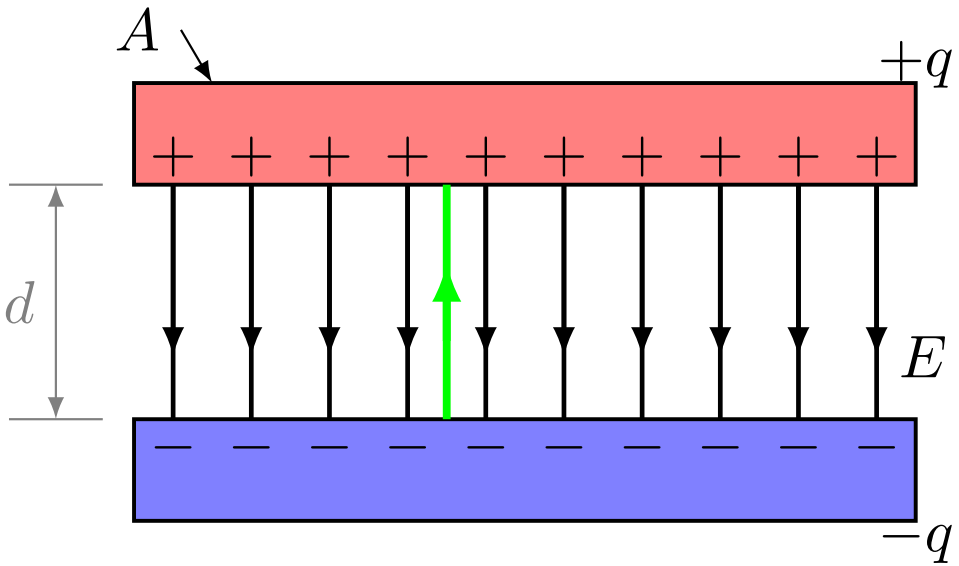
$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A}, \quad \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -E\mathrm{d}\ell$$

$$V_f - V_i = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$V_+ - V_- = \int_-^+ E\mathrm{d}\ell \Rightarrow \Delta V = V = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0 A} = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن تخت

محاسبه ظرفیت



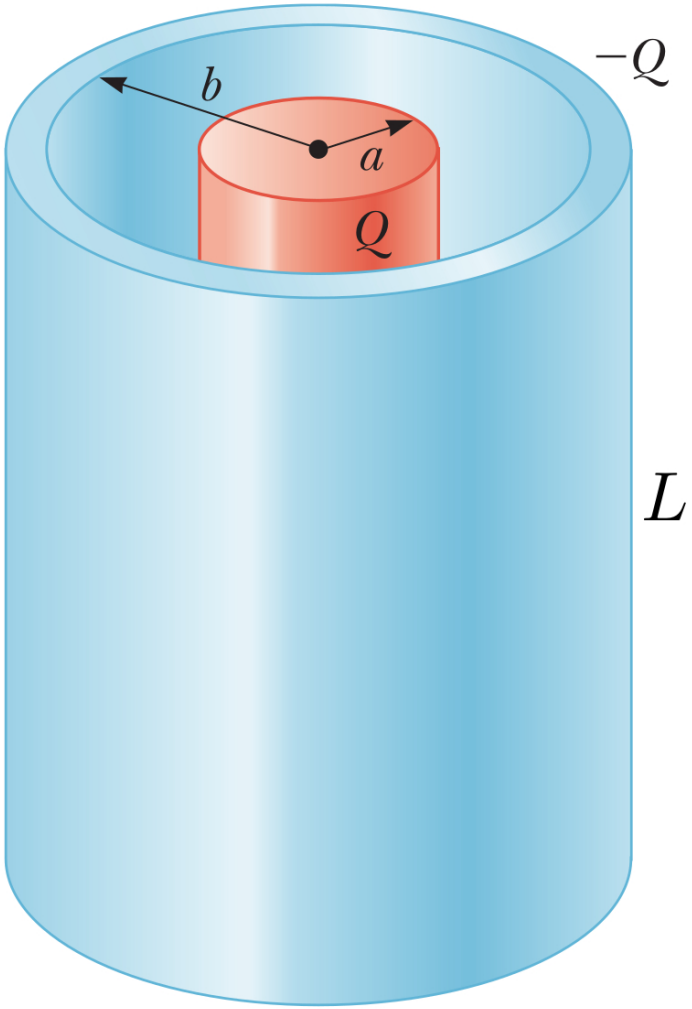
$$V = \frac{qd}{\epsilon_0 A} \Rightarrow q = \frac{\epsilon_0 A}{d} V$$

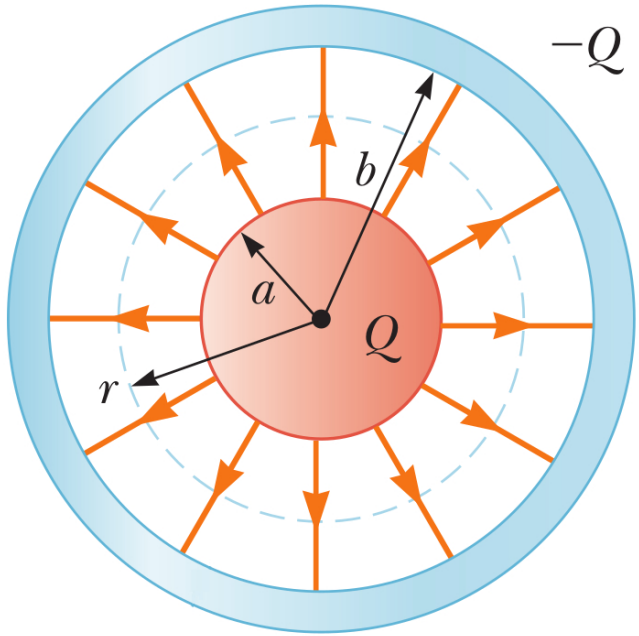
با مقایسه نتیجه بدست آمده با رابطه‌ی $q = CV$ **ظرفیت خازن تخت** بصورت زیر داده می‌شود،

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن استوانه‌ای

محاسبه میدان الکتریکی



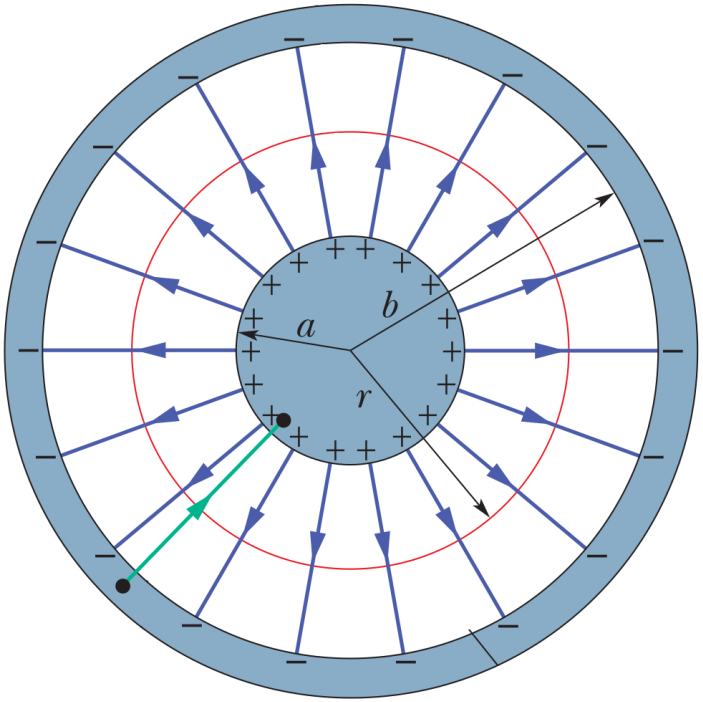


$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(2\pi r L) = q \Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}$$

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن استوانه‌ای

محاسبه اختلاف پتانسیل الکتریکی



$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}$$

$$V_f - V_i = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$V_+ - V_- = -\int_-^+ E\mathrm{d}r$$

$$V_+ - V_- = -\int_b^a E\mathrm{d}r$$

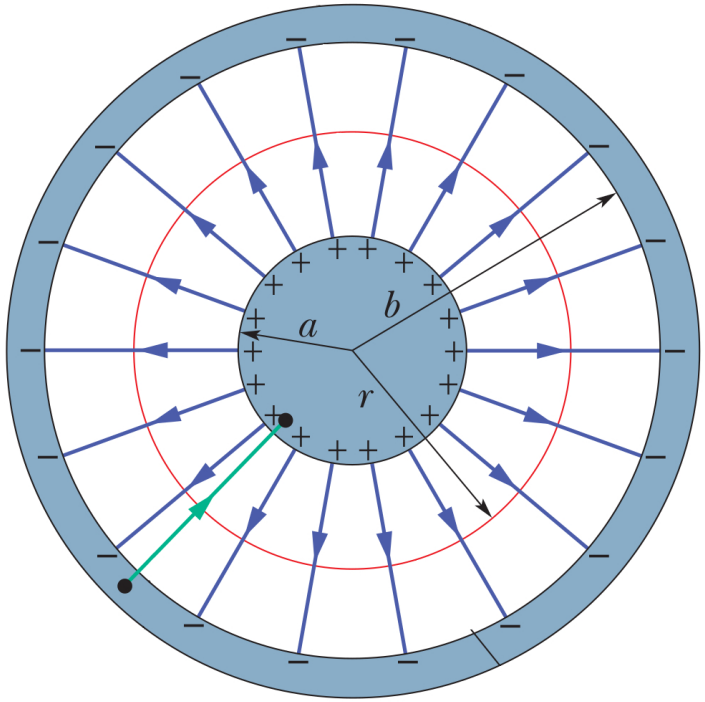
$$\Delta V = V = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\int_b^a \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$V = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن استوانه‌ای

محاسبه ظرفیت



$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}$$

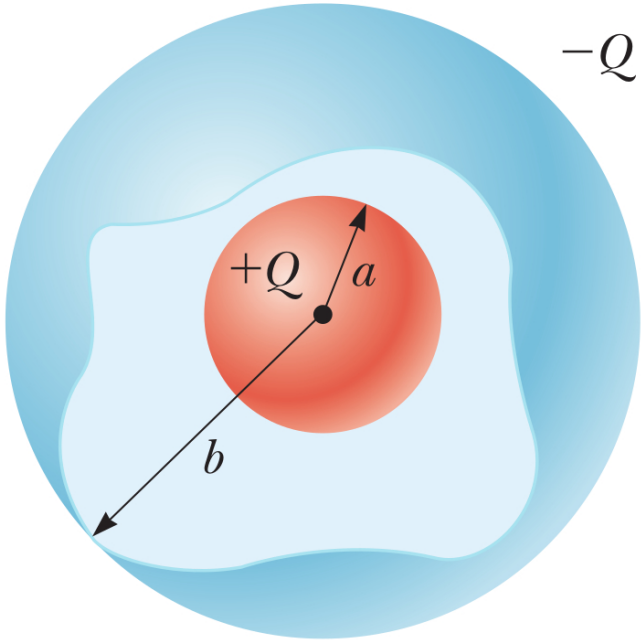
$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

با مقایسه نتیجه بدست آمده با رابطه‌ی $q = CV$ **ظرفیت خازن استوانه‌ای** بصورت زیر داده می‌شود،

$$\boxed{C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}}$$

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن کروی

محاسبه میدان الکتریکی

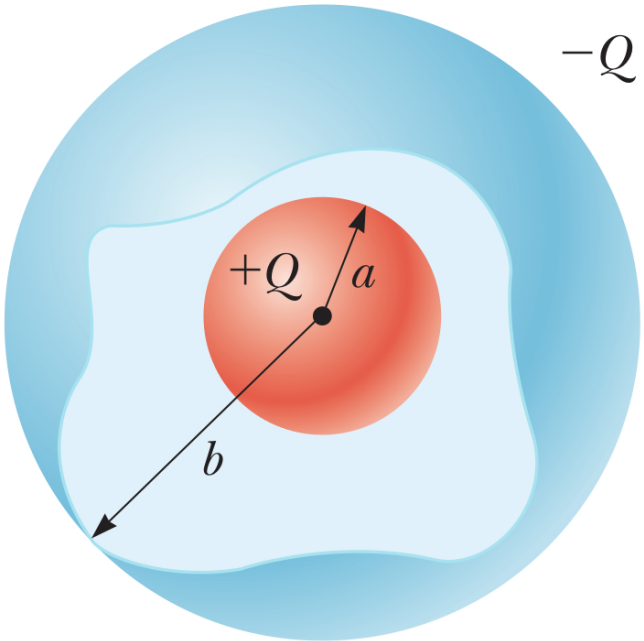


$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن کروی

محاسبه پتانسیل الکتریکی



$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V_f - V_i = -\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

$$V_+ - V_- = -\int_-^+ E\mathrm{d}r$$

$$V_+ - V_- = -\int_b^a E\mathrm{d}r$$

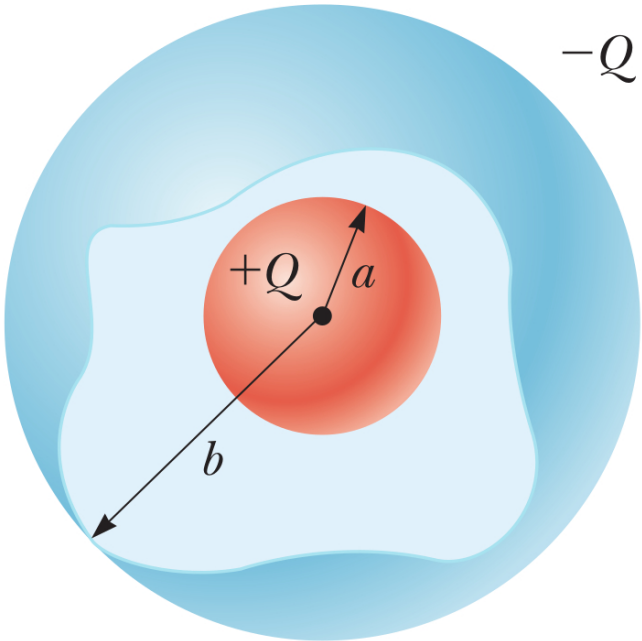
$$\Delta V = V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن کروی

محاسبه پتانسیل الکتریکی



$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

با مقایسه نتیجه بدست آمده با رابطه‌ی $q = CV$
ظرفیت خازن کروی بصورت زیر داده می‌شود،

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}}$$

ظرفیت یک کره‌ی منزوی (یعنی وقتی $b \to \infty$)

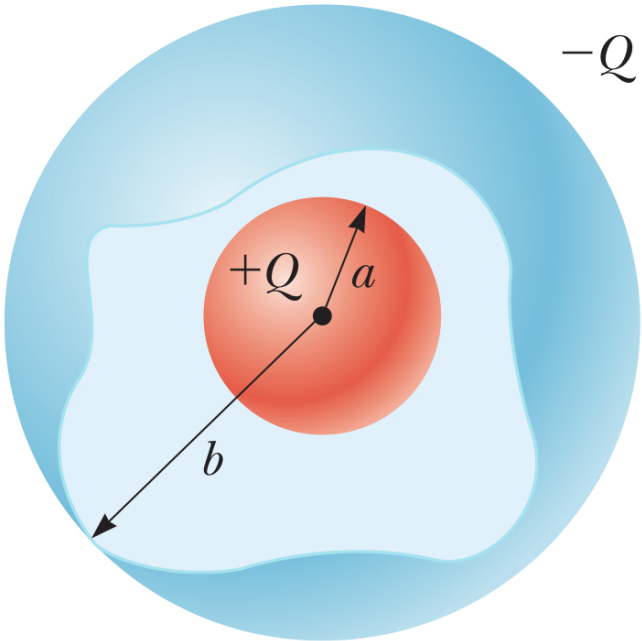
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\lim_{b\to\infty} C = 4\pi\epsilon_0 \lim_{b\to\infty} \frac{ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 a$$

