فیزیک ۲
مدارها

محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

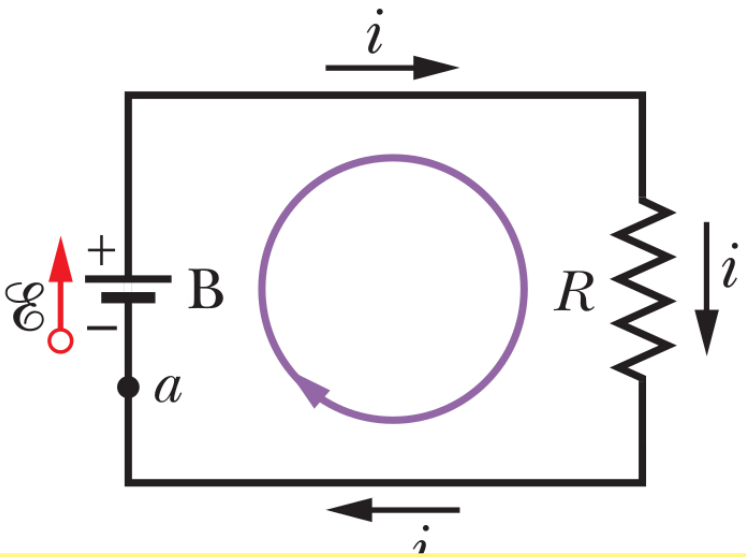
محاسبه جریان در مدار تک حلقه

قاعده حلقه یا قاعده‌ی حلقه کیرشهوف

جمع جبری تغییرات پتانسیل در کل حلقه برابر صفر است.

◄ برای تک حلقه از همه عناصر الکتریکی یک جریان عبور می‌کند.

◄ از نقطه‌ی a شروع به حرکت می کنیم و بطور ذهنی در جهت ساعتگرد چرخیده، تغییرات پتانسیل را برای هر وسیله بدست آورده و دوباره به نقطه‌ی a باز می‌گردیم.



تغییر پتانسیل باتری

هنگام عبور از باتری ایده‌آل، اگر جهت پیکان باتری در جهت جریان باشد، تغییر پتانسیل برابر $\mathcal{E}$ و در خلاف جهت جریان برابر $-\mathcal{E}$ است

محاسبه جریان در مدار تک حلقه

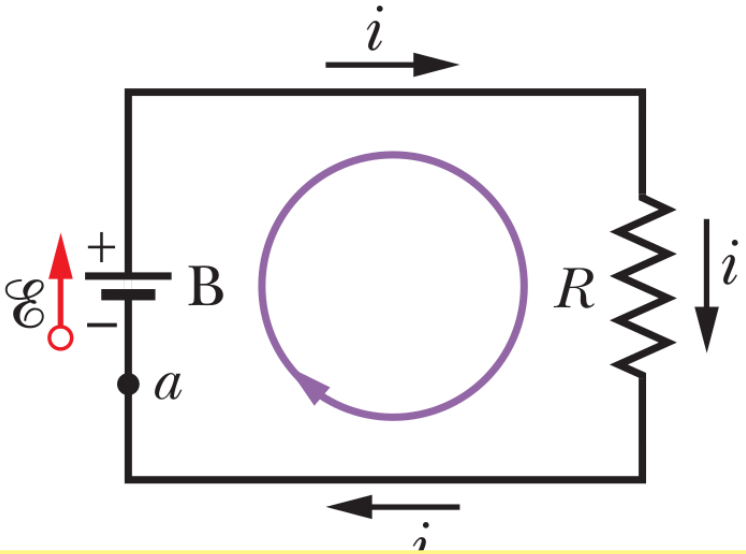
قاعده حلقه یا قاعده‌ی حلقه کیرشهوف

جمع جبری تغییرات پتانسیل در کل حلقه برابر صفر است.

$$\sum$$

◄ برای تک حلقه از همه عناصر الکتریکی یک جریان عبور می‌کند.

◄ از نقطه‌ی a شروع به حرکت می کنیم و بطور ذهنی در جهت ساعتگرد چرخیده، تغییرات پتانسیل را برای هر وسیله بدست آورده و دوباره به نقطه‌ی a باز می‌گردیم.



تغییر پتانسیل مقاومت

هنگام عبور از مقاومت، تغییر پتانسیل در جهت جریان برابر $-iR$ و در خلاف جهت جریان iR برابر است

$$\sum$$

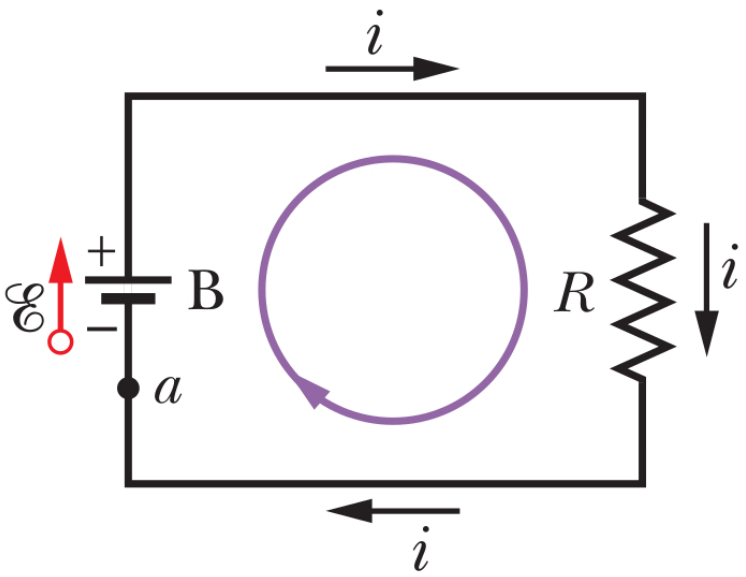
محاسبه جریان در مدار تک حلقه

قاعده حلقه یا قاعده‌ی حلقه کیرشهوف

جمع جبری تغییرات پتانسیل در کل حلقه برابر صفر است.

◄ برای تک حلقه از همه عناصر الکتریکی یک جریان عبور می‌کند.

◄ از نقطه‌ی a شروع به حرکت می کنیم و بطور ذهنی در جهت ساعتگرد چرخیده، تغییرات پتانسیل را برای هر وسیله بدست آورده و دوباره به نقطه‌ی a باز می‌گردیم.



باتری ایده‌آل : $V_a + \mathcal{E} - iR = V_a$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

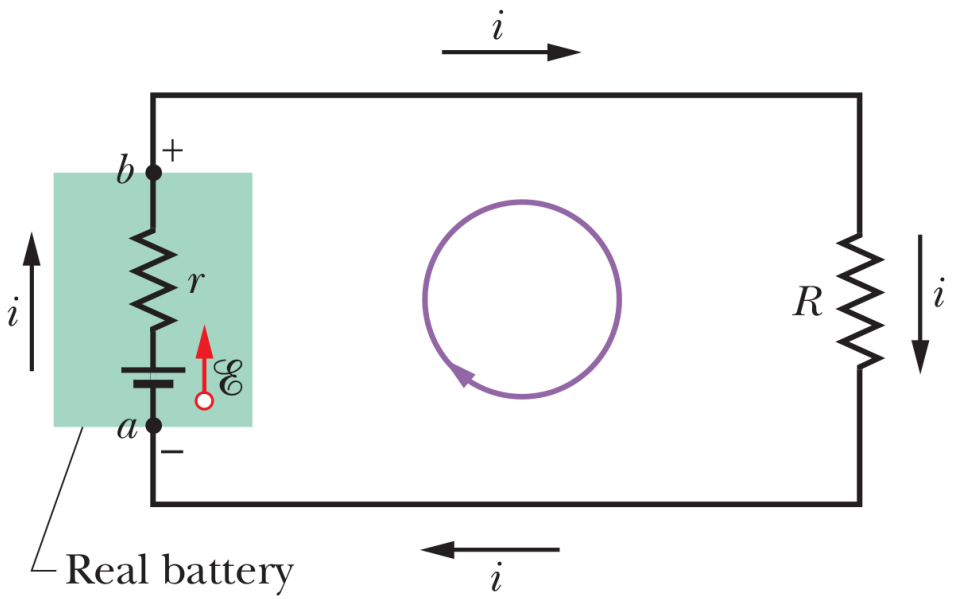
محاسبه جریان در مدار تک حلقه

قاعده حلقه یا قاعده‌ی حلقه کیرشهوف

جمع جبری تغییرات پتانسیل در کل حلقه برابر صفر است.

◄ برای تک حلقه از همه عناصر الکتریکی یک جریان عبور می‌کند.

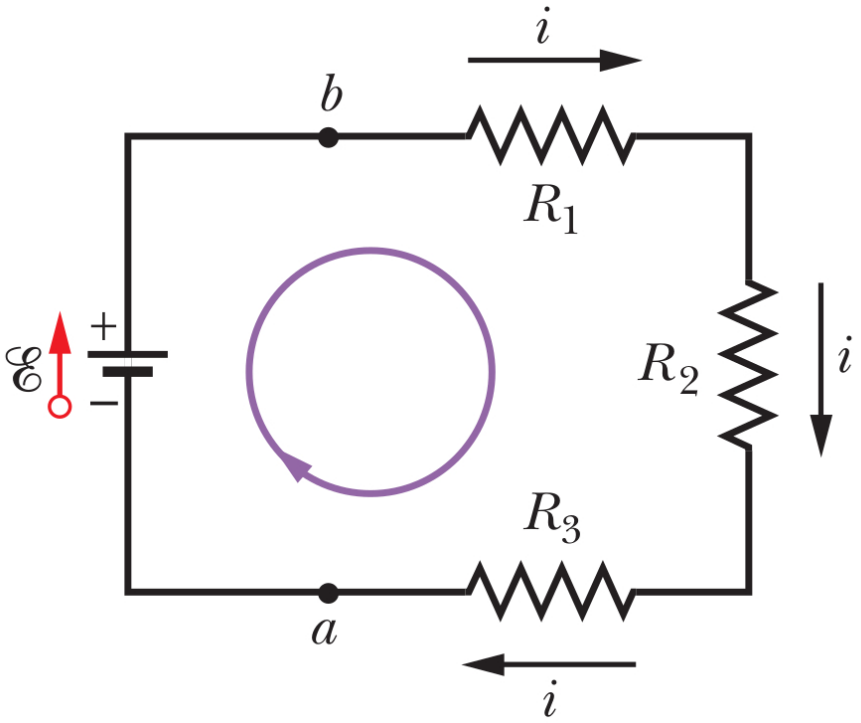
◄ از نقطه‌ی a شروع به حرکت می کنیم و بطور ذهنی در جهت ساعتگرد چرخیده، تغییرات پتانسیل را برای هر وسیله بدست آورده و دوباره به نقطه‌ی a باز می‌گردیم.

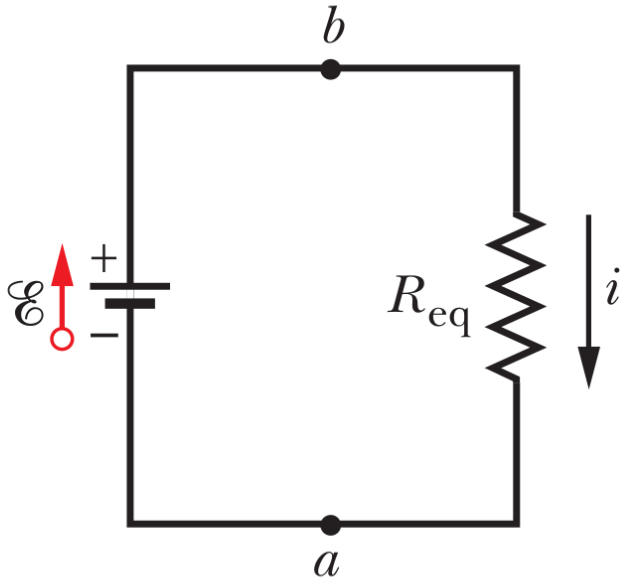


باتری واقعی : $V_a + \mathcal{E} - ir - iR = V_a$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

مقاومت متوالی





$$V_a + \mathcal{E} - iR_1 - iR_2 - iR_3 = V_a$$

$$\mathcal{E} = i(R_1 + R_2 + R_3) \quad (1)$$

$$V_a + \mathcal{E} - iR_{\text{eq}} = V_a$$

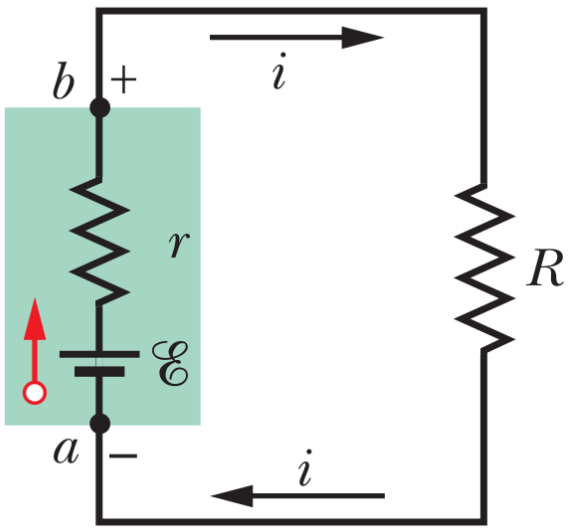
$$\mathcal{E} = iR_{\text{eq}} \quad (2)$$

از مقایسه‌ی (1) و (2) : $R_{\text{معادل}} = R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3,$

$$\boxed{R_{\text{eq}} = \sum_{j=1}^{n} R_j}$$

اختلاف پتانسیل بین دو نقطه

برای محاسبه پتانسیل دو نقطه‌ی مدار، از یک نقطه شروع کنید و در امتداد مسیر دلخواه به نقطه‌ی دیگر بروید و تغییرات پتانسیل را بطور جبری جمع کنید.



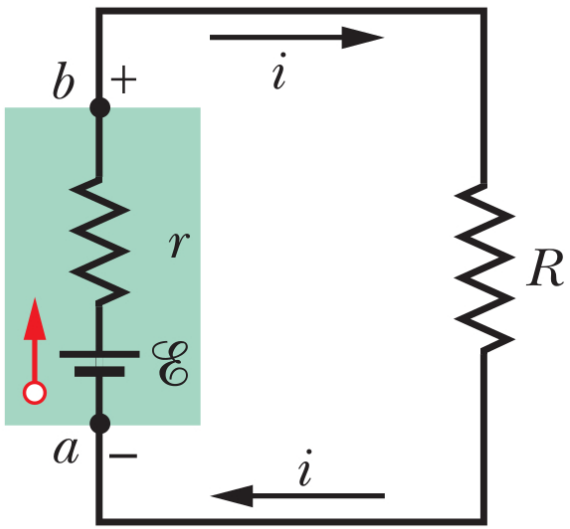
◄ در گام اول، ابتدا جریان حلقه را بدست می‌آوریم

$$V_a + \mathcal{E} - ir - iR = V_a$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$$

اختلاف پتانسیل بین دو نقطه

برای محاسبه پتانسیل دو نقطه‌ی مدار، از یک نقطه شروع کنید و در امتداد مسیر دلخواه به نقطه‌ی دیگر بروید و تغییرات پتانسیل را بطور جبری جمع کنید.



◀ در گام دوم، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی a و b از مسیر a به b

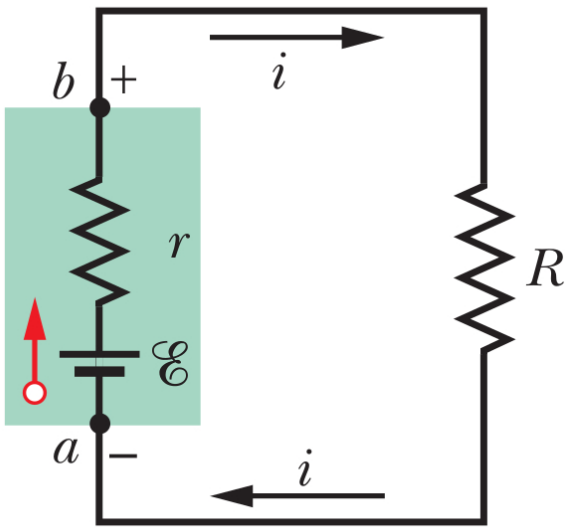
$$V_a + \mathcal{E} - ir = V_b$$

$$V_b - V_a = \mathcal{E} - ir = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}}{r+R}r$$

$$V_b - V_a = \mathcal{E}\frac{R}{r+R}$$

اختلاف پتانسیل بین دو نقطه

برای محاسبه پتانسیل دو نقطه‌ی مدار، از یک نقطه شروع کنید و در امتداد مسیر دلخواه به نقطه‌ی دیگر بروید و تغییرات پتانسیل را بطور جبری جمع کنید.



