فیزیک ۲
القا و القاییدگی

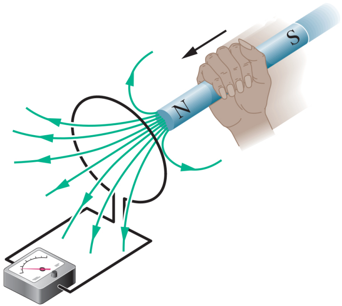
محمدرضا مظفری

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم

بهمن ۱۴۰۰

دو آزمایش ساده برای ورود به بحث قانون القای فارادی

آزمایش اول:

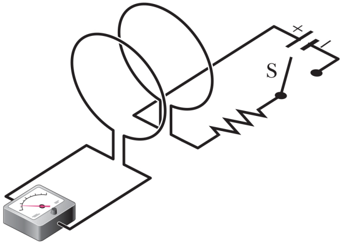


- شکل حلقه‌ی رسانایی را نشان می‌دهد که به آمپرسنج حساسی وصل است.
- چون باتری در مدار نیست بنابراین جریانی هم وجود ندارد.
- وقتی یک آهنربای میله‌ای را بطرف حلقه حرکت می‌هیم، ناگهان در مدار جریانی ظاهر می‌شود.
- وقتی آهنربای می‌ایستد، جریان از بین می‌رود.
- اگر آهنربای میله‌ای را از حلقه دور کنیم، دوباره بطور ناگهان در مدار جریانی ظاهر می‌شود ولی در خلاف جهت است.

جریان ایجاد شده در حلقه را **جریان القایی** می‌نامند.

دو آزمایش ساده برای ورود به بحث قانون القای فارادی

آزمایش دوم:



- دو حلقه‌ی رسانای نزدیک بهم ولی به هم وصل نسیتند.
- وقتی کلید S در مدار سمت راست بسته می‌شود و جریان در آن برقرار می شود، آمپرسنج بطور ناگهانی جریان القایی عبوری از حلقه سمت چپ را نشان می‌دهد.
- وقتی جریان در مدار سمت راست ثابت می شود، جریان در حلقه سمت چپ از بین می‌رود.
- وقتی کلید S در مدار سمت راست باز شود، دوباره بطور ناگهان در حلقه سمت چپ جریان القایی ظاهر می‌شود ولی در خلاف جهت است.

در هر دو آزمایش وقتی جریان القایی ظاهر می‌شود که چیزی تغیر کند! اما آن چیست؟

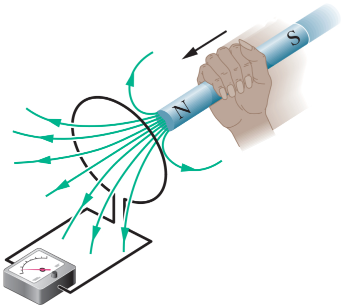
قانون القای فارادی

فارادی فهمید که

وقتی تعداد خطوط میدان عبور از حلقه تغییر کند،

در حلقه سمت چپ در آزمایش‌های بالا جریان القایی ایجاد می‌شود.

در آزمایش اول



- وقتی قطب N آهنربا به حلقه نزدیک می‌شود تعداد خطوط میدان عبوری از حلقه افزایش می‌یابد.
- افزایش خطوط باعث حرکت الکترونهای رسانش در حلقه سمت چپ و در نتیجه جریان القایی می‌شود.
- وقتی حرکت آهنربا متوقف می‌شود، دیگر تغییر در تعداد خطوط میدان اتفاق نمی‌افتد و جریان ناپدید می‌شود.

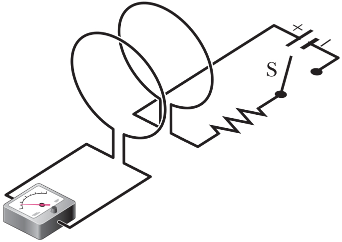
قانون القای فارادی

فارادی فهمید که

وقتی تعداد خطوط میدان عبور از حلقه تغییر کند،

در حلقه سمت چپ در آزمایش‌های بالا جریان القایی ایجاد می‌شود.

در آزمایش دوم



- وقتی کلید S باز است هیچ خطوط میدان و در نتیجه هیچ جریانی وجود ندارد.
- وقتی کلید بسته می شود، جریان در حلقه‌ی سمت راست برقرار و باعث افزایش خطوط میدان در حلقه و در حلقه‌ی سمت چپ می‌شود.
- افزایش خطوط میدان عبوری از حلقه، جریان القا می‌کند. وقتی جریان در حلقه سمت راست به مقدار نهایی و ثابتی می‌رسد، تعداد خطوط میدان عبوری از حلقه‌ی سمت چپ تغییر نمی‌کند و جریان القایی ناپدید می‌شود.

قانون القای فارادی

فارادی فهمید که

وقتی تعداد خطوط میدان عبور از حلقه تغییر کند،

در حلقه سمت چپ در آزمایش‌های بالا جریان القایی ایجاد می‌شود.

یک تعریف مفید

کار انجام شده بر واحد بار برای ایجاد جریان القایی را **نیروی محرکه القایی** می‌نامند.

یک کمیت مفید

فارادی برای کمی کردن نیروی محرکه القایی، شار مغناطیسی عبوری از سطح حلقه‌ای که در آن جریان القا شده را بررسی کرد

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

قانون القای فاراده

اندازه‌ی نیرو محرکه القایی ε در حلقه‌ی رسانا برابر با آهنگ تغییر شار مغناطیسی Φ_B عبوری از حلقه با زمان است.

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

علامت منفی نشان دهنده مخالفت جریان القایی با تغییر شار مغناطیسی است (قانون لنز).

نکته ۱: اغلب از علامت منفی صرفه‌نظر می‌شود و فقط اندازه نیرو محرکه القایی بررسی می‌شود.

نکته ۲: اگر قصد داشتیم تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه‌ای با N دور را بررسی کنیم،

$$\varepsilon = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

قانون القای فارادی

قانون القای فاراده

اندازه‌ی نیرو محرکه القایی ε در حلقه‌ی رسانا برابر با آهنگ تغییر شار مغناطیسی Φ_B عبوری از حلقه با زمان است.

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

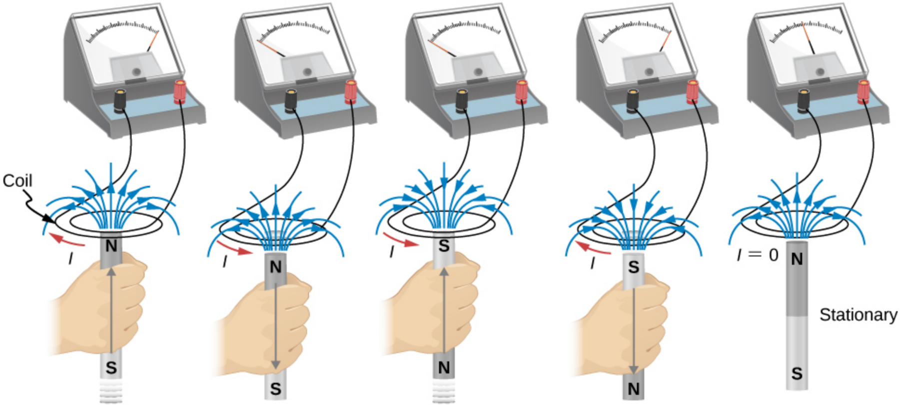
علامت منفی نشان دهنده مخالفت جریان القایی با تغییر شار مغناطیسی است.

روشهای کلی برای تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه:

- تغییر میدان مغناطیسی B داخل پیچه با زمان
- تغییر مساحت پیچه در داخل میدان مغناطیسی با زمان
- تغییر زاویه‌ی میدان مغناطیسی و عمود بر سطح پیچه با زمان

قانون لنز و جهت جریان القایی

جهت جریان القائی وقتی آهنربا از قطب‌های N و S به پیچه نزدیک و دور می‌شود.