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 a, \quad \text{ظرفیت کره‌ی منزوی}}$$

ظرفیت-محاسبه ظرفیت خازن کروی

محاسبه پتانسیل الکتریکی



$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{b-a}{ab}$$

با مقایسه نتیجه بدست آمده با رابطه‌ی $q = CV$
ظرفیت خازن کروی بصورت زیر داده می‌شود،

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}}$$

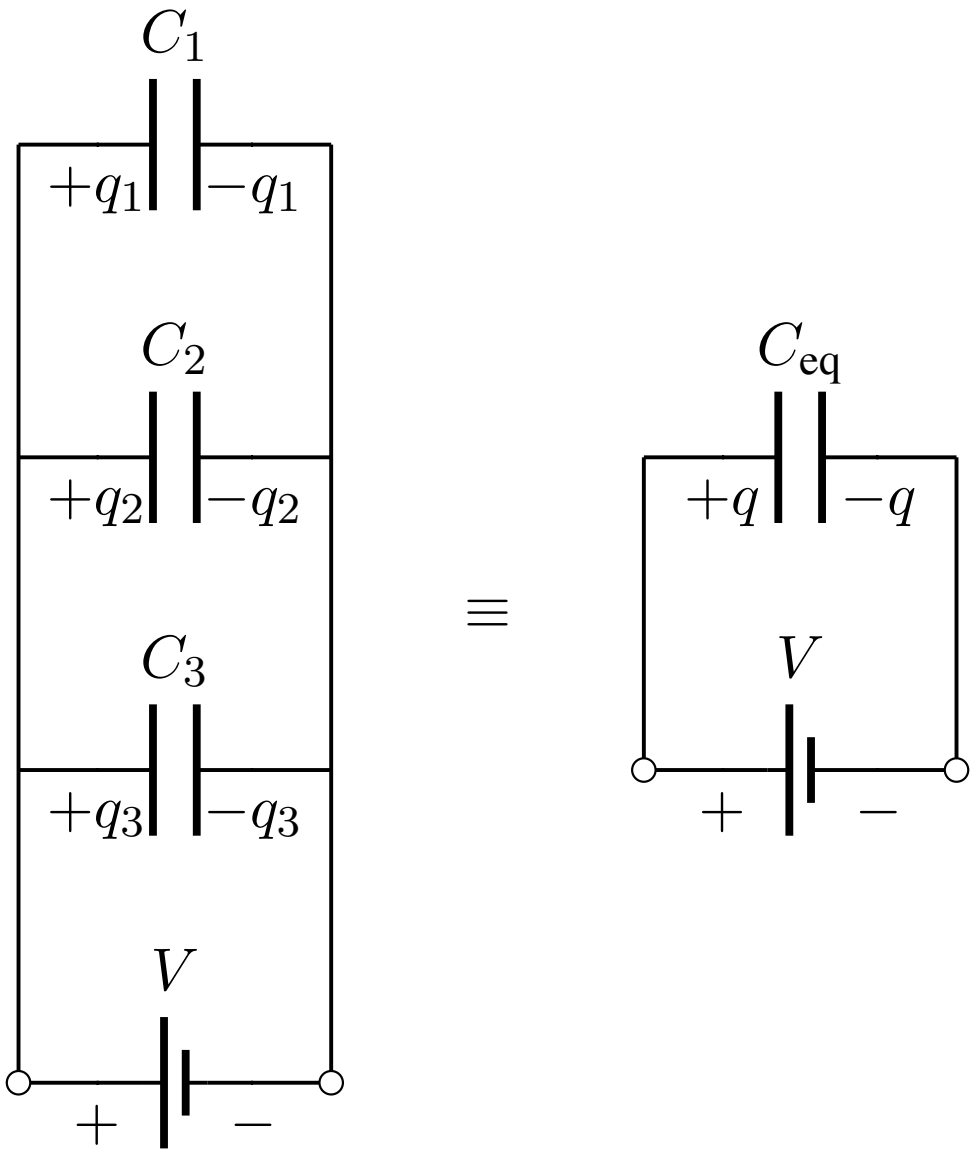
ظرفیت یک کره‌ی منزوی (یعنی وقتی $b \to \infty$)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\lim_{b\to\infty} C = 4\pi\epsilon_0 \lim_{b\to\infty} \frac{ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 a$$

$$\boxed{C = 4\pi\epsilon_0 a, \quad \text{ظرفیت کره‌ی منزوی}}$$

ظرفیت-خازنهای موازی



$$q_{\text{کل}} = q = q_1 + q_2 + q_3$$

رابطه‌ی بار هر خازن با ولتاژ دو سر

$$q_1 = C_1 V$$

$$q_2 = C_2 V$$

$$q_3 = C_3 V$$

رابطه‌ی بار خازن معادل با ولتاژ دو سر

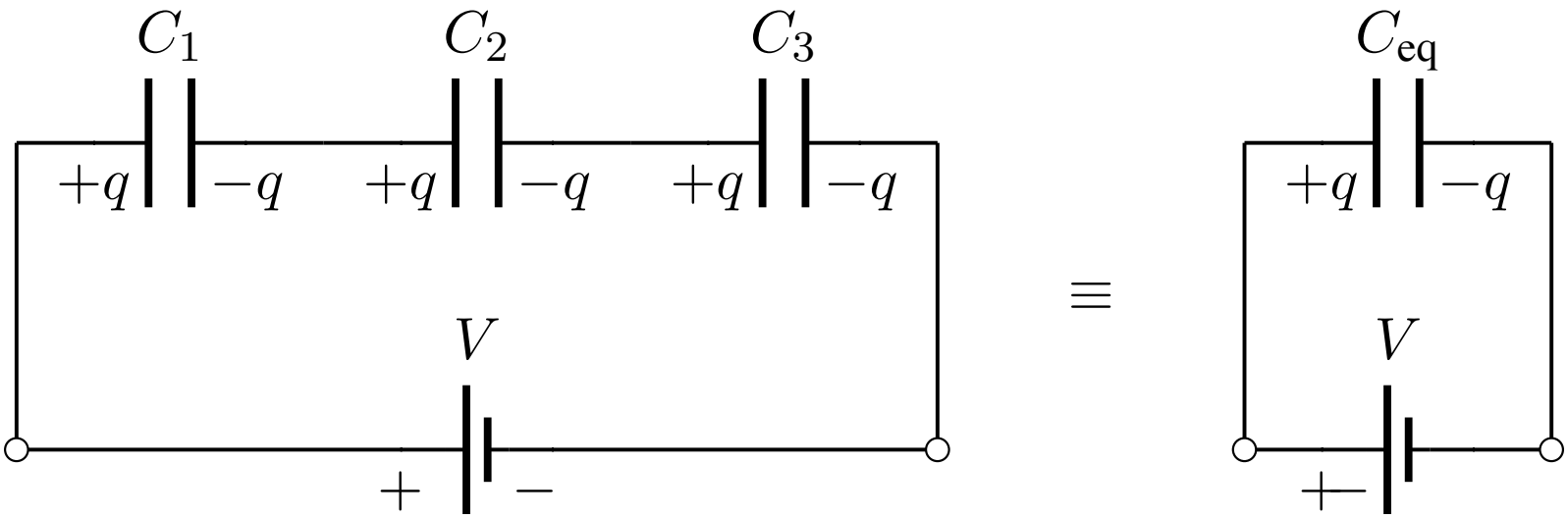
$$q = C_{\text{eq}} V$$

$$C_{\text{eq}} V = C_1 V + C_2 V + C_3 V$$

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$C_{\text{eq}} = \sum C_j$$

ظرفیت-خازنهای متوالی



$$\frac{q}{C_{\text{eq}}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \frac{q}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_j \frac{1}{C_j}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

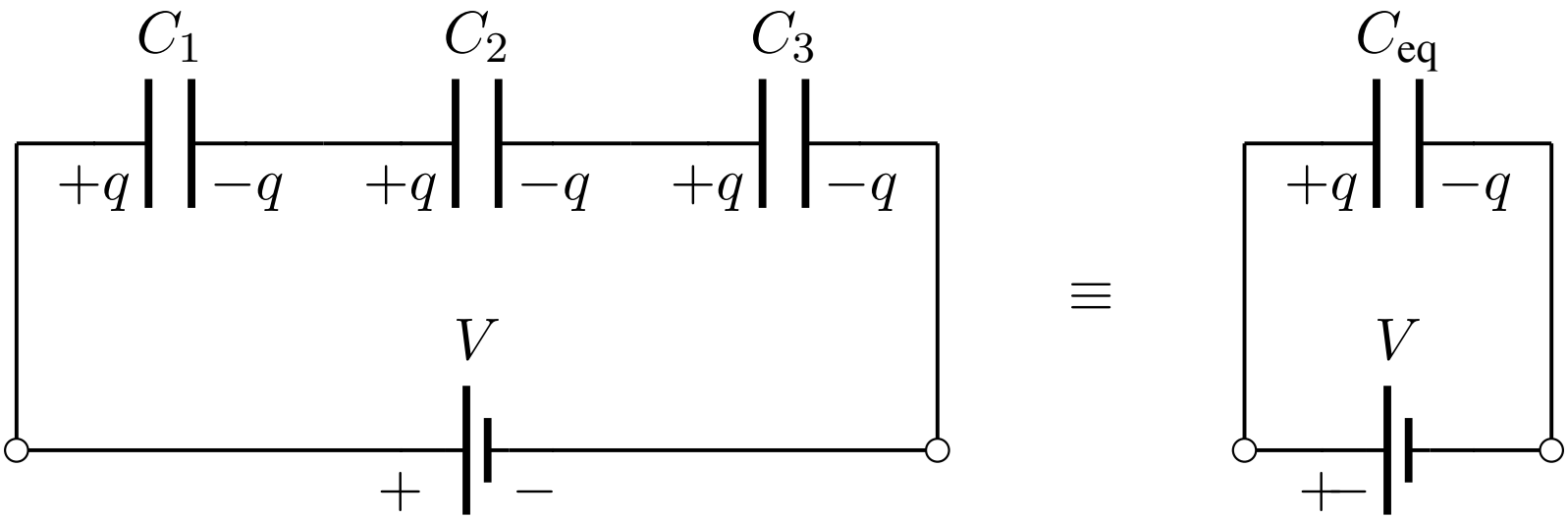
رابطه‌ی بار هر خازن با ولتاژ دو سر

$$q = C_1 V_1, \quad q = C_2 V_2, \quad q = C_3 V_3$$

رابطه‌ی بار خازن معادل با ولتاژ دو سر

$$q = C_{\text{eq}} V$$

ظرفیت-خازنهای متوالی



$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

رابطه‌ی بار هر خازن با ولتاژ دو سر

$$q = C_1 V_1, \quad q = C_2 V_2, \quad q = C_3 V_3$$

رابطه‌ی بار خازن معادل با ولتاژ دو سر

$$q = C_{\text{eq}} V$$

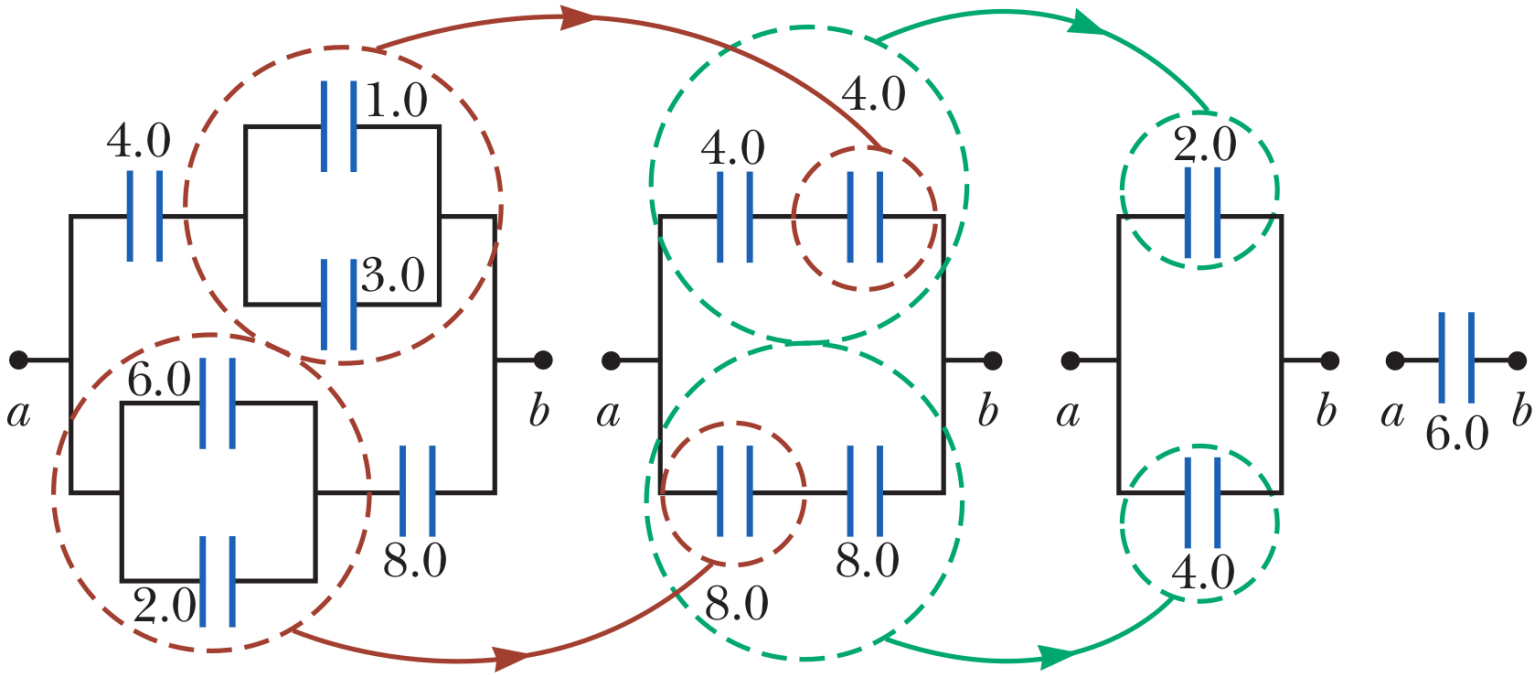
$$V_1 = \frac{C_{\text{eq}}}{C_1} V$$

$$V_2 = \frac{C_{\text{eq}}}{C_2} V$$

$$V_3 = \frac{C_{\text{eq}}}{C_3} V$$

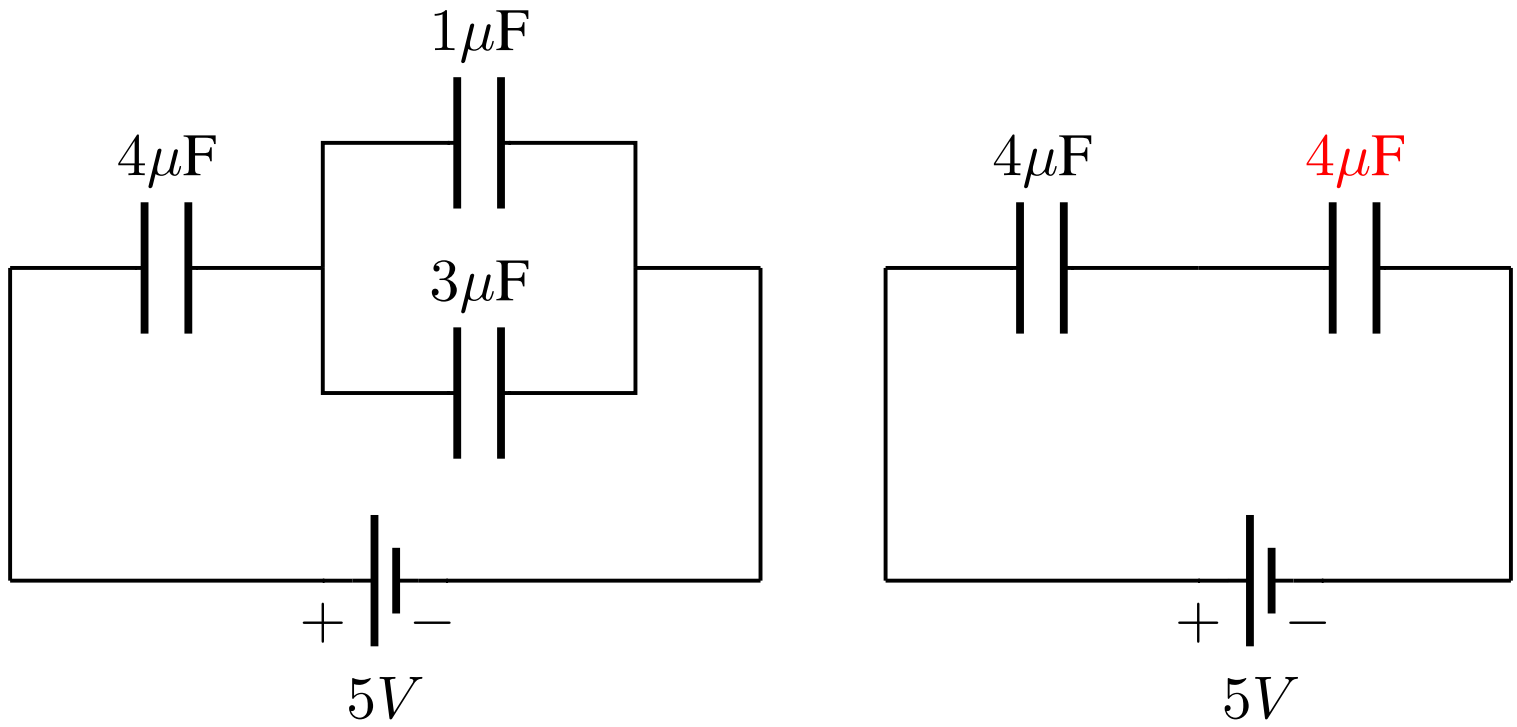
ظرفیت-خازنهای موازی و متوالی

مسئله-۱: در شکل زیر، ظرفیت خازن معادل را بین دو نقطه‌ی a و b بدست آورید. ظرفیت خازنها بر حسب میکروفاراد است.