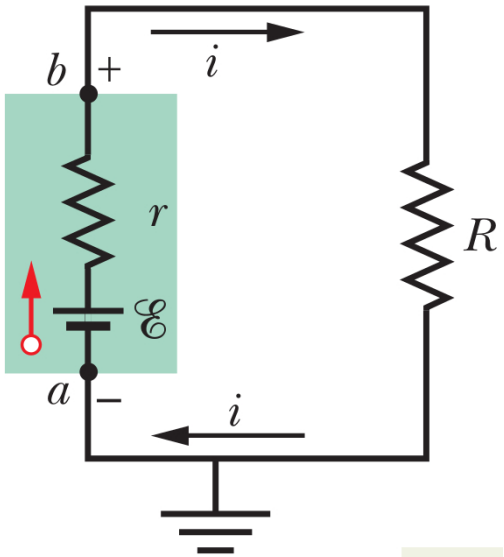
◀ در گام دوم، اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی a و b از مسیر b به a

$$V_b - iR = V_a$$

$$V_b - V_a = \frac{\mathcal{E}}{r+R}R =$$

$$V_b - V_a = \mathcal{E}\frac{R}{r+R}$$

اتصال به زمین



$$V_b - V_a = \mathcal{E}\frac{R}{r+R}$$

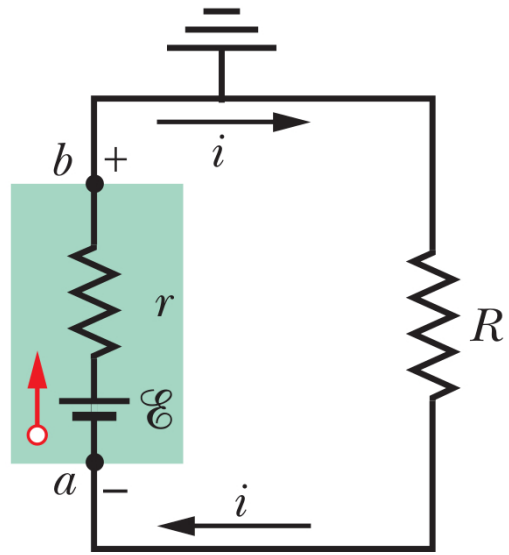
اگر $V_a = 0$

$$V_b - 0 = \mathcal{E}\frac{R}{r+R} \Rightarrow V_b = \mathcal{E}\frac{R}{r+R}$$

$$V_b - V_a = \mathcal{E}\frac{R}{r+R}$$

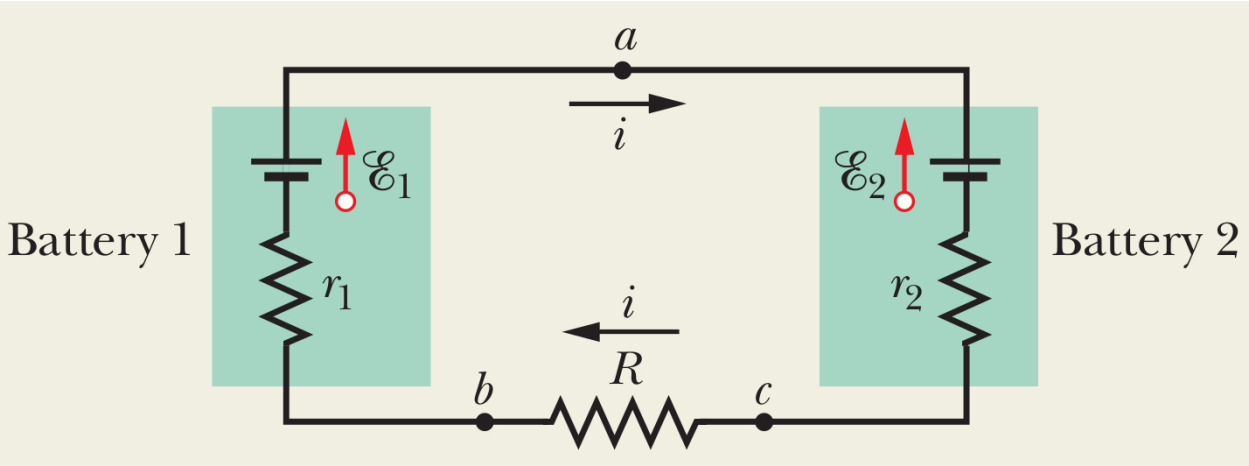
اگر $V_b = 0$

$$0 - V_a = \mathcal{E}\frac{R}{r+R} \Rightarrow V_a = -\mathcal{E}\frac{R}{r+R}$$



مدار تک حلقه با دو باتری

مسئله-۱: در مدار زیر الف) جریان i را بدست آورید. ب) اختلاف پتانسیل بین قطبهای باتری 1 چقدر است؟



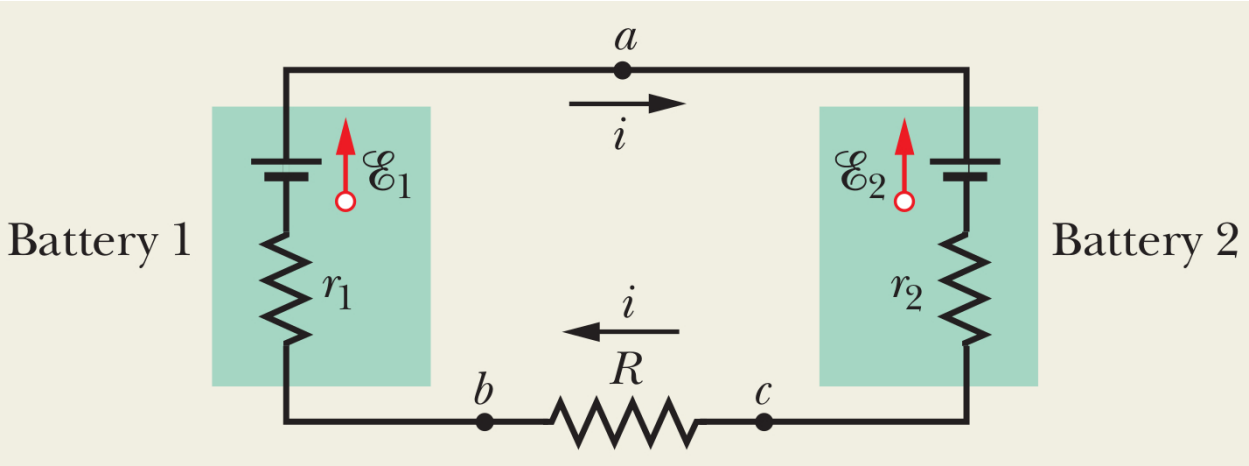
$$R = 5.5\,\Omega$$

$$\mathcal{E}_1 = 4.4\,\mathrm{V}, \quad r_1 = 2.3\,\Omega$$

$$\mathcal{E}_2 = 2.1\,\mathrm{V}, \quad r_2 = 1.8\,\Omega$$

مدار تک حلقه با دو باتری

مسئله-۱:



قسمت الف : $V_a - \mathcal{E}_2 - ir_2 - iR - ir_1 + \mathcal{E}_1 = V_a$

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = i(r_1 + r_2 + R) \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R}$$

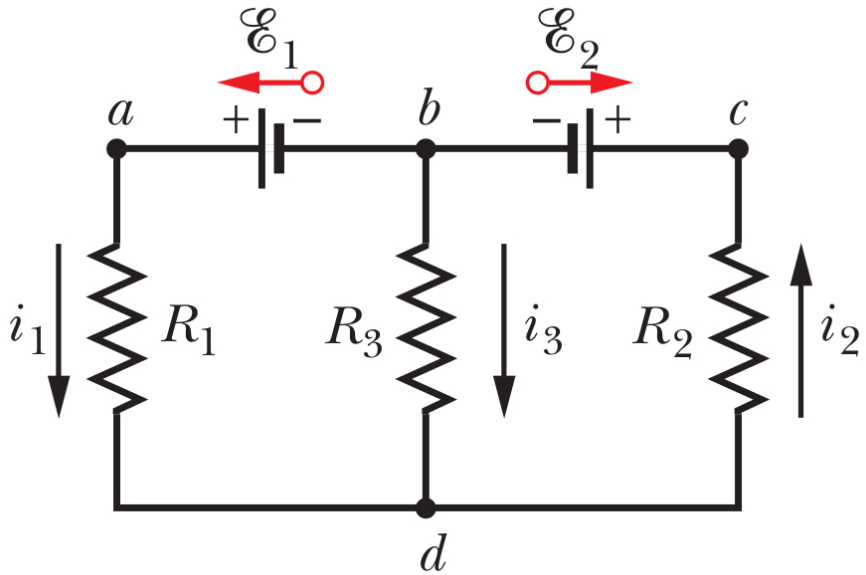
قسمت ب : $V_b - ir_1 + \mathcal{E}_1 = V_a \Rightarrow V_a - V_b = \mathcal{E}_1 - ir_1$

$$V_a - V_b = \mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R} r_1 = \frac{\mathcal{E}_1(r_2 + R) + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2 + R}$$

مدارهای چند حلقه‌ای

قاعده گره یا قاعده‌ی گره کیرشهوف

مجموع جریانهای ورودی به یک گره باید با مجموع جریانهای خروجی از آن گره برابر باشد.



b در گره‌ی : $i_2 = i_1 + i_3$

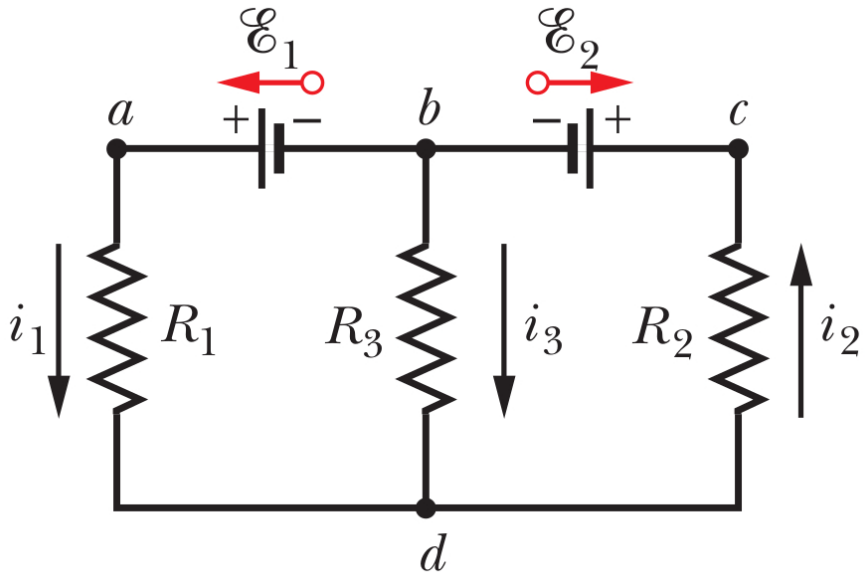
d در گره‌ی : $i_1 + i_3 = i_2$

در ادامه قاعده حلقه را برای دو حلقه‌ی چپ و راست اعمال می‌کنیم.

مدارهای چند حلقه‌ای

قاعده گره یا قاعده‌ی گره کیرشهوف

مجموع جریانهای ورودی به یک گره باید با مجموع جریانهای خروجی از آن گره برابر باشد.



اعمال قاعده حلقه در **حلقه سمت چپ** در جهت ساعتگرد از نقطه‌ی a

$$V_a - \mathcal{E}_1 - i_3 R_3 + i_1 R_1 = V_a$$

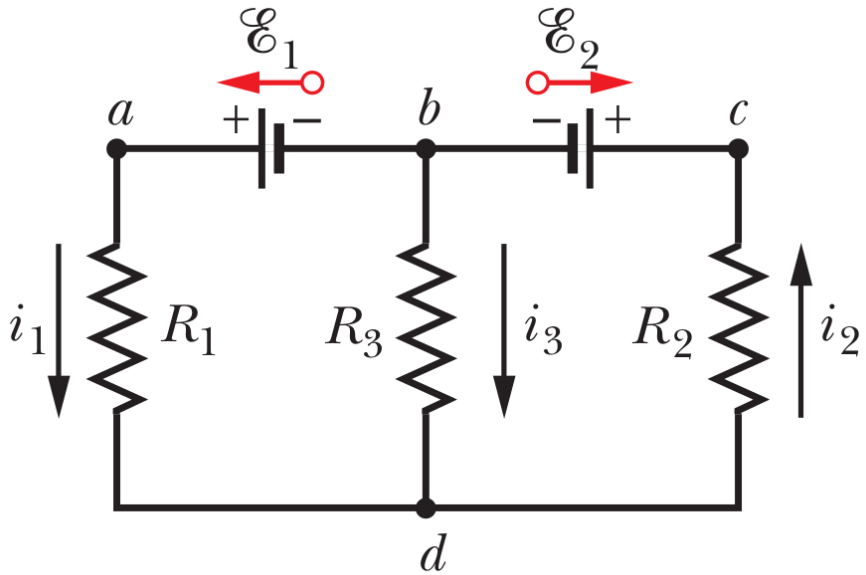
اعمال قاعده حلقه در **حلقه سمت راست** در جهت ساعتگرد از نقطه‌ی b

$$V_b + \mathcal{E}_2 + i_2 R_2 + i_3 R_3 = V_b$$

مدارهای چند حلقه‌ای

قاعده گره یا قاعده‌ی گره کیرشهوف

مجموع جریانهای ورودی به یک گره باید با مجموع جریانهای خروجی از آن گره برابر باشد.



$$\begin{cases} V_a - \mathcal{E}_1 - i_3 R_3 + i_1 R_1 = V_a \\ V_b + \mathcal{E}_2 + i_2 R_2 + i_3 R_3 = V_b \\ i_2 = i_1 + i_3 \end{cases}$$

مدارهای چند حلقه‌ای

$$\begin{cases} V_a - \mathcal{E}_1 - i_3 R_3 + i_1 R_1 = V_a \\ V_b + \mathcal{E}_2 + i_2 R_2 + i_3 R_3 = V_b \\ i_2 = i_1 + i_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 R_1 - (i_2 - i_1) R_3 = \mathcal{E}_1 \\ i_2 R_2 + (i_2 - i_1) R_3 = -\mathcal{E}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 (R_1 + R_3) - i_2 R_3 = \mathcal{E}_1 \\ i_1 R_3 - i_2 (R_2 + R_3) = \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{E}_1 & -R_3 \\ \mathcal{E}_2 & -(R_2 + R_3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ R_3 & -(R_2 + R_3) \end{vmatrix}}, \qquad i_2 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & \mathcal{E}_1 \\ R_3 & \mathcal{E}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ R_3 & -(R_2 + R_3) \end{vmatrix}}$$

$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3)\mathcal{E}_1 - R_3 \mathcal{E}_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}, \qquad i_2 = \frac{R_3 \mathcal{E}_1 - (R_1 + R_3)\mathcal{E}_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3)\mathcal{E}_1 - R_3\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$i_2 = \frac{R_3\mathcal{E}_1 - (R_1 + R_3)\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

و

$$i_3 = i_2 - i_1$$

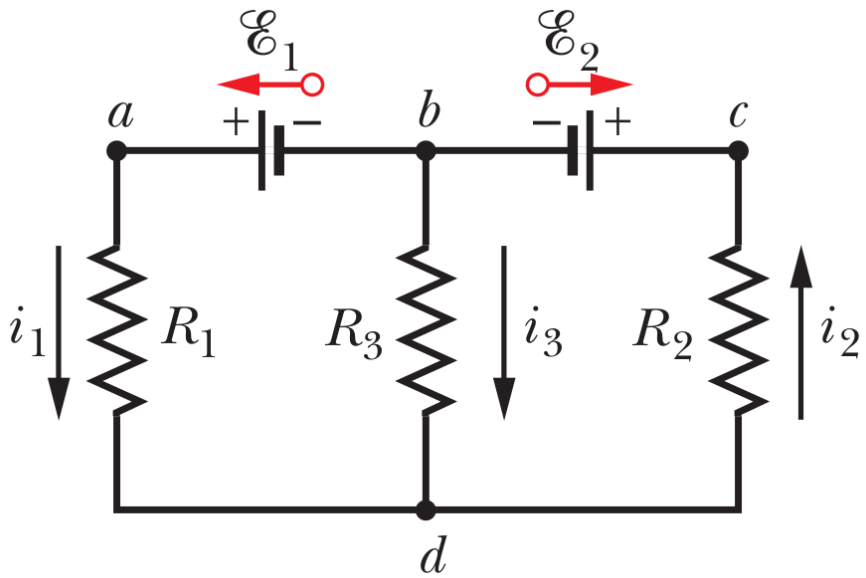
$$i_3 = \frac{R_3\mathcal{E}_1 - (R_1 + R_3)\mathcal{E}_2 - (R_2 + R_3)\mathcal{E}_1 + R_3\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$i_3 = -\frac{R_1\mathcal{E}_2 + R_1\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

مدارهای چند حلقه‌ای

قاعده گره یا قاعده‌ی گره کیرشهوف

مجموع جریانهای ورودی به یک گره باید با مجموع جریانهای خروجی از آن گره برابر باشد.



اعمال قاعده حلقه در **حلقه سمت چپ** در جهت ساعتگرد از نقطه‌ی a

$$V_a - \mathcal{E}_1 - i_3 R_3 + i_1 R_1 = V_a$$

اعمال قاعده حلقه در **حلقه بزرگتر** در جهت ساعتگرد از نقطه‌ی a

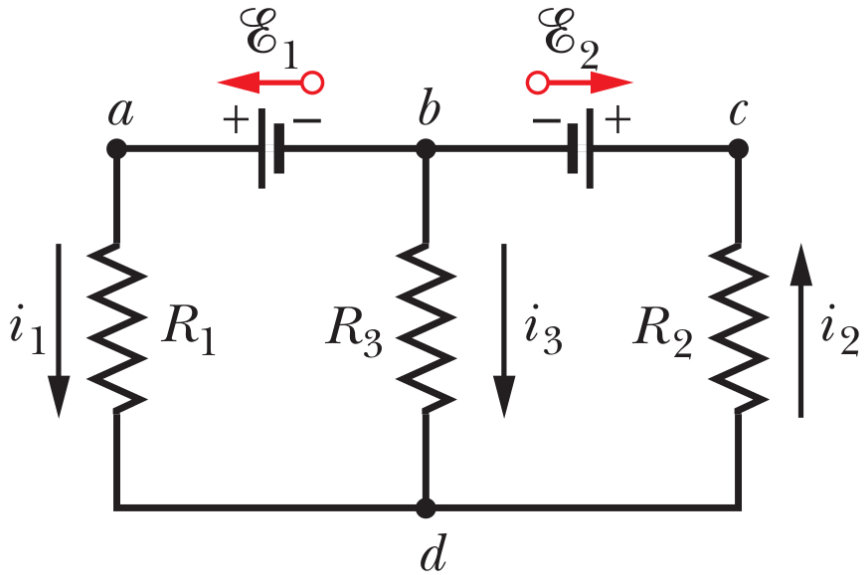
$$V_a - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + i_2 R_2 + i_1 R_1 = V_a$$

نکته: اگر عبارتهای بدست آمده از **قاعده‌ی حلقه برای حلقه‌های سمت چپ و راست** را با هم جمع کنیم، عبارت بدست آمده همان **قاعده حلقه برای حلقه بزرگتر** خواهد بود.