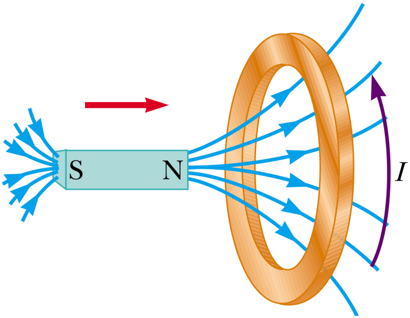


قانون لنز

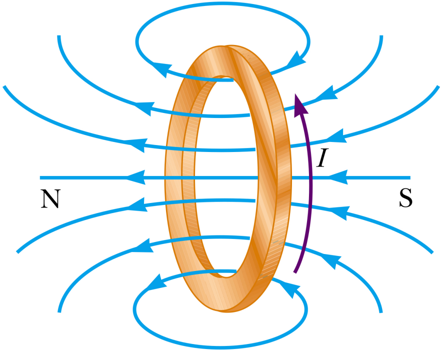
جهت جریان القایی طوری است که میدان مغناطیسی ناشی از جریان با تغییر شار مغناطیسی القا کننده‌ی جریان مخالفت می‌کند.

قانون لنز و جهت جریان القایی

جهت جریان القائی و میدان القایی ناشی از آن وقتی آهنربا از قطب‌های N به پیچه نزدیک می‌شود.



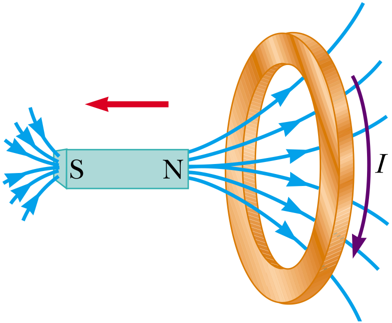
شار عبوری از حلقه وقتی آهنربا از قطب N به حلقه نزدیک می‌شود



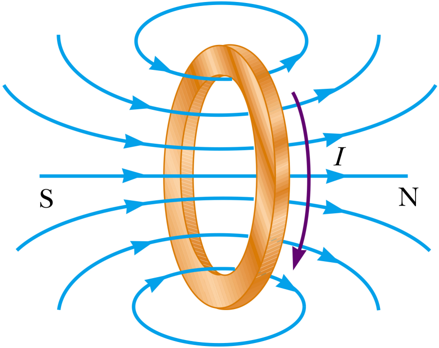
میدان مغناطیسی القایی ناشی از جریان القایی در حلقه در **خلاف جهت** میدان آهنربا

قانون لنز و جهت جریان القایی

جهت جریان القائی و میدان القایی ناشی از آن وقتی آهنربا از قطب‌های N از پیچه دور می‌شود.



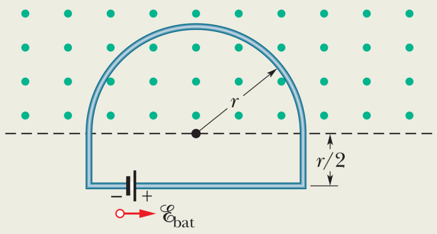
شار عبوری از حلقه وقتی آهنربا از قطب N از حلقه دور می‌شود



میدان مغناطیسی القایی ناشی از جریان القایی در حلقه در **جهت** میدان آهنربا

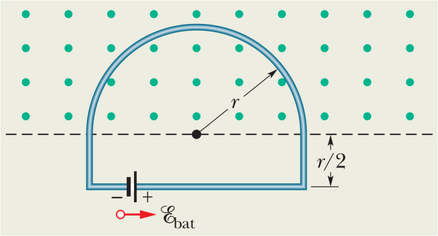
نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱: شکل حلقه‌ی رسانایی را نشان می‌دهد که شامل نیمدایره‌ای به شعاع r و سه قسمت مستقیم است. نیمدایره در میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ قرار دارد که بطرف خارج صفحه است. اندازه‌ی میدان بصورت $B = 4t^2 + 2t^2 + 3$ داده می‌شود که B بر حسب تسلا و t بر حسب ثانیه است. یک باطری ایده‌آل با نیروی محرکه‌ی $\varepsilon_{\rm bat}$ به حلقه متصل است. مقاومت حلقه R است. الف) اندازه و جهت نیروی محرکه‌ی القایی $\varepsilon_{\rm ind}$ در حلقه را بر حسب t بدست آورید. ب) جریان کل در حلقه را بدست آورید.



نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله-۱:



$$B = 4t^2 + 2t + 3$$

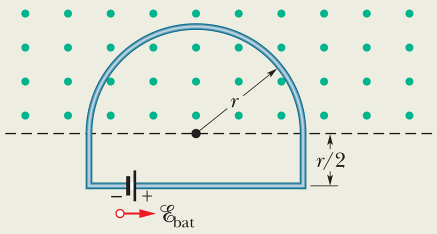
در اینجا $\vec{B}$ و $\mathrm{d}\vec{A}$ موازی هستند. بنابراین

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{\pi r^2}{2}(4t^2 + 2t + 3)$$

اندازه نیرو محرکه القایی : $\varepsilon_{\text{القایی}} = \left| \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \right| = \pi r^2 (4t + 1)$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱:



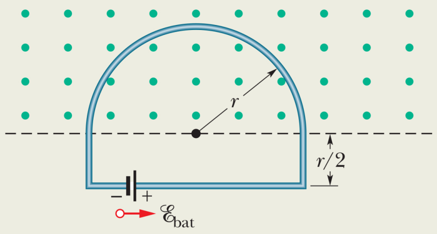
$$\varepsilon_{\text{القایی}} = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = \pi r^2(4t+1)$$: اندازه نیرو محرکه القایی

$$\frac{\varepsilon_{\text{القایی}}}{R} = \frac{\pi r^2}{R}(4t+1)$$: بزرگی جریان القایی

میدان $\vec{B}$ افزایشی و بطرف خارج صفحه است. بنابراین بر اساس قانون لنز، جهت میدان القایی در خلاف جهت میدان اعمالی، بطرف داخل صفحه می‌باشد و جریان القایی ناشی از آن ساعتگرد است.

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله-۱:



$$i_{\text{القایی}} = \frac{\pi r^2}{R}(4t+1)$$: جریان القایی در جهت ساعتگرد است

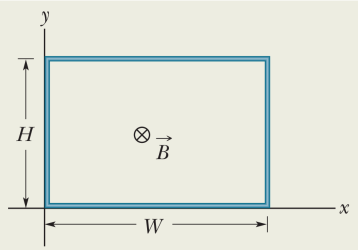
$$i_{\text{باتری}} = \frac{\varepsilon_{\text{bat}}}{R}$$: جریان باتری در جهت پادساعتگرد است

$$i_{\text{نهایی}} = i_{\text{القایی}} + i_{\text{باتری}} = -\frac{\pi r^2}{R}(4t+1) + \frac{\varepsilon_{\text{bat}}}{R}$$: جریان نهایی مدار

اگر $\boxed{i_{\text{نهایی}} > 0}$ جریان نهایی پادساعتگرد است و اگر $\boxed{i_{\text{نهایی}} < 0}$ جریان نهایی ساعتگرد است.

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله-۲: شکل حلقه‌ی مستطیلی را نشان می‌دهد که در میدان مغناطیسی متغیر و غیر یکنواخت قرار دارد. میدان عمود بر صفحه و بطرف داخل است. اندازه‌ی میدان از رابطه‌ی $B = \alpha t^2 x^2$ بدست می‌اید که $\alpha > 0$. اندازه نیروی محرکه القایی و جهت جریان القایی را بدست آورید.