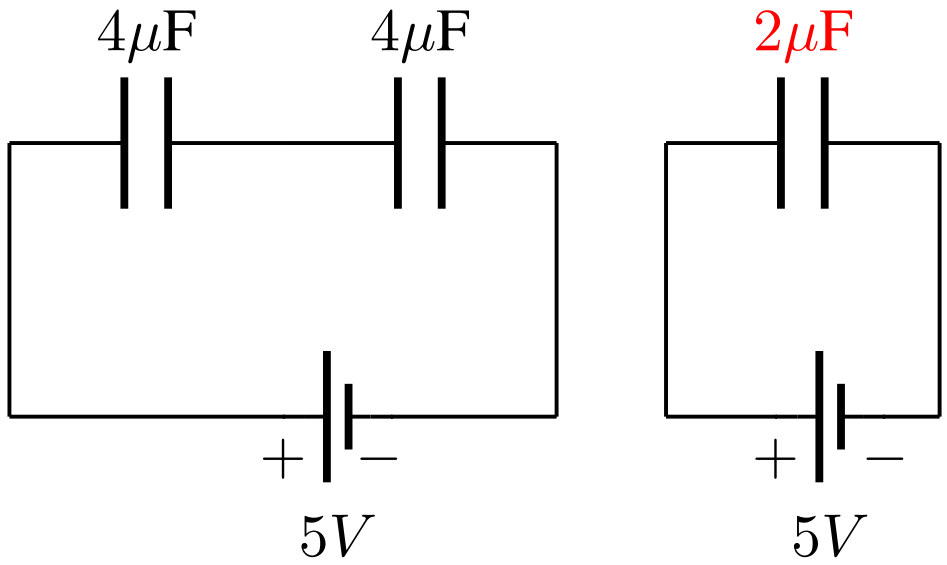
ظرفیت-خازنهای موازی و متوالی

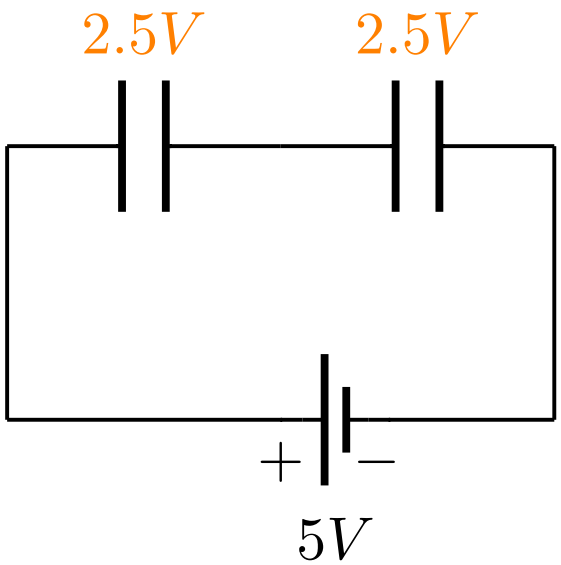
مسئله-۲: در شکل زیر، الف) ظرفیت خازن معادل را دو سر باتری بدست آورید. ب) بار روی هر خازن و اختلاف پتانسیل دو سر آنرا پیدا کنید.

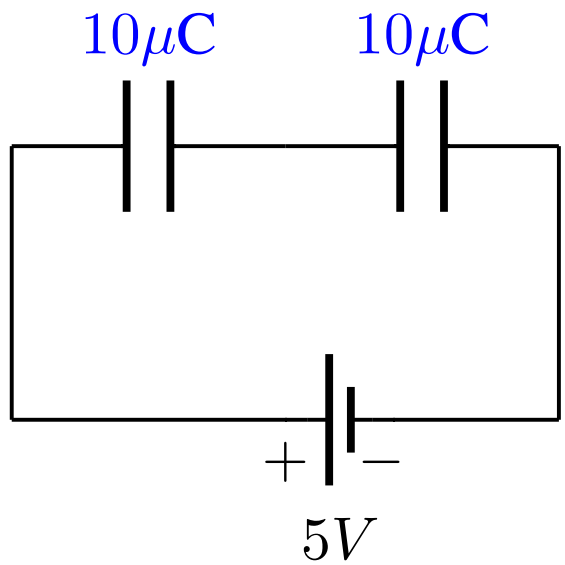


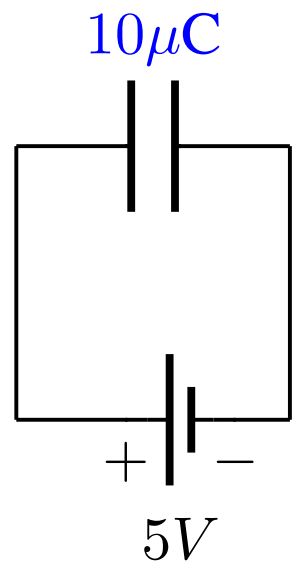
ظرفیت-خازنهای موازی و متوالی

مسئله-۲:



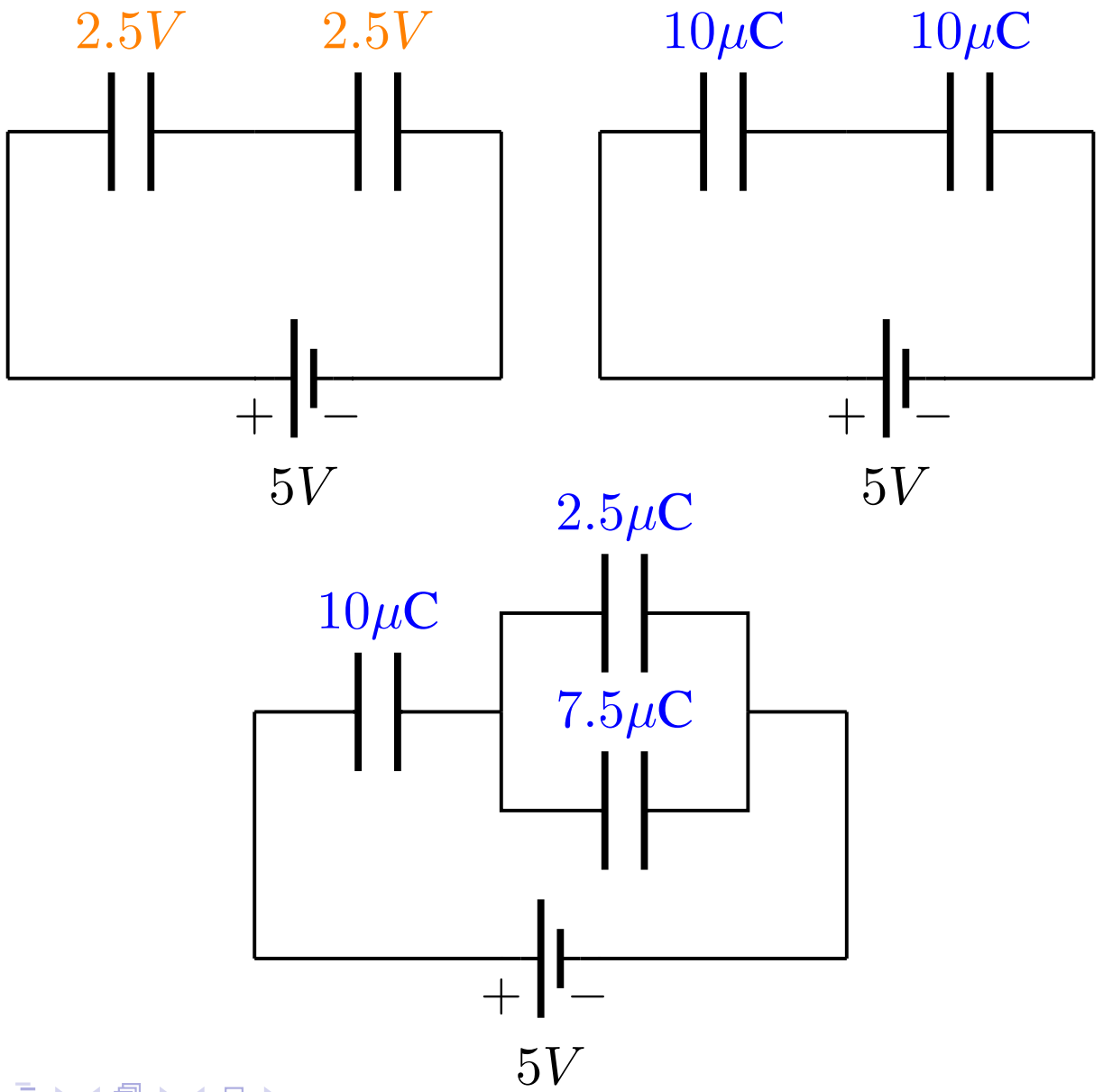






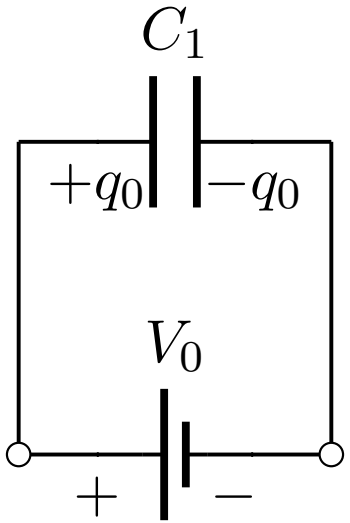
ظرفیت-خازنهای موازی و متوالی

مسئله-۲:

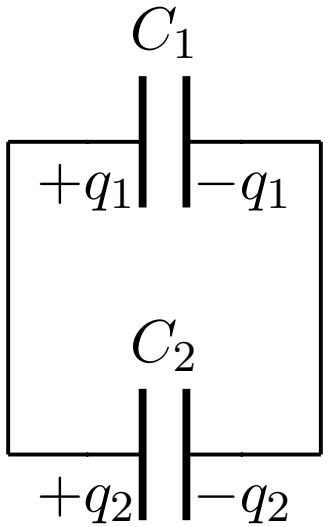


ظرفیت-خازنهای موازی و متوالی

مسئله-۳: خازن ۱ با ظرفیت C_1 تا اختلاف پتانسیل V_0 باردار می‌شود. سپس باتری جدا می‌شود و مطابق شکل به خازن ۲ بدون بار C_2 وصل می‌شود. وقتی کلید S بسته می‌شود، بار بین خازن‌ها جریان می‌یابد. وقتی خازن به تعادل بار هر خازن را بدست آورید.



$$q_0 = C_1 V_0$$



$$q_1 + q_2 = q_0 = C_1 V_0$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = C_1 V_0 \\ q2 = (C_2/C_1) q_1 \end{cases}$$

$$q_1 = \frac{C_1^2 V_0}{C_1 + C_2}$$

$$q_2 = \frac{C_1 C_2 V_0}{C_1 + C_2}$$

ظرفیت-انرژی ذخیره شده

- اگر در یک لحظه‌ی معین بار q' از یک صفحه‌ی خازن به صفحه‌ی دیگری منتقل می‌شود. اختلاف پتانسیل V' بین صفحات در آن لحظه برابر q'/C است.
- کاری که باتری برای انتقال بار اضافی $\mathrm{d}q'$ انجام می‌دهد برابر است با

$$\mathrm{d}W = V'\mathrm{d}q' = \frac{q'}{C}\mathrm{d}q'$$

که بصورت انرژی پتانسیل الکتریکی در میدان الکتریکی بین صفحات خازن ذخیره می‌شود.

- مقدار کارلازم برای تبدیل کل بار خازن به مقدار نهایی q برابر است با

$$W = \int \mathrm{d}W = \frac{1}{C}\int_0^q q'\mathrm{d}q' = \frac{q^2}{2C}$$

ظرفیت-انرژی ذخیره شده

- این کار بصورت انرژی پتانسیل U در خازن ذخیره می‌شود، یعنی

$$U = \frac{q^2}{2C}$$

که با استفاده از رابطه‌ی $q = CV$ آنرا می‌توان به شکلهای زیر هم نوشت،

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV$$

- برای دو خازن تخت، حجم خازن ۱ دو برابر حجم خازن ۲ است. اگر هردو خازن دارای بار یکسان q باشند، **میدانهای الکتریکی بین صفحات آنها یکسان است.** رابطه‌ی $U = q^2/2C$ بیان می کند **انرژی پتانسیل ذخیره شده در خازن ۱ دو برابر خازن ۲ است.**
- بطور کلی، انرژی پتانسیل خازن باردار را می‌توان بصورت انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی بین صفحات آن در نظر گرفت.

ظرفیت-چگالی انرژی

برای یک خازن تخت، **چگالی انرژی**، u، بصورت

$$u = \frac{U}{Ad}$$

داده می‌شود که A مساحت صفحات خازن و d فاصله‌ی بین صفحات است.
انرژی پتانسیل بر حسب ظرفیت و اختلاف پتانسیل دو سر خازن تخت برابر است با

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}V^2$$

بنابراین، چگالی انرژی برای خازن تخت

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{V^2}{d^2}$$

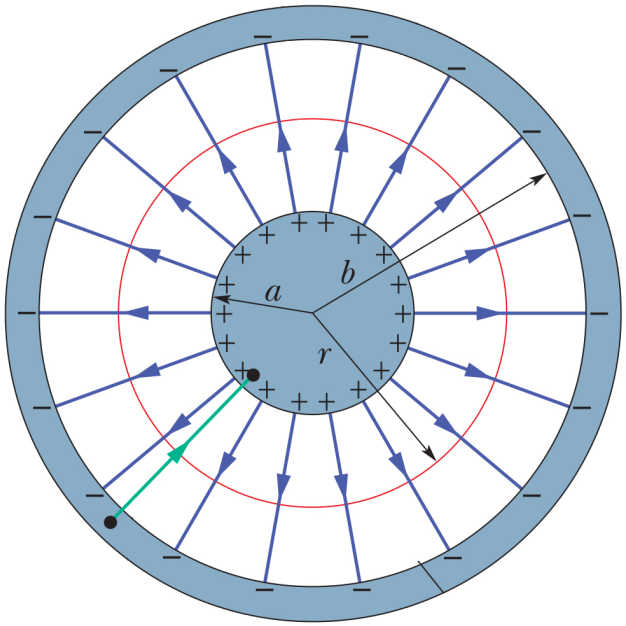
با رابطه‌ی میدان الکتریکی بین صفحات و اختلاف پتانسیل دو سر خازن $V = Ed$، چگالی انرژی برابر است با

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}$$

اگرچه نتیجه‌ی بالا برای خازن تخت بدست آمده است ولی برای هر میدان الکتریکی برقرار است.