مدارهای چند حلقه‌ای

قاعده گره یا قاعده‌ی گره کیرشهوف

مجموع جریانهای ورودی به یک گره باید با مجموع جریانهای خروجی از آن گره برابر باشد.



$$\begin{cases} V_a - \mathcal{E}_1 - i_3 R_3 + i_1 R_1 = V_a \\ V_a - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + i_2 R_2 + i_1 R_1 = V_a \\ i_2 = i_1 + i_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_a - \mathcal{E}_1 - i_3 R_3 + i_1 R_1 = V_a \\ V_a - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + i_2 R_2 + i_1 R_1 = V_a \\ i_2 = i_1 + i_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_1 R_1 - (i_2 - i_1) R_3 = \mathcal{E}_1 \\ i_1 R_1 + i_2 R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

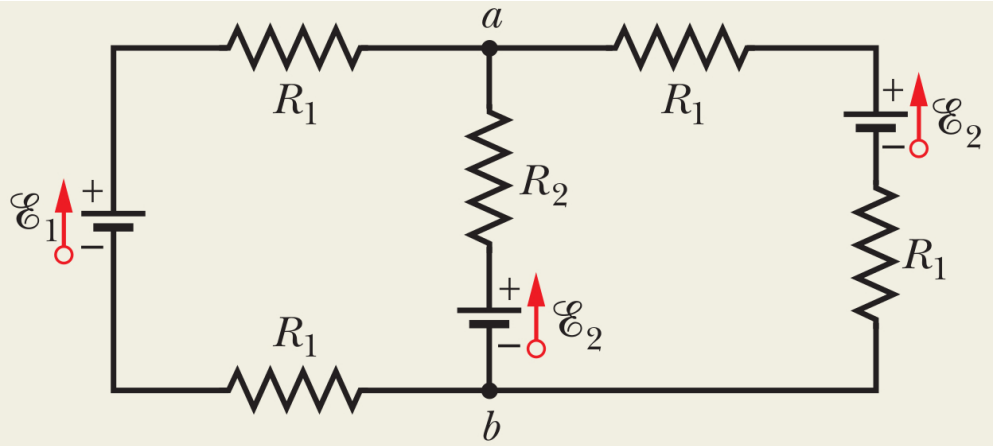
$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 (R_1 + R_3) - i_2 R_3 = \mathcal{E}_1 \\ i_1 R_1 + i_2 R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \end{cases}$$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathcal{E}_1 & -R_3 \\ \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 & R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ R_1 & R_2 \end{vmatrix}}, \qquad i_2 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & \mathcal{E}_1 \\ R_1 & \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (R_1 + R_3) & -R_3 \\ R_1 & R_2 \end{vmatrix}}$$

$$i_1 = \frac{(R_2 + R_3)\mathcal{E}_1 - R_3 \mathcal{E}_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}, \qquad i_2 = \frac{R_3 \mathcal{E}_1 - (R_1 + R_3)\mathcal{E}_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

مدارهای چند حلقه‌ای

مسئله-۲: برای مدار زیر، جریان را در هر سه شاخه بدست آورید.



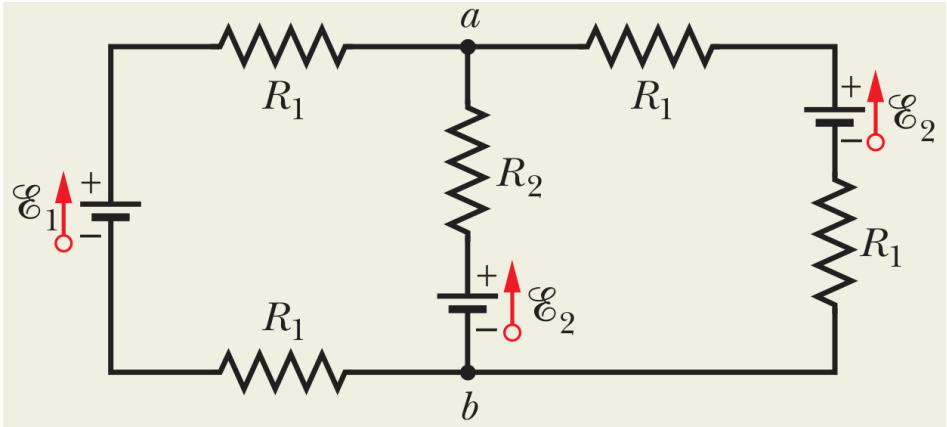
$$\mathcal{E}_1 = 3\,\mathrm{V},\ \mathcal{E}_2 = 6\,\mathrm{V}$$

$$R_1 = 2\,\Omega,\ R_2 = 4\,\Omega$$

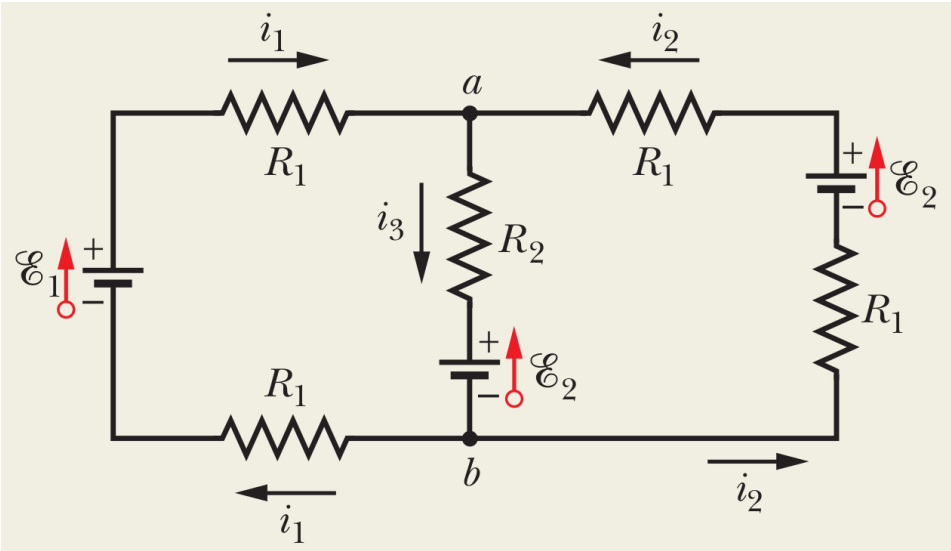
نکته: در گام نخست می‌بایست جهت جریان را در هر حلقه مشخص کنیم.

مدارهای چند حلقه‌ای

مسئله-۲:

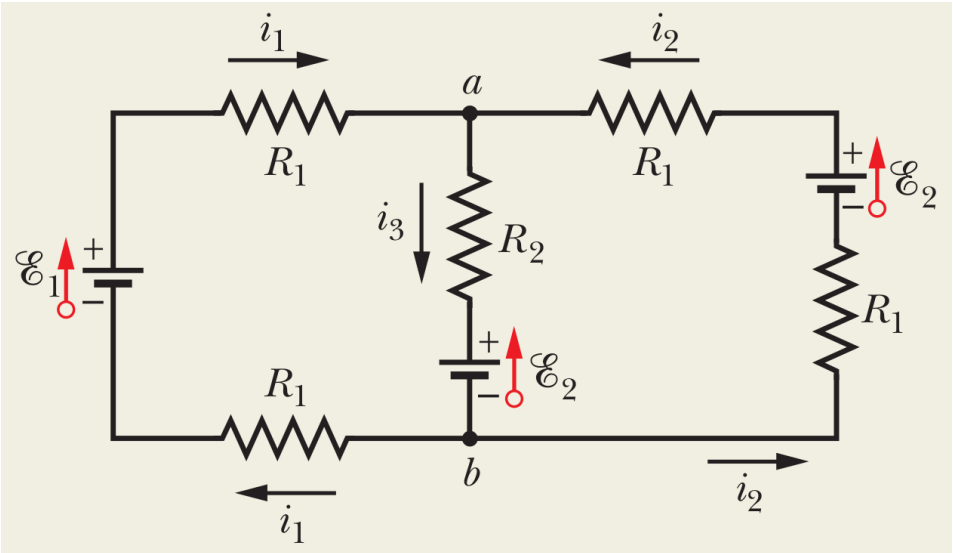


نکته: در گام نخست می‌بایست جهت جریان را در هر حلقه مشخص کنیم.



مدارهای چند حلقه‌ای

مسئله-۲:



اعمال قاعده حلقه در **حلقه سمت چپ** در جهت ساعتگرد از نقطه‌ی b

$$V_b - i_1R_1 + \mathcal{E}_1 - i_1R_1 - i_3R_2 - \mathcal{E}_2 = V_b$$

اعمال قاعده حلقه در **حلقه سمت راست** در جهت ساعتگرد از نقطه‌ی a

$$V_a + i_2R_1 - \mathcal{E}_2 + i_2R_1 + \mathcal{E}_2 + i_3R_2 = V_a$$

مدارهای چند حلقه‌ای

مسئله-۲:

$$\begin{cases} V_b - i_1R_1 + \mathcal{E}_1 - i_1R_1 - i_3R_2 - \mathcal{E}_2 = V_b \\ V_a + i_2R_1 - \mathcal{E}_2 + i_2R_1 + \mathcal{E}_2 + i_3R_2 = V_a \\ i_3 = i_1 + i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2i_1R_1 + (i_1 + i_2)R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \\ 2i_2R_1 + (i_1 + i_2)R_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1(2R_1 + R_2) + i_2R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 \\ i_1R_2 + i_2(2R_1 + R_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8i_1 + 4i_2 = -3 \\ 4i_1 + 8i_2 = 0 \end{cases}$$

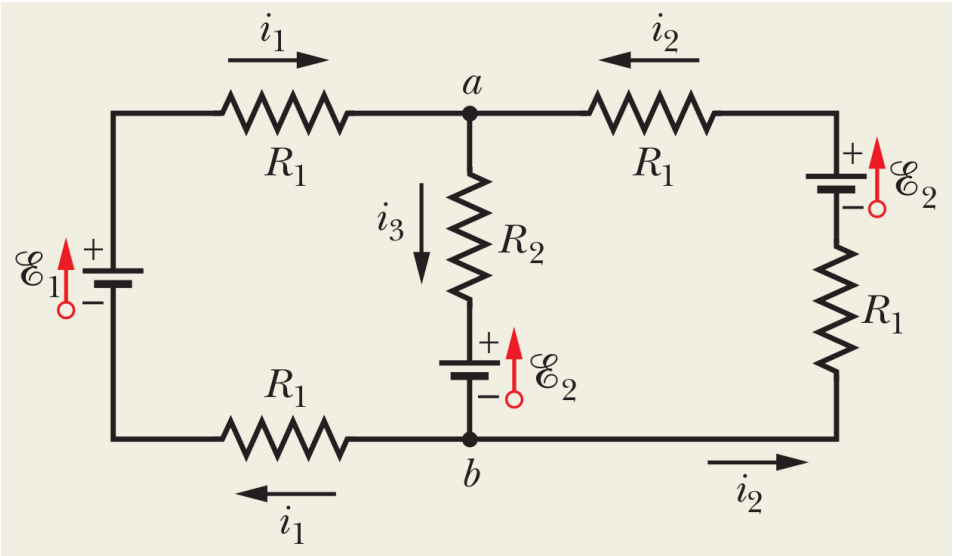
$$i_1 = -0.5\ \text{A}, \quad i_2 = 0.25\ \text{A}$$

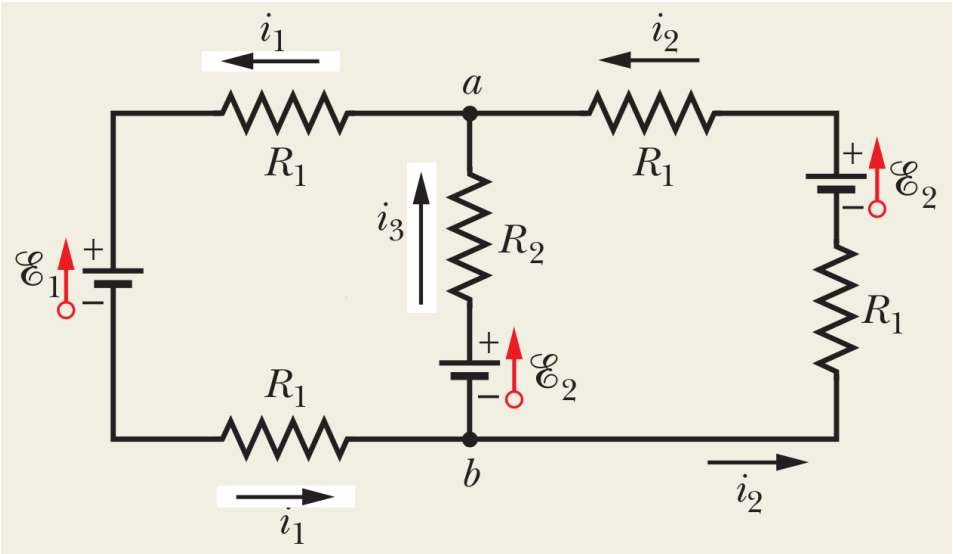
$$i_3 = i_1 + i_2 = -0.25\ \text{A}$$

چون i_1 و i_3 با علامتهای منفی بدست آمده‌اند پس می‌بایست جهت اولیه انتخابی را در هر دو برعکس کرد.

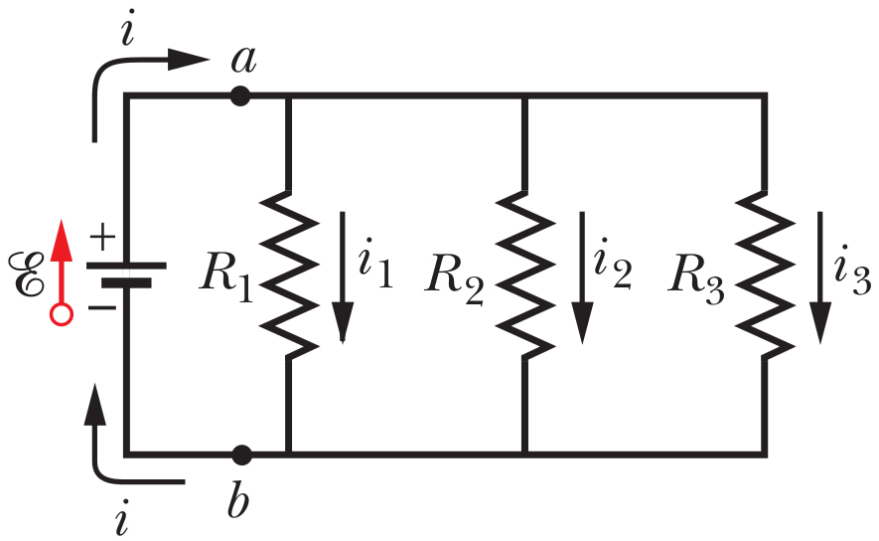
مدارهای چند حلقه‌ای

مسئله-۲:





مقاومت‌های موازی

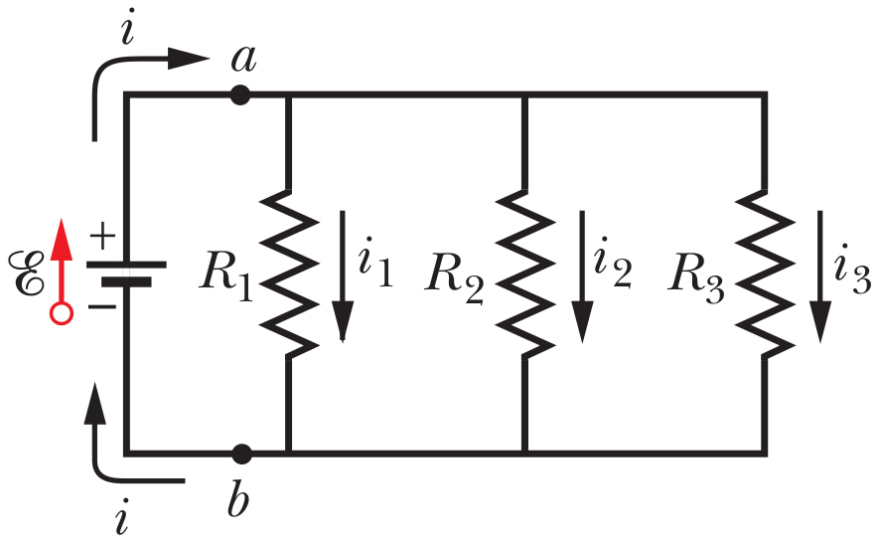


با استفاده از قاعده‌ی گره، جریان ورودی به گره‌ی a با جریانهای خروجی ار آن برابر است. یعنی

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

$$\begin{cases} V_a - i_1 R_1 = V_b \\ V_a - i_2 R_2 = V_b \\ V_a - i_3 R_3 = V_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_a - V_b = i_1 R_1 \\ V_a - V_b = i_2 R_2 \\ V_a - V_b = i_3 R_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (V_a - V_b)/R_1 = i_1 \\ (V_a - V_b)/R_2 = i_2 \\ (V_a - V_b)/R_3 = i_3 \end{cases}$$