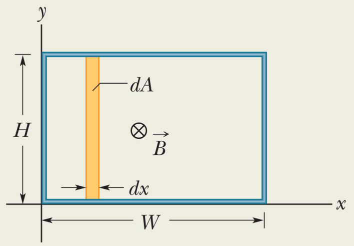
$$B = \alpha x^2 t^2, \quad \mathrm{d}A = H \mathrm{d}x$$

در اینجا $\vec{B}$ و $\mathrm{d}\vec{A}$ موازی هستند. بنابراین

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \alpha t^2 H \int_0^W x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \alpha t^2 H W^3$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۲:



$$\Phi_B = \frac{1}{3}\alpha t^2 HW^3$$

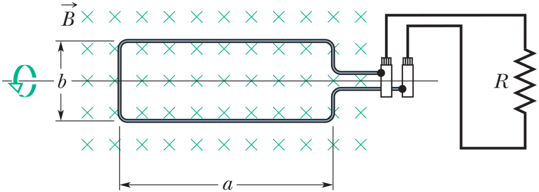
$$\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| \quad : \text{اندازه نیرو محرکه القایی}$$

$$\varepsilon = \frac{2}{3}\alpha t HW^3$$

میدان $\vec{B}$ افزایشی و بطرف داخل صفحه است. بنابراین براساس قانون لنز، جهت میدان القایی در خلاف جهت میدان اعمالی، بطرف خارج صفحه حلقه می‌باشد و جریان القایی ناشی از آن در جهت پادساعتگرد است.

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۳: در شکل حلقه‌ی مستطیلی متشکل از N دور سیم بطول a و عرض h با فرکانس f در میدان یکنواخت $\vec{B}$ دوران می‌کند. حلقه به استوانه‌های دورای متصل است که در مقابل آنها جاروب‌های لغزنده قرار دارد تا تماس با آنها برقرار شود. نشان دهید نیروی محرکه القایی در پیچه بصورت $\varepsilon = 2\pi f N a b \sin(2\pi f t)$ است.

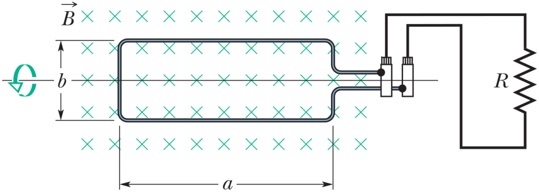


$$\omega = 2\pi f, \quad \theta = \theta_0 + \omega t = \theta_0 + (2\pi f)t$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = Bab\cos\theta$$

$$\Phi_B = NBab\cos(\theta_0 + 2\pi f t)$$

مسئله–۳:



$$\Phi_B = NBab\cos(\theta_0 + 2\pi f t)$$

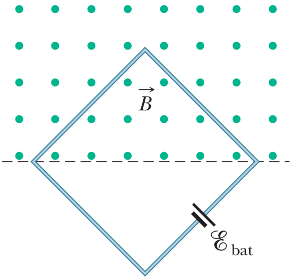
اندازه نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = \left|\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = 2\pi f NBab\sin(\theta_0 + 2\pi f t)$

برای $\theta_0 = 0$

$$\varepsilon = 2\pi f NBab\sin(2\pi f t)$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۴: در شکل حلقه‌ای مربعی به ضلع a و مقاومت R عمود بر میدان مغناطیسی قرار دارد بطوریکه نصف حلقه در میدان است. حلقه شامل یک باتری ε_{bat} است. اگر اندازه‌ی میدان نسبت به زمان طبق رابطه‌ی $B = b_0 - b_1 t$ تغییر کند $(b_0, b_1 > 0)$. الف) نیرو محرکه القایی و ب) جهت جریان کل را بدست آورید. ج) جهت جریان القایی را مشخص کنید.

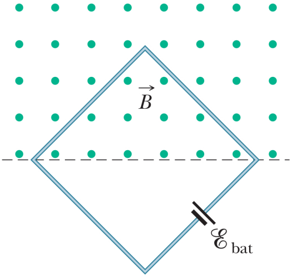


$$B = b_0 - b_1 t, \quad b_0, b_1 > 0$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = BA^{\text{مثلث}} = B\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2(b_0 - b_1 t)$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۴:

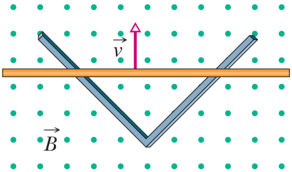


$$\Phi_B = B\frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2(b_0 - b_1 t)$$

اندازه نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{2}a^2 b_1$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله‌–۵: در شکل دو ریل راست رسانا زاویه‌ی قائمه‌ای تشکیل می‌دهند. یک میله رسانا که با ریل‌ها در تماس است در لحظه‌ی $t = 0$ از نقطه‌ی مغناطیسی B بطرف خارج صفحه است. الف) شار عبوری از مثلثی که از ریل‌ها و میله تشکیل شده را بر حسب t بدست آورید. ب) نیرو محرکه القایی را بدست آورید.



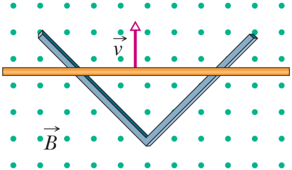
$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = BA^{\text{مثلث}} = B\frac{1}{2}y(2y) = By^2$$

$$y = y_0 + vt$$

$$\Phi_B = B(y0 + vt)^2$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۵:

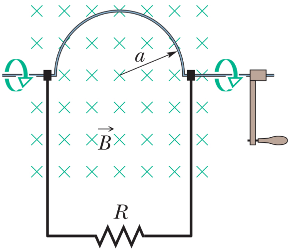


$$\Phi_B = B(y0 + vt)^2$$

اندازه نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = 2Bv(y0 + vt)$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله-۶: در شکل سیم سفتی به نیم دایره‌ای به شعاع a شکل داده شده است. اگر سیم با سرعت زاویه‌ی ω در میدان مغناطیسی B بچرخد، بسامد و دامنه نیروی محرکه القایی را بدست آورید.



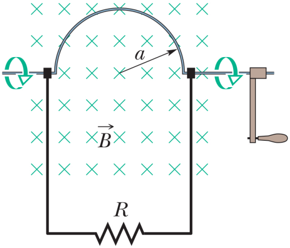
$$\theta = \theta_0 + \omega t, \quad \nu = \omega/2\pi (\text{بسامد})$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \Phi_B^{\text{مستطیل}} + \Phi_B^{\text{نیمدایره}}$$

$$\Phi_B = B(A^{\text{مستطیل}} + A^{\text{نیمدایره}}) = B\left[A^{\text{مستطیل}} + \frac{1}{2}(\pi a^2)\cos\theta\right]$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۶:



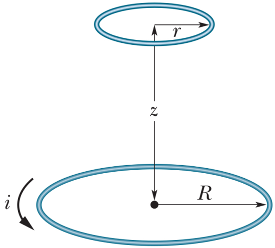
$$\Phi_B = B\left[A^{\text{مستطیل}} + \frac{\pi a^2}{2}\cos\theta\right]$$

$$\text{اندازه نیرو محرکه القایی}:\quad \varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = B\frac{\pi a^2}{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sin\theta = B\frac{\pi a^2}{2}\omega\sin(\theta_0+\omega t)$$

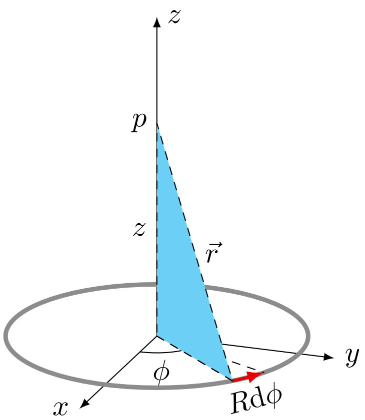
$$\text{دامنه نیروی محرکه القایی} = B\frac{\pi a^2}{2}\omega$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۷: در شکل دو حلقه سیم موازی دارای محور مشترک هستند. حلقه‌ی کوچکتر به شعاع r بالای حلقه‌ی بزرگتر به شعاع R قرار دارد. فاصله‌ی حلقه‌ها $z(\gg R)$ است. بخاطر فاصله‌ی زیاد حلقه‌ها از یکدیگر میدان مغناطیسی ناشی از حلقه‌ی بزرگتر در تمام سطح حلقه‌ی کوچکتر تقریبا یکنواخت فرض می‌شود. اگر فاصله‌ی بین حلقه‌ها با آهنگ $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = v$ افزایش یابد. الف) عبارتی برای شار مغناطیسیس عبوری از حلقه‌ی کوچتر را بصورت تابعی از z بدست آورید. ب) عبارتی برای نیروی محرکه القایی بدست آورید. ج) جهت حریان القایی را مشخص کنید.