ظرفیت-چگالی انرژی

مسئله-۴: با استفاده از چگالی انرژی، ظرفیت خازن استوانه‌ای را بدست آورید.



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(2\pi r L) = q$$

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}$$

$$U = \int_a^b u \mathrm{d}V = \int_a^b \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$$

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_a^b \frac{q^2}{(2\pi\epsilon_0 L)^2 r^2} 2\pi L r \mathrm{d}r$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

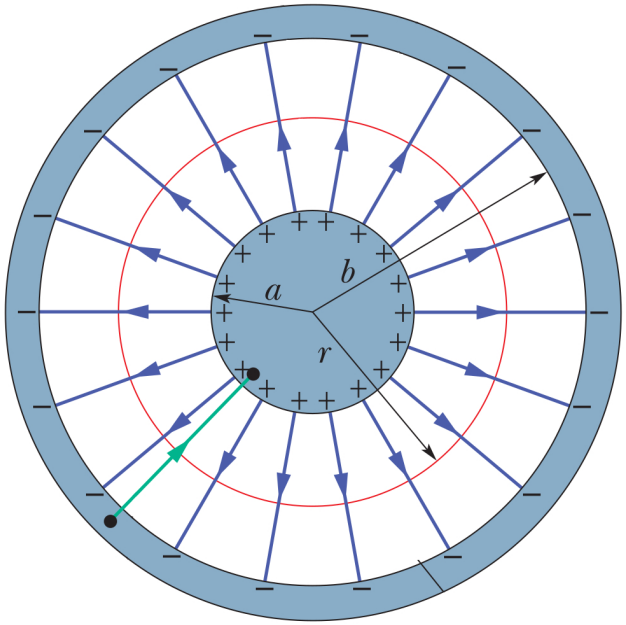
$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

می‌دانیم : $U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

ظرفیت-چگالی انرژی

مسئله-۵: برای استوانه نشان داده شده، نشان دهید نصف انرژی ذخیره شده در استوانه در شعاع $r = \sqrt{ab}$ قرار دارد.



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(2\pi r L) = q$$

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}$$

$$U = \int_a^r u \mathrm{d}V = \int_a^r \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$$

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_a^r \frac{q^2}{(2\pi\epsilon_0 L)^2 r^2} 2\pi L r \mathrm{d}r$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L}\int_a^r \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

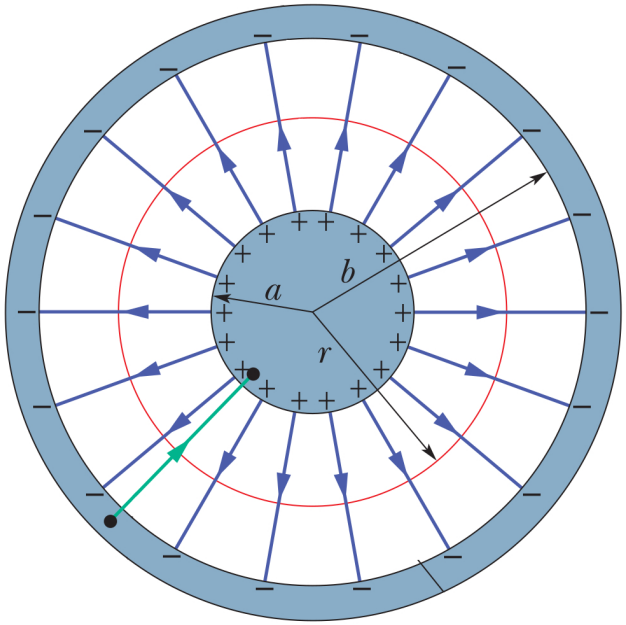
$$U(r) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$U(r) = \frac{1}{2}U(b)$$

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

ظرفیت-چگالی انرژی

مسئله-۵: برای استوانه نشان داده شده، نشان دهید نصف انرژی ذخیره شده در استوانه در شعاع $r = \sqrt{ab}$ قرار دارد.



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(2\pi r L) = q$$

$$E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 L r}$$

$$U(r) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$U(r) = \frac{1}{2}U(b)$$

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

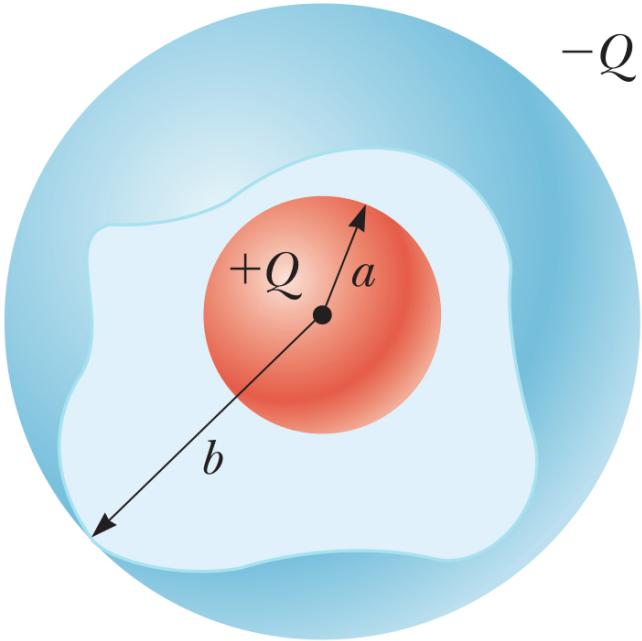
$$\ln\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{r}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$r = \sqrt{ab}$$

ظرفیت-چگالی انرژی

مسئله-۶: با استفاده از چگالی انرژی، ظرفیت خازن کروی را بدست آورید.



$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E(4\pi r^2) = q$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$U = \int_a^b u \mathrm{d}V = \int_a^b \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \mathrm{d}V$$

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_a^b \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^4} 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

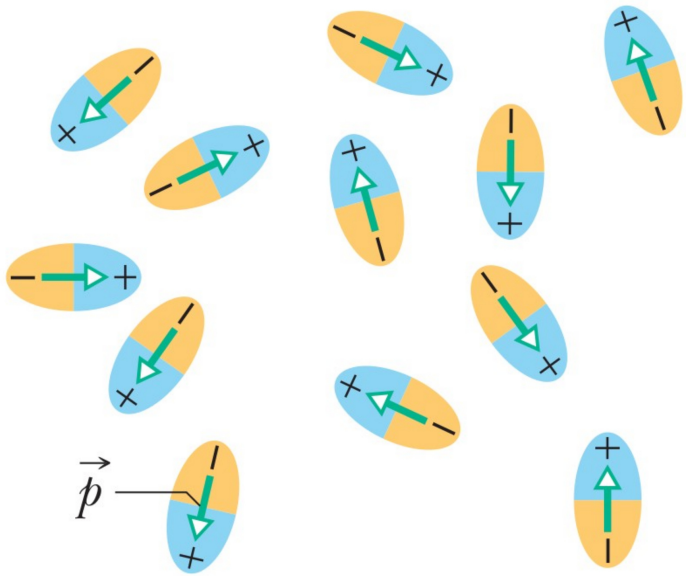
می‌دانیم : $U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$

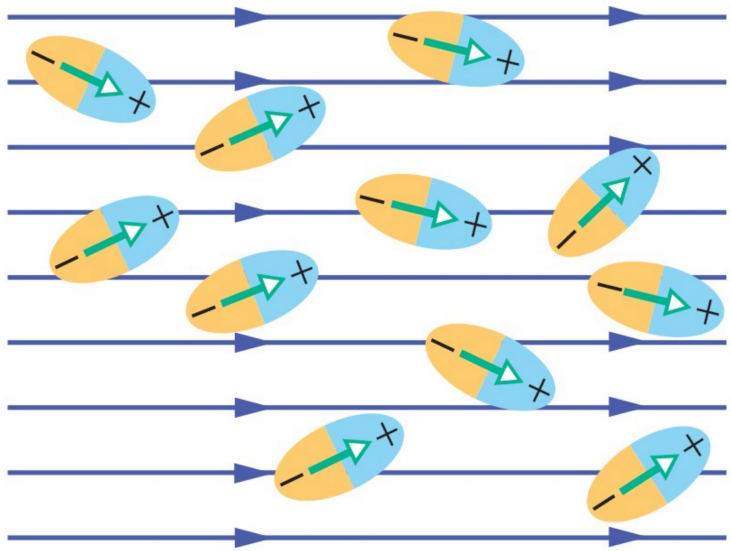
$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

ظرفیت-خازن دارای دی‌الکتریک

دی‌الکتریک‌های قطبی

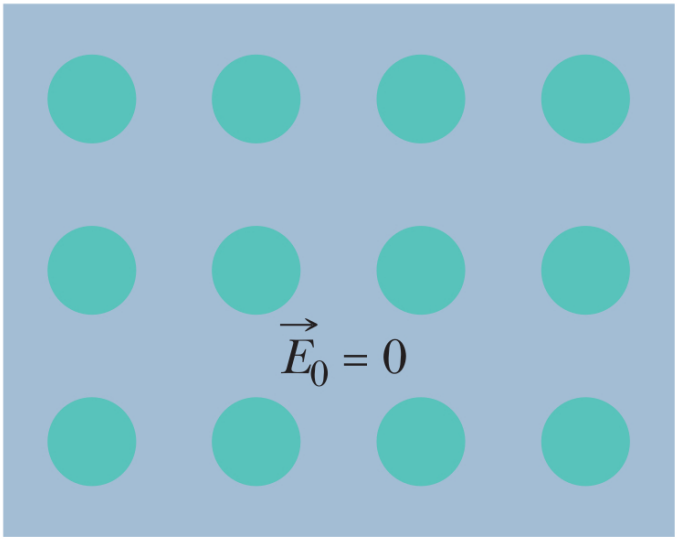
- دی‌الکتریک‌های قطبی از گشتاور دوقطبی دائمی تشکیل شده‌اند.
- وقتی دی‌الکتریک‌های قطبی در میدان الکتریکی خارجی قرار می‌گیرند، گشتاور دوقطبی آنها می‌خواهند با میدان خارجی همسو شوند.
- این همسویی دوقطبی‌های الکتریکی، میدانی در خلاف جهت میدان اعمالی ایجاد می‌کند که بزرگی آن کوچکتر از بزرگی میدان اعمالی است.

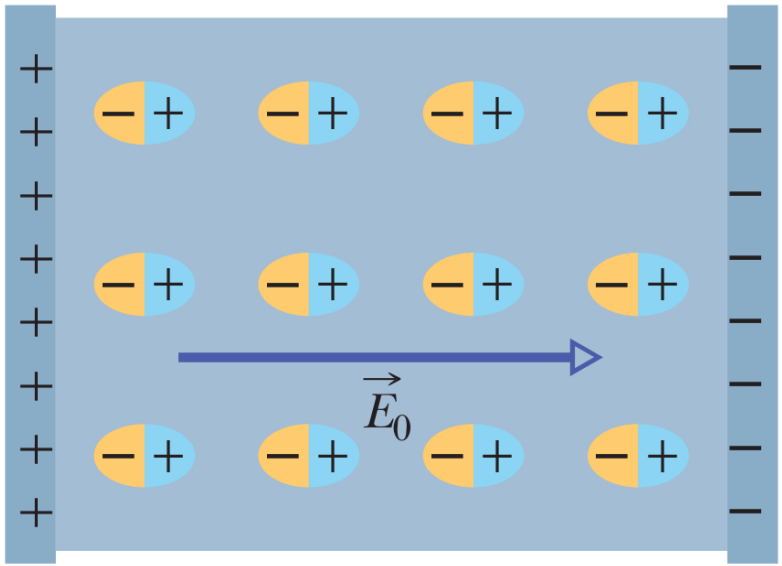




ظرفیت-خازن دارای دی‌الکتریک

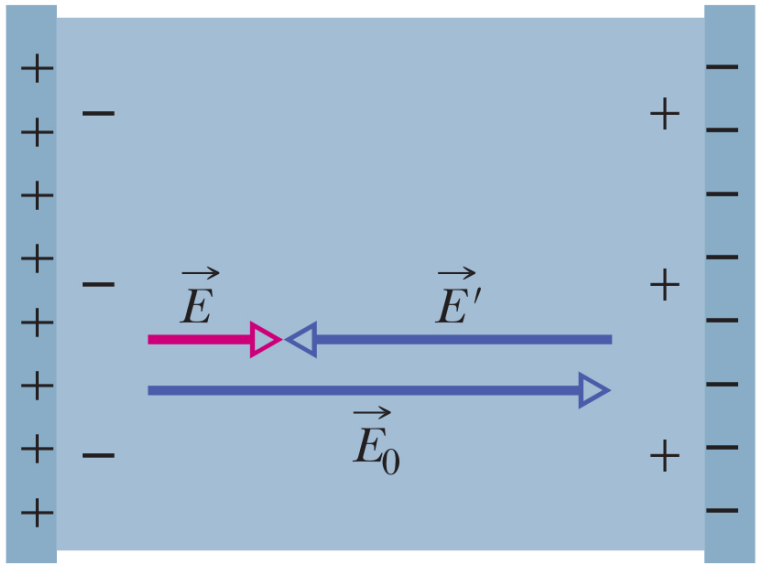
- دی‌الکتریک‌های غیرقطبی
  - دی‌الکتریک‌های غیرقطبی گشتاور دوقطبی دائمی ندارند.
  - وقتی دی‌الکتریک‌های غیرقطبی در میدان الکتریکی خارجی قرار می‌گیرند، مقدار اندکی فاصله بین مراکز بار مثبت و منفی مولکولهای ایجاد می‌شود که آنها را گشتاور دوقطبی القایی می‌نامند.
  - این گشتاور دوقطبی‌های القایی، میدانی در خلاف جهت میدان اعمالی ایجاد می‌کند که بزرگی آن کوچکتر از بزرگی میدان اعمالی است.