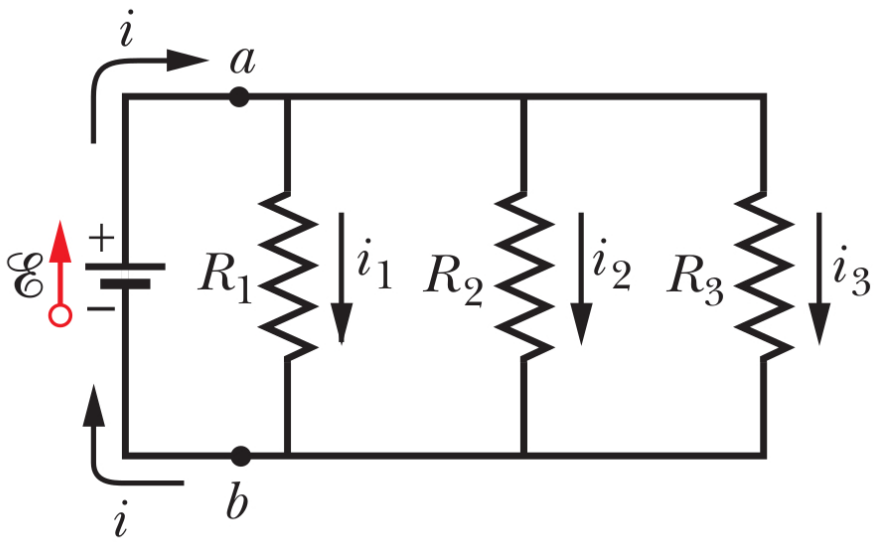
مقاومت‌های موازی

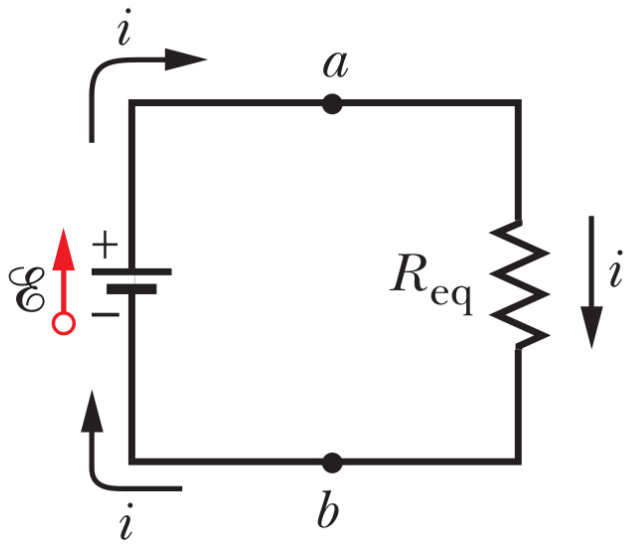


$$\begin{cases} (V_a - V_b)/R_1 = i_1 \\ (V_a - V_b)/R_2 = i_2 \\ (V_a - V_b)/R_3 = i_3 \end{cases}$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = (V_a - V_b)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

مقاومت‌های موازی





اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل R_{eq}

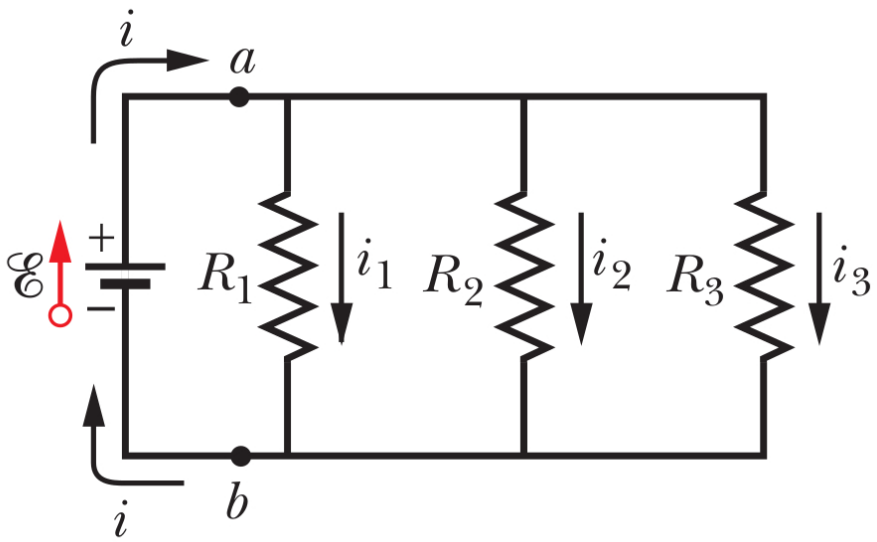
$$V_a - iR_{\text{eq}} = V_b$$

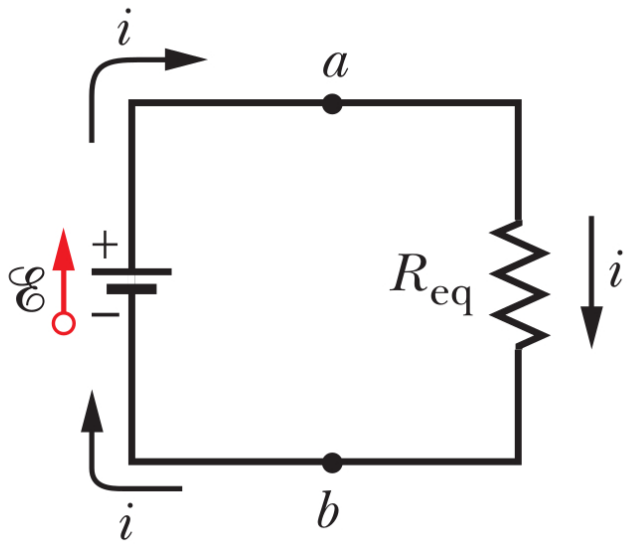
$$V_a - V_b = iR_{\text{eq}}$$

$$i = (V_a - V_b)\frac{1}{R_{\text{eq}}} \quad (2)$$

$$i = (V_a - V_b)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \quad (1)$$

مقاومت‌های موازی





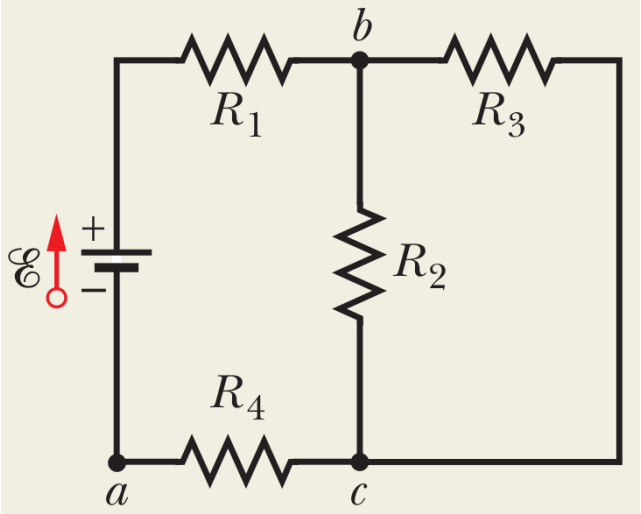
$$i = (V_a - V_b)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \text{①}, \quad i = (V_a - V_b)\frac{1}{R_{\text{eq}}} \text{②}$$

$$\frac{i}{V_a - V_b} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_{\text{eq}}}$$

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_j^n \frac{1}{R_j}}$$

مقاومت‌های موازی

مسئله-۳: در مدار زیر الف) جریان عبوری از باتری چقدر است؟ ب) جریان عبوری از R_2 چقدر است؟ ج) جریان عبوری از R_3 چقدر است؟



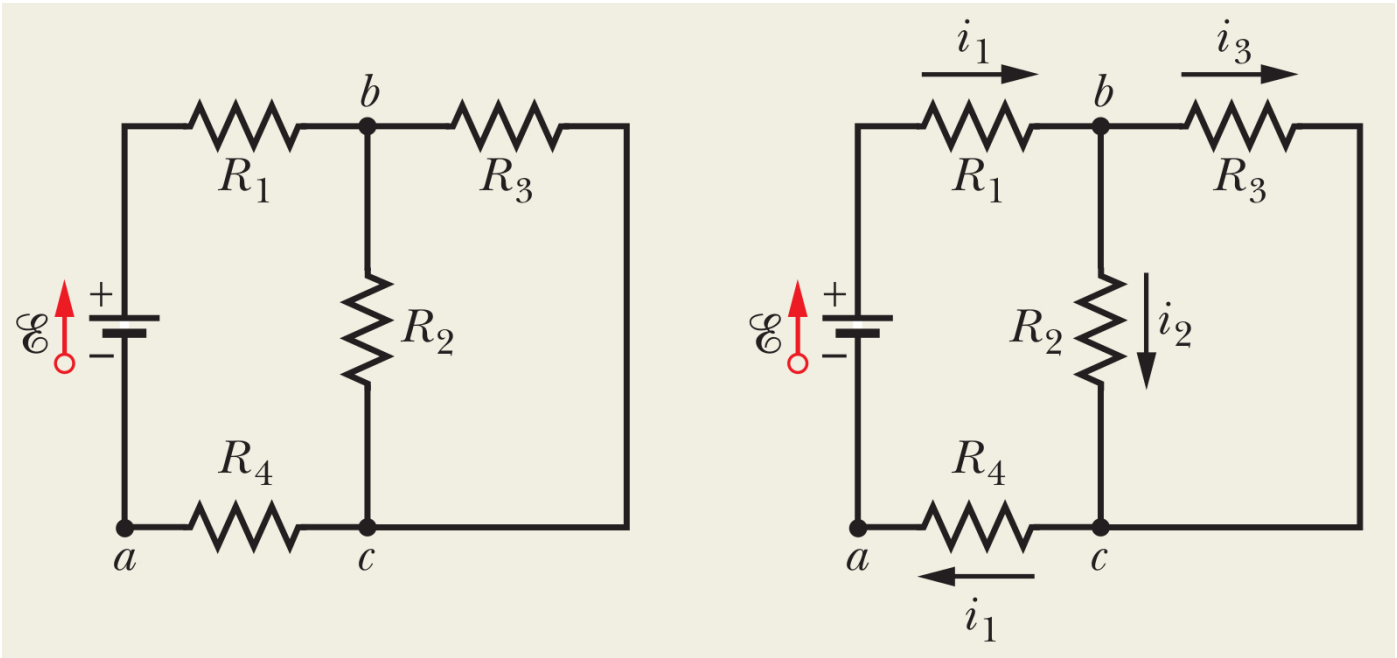
$$R_1 = R_2 = 20\,\Omega$$

$$R_3 = 30\,\Omega,\ R_4 = 8\,\Omega$$

$$\mathcal{E} = 12\,\mathrm{V}$$

مقاومت‌های موازی

مسئله-۳:



$$\text{حلقه سمت چپ}: \quad V_a + \mathcal{E} - i_1 R_1 - i_2 R_2 - i_1 R_4 = V_a$$

$$\text{حلقه سمت راست}: \quad V_b - i_3 R_3 + i_2 R_2 = V_b$$

$$i_1 = i_2 + i_3$$

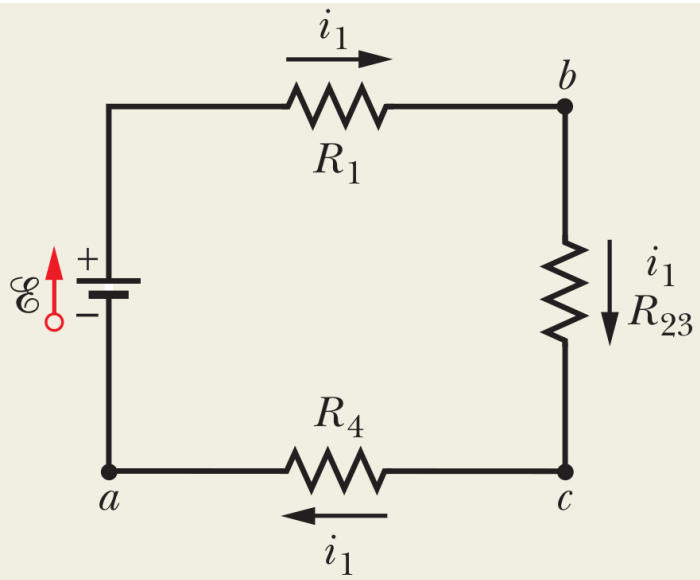
مقاومت‌های موازی

مسئله-۳:

$$\begin{cases} i_1(R_1+R_4)+i_2R_2=\mathcal{E} \\ i_1R_3-i_2(R_2+R_3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 28i_1+20i_2=12 \\ 30i_1-50i_2=0 \end{cases}$$

$$i_1=0.3\ \text{A},\ i_2=0.18\ \text{A}$$

$$i_3=i_1-i_2=0.3-0.18=0.12\ \text{A}$$



$$\frac{1}{R_{23}}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

$$R_{23}=\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}=12\ \Omega$$

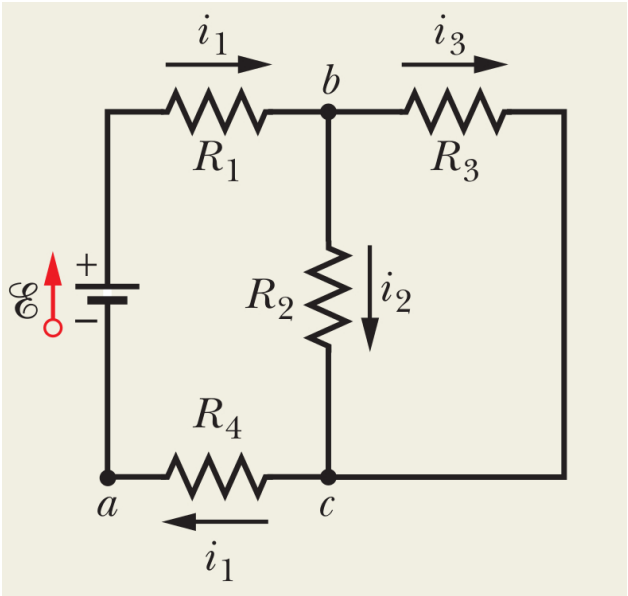
$$V_a+\mathcal{E}-i_1(R_1+R_{23}+R_4)=V_a$$

$$i_1=\mathcal{E}/(R_1+R_{23}+R_4)=0.3\ \text{A}$$

$$V_b-i_1R_{23}=V_c \Rightarrow V_b-V_c=V_{23}=i_1R_{23}=3.6\ \text{V}$$

مقاومت‌های موازی

مسئله-۳:



$$V_b - V_c = 3.6\ \text{V}$$

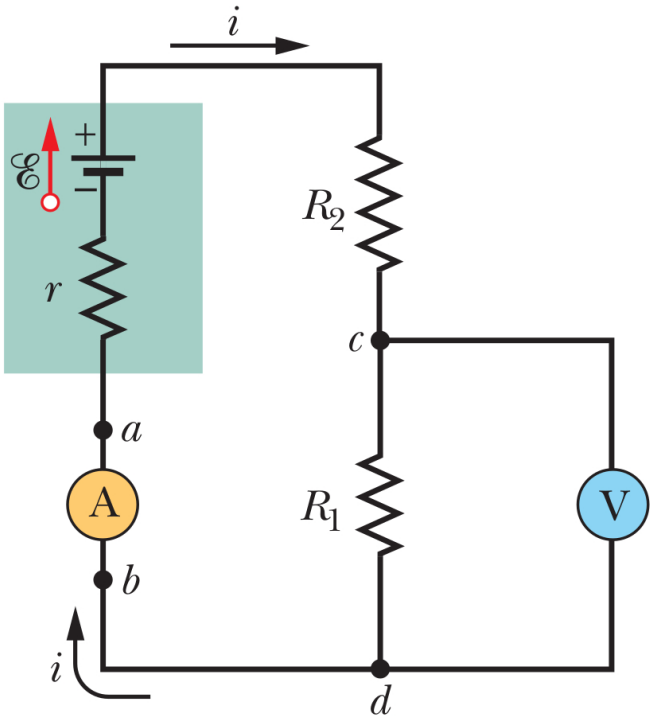
$$V_b - i_2 R_2 = V_c \Rightarrow V_b - V_c = i_2 R_2$$

$$3.6 = 20 i_2 \Rightarrow i_2 = 0.18\ \text{A}$$

$$V_b - i_3 R_3 = V_c \Rightarrow V_b - V_c = i_3 R_3$$

$$3.6 = 30 i_3 \Rightarrow i_3 = 0.12\ \text{A}$$

آمپرسنج و ولت‌سنج



◄ آمپرسنج، وسیله‌ای برای اندازه‌گیری جریان در مدار است.

◄ برای اندازه‌گیری جریان مجبور هستیم که یک سیم را ببریم و آمپرسنج را اضافه کنیم.

◄ برای اینکه وجود آمپرسنج در مدار باعث تغییر جریان نشود، باید مقاومت آمپرسنج بسیار کوچک باشد.

◁ ولت‌سنج، وسیله‌ای برای اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل بین دو نقطه در مدار است.

◁ برای اندازه‌گیری اختلاف پتانسیل، پایانه‌های ولت‌سنج را به آن نقاط وصل می‌کنیم. بدون اینکه سیم را ببریم.

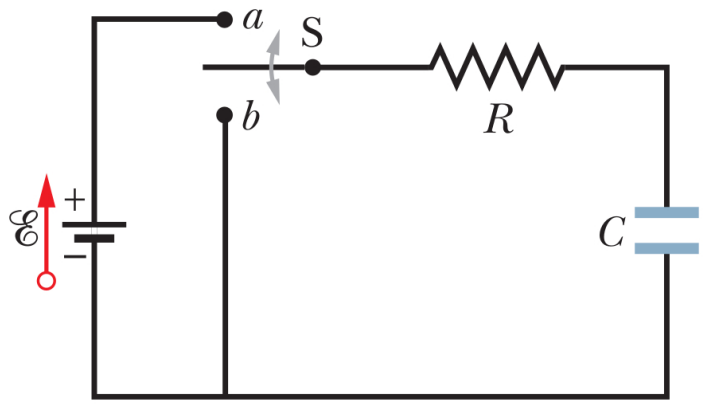
◁ مقاومت ولت‌سنج خیلی بزرگتر از مقاومت هر عنصر مدار است که ولت‌سنج به دو سر آن وصل می‌شود. در غیر اینصورت حضور ولت‌سنج اختلاف پتانسیل اندازه‌گیری شده را تغییر می‌دهد.