مسئله-۷:
میدان ناشی از حلقه‌ی جریان دایره‌ای در نقطه‌ای بر روی محور



$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = (-\hat{\imath}\sin\phi + \hat{\jmath}\cos\phi)R\mathrm{d}\phi$$

$$\vec{r} = z\hat{k} - R(\hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi)$$

$$r = \sqrt{z^2+R^2}$$

$$\hat{r} = \frac{z\hat{k} - R(\hat{\imath}\cos\phi + \hat{\jmath}\sin\phi)}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

مسئله–۷:

میدان ناشی از حلقه‌ی جریان دایره‌ای در نقطه‌ای بر روی محور

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = (-\hat{i}\sin\phi + \hat{j}\cos\phi)R\mathrm{d}\phi, \quad \hat{r} = \frac{z\hat{k} - R(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi)}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -\sin\phi & \cos\phi & 0\\ -R\cos\phi & -R\sin\phi & z\end{vmatrix} R\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}\vec{\ell}\times\hat{r} = \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}[z(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi) + R\hat{k}]R\mathrm{d}\phi$$

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{1}{(z^2+R^2)^{3/2}}[z(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi) + R\hat{k}]R\mathrm{d}\phi$$

مسئله–۷:
میدان ناشی از حلقه‌ی جریان دایره‌ای در نقطه‌ای بر روی محور

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{(z^2+R^2)^{3/2}} [z(\hat{i}\cos\phi + \hat{j}\sin\phi) + R\hat{k}] R\mathrm{d}\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{(z^2+R^2)^{3/2}} \left[zR\left(\hat{i}\int_0^{2\pi} \cos\phi \mathrm{d}\phi + \hat{j}\int_0^{2\pi} \sin\phi \mathrm{d}\phi \right) + R^2\hat{k}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \right]$$

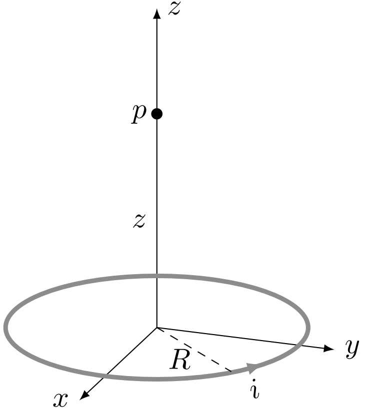
$$\int_0^{2\pi} \cos\phi \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi \mathrm{d}\phi = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{(z^2+R^2)^{3/2}} R^2 (2\pi)\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}} \hat{k}}$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۷:

میدان ناشی از حلقه‌ی جریان دایره‌ای در نقطه‌ای بر روی محور



$$\vec{B}=\frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}\hat{k}$$

حالت حدی: $z \gg R$

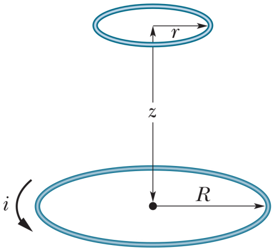
$$\vec{B}=\frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{z^3}\frac{1}{(1+(R/z)^2)^{3/2}}\hat{k}$$

$$\frac{1}{(1+(R/z)^2)^{3/2}}\simeq 1$$

$$\vec{B}\simeq\frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{z^3}\hat{k}$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۷:



$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{z^3}(\pi r^2)$$

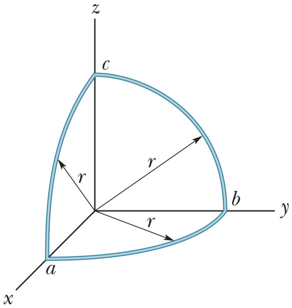
اندازه نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = \left|\dfrac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right|$

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{3R^2}{z^4}(\pi r^2)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v$$

$$\varepsilon = \frac{3\pi\mu_0 i R^2 r^2}{2z^4} v$$

با دور شدن حلقه‌ی کوچکتر تعداد خطوط میدان عبوری از آن کاهش پیدا می‌کند. بنابراین بر اساس قانون لنز، میدان مغناطیسی القایی در جهت میدان ناشی از حلقه بزرگ می‌باشد و جریان القایی نیز هم جهت با جریان حلقه بزرگ است.

مسئله–۸: در شکل سیمی بصورت سه کمان دایره‌ای هر یک با شعاع r خم شده است هر قسمت بصورت ربع دایره است. الف) اگر میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در جهت مثبت محور x با آهنگ α افزایش یابد، اندازه‌ی نیروی محرکه القایی چقدر است. ب) جهت جریان در bc را مشخص کنید.

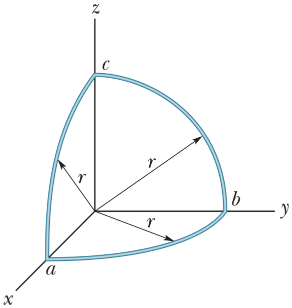


$$B = \alpha t, \quad \alpha > 0$$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{1}{4}\pi r^2 B = \frac{1}{4}\pi r^2 \alpha t$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۸:

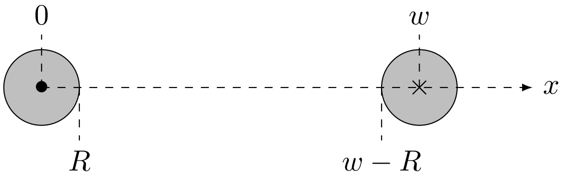


$$\Phi_B = \frac{1}{4}\pi r^2 \alpha t$$

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}\pi r^2 \alpha$$

میدان مغناطیسی افزایش در جهت محور x می‌باشد بنابراین بر اساس قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی بر خلاف جهت محور x و جریان القایی ناشی از آن در جهت c به b است.

مسئله–۹: دو سیم رسانای بلند و موازی با قطر R حامل جریانهای i در جهت مخالف هستند. الف) فرض کنید محورهای مرکزی آنها در فاصله‌ی w از هم قرار دارند، شار مغناطیسی بر واحد طول عبوری از ناحیه ی بین این محورها را بدست آورید.



$$x \le R: \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i x}{2\pi R^2} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(w-x)}$$

$$R \le x \le (w-R): \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

$$(w-R) \le x \le w: \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i(w-x)}{2\pi R^2}$$

مسئله-۹:

$$x \le R: \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i x}{2\pi R^2} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(w-x)}$$

$$R \le x \le (w-R): \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

$$(w-R) \le x \le w: \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i(w-x)}{2\pi R^2}$$

$$\Phi_B = \int_0^R \left(\frac{\mu_0 i x}{2\pi R^2} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(w-x)}\right) L\mathrm{d}x + 2\int_R^{w-R} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi x}\right) L\mathrm{d}x + \int_{w-R}^{w} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i(w-x)}{2\pi R^2}\right) L\mathrm{d}x$$

مسئله–۹:

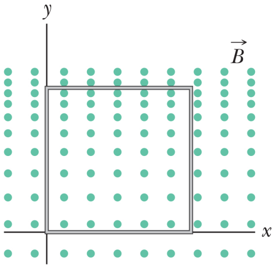
$$\text{شار بر واحد طول}: \frac{\Phi_B}{L} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2}\left(\frac{1}{2}R^2\right) - \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\left(\frac{w-R}{w}\right) + 2\frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\left(\frac{w-R}{R}\right) + \frac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\left(\frac{w}{w-R}\right) + \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2}\left(\frac{1}{2}R^2\right)$$

$$\frac{\Phi_B}{L} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[1 + 2\ln\left(\frac{w}{w-R}\right) + 2\ln\left(\frac{w-R}{R}\right)\right]$$

$$\frac{\Phi_B}{L} = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[1 + 2\ln\left(\frac{w}{R}\right)\right]$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۰: حلقه مربعی به ضلع a در میدان مغناطیسی به طرف خارج صفحه بصورت $B = \beta t^2 y$ قرار دارد. الف) نیروی محرکه القایی در حلقه‌ی مربعی را بدست آورید و ب) جهت جریان القایی را مشخص کنید.