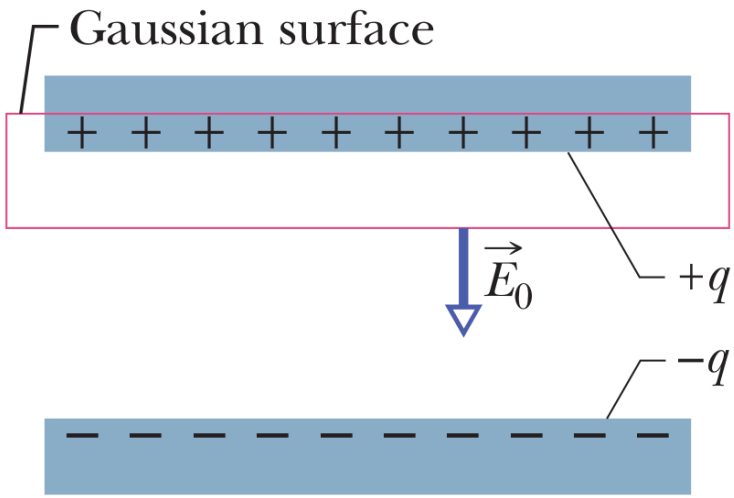


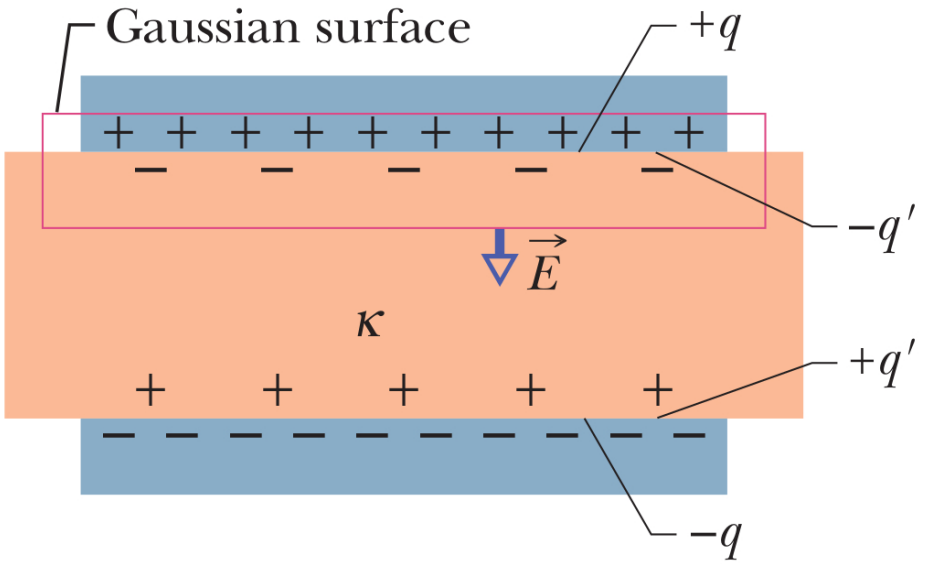
ظرفیت-خازن دارای دی‌الکتریک

- در اثر اعمال میدان الکتریکی E_0، بارهای سطحی ناشی از دوقطبی‌های (دائمی یا القایی) برهی دی‌الکتریک، میدان الکتریکی E' را ایجاد می کند.
- میدان الکتریکی E' در خلاف جهت میدان اعمالی E_0 است. میدان برآیند E در داخل دی‌الکتریک در جهت E_0 ولی با بزرگی کوچکتر می‌باشد.
- بنابراین دی‌الکتریک‌های قطبی و غیرقطبی باعث تضعیف میدان الکتریکی ناشی از صفحات خازن می‌شود.



ظرفیت-خازن دارای دی‌الکتریک





$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{\text{محصور}}$$

$$\epsilon_0 E_0 A = q$$

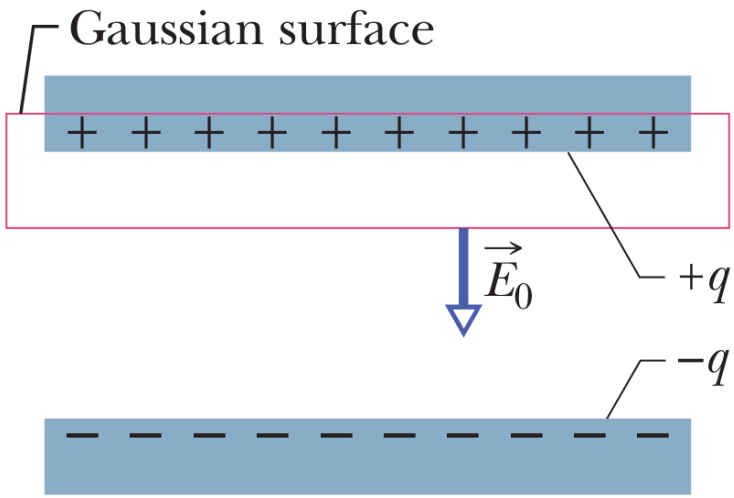
$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q_{\text{محصور}}$$

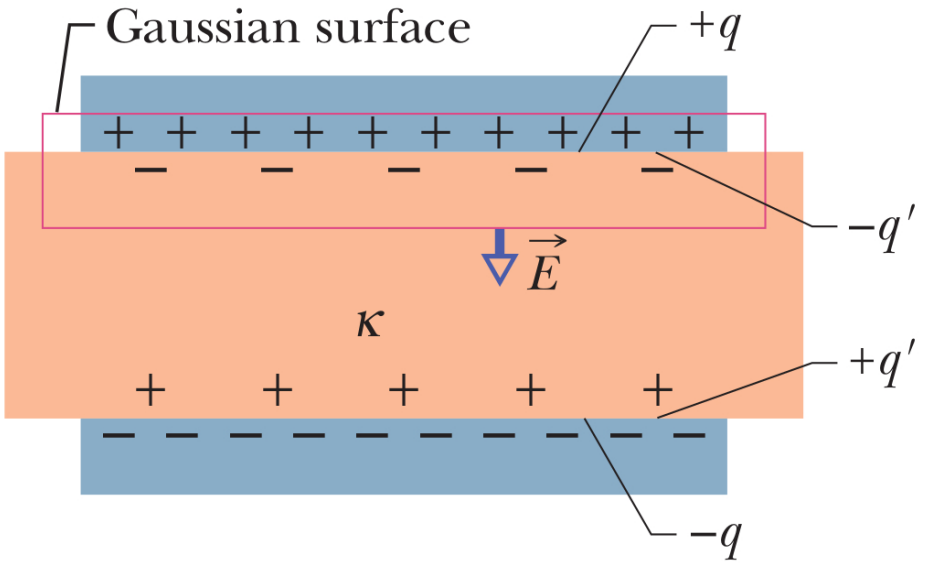
$$\epsilon_0 E A = q - q'$$

$$E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A}$$

ظرفیت-خازن دارای دی‌الکتریک



$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$



$$E = \frac{q - q'}{\epsilon_0 A}$$

اثر تضعیف میدان E_0 بصورت $E = E_0/\kappa$ داده می‌شود که κ ثابت دی‌الکتریک نامیده می‌شود.

$$\begin{cases} E_0 = \dfrac{q}{\epsilon_0 A} \\ E = \dfrac{q - q'}{\epsilon_0 A} \\ E = E_0/\kappa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q - q' = \dfrac{q}{\kappa} \Rightarrow q' = q(1 - 1/\kappa) \\ \epsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q \end{cases}$$

ظرفیت-خازن دارای دی‌الکتریک

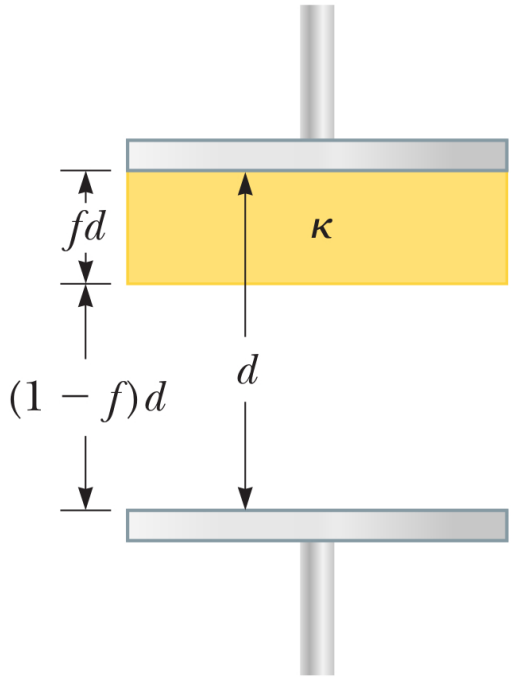
$$\begin{cases} q - q' = \dfrac{q}{\kappa} \Rightarrow q' = q(1 - 1/\kappa) \\ \epsilon_0 \oint \kappa \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q \quad \text{(قانون گاوس با دی‌الکتریک)} \end{cases}$$

- در اینجا q بار محصور شده فقط بار آزاد است و از بارهای القایی صرفه نظر شده است.
- اگر دی‌الکتریک نباشد، بنابراین $\kappa = 1$
- بردار $\epsilon_0 \kappa \vec{E}$ جابجایی الکتریکی D می‌نامند

$$\oint \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = q \quad \text{(قانون گاوس با دی‌الکتریک)}$$

ظرفیت

مسئله-۷: یک خازن تخت با فاصله‌ی بین صفحات d، در غیاب دی‌الکتریک دارای ظرفیت C_0 است. وقتی یک برهٔ دی‌الکتریک با ثابت κ و ضخامت fd بین صفحات قرار داده می‌شود، ظرفیت خازن را بدست آورید.



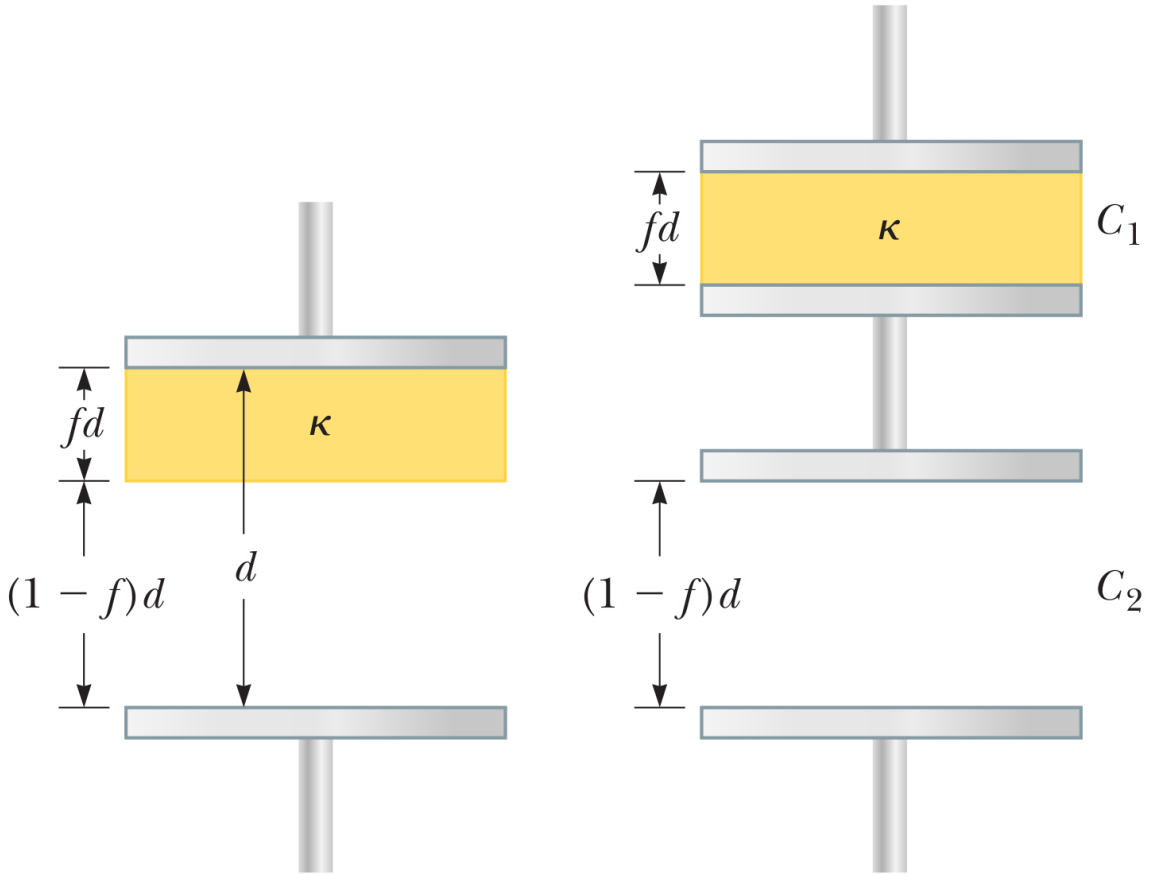
ظرفیت

مسئله-۷:

در غیاب برهی دی‌الکتریک، ظرفیت خازن تخت با صفحاتی به مساحت A و فاصله‌ی d برابر C_0 است

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

ظرفیت خازن در حضور دی‌الکتریک را می‌توان مطابق شکل با دو خازن متوالی معادل کرد.

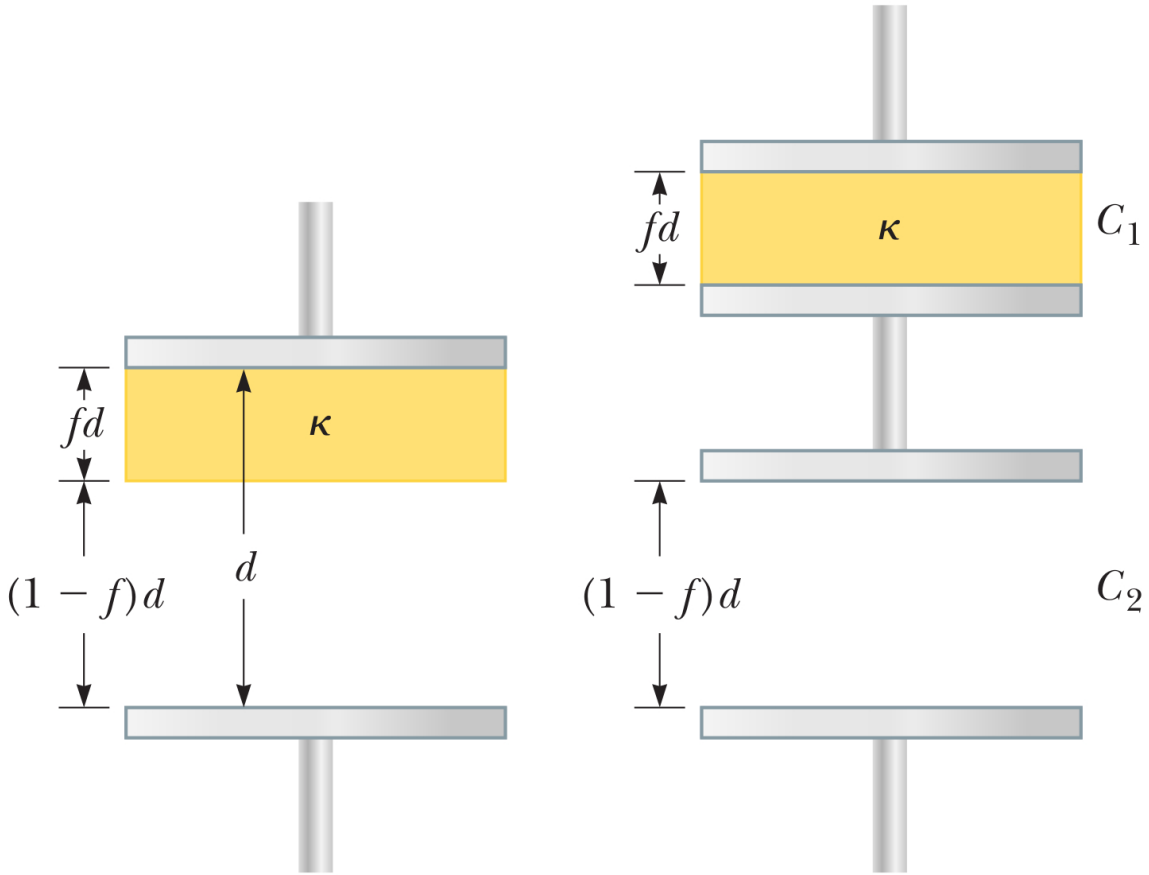


$$C_1 = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{fd} = \frac{\kappa C_0}{f}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{(1-f)d} = \frac{C_0}{1-f}$$

ظرفیت

مسئله-۷:



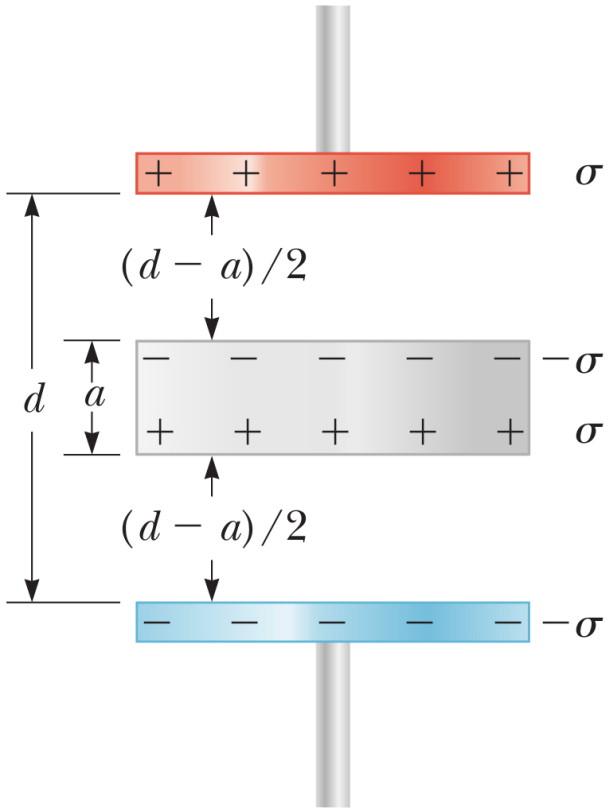
$$C_1 = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{fd} = \frac{\kappa C_0}{f}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{(1-f)d} = \frac{C_0}{1-f}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_0}\left(\frac{f}{\kappa} + (1-f)\right) \Rightarrow C = C_0 \frac{\kappa}{(1-\kappa)f + \kappa}$$

ظرفیت

مسئله-۸: یک خازن تخت با فاصله‌ی بین صفحات d و صفحاتی با مساحت A دارد. وقتی یک برهٔ فلزی به ضخامت a بین صفحات قرار داده می‌شود، ظرفیت خازن را بدست آورید.