مولتی‌متر

PEAKMETER
Autorange
52 RH %
26.6 °C
AUTO
DC
0.000
A
PM8229
DIGITAL MULTIMETER
RANGE
Hz%
REL
°C/°F
FUNCTION
HOLD
Temp
dB
Lux
x10 Lux
Hz%
OFF
10A
10A MAX FUSED
1000V CAT.III
600V CAT.IV
MAX 1000V
750V
COM
400mA FUSED

OHMS
AC DC
AC10V
BATT
10010S
Analog Multimeter
Southwire
OHMS ADJ
X10
X1K
500
AC
250
V
50
10
DC
2.5
9V
BATT
1.5
500µ DC
10m A
250m
500V MAX
COM

مدارهای RC



◄ در حالیکه در لحظه‌ی $t = 0$، بار روی صفحات خازن C برابر صفر می‌باشد (یعنی شرایط اولیه بار $q(t = 0) = 0$). کلید S را بطرف a می‌بندیم.

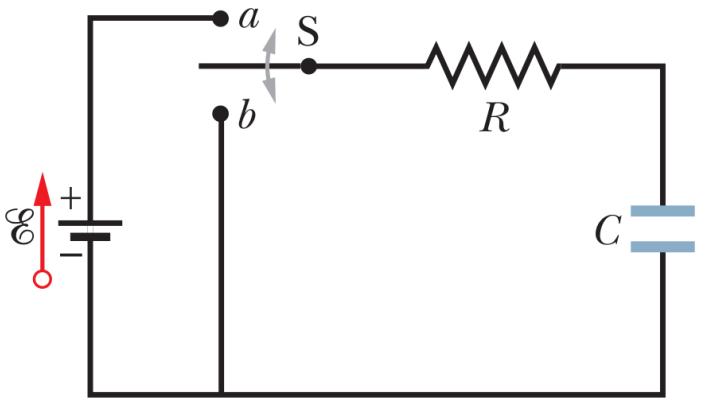
◄ برای یک لحظه‌ی دلخواه t، اگر جریان عبوری از مقاومت R برابر i و بار ذخیر شده بر روی صفحات خازن C برابر q باشد، با استفاده از قاعده حلقه داریم

$$V_a - iR - \frac{q}{C} + \mathcal{E} = V_a \Rightarrow iR + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \quad (1)$$

◄ بطورکلی رابطه بین بار و جریان بصورت زیر داده می‌شود

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad (2)$$

مدارهای RC



$$iR + \frac{q}{C} = \mathcal{E} \ (1), \qquad i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \ (2)$$

معادله دیفرانسیل **مرتبه اول ناهمگن** با ضرایب ثابت

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}$$

◄ جواب معادله دیفرانسیل بالا شامل دو قسمت همگن و ناهمگن می‌باشد،

$$q = q_{\text{همگن}} + q_{\text{ناهمگن}}$$

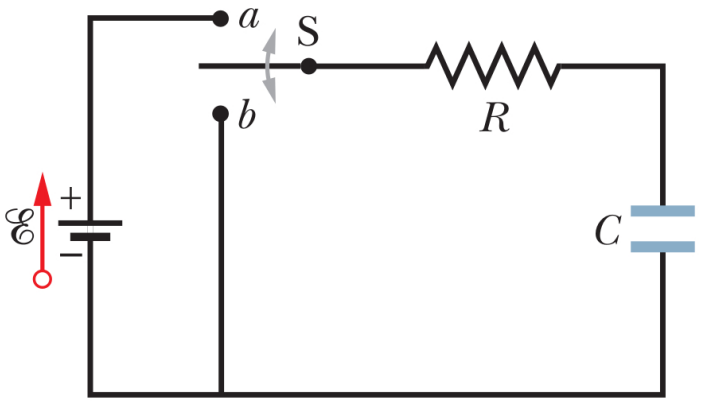
◄ جواب پیشنهادی برای **قسمت همگن معادلات دیفرانسیل** با ضرایب ثابت

$$R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{\text{همگن}} + \frac{1}{C}q_{\text{همگن}} = 0$$

معمولا بصورت زیر است

$$q_{\text{همگن}}(t) = Ae^{\alpha t}$$

مدارهای RC



معادله دیفرانسیل **مرتبه اول ناهمگن** با ضرایب ثابت

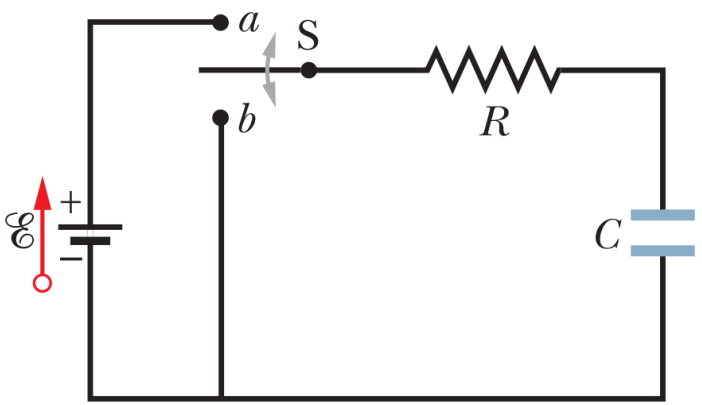
$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=\mathcal{E}$$

جواب پیشنهادی و مشتق اول آنرا در داخل قسمت همگن معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} \text{قسمت همگن}: & R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{\text{همگن}}+\frac{1}{C}q_{\text{همگن}}=0 \\ \text{جواب پیشنهادی}: & q_{\text{همگن}}=Ae^{\alpha t} \\ \text{مشتق اول}: & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{\text{همگن}}=A\alpha e^{\alpha t} \end{cases} \Rightarrow A(R\alpha+\frac{1}{C})e^{\alpha t}=0 \Rightarrow R\alpha+\frac{1}{C}=0$$

$$\text{معادله مشخصه}: \quad R\alpha+\frac{1}{C}=0 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{RC}$$

مدارهای RC



معادله دیفرانسیل **مرتبه اول ناهمگن** با ضرایب ثابت

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=\mathcal{E}$$

جواب پیشنهادی : $q_{\text{همگن}}(t)=Ae^{\alpha t}$

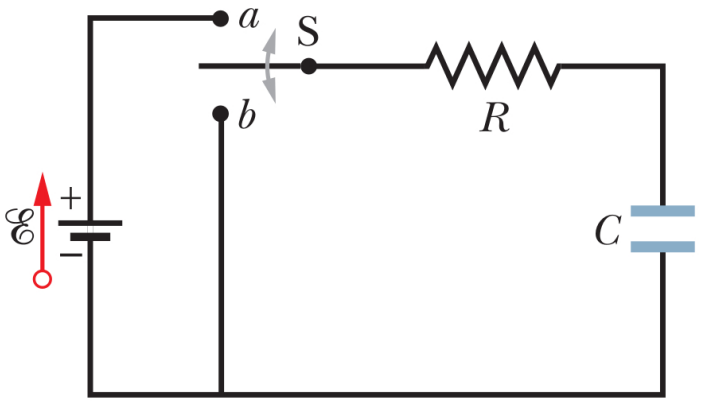
$$\alpha=-\frac{1}{RC}$$

بنابراین

$$q_{\text{همگن}}(t)=Ae^{-t/RC}$$

ثابت A با استفاده از اعمال شرایط اولیه به جواب نهایی بدست می‌آید.

مدارهای RC



معادله دیفرانسیل **مرتبه اول ناهمگن** با ضرایب ثابت

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=\mathcal{E}$$

$$q_{\text{همگن}}(t)=Ae^{-t/RC}$$

◄ جواب معادله دیفرانسیل بالا شامل دو قسمت همگن و ناهمگن می‌باشد،

$$q=q_{\text{همگن}}+q_{\text{ناهمگن}}=Ae^{-t/RC}+q_{\text{ناهمگن}}$$

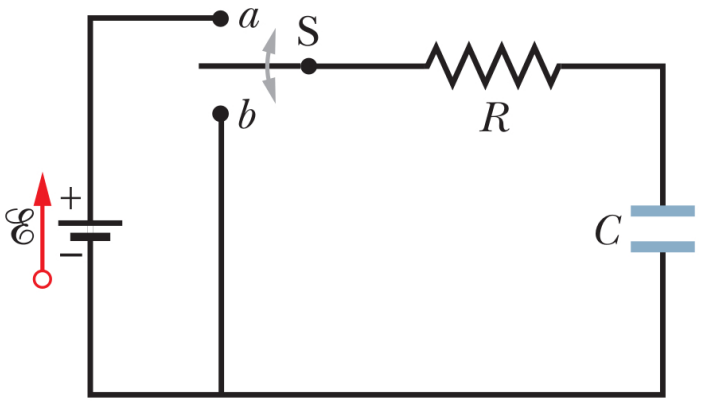
◄ جواب پیشنهادی برای **قسمت ناهمگن معادلات دیفرانسیل** با ضرایب ثابت

$$R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{\text{ناهمگن}}+\frac{1}{C}q_{\text{ناهمگن}}=\mathcal{E}$$

معمولا بصورت چند جمله‌ای است

$$q_{\text{ناهمگن}}(t)=B_0+B_1t+B_2t^2+\cdots$$

مدارهای RC



معادله دیفرانسیل **مرتبه اول ناهمگن** با ضرایب ثابت

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=\mathcal{E}$$

جواب پیشنهادی و مشتق اول آنرا در داخل قسمت همگن معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} \text{قسمت ناهمگن}: & R\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{\text{ناهمگن}}+\dfrac{1}{C}q_{\text{ناهمگن}}=\mathcal{E} \\ \text{جواب پیشنهادی}: & q_{\text{ناهمگن}}=B_0+B_1t+B_2t^2+\cdots \\ \text{مشتق اول}: & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{\text{ناهمگن}}=B_1t+2B_2t+\cdots \end{cases}$$

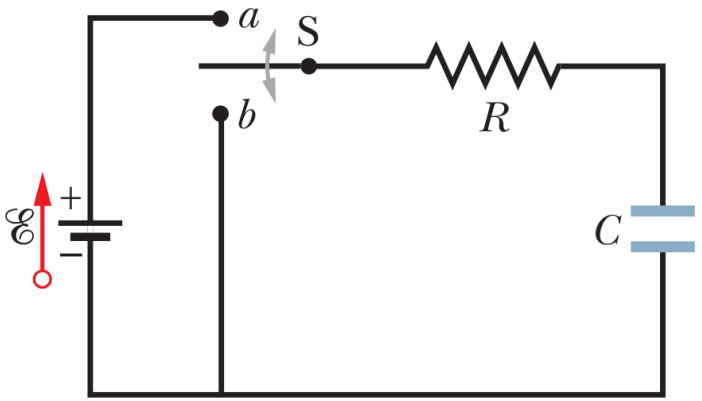
$$R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{\text{ناهمگن}}+\frac{1}{C}q_{\text{ناهمگن}}=\mathcal{E}$$

$$R(B_1+2B_2t+3B_3^2+\cdots)+\frac{1}{C}(B_0+B_1t+B_2t^2+\cdots)=\mathcal{E}$$

مدارهای RC

معادله دیفرانسیل **مرتبه اول ناهمگن** با ضرایب ثابت

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=\mathcal{E}$$



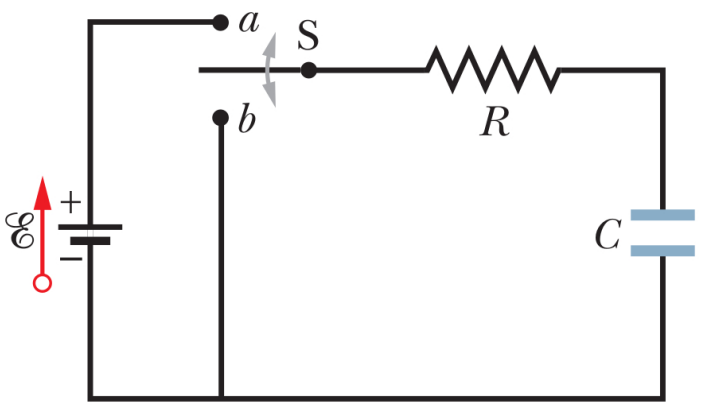
$$R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{\text{ناهمگن}}+\frac{1}{C}q_{\text{ناهمگن}}=\mathcal{E}$$

$$R(B_1+2B_2t+3B_3t^2+\cdots)+\frac{1}{C}(B_0+B_1t+B_2t^2+\cdots)=\mathcal{E}$$

$$\left(RB_1+\frac{1}{C}B_0\right)+\left(2RB_2+\frac{B_1}{C}\right)t+\left(3RB_3+\frac{B_2}{C}\right)t^2+\cdots=\mathcal{E}$$

$$\begin{cases} RB_1+B_0/C &= \mathcal{E} \\ 2RB_2+B_1/C &= 0 \\ 3RB_3+B_2/C &= 0 \\ \vdots & \end{cases} \Rightarrow B_0=\mathcal{E}C, \quad B_1=B_2=B_3=0$$

مدارهای RC



معادله دیفرانسیل **مرتبه اول ناهمگن** با ضرایب ثابت

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=\mathcal{E}$$

$$q_{\text{ناهمگن}}(t)=\mathcal{E}C$$

جواب نهایی

$$q=q_{\text{همگن}}(t)+q_{\text{ناهمگن}}(t)$$

$$q=Ae^{-t/RC}+\mathcal{E}C$$

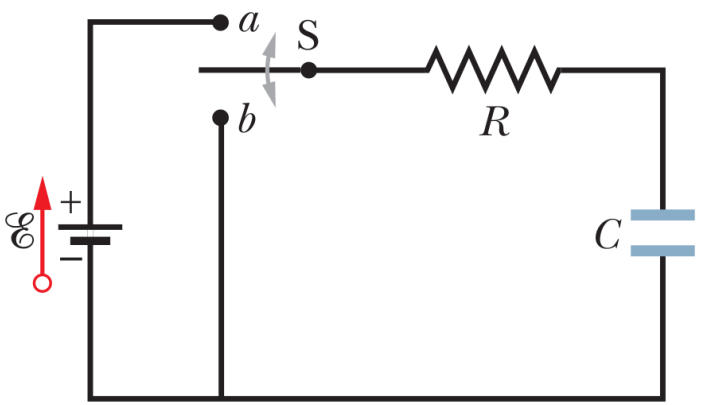
اعمال شرایط اولیه $q(t=0)=0$

$$0=A+\mathcal{E}C\Rightarrow A=-\mathcal{E}C$$

بنابراین

$$q(t)=\mathcal{E}C(1-e^{-t/RC})$$

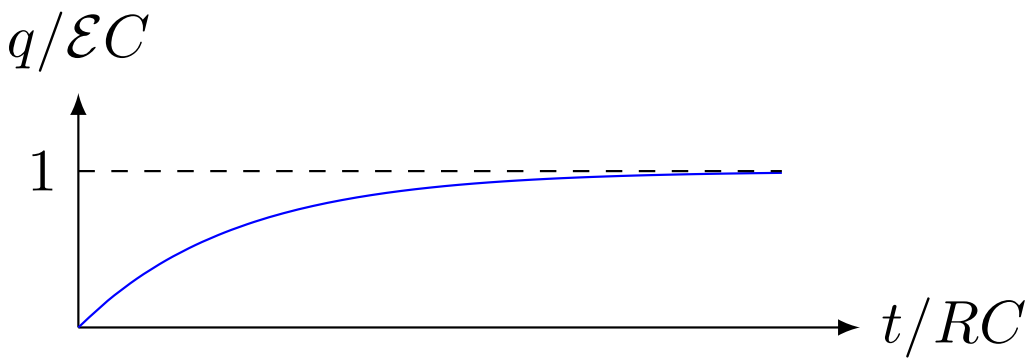
مدارهای RC



معادله دیفرانسیل **مرتبه اول ناهمگن** با ضرایب ثابت

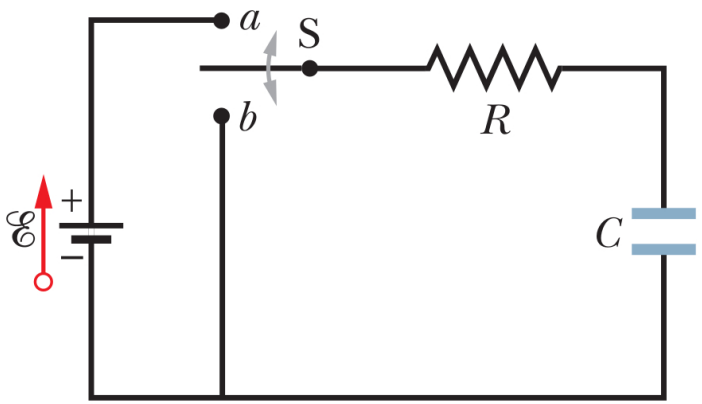
$$\begin{cases} R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}q = \mathcal{E} \\ \text{شرایط اولیه}: \quad q(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$q(t) = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/RC})$$



$$\lim_{(t/RC)\to\infty} q(t) = \mathcal{E}C$$

مدارهای RC



در حالیکه بار روی صفحات خازن C برابر با $\mathcal{E}C$ است، کلید S را از حالت a به حالت b تغییر می‌دهیم و منبع تغذیه را از مدار خارج می‌کنیم.