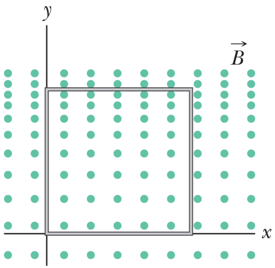


$$\text{عنصر سطحی} : \ \mathrm{d}A = a\mathrm{d}y$$

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \int_0^a \beta t^2 y (a\mathrm{d}y) = \frac{1}{2}\beta t^2 a^3$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله- ۱۰:

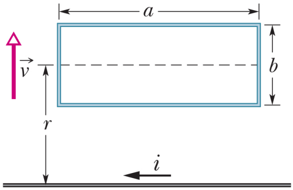


$$\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = \beta t a^3$$

میدان مغناطیسی افزایش و بطرف خارج صفحه می‌باشد بنابراین بر اساس قانون لنز، جهت میدان مغناطیسی القایی عمود بر صفحه بطرف داخل و جهت جریان القایی ناشی از آن ساعتگرد است.

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۱: در شکل حلقه‌ی مستطیلی بطول a و عرض b و مقاومت R نزدیک سیم بینهایت بلند حامل جریان i قرار دارد. حلقه با سرعت ثابت v از سیم دور می‌شود. وقتی مرکز حلقه در فاصله‌ی r قرار دارد الف) اندازه‌ی شار مغناطیسی عبوری از حلقه و ب) بزرگی و جهت جریان القایی را بدست آورید.



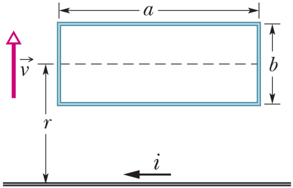
$$\oint \vec{B}.\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 i \Rightarrow B(2\pi y) = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi y}$$: عمود بر صفحه بطرف داخل

عنصر سطحی : $\mathrm{d}A = a\mathrm{d}y$

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \int_{r-b/2}^{r+b/2} \frac{\mu_0 i}{2\pi y} a\mathrm{d}y = \frac{\mu_0 i a}{2\pi}\int_{r-b/2}^{r+b/2} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln\left[\frac{r+b/2}{r-b/2}\right]$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۱:



$$\Phi_B = \frac{\mu_0 i a}{2\pi} \ln\left[\frac{r+b/2}{r-b/2}\right]$$

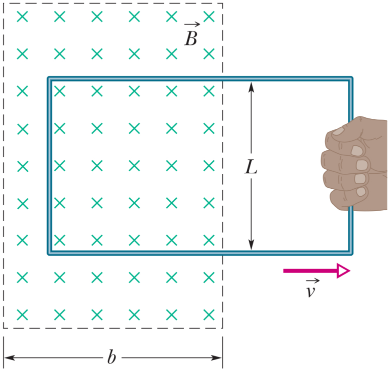
$$\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mu_0 i a}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{r+b/2} - \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{r-b/2}\right]$$

$$\varepsilon = \frac{\mu_0 i a v}{2\pi}\left[\frac{b}{r^2-b^2/4}\right], \quad i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\mu_0 i a v}{2\pi R}\left[\frac{b}{r^2-b^2/4}\right]$$

شدت میدان مغناطیسی با دور شدن حلقه از سیم کاهش پیدا می‌کند، بنابراین بر اساس قانون لنز، میدان مغناطیسی القایی بطرف داخل صفحه و جریان ناشی از آن ساعتگرد است.

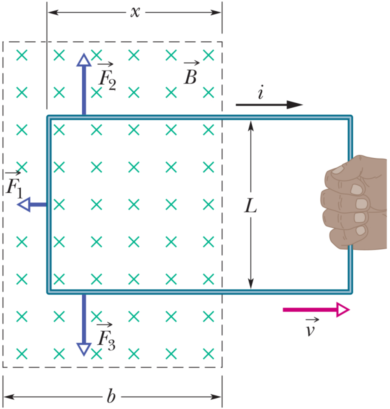
نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۲: یک حلقه‌ی مستطیلی به عرض L از یک انتها در داخل میدان مغناطیسی $\vec{B}$ یکنواختی قرار دارد که بطور قائم بطرف داخل صفحه‌ی حلقه است. الف) نیروی لازم برای اینکه حلقه را با سرعت ثابت $\vec{v}$ بطرف راست کشیده شود را بدست آورید. ب) آهنگ انجام کار بر روی حلقه و آهنگ انرژی گرمایی ایجاد شده در حلقه در حین کشیدن را بدست آورید.



نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۲:



$A = Lx \Rightarrow$ عنصر سطحی : $\mathrm{d}A = L\mathrm{d}x$

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = BLx$$

اندازه‌ی نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right|$

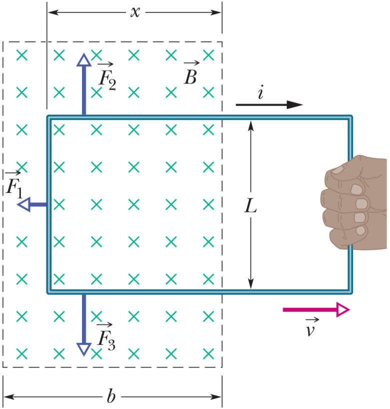
$$\varepsilon = BL\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = BLv$$

اندازه‌ی جریان القایی : $i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R}$

با کشیدن حلقه اندازه‌ی شار عبوری کاهش پیدا می‌کند. بنابراین بر اساس قانون لنز، میدان مغناطیسی القایی در جهت میدان اعمالی است و جریان ناشی از آن ساعتگرد است.

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۲:



$\varepsilon = BLv$: اندازه‌ی نیرو محرکه القایی

$i = \dfrac{BLv}{R}$: اندازه‌ی جریان القایی

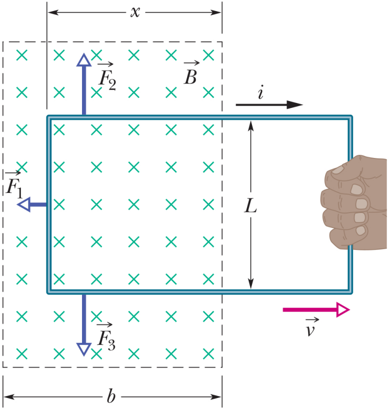
نیروی وارد بر حلقه بواسطه جریان القایی

- دو نیروی F_2 و F_3 با هم مساوی و در خلاف جهت هستند.
- نیروی F_1 در خلاف جهت سرعت $\vec{v}$ است

$$F_1 = |i d\vec{\ell} \times \vec{B}| = \frac{B^2L^2v}{R}$$

برای اینکه ذره با سرعت ثابت به طرف راست کشیده شود، باید شخص حلقه را با نیروی در خلاف جهت $\vec{F}_1$ بکشد.

مسئله-۱۲:



اندازه‌ی نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = BLv$

اندازه‌ی جریان القایی : $i = \dfrac{BLv}{R}$

نیروی اعمالی از طرف شخص : $F = \dfrac{B^2L^2v}{R}$

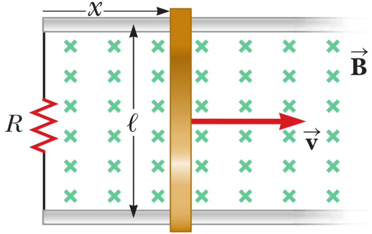
آهنگ انجام کار : $P = Fv = \dfrac{B^2L^2v^2}{R}$

آهنگ انرژی گرمایی : $P = i^2R = \dfrac{B^2L^2v^2}{R}$

بنابراین کاری که برای کشیدن حلقه در میدان مغناطیسی انجام می‌شود، بصورت گرما در آن ظاهر می‌شود.