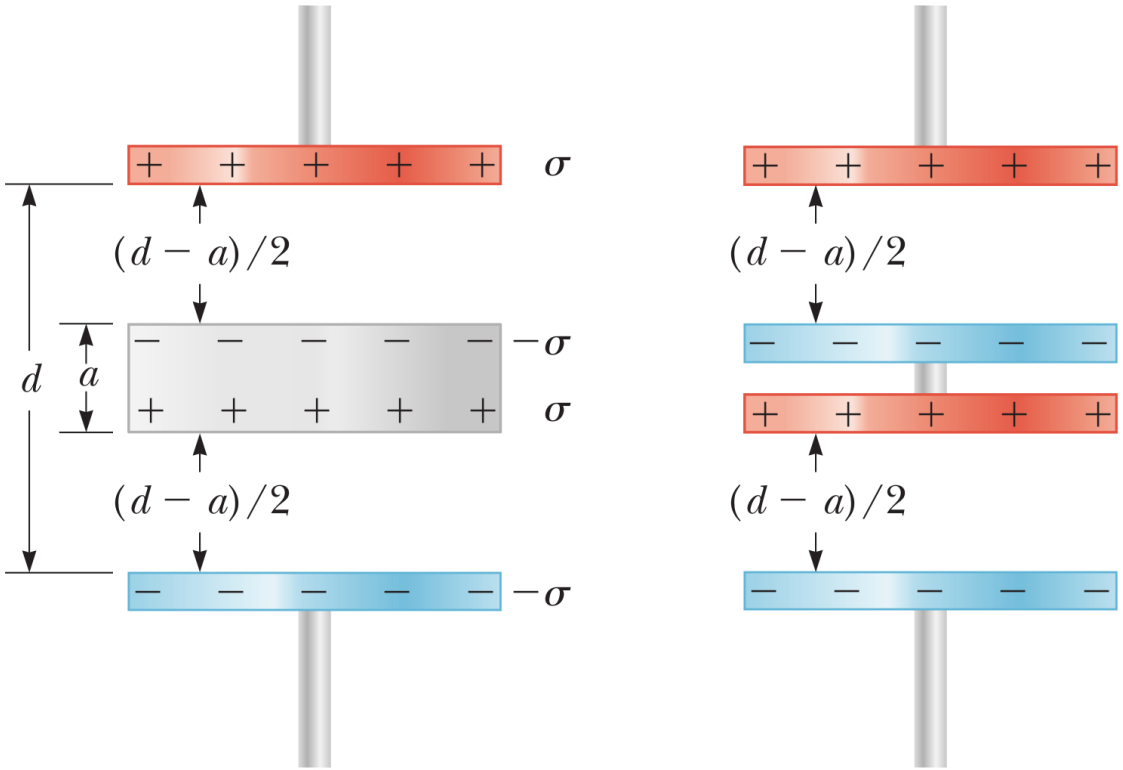
ظرفیت

مسئله-۸:

در غیاب برهٔ فلزی، ظرفیت خازن تخت با صفحاتی به مساحت A و فاصلهٔ d برابر C_0 است

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

ظرفیت خازن در حضور برهٔ فلزی را می‌توان مطابق شکل با دو خازن متوالی معادل کرد.

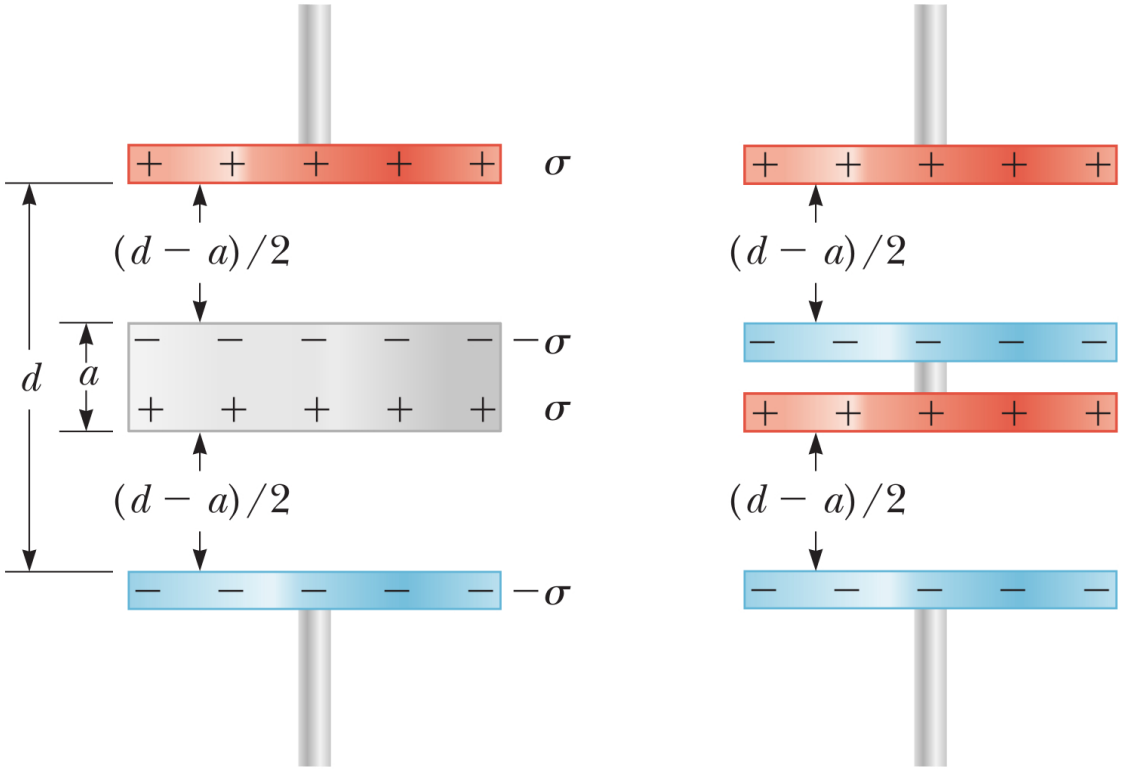


$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2} = C_0 \frac{2d}{d-a}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2} = C_0 \frac{2d}{d-a}$$

ظرفیت

مسئله-۸:



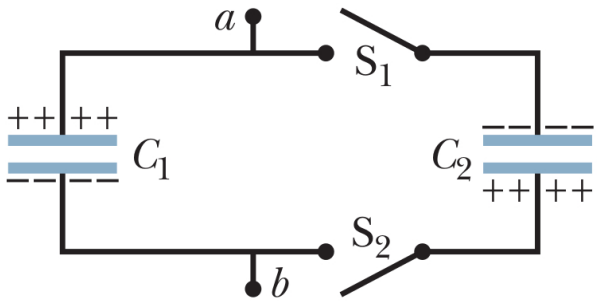
$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2} = C_0 \frac{2d}{d-a}$$

$$C_2 = \frac{\epsilon_0 A}{(d-a)/2} = C_0 \frac{2d}{d-a}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_0}\left(\frac{d-a}{2d} + \frac{d-a}{2d}\right) \Rightarrow C = C_0 \frac{d}{d-a}$$

ظرفیت

مسئله-۹: در شکل خرفیت خازن $C_1 = C_0$ و ظرفیت خازن $C_2 = 3C_0$ است و هر دو خازن با اختلاف پتانسیل V_0 بادار شده‌اند اما همانطور که نشان داده شده قطبیت آنها با هم فرق می‌کند.حال کلیدهای S_1 و S_2 بسته می شوند. الف) در این حالت اختلاف پتانسیل بین نقاط a و b را بدست آورید. ب) بار روی خازنها را بدست آورید.



بار روی خازنها قبل از بسته شدن کلیدها

$$q_1 = C_0V_0, \quad q_2 = 3C_0V_0 = 3q_1$$

وقتی کلید S_1 بسته می‌شود بارها روی صفحات بالایی دو خازن با هم تجمیع می‌شوند. بنابراین

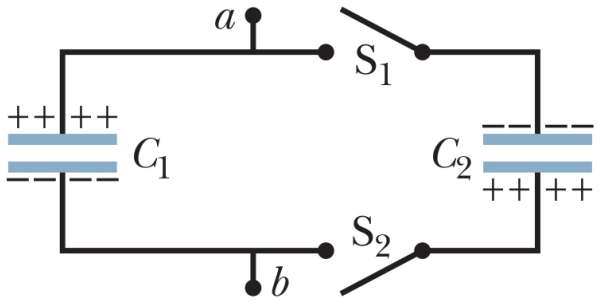
$$\text{بار کل صفحات بالایی} = -2C_0V_0$$

وقتی کلید S_2 بسته می‌شود بارها روی صفحات پایینی دو خازن با هم تجمیع می‌شوند. بنابراین

$$\text{بار کل صفحات پایینی} = +2C_0V_0$$

ظرفیت

مسئله-۹:



بار روی خازنها قبل از بسته شدن کلیدها

$$q_1 = C_0 V_0, \quad q_2 = 3C_0 V_0 = 3q_1$$

وقتی کلیدها بسته می‌شوند. بنابراین

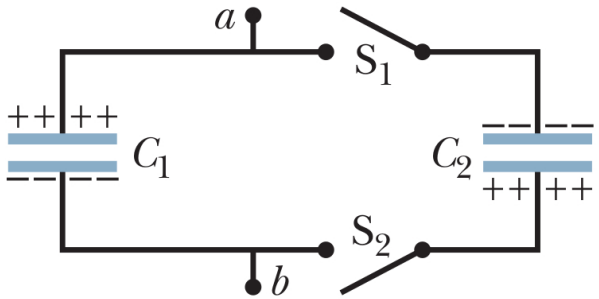
$$\text{بار کل صفحات بالایی} : \quad q_1' = -2C_0 V_0$$

$$\text{بار کل صفحات پایینی} : \quad q_2' = +2C_0 V_0$$

نکته کلیدی: بنابراین روی هر دو صفحه‌ی بالایی بار منفی و روی هر دو صفحه‌ی پایینی بار مثبت قرار می‌گیرد. این نشان می دهد که بعد از بسته شدن کلیدها، خازنها آرایش موازی خواهند داشت.

ظرفیت

مسئله-۹:



$$q'_{\text{کل}} = 2C_0V_0$$

ظرفیت معادل دو خازن موازی : $C_{\text{معادل}} = C_1 + C_2 = 4C_0$

$$q'_{\text{کل}} = C_{\text{معادل}}V_{ab} \Rightarrow V_{ab} = V_0/2$$

بار روی خازن C_1 : $q'_1 = C_1V_{ab} = C_0V_0/2$

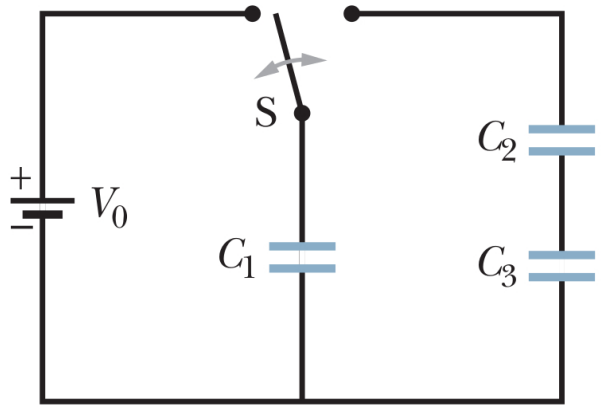
بار روی خازن C_2 : $q'_2 = C_2V_{ab} = 3C_0V_0/2$

انتظار داریم که

$$q'_1 + q'_2 = C_0V_0/2 + 3C_0V_0/2 = 2C_0V_0 = q'_{\text{کل}}$$

ظرفیت

مسئله-۱۰: در شکل سه خازن بدون بار با ظرفیت‌های C_1، C_2 و C_3 بهم وصل شده‌اند. ابتدا کلید را به چپ وصل می‌کنیم تا خازن C_1 توسط باتری V_0 کاملا پر شود. سپس کلید بطرف راست وصل می‌کنیم. بار نهایی خازن‌ها را بدست آورید.

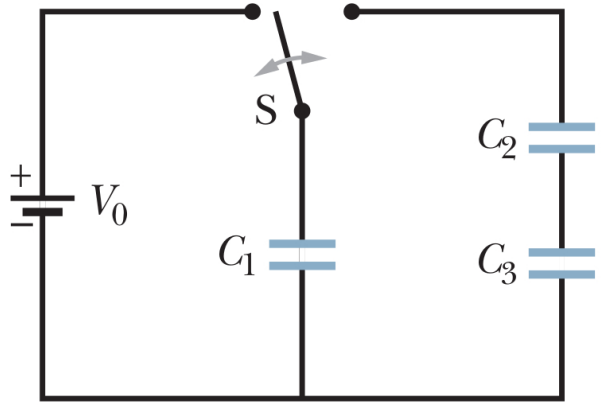


وقتی کلید به چپ وصل می‌شود، خازنهای C_2 و C_3 از مدار خارج هستند و باری برابر با صفر دارند $(q_2 = q_3 = 0)$ و بار خازن C_1 برابر

$$q_1 = C_1 V_0$$

ظرفیت

مسئله- ۱۰:



بار روی خازنها قبل از وصل شدن کلید از چپ راست

$$q_1 = C_1 V_0, \quad q_2 = q_3 = 0$$

وقتی کلید به راست وصل می‌شود

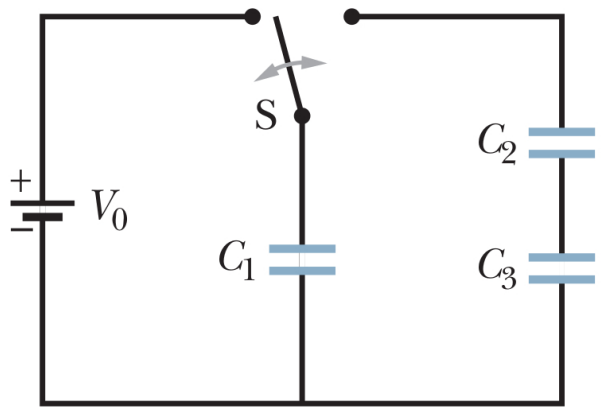
$$q'_1 + q'_2 = q_1 = C_0 V_0 \quad : \text{بار کل صفحات بالایی خازنهای } C_1 \text{ و } C_2$$

$$q'_1 + q'_3 = q_1 = C_0 V_0 \quad : \text{بار کل صفحات پایینی خازنهای } C_1 \text{ و } C_2$$

از دو عبارت بالا می‌توان نتیجه گرفت که $q'_2 = q'_3$.این نتیجه یعنی اینکه دو خازن C_2 و C_3 با هم متوالی و با خازن C_1 موازی هستند.