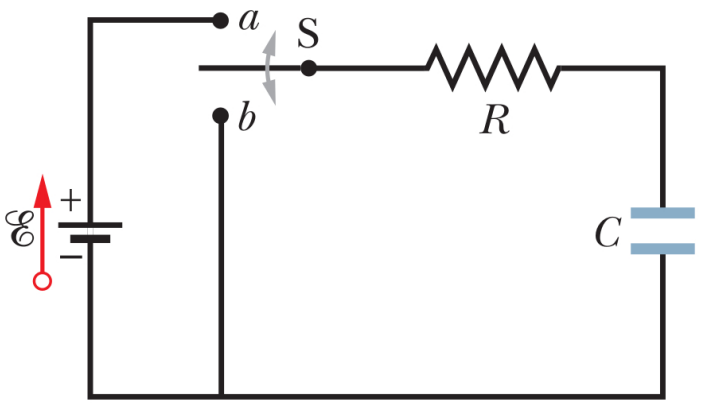
$$\begin{cases} \text{معادله دیفرانسیل همگن} : & R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{C}q=0 \\ \text{شرایط اولیه} : & q(t=0)=\mathcal{E}C \end{cases}$$

جواب پیشنهادی و مشتق اول آنرا در داخل قسمت همگن معادله دیفرانسیل قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} \text{قسمت همگن} : & R\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{\text{همگن}}+\dfrac{1}{C}q_{\text{همگن}}=0 \\ \text{جواب پیشنهادی} : & q_{\text{همگن}}=Ae^{\alpha t} \\ \text{مشتق اول} : & \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_{\text{همگن}}=A\alpha e^{\alpha t} \end{cases} \Rightarrow A(R\alpha+\frac{1}{C})e^{\alpha t}=0 \Rightarrow R\alpha+\frac{1}{C}=0$$

$$\text{معادله مشخصه} : \quad R\alpha+\frac{1}{C}=0 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{RC}$$

مدارهای RC



$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=0$$

جواب پیشنهادی : $q_{\text{همگن}}(t)=Ae^{\alpha t}$

$$\alpha=-\frac{1}{RC}$$

بنابراین

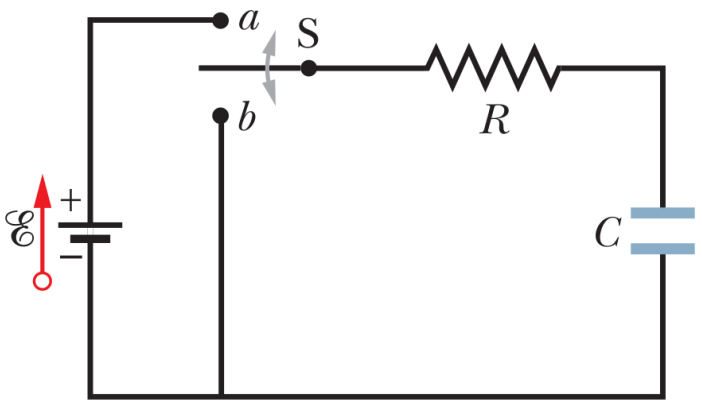
$$q_{\text{همگن}}(t)=Ae^{-t/RC}$$

ثابت A با استفاده از اعمال شرایط اولیه بدست می‌آید.

شرایط اولیه : $q_{\text{همگن}}(t=0)=\mathcal{E}C\Rightarrow A=\mathcal{E}C$

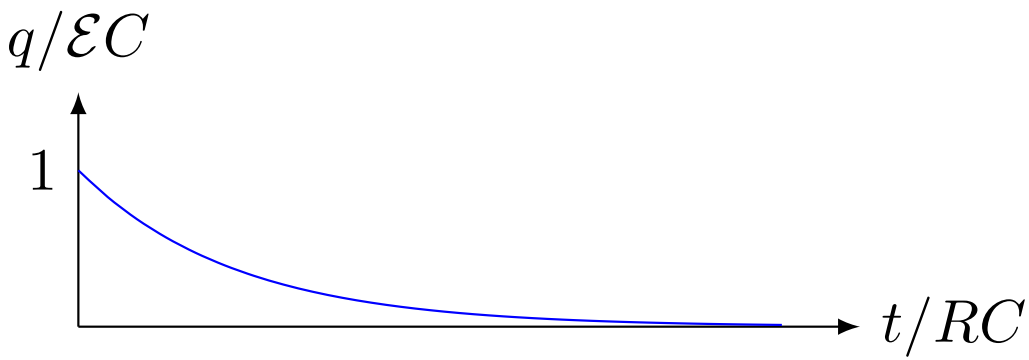
$$q_{\text{همگن}}=\mathcal{E}Ce^{-t/RC}$$

مدارهای RC



$$\begin{cases} R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}q = \mathcal{E} \\ \text{شرایط اولیه}: \quad q(t=0) = \mathcal{E}C \end{cases}$$

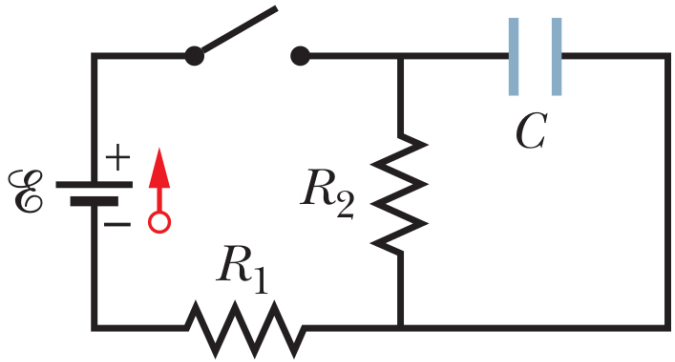
$$q(t) = \mathcal{E}Ce^{-t/RC}$$



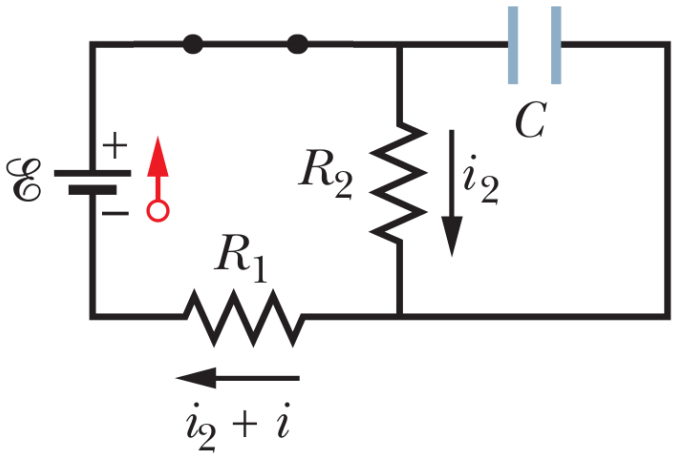
$$\lim_{(t/RC)\to\infty} q(t) = 0$$

مدارهای RC

مسئله-۴: در شکل، ابتدا کلید برای مدت زمان طولانی بسته است بطوریکه حالت پایا برقرار شود. سپس در لحظه‌ی $t = 0$ باز می‌شود. جریان R_2 بر حسب t بدست آورید.

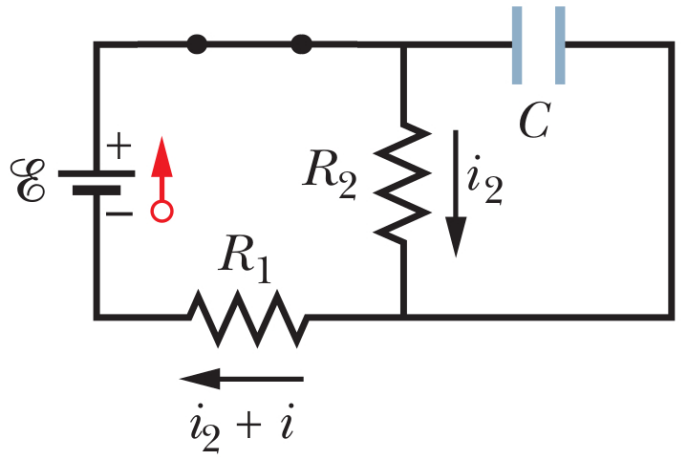


وقتی کلید بسته است



مدارهای RC

مسئله-۴:
وقتی کلید بسته است



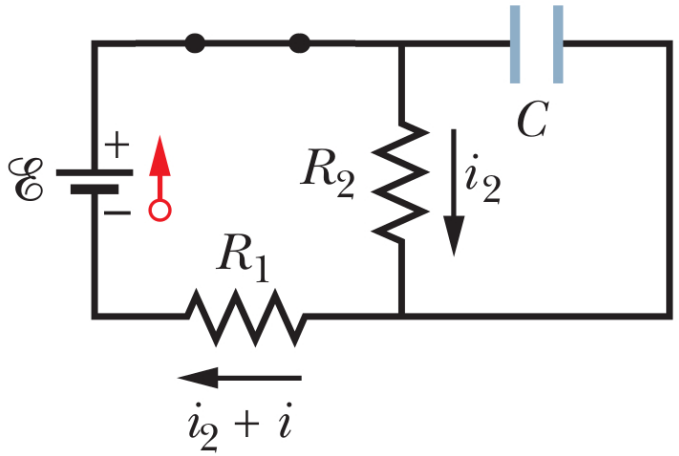
حلقه سمت چپ : $\mathcal{E} - i_2R_2 - (i_2 + i)R_1 = 0 \Rightarrow i_2(R_1 + R_2) + iR_1 = \mathcal{E}$

حلقه سمت راست : $-\frac{q}{C} + i_2R_2 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{q}{R_2C}$

$$iR_1 + (R_1 + R_2)\frac{q}{R_2C} = \mathcal{E}$$

مدارهای RC

مسئله-۴:
وقتی کلید بسته است



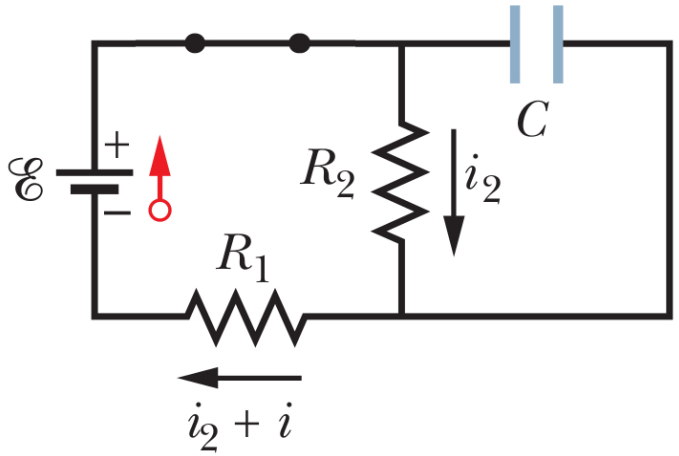
$$R_1 i + (R_1 + R_2)\frac{q}{R_2 C} = \mathcal{E} \Rightarrow R_1 \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + (R_1 + R_2)\frac{q}{R_2 C} = \mathcal{E}$$

$$\text{قسمت همگن} : \quad R_1 \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + (R_1 + R_2)\frac{q}{R_2 C} = 0$$

$$q_{\text{همگن}} = Ae^{\alpha t}, \quad \alpha = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$$

مدارهای RC

مسئله-۴:
وقتی کلید بسته است



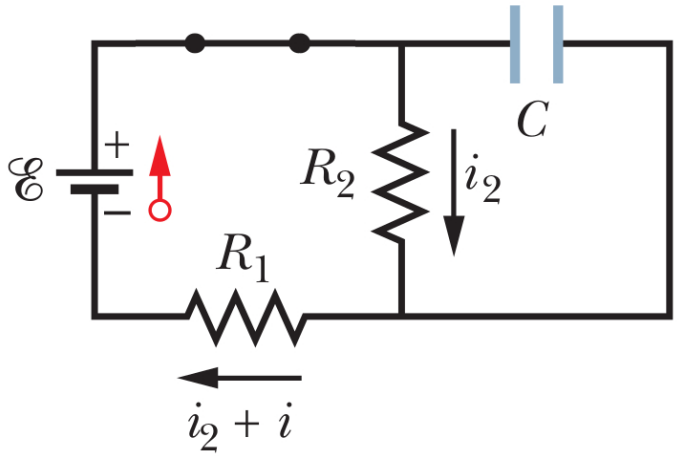
$$q_{\text{همگن}} = Ae^{\alpha t}, \quad \alpha = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}$$

$$R_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q_{\text{ناهمگن}} + \frac{R_1 + R_2}{R_2 C} q_{\text{ناهمگن}} = \mathcal{E}$$

قسمت ناهمگن : $q_{\text{ناهمگن}} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \mathcal{E} C$

مدارهای RC

مسئله-۴:
وقتی کلید بسته است



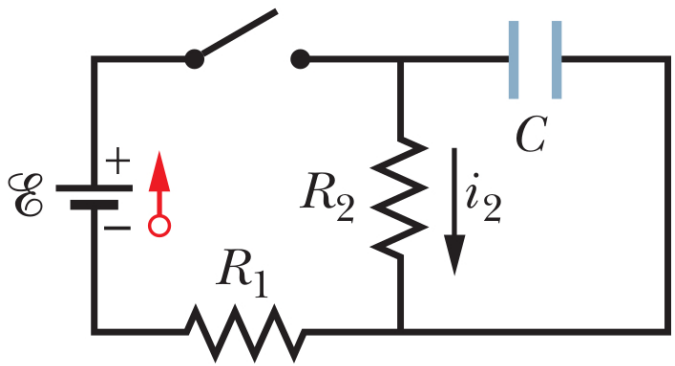
$$q = Ae^{\alpha t} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathcal{E}C, \quad \alpha = -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}, \quad q(t = 0) = 0$$

$$q = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathcal{E}C(1 - e^{-(R_1+R_2)t/R_1R_2C})$$

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathcal{E}C$$

مدارهای RC

مسئله-۴:
وقتی کلید باز می‌شود

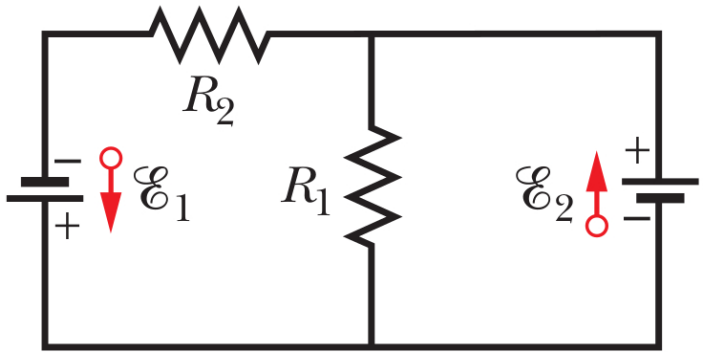


$$-\frac{q}{C} - i_2 R_2 = 0, \quad q(t=0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathcal{E}C$$

$$q = Be^{\beta t}, \quad \beta = -\frac{1}{R_2 C}, \quad q(t=0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathcal{E}C$$

$$q = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathcal{E}Ce^{-t/R_2 C}, \quad i_2 = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}e^{-t/R_2 C}$$

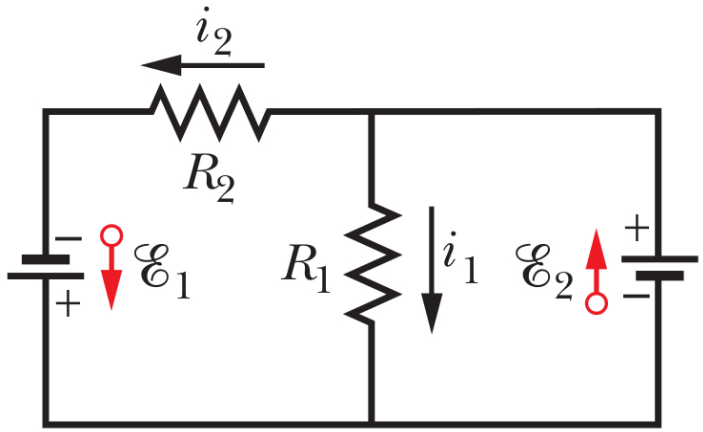
مسئله-۴: در شکل اندازه و جهت جریانهای عبوری از R_1، R_2 و $\mathcal{E}_2$ را بدست آورید.



$$\mathcal{E}_1 = 6\,\mathrm{V}, \quad \mathcal{E}_2 = 12\,\mathrm{V}$$

$$R_1 = 200\,\Omega, \quad R_2 = 100\,\Omega$$

مسئله-۴:



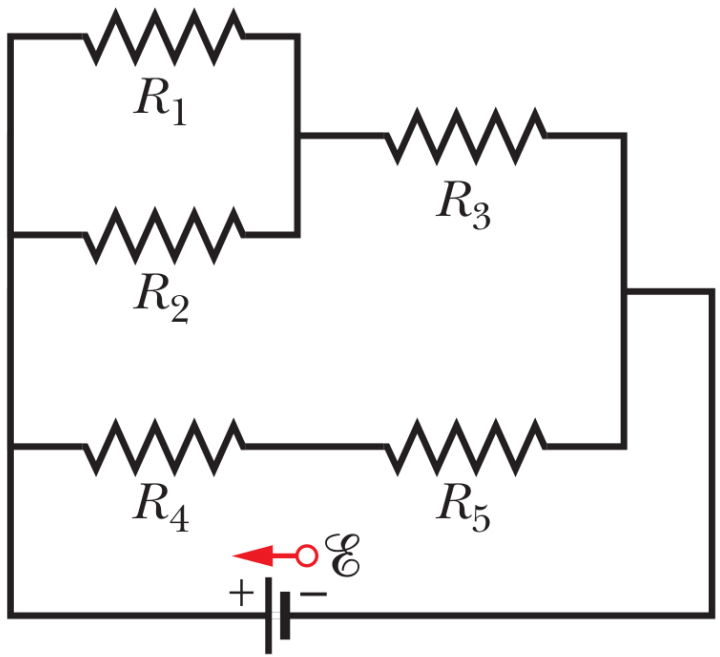
حلقه سمت چپ (ساعتگرد) : $-\mathcal{E}_1 + i_2 R_2 - i_1 R_1 = 0 \Rightarrow i_2 R_2 - i_1 R_1 = \mathcal{E}_1$

حلقه سمت راست (ساعتگرد) : $-\mathcal{E}_2 + i_1 R_1 = 0 \Rightarrow i_1 = \dfrac{\mathcal{E}_2}{R_1} = 0.06\ \text{A}$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_2} = 0.18\ \text{A}$$

باتری : $i_1 + i_2 = \dfrac{\mathcal{E}_2}{R_1} + \dfrac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R_2} = 0.24\ \text{A}$

مسئله-۵: در شکل اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت های R_3 و R_5 چقدر است؟