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۳:



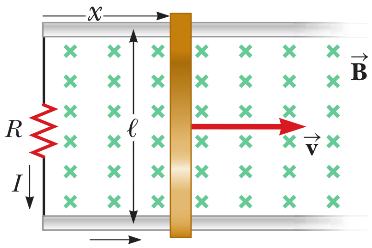
$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = B\ell x$$

اندازه‌ی نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = B\ell\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

اندازه‌ی جریان القایی : $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۳:



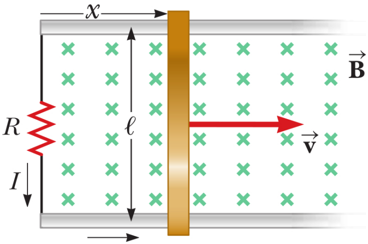
$$\text{اندازه‌ی جریان القایی} :\ I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$$

شار عبوری از حلقه در حال افزایش است. بنابراین بر اساس قانو لنز، میدان مغناطیسی در خلاف جهت میدان اعمالی است و جریان ناشی از آن پادساعتگرد است.

نیروی ناشی از جریان القایی : $\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{\ell}\times\vec{B}$: $F = I\ell B = \dfrac{\ell^2 B^2 v}{R}$: جهت سرعت میله

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۳:



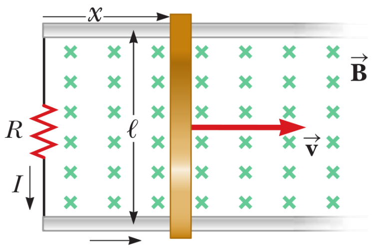
$$F = I\ell B = \frac{\ell^2 B^2 v}{R}$$

در خلاف جهت سرعت میله : $F = I\ell B = \frac{\ell^2 B^2 v}{R}$: نیروی ناشی از جریان القایی

برای اینکه میله با سرعت ثابت v حرکت کند لازم است به میله نیرویی برابر و در خلاف جهت نیروی القایی اعمال شود،

$$F_{\text{اعمالی}} = \frac{\ell^2 B^2 v}{R}$$

مسئله–۱۳:



آهنگ انجام کار بر روی میله در حین کشیده شدن

$$P = F_{\text{اعمالی}} v = \frac{\ell^2 B^2 v^2}{R}$$

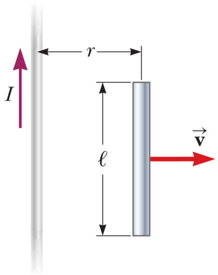
آهنگ ایجاد گرما در مقاومت R در حین کشیدن میله

$$P = I^2 R = \frac{\ell^2 B^2 v^2}{R}$$

بنابراین کاری که برای کشیدن میله در میدان مغناطیسی انجام می‌شود، بصورت گرما در مقاومت ظاهر می‌شود.

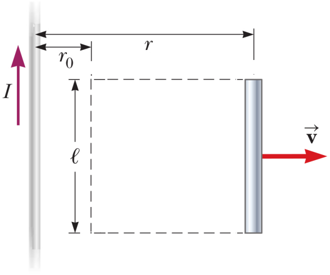
نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۴:



نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۴:



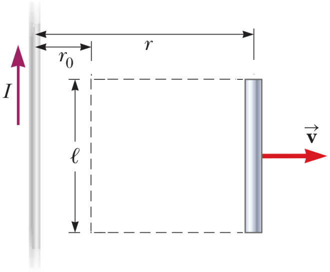
$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_o I \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$$

از لحظه‌ی 0 تا لحظه‌ی t : $r_0 \le x \le r$

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_{r_0}^{r}\left(\frac{\mu_o I}{2\pi x}\right)\ell \mathrm{d}x = \frac{\mu_o I\ell}{2\pi}\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_o I\ell}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۴:

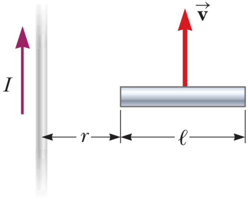


$$\Phi_B = \frac{\mu_o I \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{r(t)}{r_0}\right)$$

اندازه‌ی نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mu_o I \ell}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_o v I \ell}{2\pi r}, \quad v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

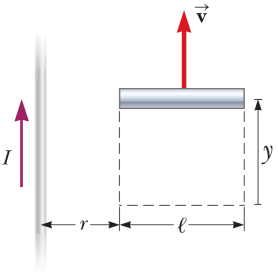
نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۵:



نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۵:



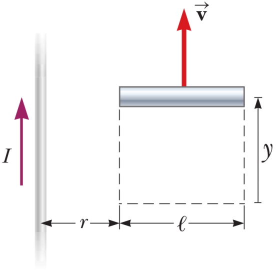
$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_o I \Rightarrow B = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$$

$$r \leq x \leq (r+\ell)$$

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_r^{r+\ell} \left(\frac{\mu_o I}{2\pi x}\right) y\mathrm{d}x = \frac{\mu_o I y}{2\pi}\int_r^{r+\ell}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_o I y}{2\pi}\ln\left(\frac{r+\ell}{r}\right)$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

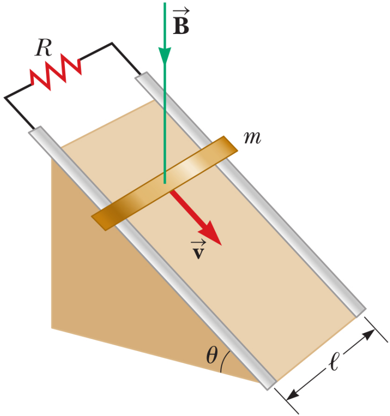
مسئله–۱۵:



$$\Phi_B = \frac{\mu_o I y}{2\pi} \ln\left(\frac{r+\ell}{r}\right), \qquad v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

اندازه‌ی نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mu_o I}{2\pi} \ln\left(\frac{r+\ell}{r}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_o I v}{2\pi} \ln\left(\frac{r+\ell}{r}\right)$

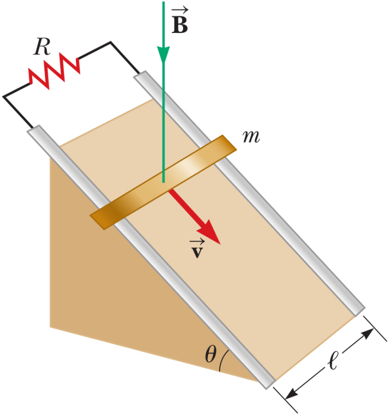
نیروی محرکه القایی و جریان القایی



مسئله–۱۶: میله‌ای به جرم m و طول ℓ می‌تواند روی یک جفت ریل بدون اصطکاک بلغزد. ریلها و میله، مطابق شکل، روی سطح شیبداری به زاویه‌ی شیب θ قرار دارند. میدان مغناطیسی $\vec{B}$ در امتداد بطرف پایین اعمال شده است. با چه سرعت ثابتی میله بطرف پایین حرکت می کند؟

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۶:



$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = B\ell x \cos\theta$$

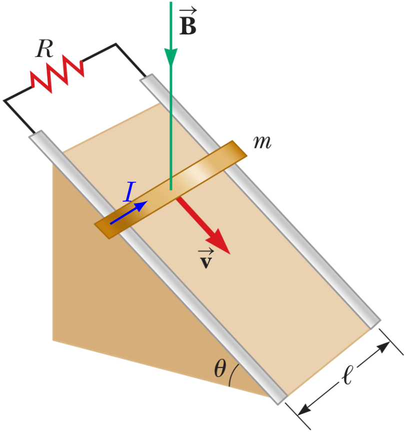
اندازه‌ی نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = \left| \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \right|$

$$\varepsilon = B\ell \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \cos\theta = B\ell v \cos\theta$$

اندازه‌ی جریان القایی : $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v \cos\theta}{R}$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۶:



$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v\cos\theta}{R}$$

شار عبوری از حلقه در حال افزایش است.
بنابراین بر اساس قانو لنز، میدان مغناطیسی در خلاف جهت میدان اعمالی است و جریان ناشی از آن پادساعتگرد است.