ظرفیت

مسئله- ۱۰:



$$\textcircled{1}\quad q_1' + q_2' = C_0 V_0, \quad q_2' = q_3'$$

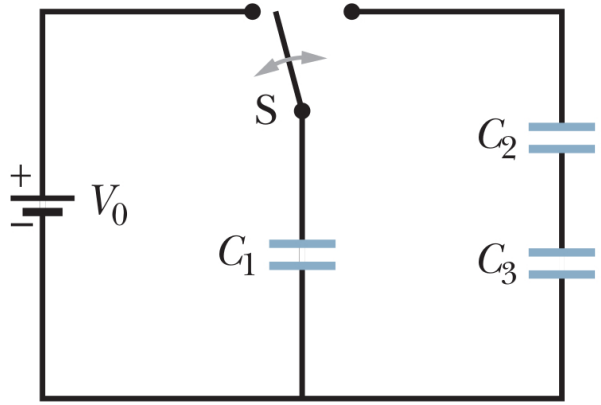
چون دو خازن C_2 و C_3 با هم متوالی و با خازن C_1 موازی هستند، اختلاف پتانسیل دو سر خازن C_1 با اختلاف پتانسیل دو سر خازن معادل C_2 و C_3 با هم برابرند

$$V_1 = V_{23} \Rightarrow \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_{23}}, \qquad \frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$q_1' = \frac{C_1(C_2 + C_3)}{C_2 C_3} q_2' \quad \textcircled{2}$$

ظرفیت

مسئله- ۱۰:



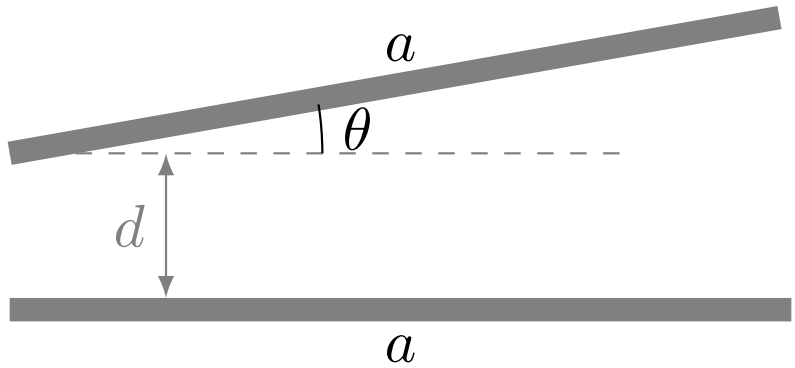
$$\begin{cases} q_1' + q_2' = C_0 V_0 \\ q_1' = \dfrac{C_1(C_2 + C_3)}{C_2 C_3} q_2' \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1' = \dfrac{C_1 C_2 + C_3 C_1}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} C_1 V_0 \\ q_2' = q_3' = \dfrac{C_2 C_3}{C_1 C_2 + C_2 C_3 + C_3 C_1} C_1 V_0 \end{cases}$$

ظرفیت

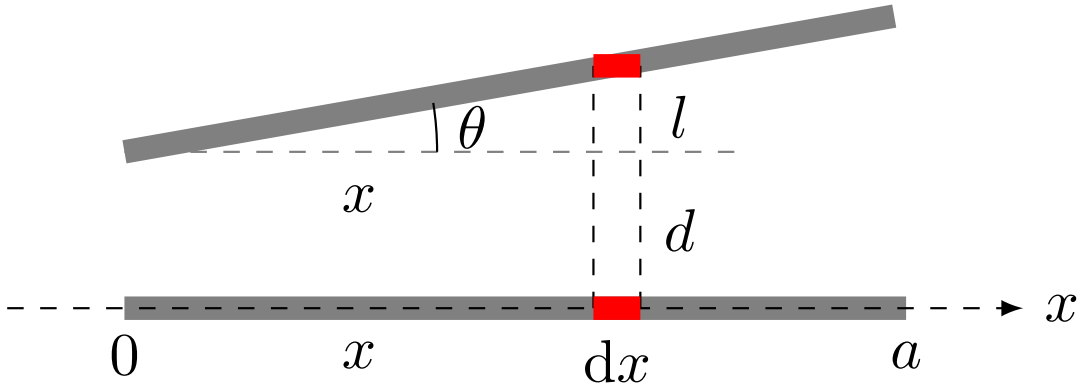
مسئله-۱۱: یک خازن دارای صفحاتی به شکل مربع و ضلع a است که مطابق شکل با زاویه θ می‌سازند. نشان دهید که برای مقادیر کوچک θ ظرفیت خازن را از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید،

$$C = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}\left(1 - \frac{\theta a}{2d}\right)$$



ظرفیت

مسئله-۱۱:



$$\mathrm{d}C = \frac{\epsilon_0 a \mathrm{d}x}{d+l} = \frac{\epsilon_0 a \mathrm{d}x}{d + x\tan\theta}$$

برای θهای کوچک : $\tan\theta \simeq \theta$

$$\mathrm{d}C = \frac{\epsilon_0 a \mathrm{d}x}{d + x\theta}$$

مسئله-۱۱:

$$\mathrm{d}C = \frac{\epsilon_0 a \mathrm{d}x}{d + x\theta}$$

$$C = \epsilon_0 a \int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{d + x\theta} = \frac{\epsilon_0 a}{\theta} \ln\left(\frac{d + \theta a}{d}\right) \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 a}{\theta} \ln\left(1 + \frac{\theta a}{d}\right)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_0^\infty (-1)^n x^n, \quad x \ll 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_0^n \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{1}{2}x + \cdots$$

$$\frac{\theta a}{d} \ll 1 : \; C = \frac{\epsilon_0 a}{\theta} \ln\left(1 + \frac{\theta a}{d}\right) = \frac{\epsilon_0 a}{\theta}\left(\frac{\theta a}{d} - \frac{\theta^2 a^2}{2d^2}\right) = \frac{\epsilon_0 a^2}{d}\left(1 - \frac{\theta a}{2d}\right)$$

ظرفیت

مسئله-۱۲: نشان دهید که صفحات یک خازن مسطح یکدیگر را با نیروی

$$F = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}$$

جذب می‌کنند که A مساحت و q بار روی صفحات خازن است.

روش اول: انرژی پتانسیل الکتریکی

$$U = \frac{q^2}{2C}$$

$$U(y) = \frac{q^2 y}{2\epsilon_0 A}$$

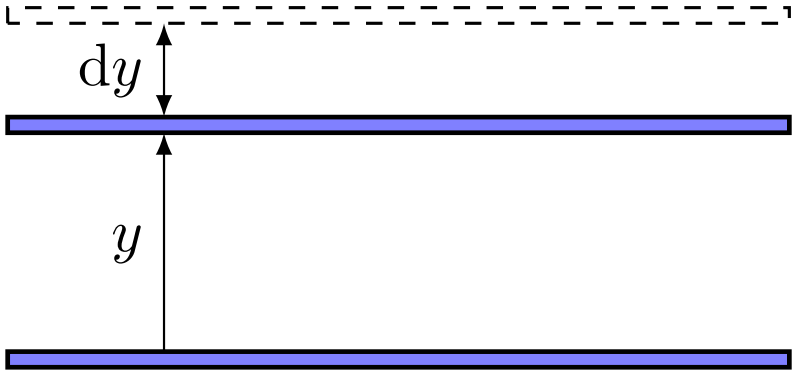
$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}U(y) \Rightarrow F = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 A}$$

نیروی بین صفحات جاذب است

ظرفیت خازن تخت : $C = \frac{\epsilon_0 A}{y}$

ظرفیت

مسئله-۱۲:



روش دوم: چگالی انرژي پتانسیل الکتریکی

$$U = \int u \mathrm{d}V, \quad \text{چگالی انرژی} : \ u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \quad \text{میدان الکتریکی} : \ E = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

$$U(y) = \int_0^y \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{q^2}{\epsilon_0^2 A^2} A \mathrm{d}y = \frac{q^2}{2\epsilon_0 A}\int_0^y \mathrm{d}y \Rightarrow U(y) = \frac{q^2 y}{2\epsilon_0 A}$$

$$F = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}U(y) \Rightarrow F = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 A}$$

نیروی بین صفحات جاذب است.

ظرفیت

مسئله-۱۳: یک خازن مسطح را که مساحت صفحات آن A و فاصله‌ی میان آنها d است تا اختلاف پتانسیل V پر می کنیم. سپس باتری را بر می‌داریم و صفحات را آنقدر دور می کنیم که فاصله‌ی میان آنها $2d$ بشود.روابط مربوط به اف) اختلاف پتانسیل جدید، ب) انرژی انباشه شده‌ی اولیه و نهایی و ج) کار لازم برای جدا کردن صفحات را برحسب A، d و V بنویسید.

◄ وقتی فاصله بین صفحات $2d$ می‌شود، بار روی صفحات ثابت باقی می‌ماند

$$q' = q = \frac{\epsilon_0 AV}{d}$$

$$C' = \frac{\epsilon_0 A}{2d}$$

اختلاف پتانسیل جدید : $q = C'V'$

$$V' = \frac{q}{C'} = \frac{\epsilon_0 AV/d}{\epsilon_0 A/2d} = 2V$$

◄ وقتی فاصله بین صفحات d است،

بار روی صفحات خازن : $q = CV = \frac{\epsilon_0 AV}{d}$

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2d}$$

ظرفیت

مسئله-۱۳:

◄ وقتی فاصله بین صفحات $2d$ می‌شود، بار روی صفحات ثابت باقی می‌ماند

$$q' = q = \frac{\epsilon_0 A V}{d}$$

$$C' = \frac{\epsilon_0 A}{2d}$$

$$V' = 2V$$

$$U' = \frac{q^2}{2C'} = \frac{\epsilon_0 A V^2}{d} = 2U$$

$$\Delta U = -W$$

$$W = -\Delta U = -(U' - U) = -(2U - U) = -U$$

$$W = -\frac{\epsilon_0 A V^2}{2d}$$

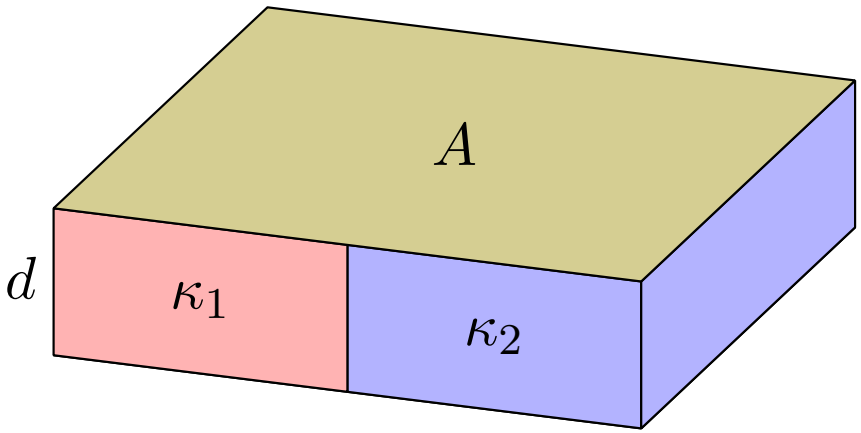
◄ وقتی فاصله بین صفحات d است،

$$q = \frac{\epsilon_0 A V}{d}$$

$$U = \frac{\epsilon_0 A V^2}{2d}$$

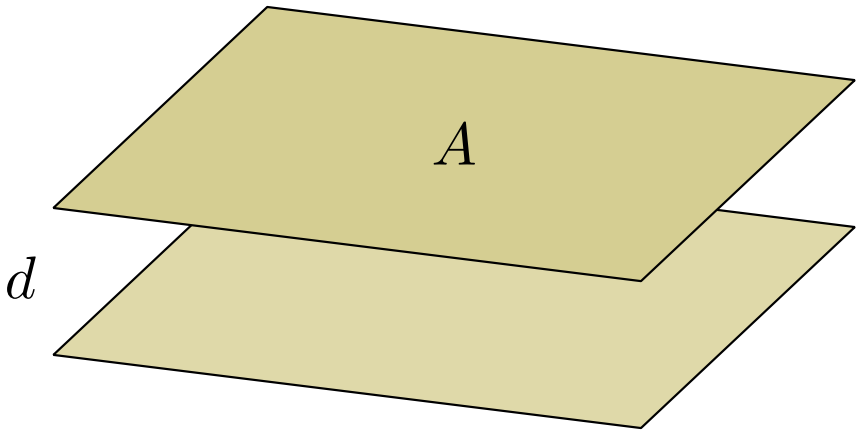
ظرفیت

مسئله-۱۴: ظرفیت خازن معادل زیر را بدست آورید. دی‌الکتریکها ابعاد یکسانی دارند.

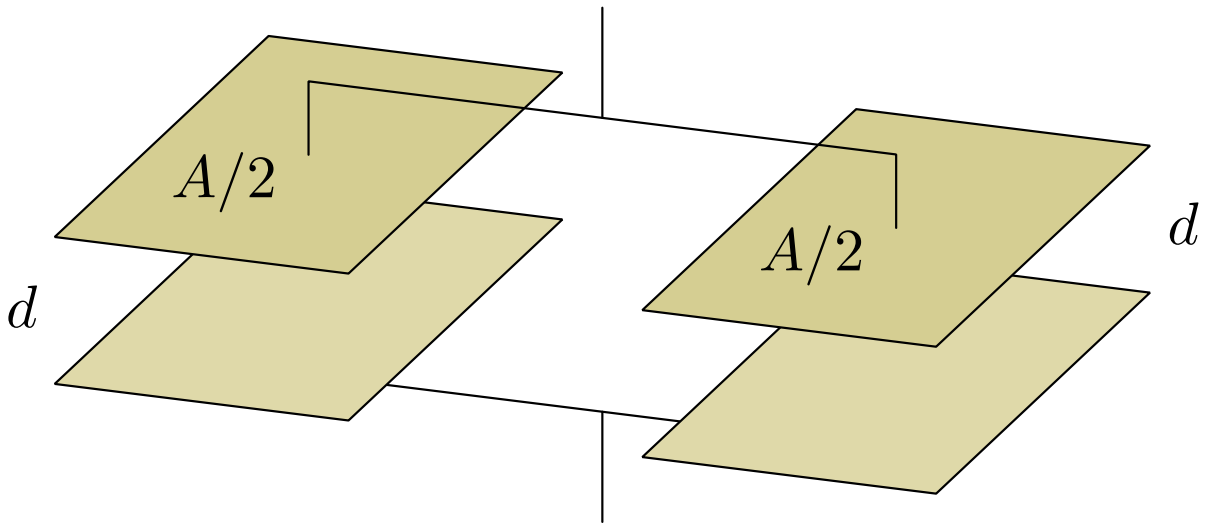


ظرفیت

مسئله-۱۴:



$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$



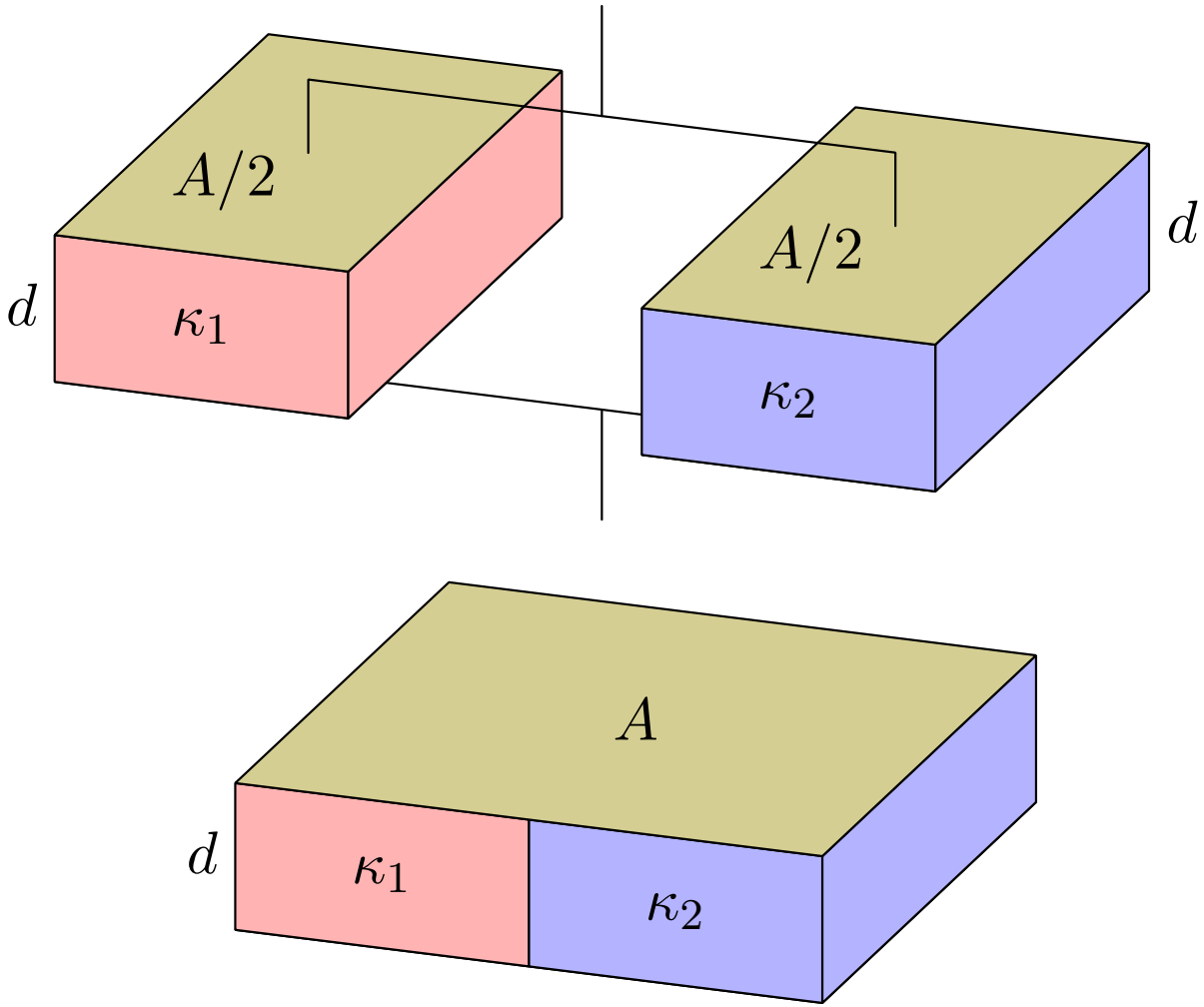
$$C = C_1 + C_2$$

$$C_1 = C_2 = \frac{\epsilon_0 A/2}{d}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

ظرفیت

مسئله-۱۴:



$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \kappa_1 A/2}{d}$$

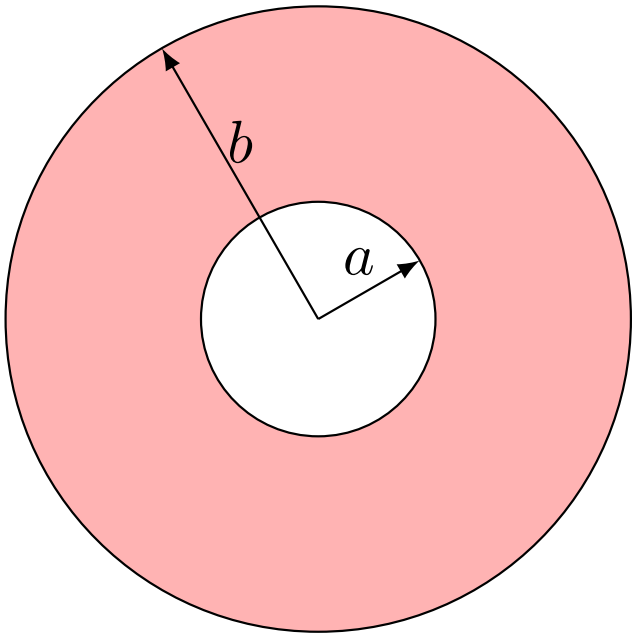
$$C_2 = \frac{\epsilon_0 \kappa_2 A/2}{d}$$

$$C = C_1 + C_2$$

$$C = \frac{\epsilon_0 A/2}{d}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

ظرفیت

مسئله-۱۵: فضای بین دو پوسته کروی رسانای هم مرکز با شعاع های a و $b(>a)$ از ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک κ پر شده است. اختلاف پتانسیل V بین پوسته داخلی و خارجی اعمال می‌شود. الف) ظرفیت خازن ب) بار آزاد روی پوسته‌های داخلی و خارجی و ج) بار القایی روی پوسته‌ی داخلی را بدست آورید.



$$C = 4\pi\epsilon_0\kappa\frac{ab}{b-a}$$

بار آزاد

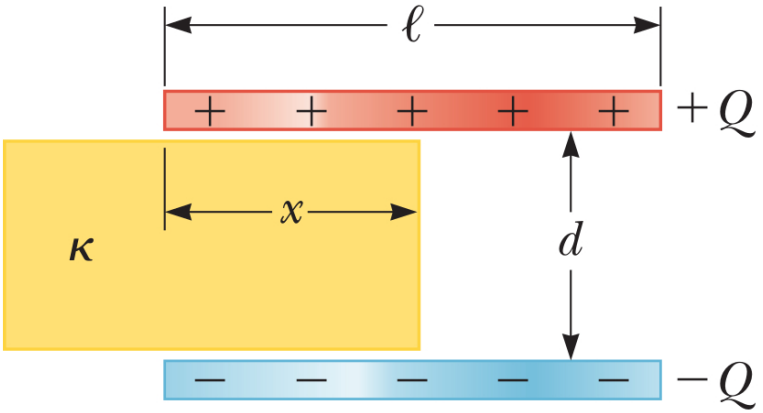
$$q = CV \Rightarrow q = 4\pi\epsilon_0\kappa\frac{ab}{b-a}V$$

بار القایی

$$q_{\text{in}} = q\left(1-\frac{1}{\kappa}\right) = 4\pi\epsilon_0(\kappa-1)\frac{ab}{b-a}V$$

ظرفیت

مسئله-۱۶: خازن تختی که از دو صفحه مربعی با فاصله جدایی d ساخته شده است را تا اختلاف پتانسیل V پر می‌کنیم تا بار $+Q$ و $-Q$ روی صفحات قرار بگیرد. بصورتی که در شکل نشان داده شده است، ماده‌ای با ثابت دی الکتریک κ بطول x وارد خازن می شود. فرض کنید d بسیار کوچکتر از x باشد. (الف) ظرفیت معادل دستگاه را بدست آورید. ب) انرژی ذخیره شده در خازن را محاسبه کنید. ج) جهت و مقدار نیروی وارد شده توسط صفحات بر دی الکتریک را بدست آورید.

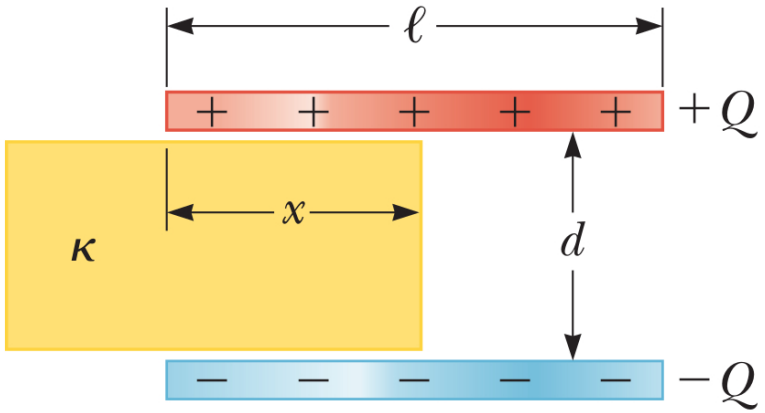


ظرفیت خازن در غیاب دی‌الکتریک

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 l^2}{d}$$

ظرفیت

مسئله-۱۶:



$$C_0 = \frac{\epsilon_0 l^2}{d}$$

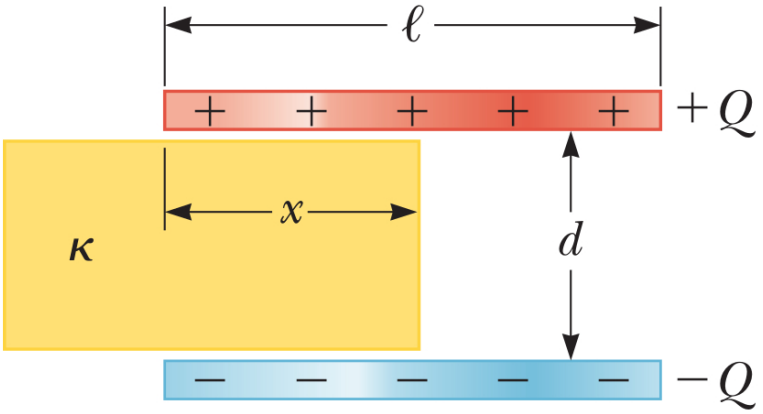
ظرفیت خازن بطول x : $C_1 = \frac{\kappa \epsilon_0 l x}{d} = \frac{\kappa x}{l} C_0$

ظرفیت خازن بطول $l - x$: $C_2 = \frac{\epsilon_0 l (l-x)}{d} = \frac{(l-x)}{l} C_0$

$$C_{\text{معادل}} = C_1 + C_2 = \left[1 + (\kappa - 1)\frac{x}{l}\right] C_0$$

ظرفیت

مسئله-۱۶:



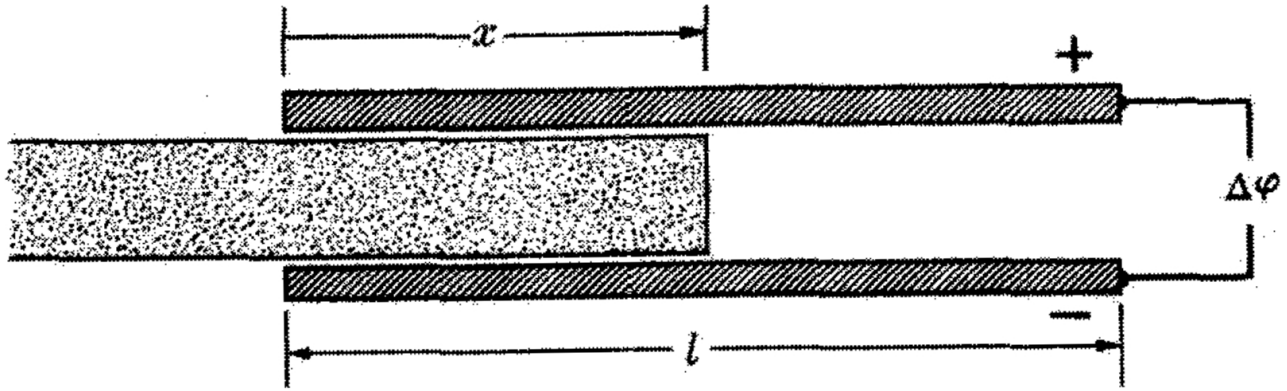
$$C_0 = \frac{\epsilon_0 l^2}{d}, \quad C_{\text{معادل}} = \left[1 + (\kappa - 1)\frac{x}{l}\right] C_0$$

$$U = \frac{Q^2}{2C_{\text{معادل}}}, \quad F = \left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right)_Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{\text{معادل}}^2}\frac{\mathrm{d}C_{\text{معادل}}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}V^2\frac{\mathrm{d}C_{\text{معادل}}}{\mathrm{d}x}$$

$$F = \frac{1}{2}V^2\frac{\mathrm{d}C_{\text{معادل}}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}C_0V^2(\kappa - 1)\frac{1}{l} = \frac{\epsilon_0(\kappa - 1)lV^2}{2d}$$

ظرفیت

مسئله-۱۷: خازنی با صفحات موازی به طول l و عرض w در دست است که فاصله بین صفحات آن d و ناحیه‌ی بین آنها با یک قطعه دی‌الکتریک با ثابت κ پر شده است. صفحه‌ها در اختلاف پتانسیل V نگه داشته شده‌اند. اگر قطعه‌ی دی‌الکتبریک در امتداد بعد l انقدر بیرون کشیده شود که فقط طول x در بین صفحات باقی بماند، نیروی را که می کوشد تا دی‌الکتریک را به سرجای خود بازگرداند را بدست آورید.

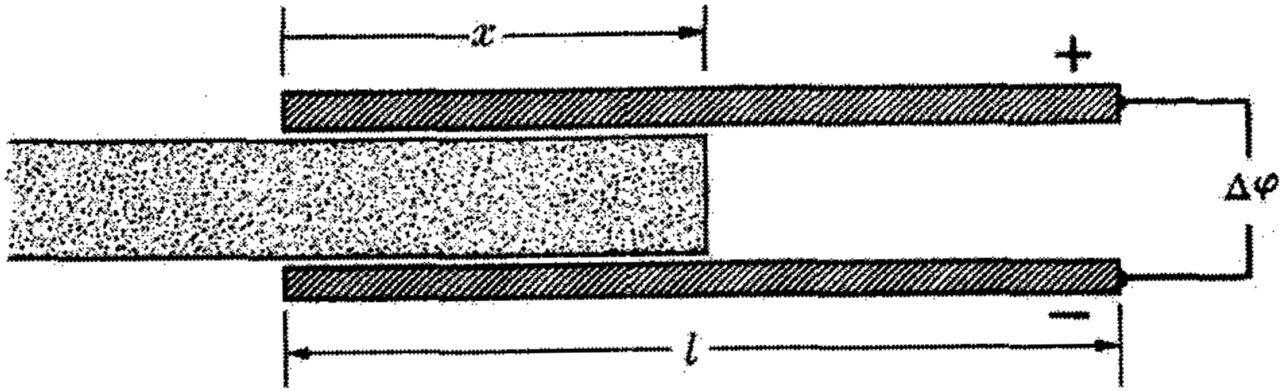


$$C_0 = \frac{\epsilon_0 l^2}{d}, \quad C_{\text{معادل}} = \left[1 + (\kappa - 1)\frac{x}{l}\right] C_0$$

$$U = \frac{1}{2} C_{\text{معادل}} V^2, \quad F = -\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right)_V = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\mathrm{d}C_{\text{معادل}}}{\mathrm{d}x}$$

ظرفیت

مسئله-۱۷:



$$C_0 = \frac{\epsilon_0 l^2}{d}, \quad C_{\text{معادل}} = \left[1 + (\kappa - 1)\frac{x}{l}\right] C_0$$

$$U = \frac{1}{2} C_{\text{معادل}} V^2, \quad F = -\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right)_V = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\mathrm{d}C_{\text{معادل}}}{\mathrm{d}x}$$

$$F = -\frac{1}{2} C_0 V^2 (\kappa - 1)\frac{1}{l} = -\frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) l V^2}{2d}$$