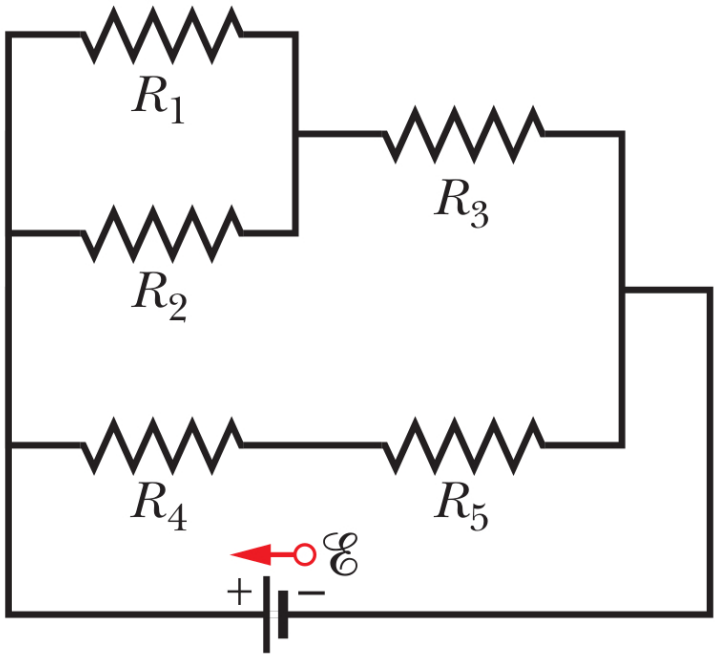
$$\mathcal{E} = 12\,\mathrm{V}$$

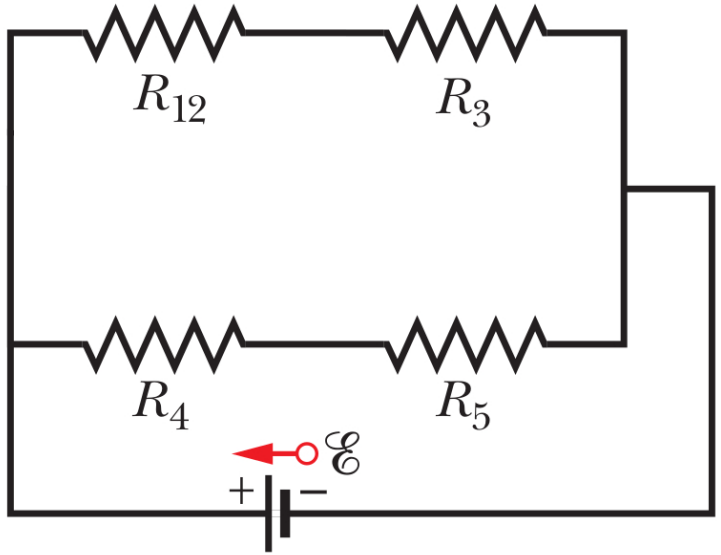
$$R_1 = 6\,\Omega, \quad R_2 = 12\,\Omega$$

$$R_3 = 4\,\Omega, \quad R_4 = 3\,\Omega, \quad R_5 = 5\,\Omega$$

مدارها

مسئله-۵:

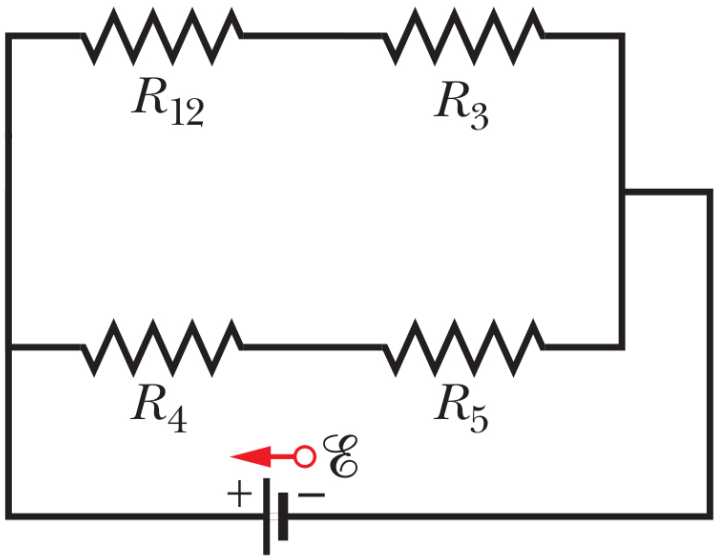


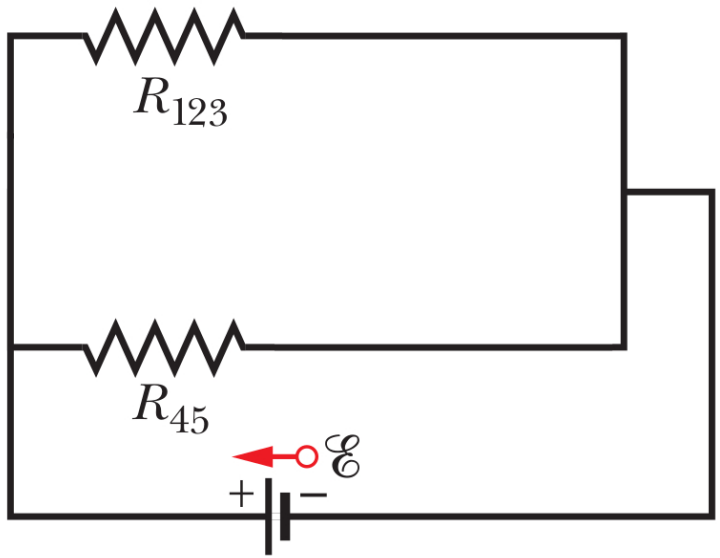


$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

مدارها

مسئله-۵:



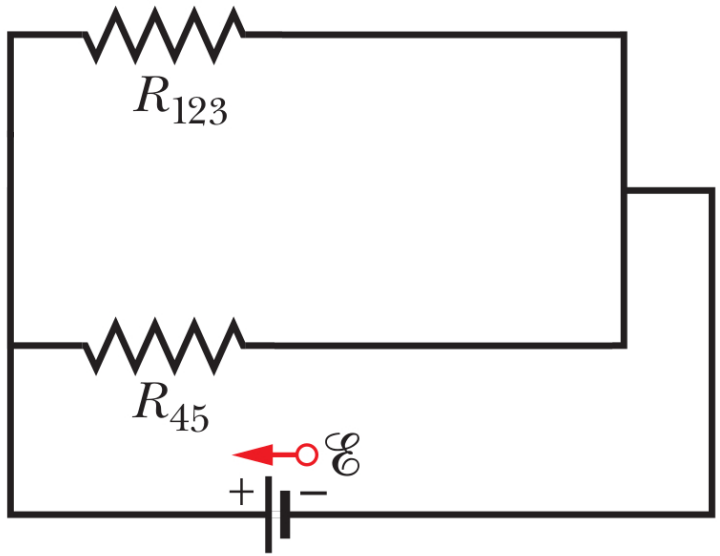


$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{123} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3, \quad R_{45} = R_4 + R_5, \quad i_{45} = \frac{\mathcal{E}}{R_4 + R_5}$$

$$V_5 = i_{45} R_5 = \mathcal{E} \frac{R_5}{R_4 + R_5} = 7.5\,\mathrm{V}$$

مسئله-۵:

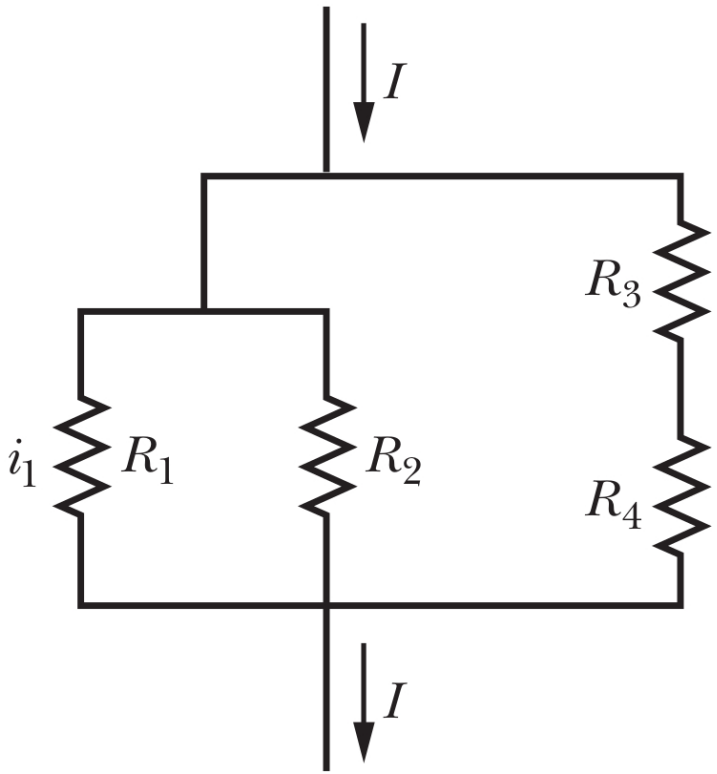


$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_{123} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3, \quad R_{45} = R_4 + R_5$$

$$i_{123} = \frac{\mathcal{E}}{R_{123}}$$

$$V_3 = i_{123} R_3 = \mathcal{E} \frac{R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} = 6\ \mathrm{V}$$

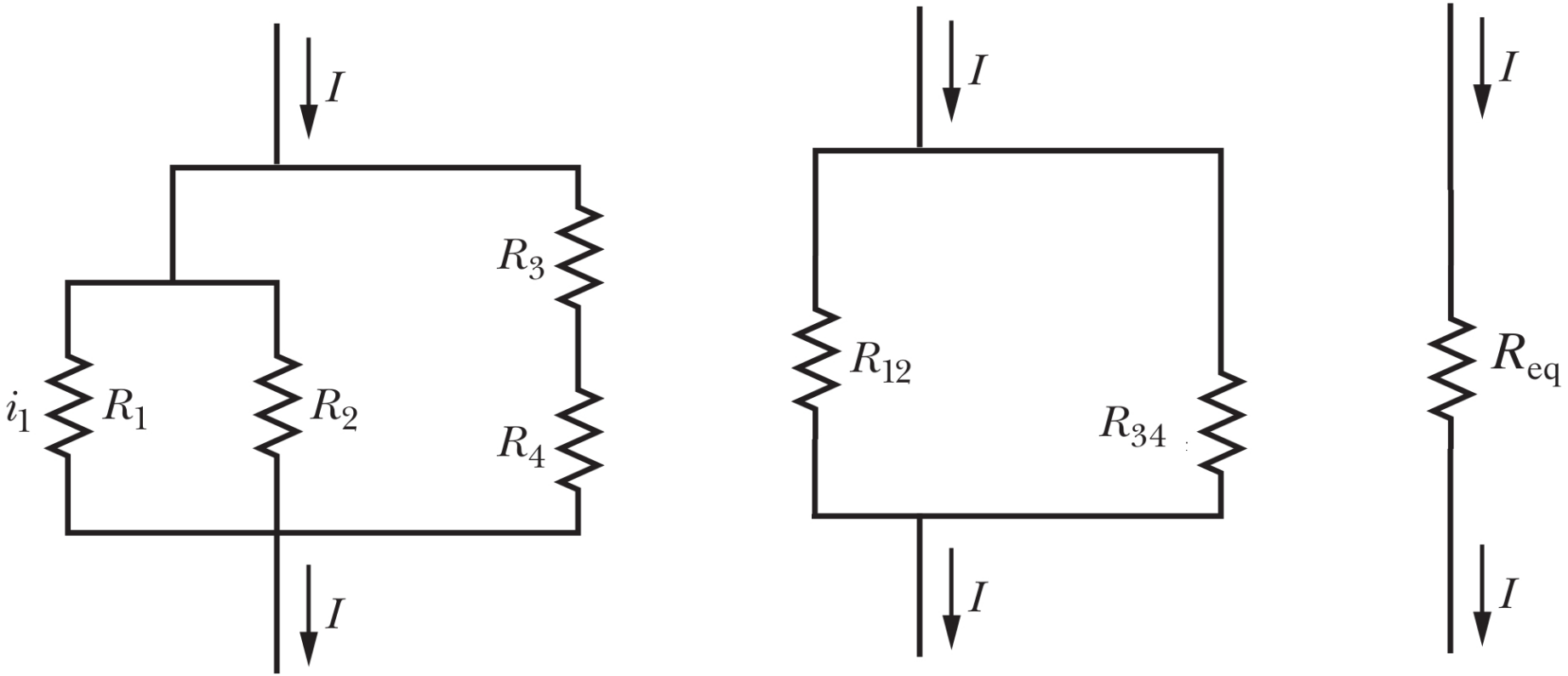
مسئله-۶: شکل زیر بخشی از یک مدار را نشان می‌دهد که جریان $I = 6\ A$ از آن می‌گذرد. جریان عبور از مقاومت R_1 را بدست آورید.



$$R_1 = R_2 = 4\,\Omega, \quad R_3 = R_4 = 2\,\Omega$$

$$I = 6\ \mathrm{A}$$

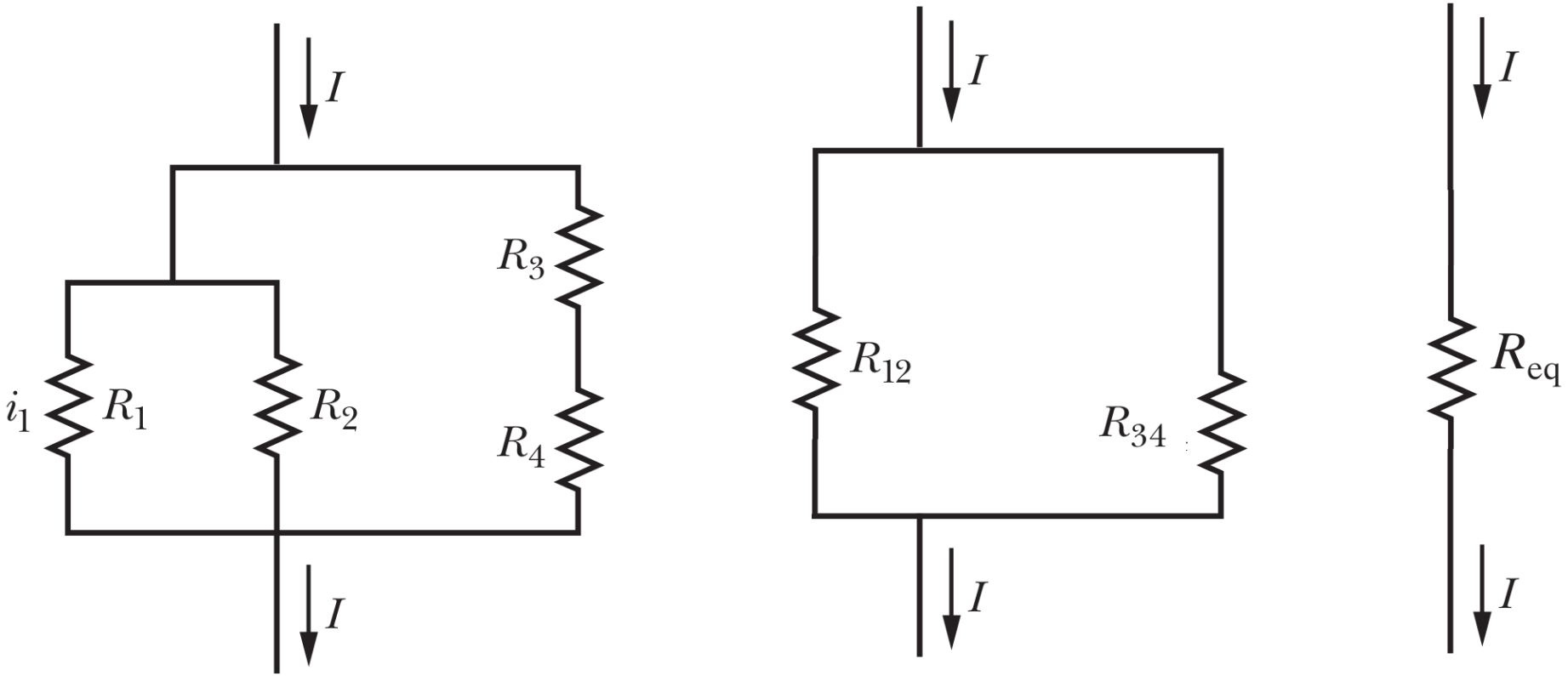
مسئله-۶:



$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2\,\Omega, \quad R_{34} = R_3 + R_4 = 4\,\Omega, \quad R_{eq} = \frac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}}$$

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_{eq} : $V = I R_{\text{eq}} = I \dfrac{R_{12} R_{34}}{R_{12} + R_{34}} = 8\,\text{V}$

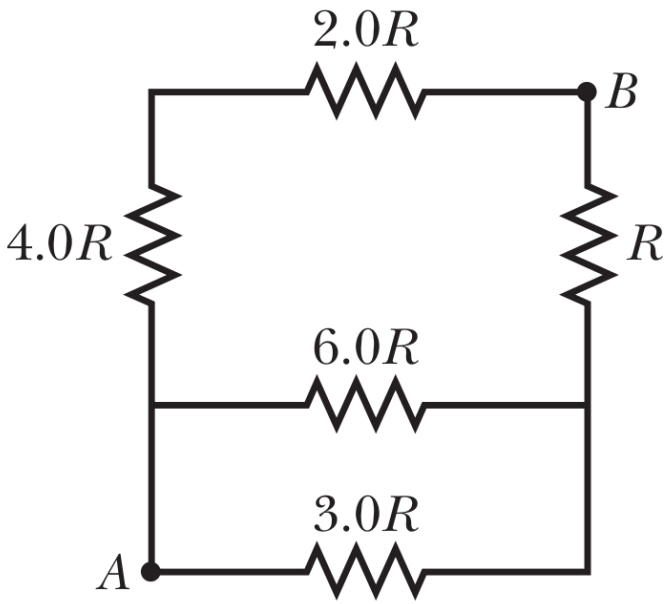
مسئله-۶:



اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_{eq} : $V = IR_{\text{eq}} = I\dfrac{R_{12}R_{34}}{R_{12}+R_{34}}$