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B}$$

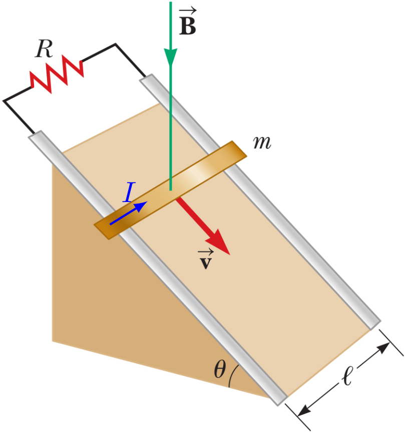
بزرگی نیرو

$$F = \frac{\ell^2 B^2 v\cos\theta}{R}$$

نیروی وارد بر میله ناشی از جریان القایی: عمود بر میدان $\vec{B}$ بطرف داخل سطح شیبدار

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۶:



بزرگی نیرو : $F = \dfrac{\ell^2 B^2 v\cos\theta}{R}$

جهت نیروی وارد بر میله ناشی از جریان القایی:
عمود بر میدان $\vec{B}$ بطرف داخل سطح شیبدار

قانون دوم نیوتن در امتداد سطح شیبدار

$$mg\sin\theta - F\cos\theta = ma$$

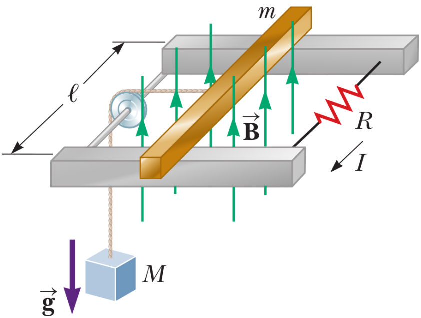
اگر میله با سرعت ثابت $(a=0)$ پایین بیاید،

$$mg\sin\theta = F\cos\theta = \frac{\ell^2 B^2 v\cos^2\theta}{R}$$

سرعت پایین آمدن میله : $v = \dfrac{mgR}{\ell^2 B^2}\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

نیروی محرکه القایی و جریا ن القایی

مسئله–۱۷:



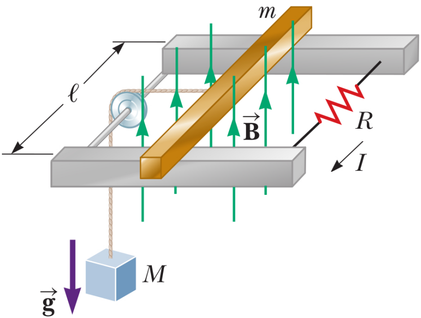
$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = B\ell x$$

اندازه‌ی نیرو محرکه القایی : $\varepsilon = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| = B\ell\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

اندازه‌ی جریان القایی : $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{B\ell v}{R}$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۷:



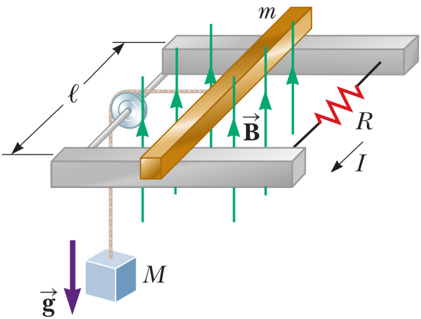
$$I = \frac{B\ell v}{R} \; : \; \text{اندازه‌ی جریان القایی}$$

شار عبوری از حلقه در حال افزایش است. بنابراین بر اساس قانو لنز، میدان مغناطیسی در خلاف جهت میدان اعمالی است و جریان ناشی از آن ساعتگرد است.

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B} \; : \; F = I\ell B = \frac{\ell^2 B^2 v}{R} \; : \; \text{در خلاف جهت کشش طناب}$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

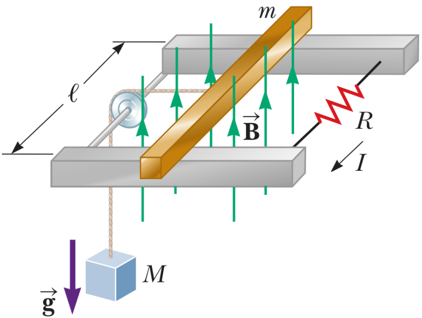
مسئله–۱۷:



$$\begin{cases} m: & T-F=ma \\ M: & Mg-T=Ma \end{cases} \Rightarrow (m+M)a = Mg - F = Mg - \frac{\ell^2 B^2}{R} v$$

$$(m+M)a = Mg - \frac{\ell^2 B^2}{R} v \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\ell^2 B^2}{R(m+M)} v = \frac{Mg}{m+M}$$

مسئله–۱۷:



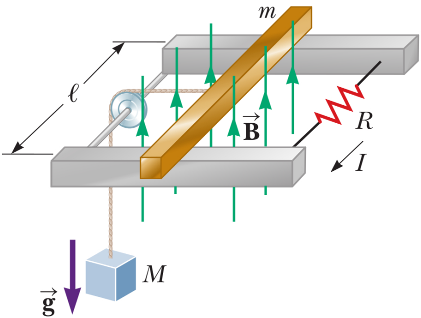
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\ell^2 B^2}{R(m+M)} v = \frac{Mg}{m+M},$$ شرایط اولیه : $v(t=0)=0$

قسمت همگن : $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\ell^2 B^2}{R(m+M)} v = 0 \Rightarrow v_{\text{همگن}} = Ae^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{R(m+M)}{\ell^2 B^2}$$

قسمت ناهمگن : $$v_{\text{ناهمگن}} = B_0 + B_1 t + \cdots \Rightarrow B_1 = B_2 = \cdots = 0,\ B_0 = \frac{RMg}{\ell^2 B^2}$$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

مسئله–۱۷:



$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\ell^2B^2}{R(m+M)}v=\frac{Mg}{m+M},$$ شرایط اولیه : $v(t=0)=0$

$$v=v_{\text{همگن}}+v_{\text{ناهمگن}}=Ae^{-t/\tau}+\frac{RMg}{\ell^2B^2}$$

اعمال شرایط اولیه : $v=\frac{RMg}{\ell^2B^2}(1-e^{-t/\tau}),\qquad \tau=\frac{R(m+M)}{\ell^2B^2}$

نیروی محرکه القایی و جریان القایی

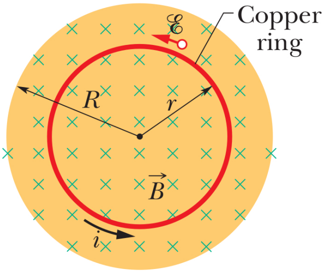
مسئله–۱۸: میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}$ یک حجم استوانه‌ای به شعاع R را فرا می‌گیرد. یک میله‌ی فلزی به طول ℓ مطابق شکل در میدان الکتریکی قرار دارد. اگر B با آهنگ $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ تغییر کند، نشان دهید که نیروی محرکه‌ی الکتریکی حاصل از تییرات میدان مغناطیسی که میان دو سر میله برقرار می‌شود، از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید،

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{\ell}{2}\sqrt{R^2 - \frac{\ell^2}{4}}$$

میدان الکتریکی القایی-فرمول‌بندی دیگر از قانون فارادی

قانون القای فاراده

تغییر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی را ایجاد می‌کند.



◄ فرض کنیم شدت میدان مغناطیسی با آهنگ ثابتی تغییر می‌کند. بنابراین در حلقه جریان القایی پادساعتگردی ایجاد می‌شود.

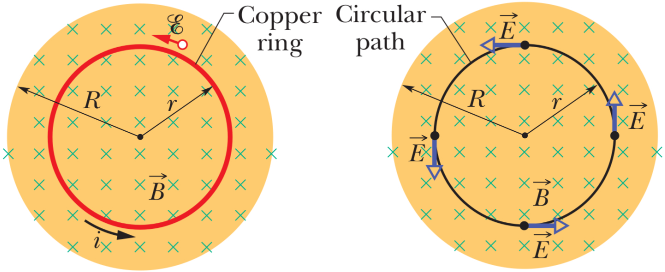
◄ بواسطه جریان القایی باید میدان الکتریکی در امتداد حلقه وجود داشته باشد تا الکترونهای رسانش تحت تاثیر آن حرکت کنند.