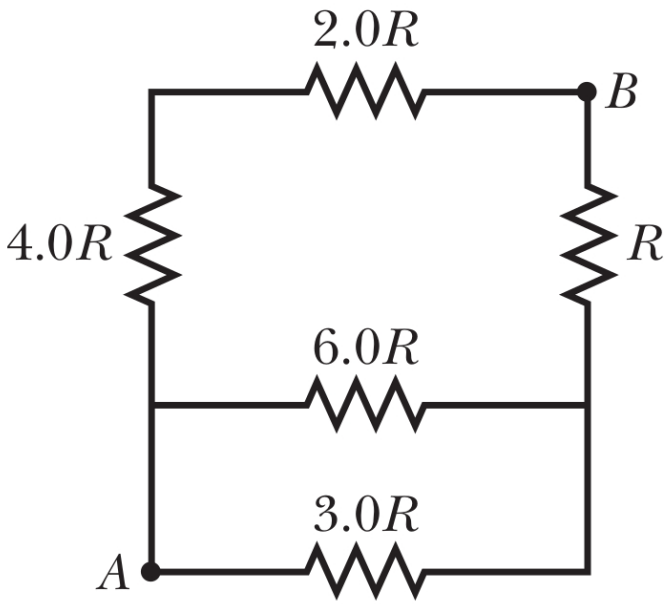
اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R_1 : $V = i_1R_1 \Rightarrow i_1 = I\dfrac{R_{12}R_{34}}{R_1R_{12}+R_1R_{34}} = 2\,\text{A}$

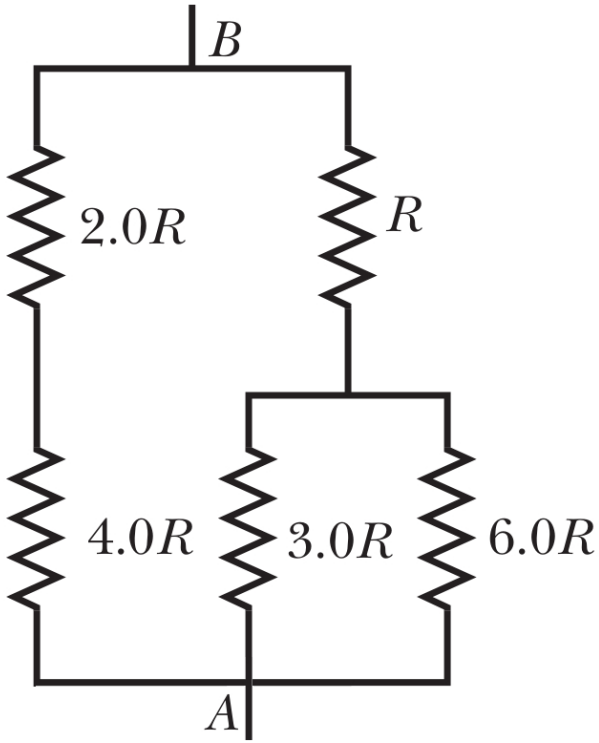
مسئله-۷: در شکل زیر، اگر $R = 10\,\Omega$ باشد، مقاومت معادل بین نقاط A و B را بدست آورید.



مدارها

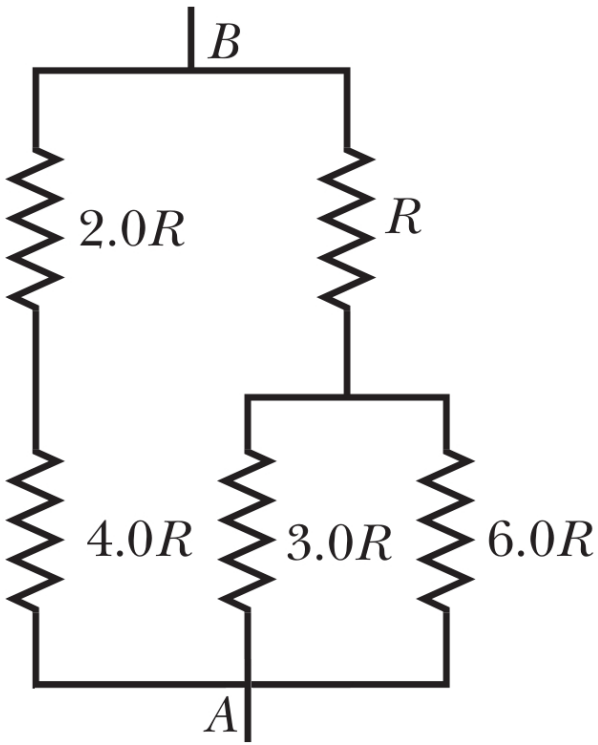
مسئله-۷:

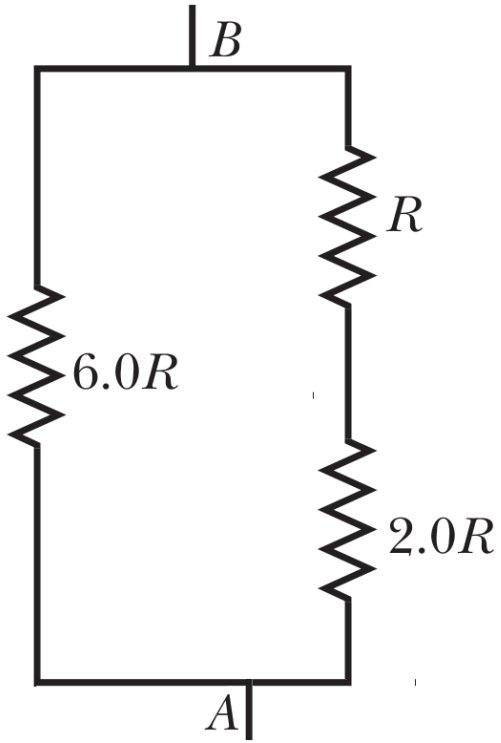




مدارها

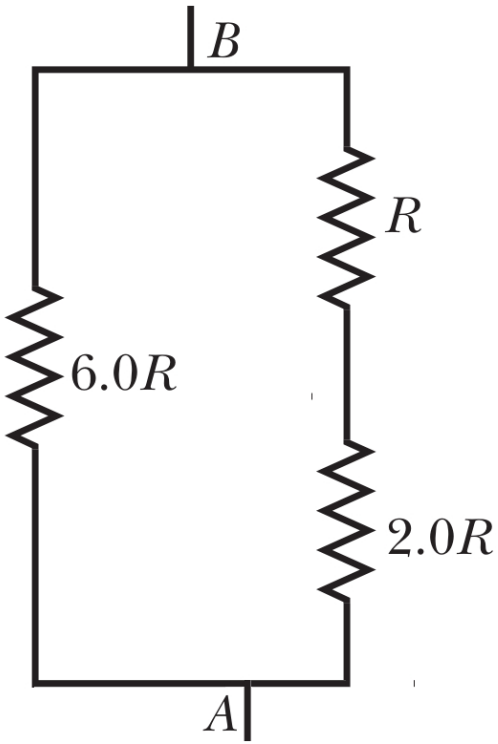
مسئله-۷:

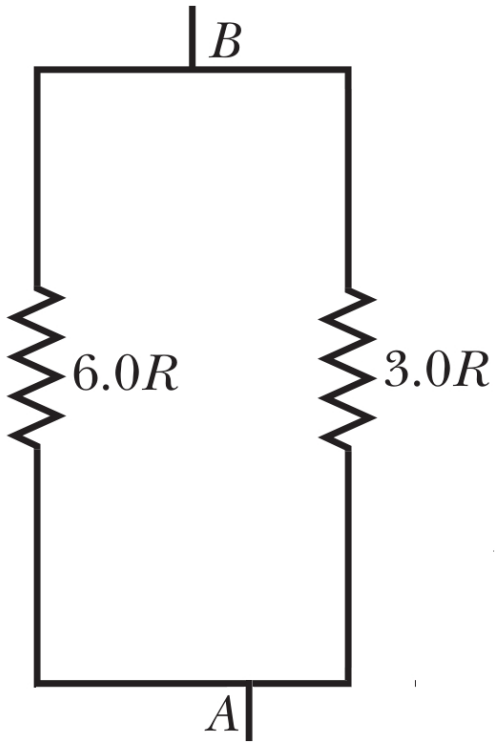




مدارها

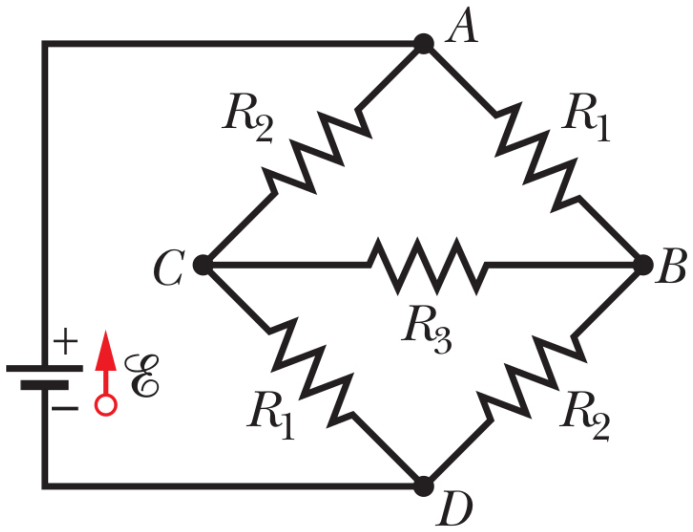
مسئله-۷:





$$R_{eq} = 2R = 20\,\Omega$$

مسئله-۸: در شکل زیر، اختلاف پتانسیل الف) $V_A - V_B$ ب) $V_B - V_C$ ج) $V_C - V_D$ د) $V_A - V_C$ بدست آورید.

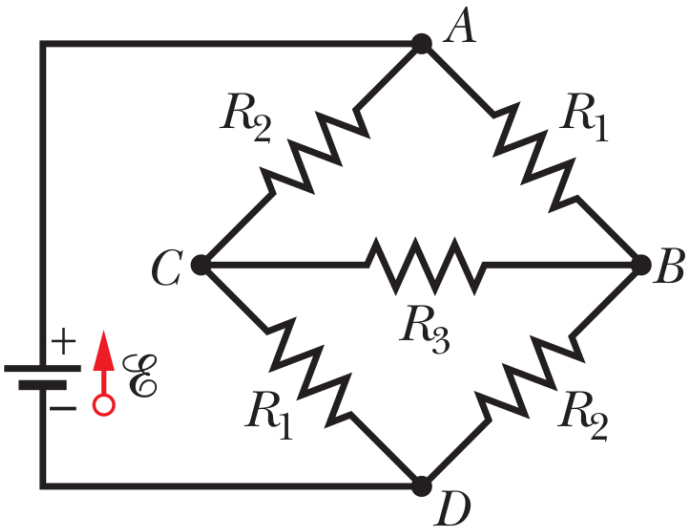


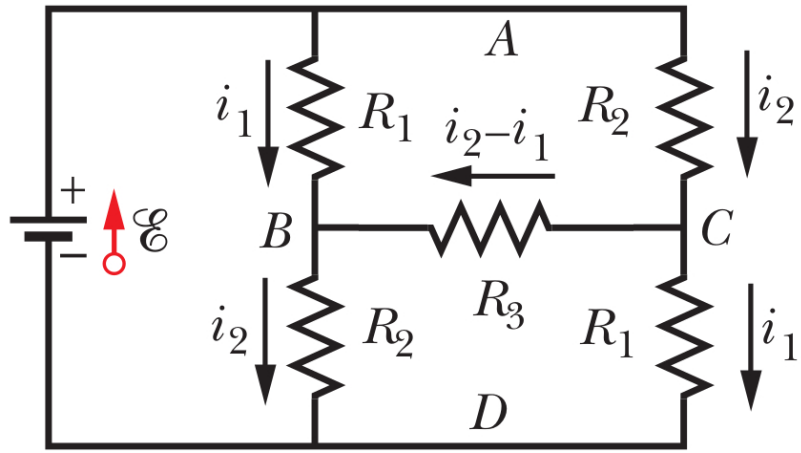
$$\mathcal{E} = 12\,\mathrm{V}$$

$$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 3\,\mathrm{k\Omega}$$

$$R_3 = 4\,\mathrm{k\Omega}$$

مسئله-۸:
جهت و نامگذاری جریانها بر اساس تقارن انتخاب شده‌اند



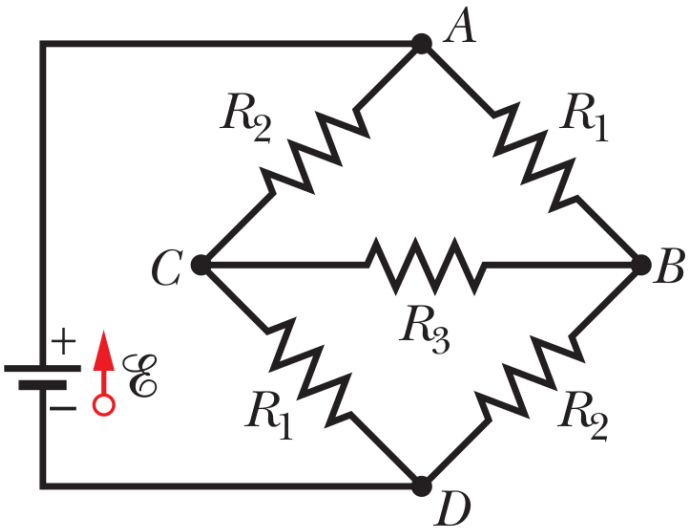


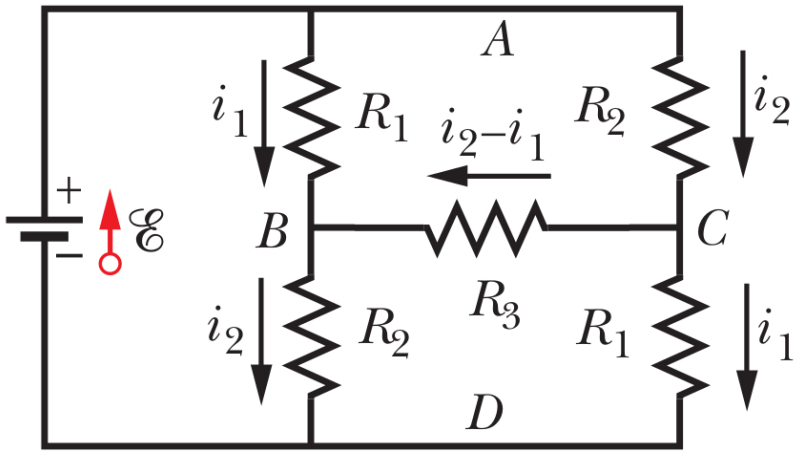
حلقه سمت چپ : $\mathcal{E} - i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0$

حلقه‌ی بالا سمت راست : $-i_2 R_2 - (i_2 - i_1) R_3 + i_1 R_1 = 0$

$$\begin{cases} i_1 R_1 + i_2 R_2 = \mathcal{E} \\ i_1 (R_1 + R_3) - i_2 (R_2 + R_3) = 0 \end{cases}$$

مسئله-۸:

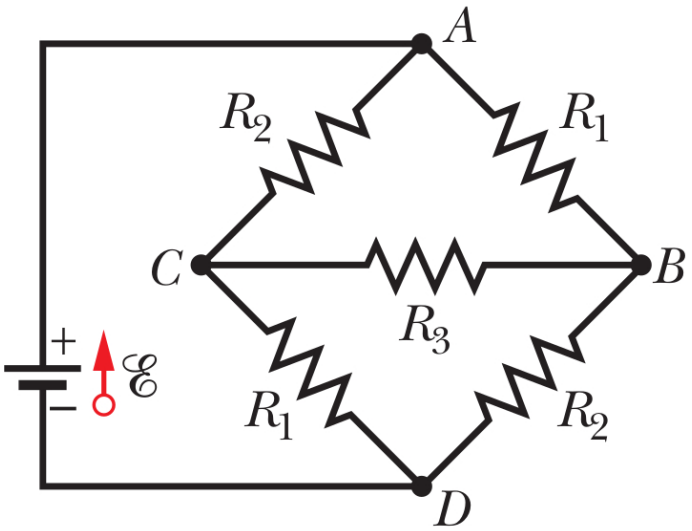


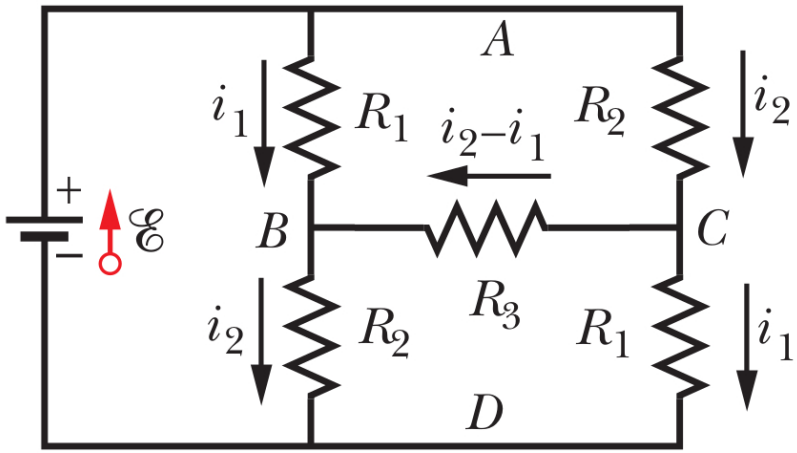


$$\begin{cases} 2i_1 + 3i_2 = 12 \times 10^{-3} \\ 6i_1 - 7i_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow i_1 = 0.002625\ \text{A}, \quad i_2 = 0.00225\ \text{A}$$

جریان عبوری از مقاومت R_3 : $i_3 = i_2 - i_1 = 0.000375\ \text{A}$

مسئله-۸:





$$i_1 = 0.002625\ \text{A}, \quad i_2 = 0.00225\ \text{A}$$

جریان عبوری از مقاومت R_3 : $i_3 = i_2 - i_1 = 0.000375\ \text{A}$

$$V_A - V_B = V_C - V_D = R_1 i_1 = 5.25\ \text{V}$$

$$V_B - V_C = R_3 i_3 = 1.5\ \text{V}$$

$$V_A - V_C = R_2 i_2 = 6.75\ \text{V}$$