◄ میدان الکتریکی مربوطه که **میدان الکتریکی القایی** نامیده می‌شود، مانند میدان الکتریکی ایجاد شده توسط بارهای ساکن، واقعی است.

میدان الکتریکی القایی-فرمول‌بندی دیگر از قانون فارادی

قانون القای فاراده

تغییر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی را ایجاد می‌کند.



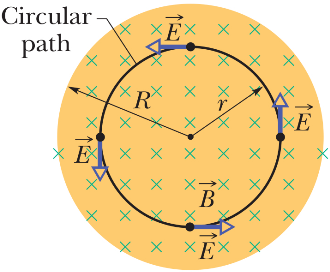
نکته برجسته

میدان الکتریکی القا می‌شود حتی اگر حلقه مسی نباشد.

میدان الکتریکی القایی-فرمول‌بندی دیگر از قانون فارادی

قانون القای فاراده

تغییر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی را ایجاد می‌کند. ؟



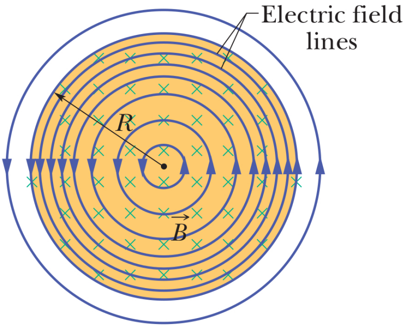
◀ در اینجا بجای حلقه‌ی مسی، مسیر دایره‌ای فرضی با شعاع r قرار داده شده است.

◀ اگر میدان مغناطیسی با آهنگ $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ افزایش یابد، میدان الکتریکی القا شده باید طبق تقارن مماس بر مسیر دایره‌ای باشد.

میدان الکتریکی القایی-فرمول‌بندی دیگر از قانون فارادی

قانون القای فاراده

تغییر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی را ایجاد می‌کند. ؟



- تا وقتی میدان مغناطیسی **افزایش می‌یابد**، خطوط میدان الکتریکی دایره‌ای وجود خواهد داشت.
- اگر میدان مغناطیسی **ثابت باشد**، هیچ میدان الکتریکی القایی و در نتیجه هیچ خطوط میدانی الکتریکی وجود نخواهد داشت.
- اگر میدان مغناطیسی با زمان **کاهش یابد**، جهت خطوط میدان الکتریکی در خلاف جهت ایجاد خواهد شد.

میدان الکتریکی القایی-فرمول‌بندی دیگر از قانون فارادی

قانون القای فاراده

تغییر میدان مغناطیسی، میدان الکتریکی را ایجاد می‌کند.

$$\varepsilon = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$ انتگرالگیری روی سطح

$$\varepsilon = \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$ انتگرالگیری روی مسیر

فرمول‌بندی دیگر از قانون فارادی

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

میدان الکتریکی القایی-فرمول‌بندی دیگر از قانون فارادی

مسئله-۱۹: یک ناحیه‌ی دایره‌ای به شعاع R در صفحه‌ی xy قرار دارد و میدان یکنواخت در جهت مثبت محور z از آن می‌گذرد. اندازه‌ی میدان مغناطیسی طبق رابطه‌ی $B = at$ با زمان افزایش می‌یابد که t بر حسب ثانیه و $a > 0$ است. اندازه‌ی میدان الکتریکی ایجاد شده در اثر افزایش میدان مغناطیسی را بدست آورید.

$$\text{اندازه} : \oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right|$$

$$\Phi_B = \begin{cases} a\pi r^2 t & r \le R \\ a\pi R^2 t & r \ge R \end{cases}, \qquad \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} a\pi r^2 & r \le R \\ a\pi R^2 & r \ge R \end{cases}$$

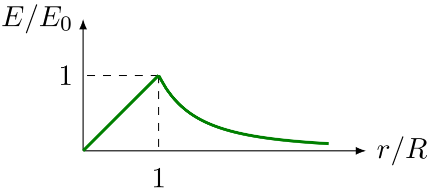
$$\oint \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = E(2\pi r)$$

$$E(2\pi r) = \begin{cases} a\pi r^2 & r \le R \\ a\pi R^2 & r \ge R \end{cases} \Rightarrow E = \begin{cases} \frac{1}{2} a r & r \le R \\ \frac{1}{2} a \frac{R^2}{r} & r \ge R \end{cases}$$

مسئله-۱۹:

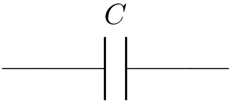
$$E = \begin{cases} \frac{1}{2}ar & r \leq R \\ \frac{1}{2}a\frac{R^2}{r} & r \geq R \end{cases}$$

$$E/E_0 = \begin{cases} \frac{r}{R} & \frac{r}{R} \leq 1 \\ \frac{R}{r} & \frac{r}{R} \geq 1 \end{cases}, \quad E_0 = \frac{1}{2}aR$$



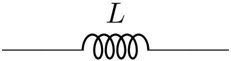
القاگر و القاییدگی

◀ برای تولید میدان الکتریکی خاص، از **خازن** استفاده می‌کردیم. که آنرا با نماد



نمایش می‌دادیم.

◀ برای تولید میدان مغناطیسی دلخواه، می توان از **القاگر** استفاده کرد. که آنرا با نماد



نمایش می‌دهند.

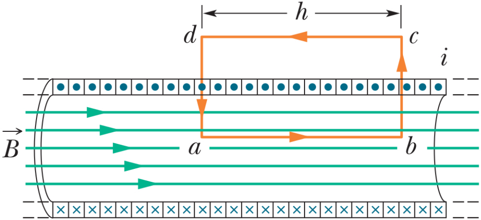
◀ برای شار مغناطیسی عبوری از ناحیه‌ی مرکزی القاگر، القاییدگی آن بر حسب شار بصورت،

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

تعریف می‌شود که N تعداد دورهها است و ابعاد آن هانری (Henry) است ($1\ \mathrm{H} = 1\mathrm{Tm}^2/\mathrm{A}$).

القاییدگی سیملوله

برای سیملوله ایده‌آل



$$\int_a^b \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 i_{abcda}$$

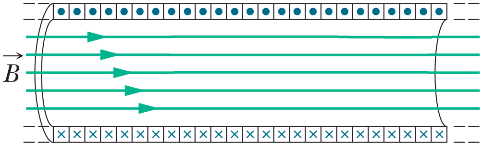
با توجه به یکنواختی میدان $\vec{B}$ در داخل سیملوله : $\int_a^b \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = Bh$

$i_{abcda} = (nh)i, \quad$ تعداد دورهای سیملوله بر واحد طول $= n$

$$\int_a^b \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 i_{abcda} \Rightarrow Bh = \mu_0 (nh) i \Rightarrow B = \mu_0 i n$$

القاییدگی سیملوله

برای سیملوله ایده‌آل



$$B = \mu_0 i n$$

شار عبوری از سطح مقطع سیملوله A

$$\Phi_B = \mu_0 n i A$$

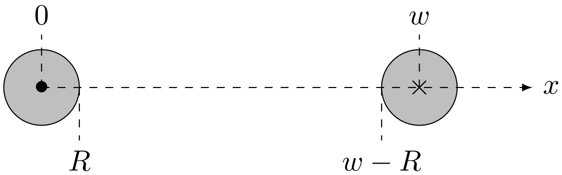
برای سیملوله‌ای به طول ℓ تعداد پیچه‌ها برابر است با

$$N = n\ell$$

القاییدگی سیملوله برابر است با

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{(n\ell)(\mu_0 n i A)}{i} = \mu_0 n^2 \ell A$$

مسئله‌–۲۰: دو سیم رسانای بلند و موازی با قطر R حامل جریانهای i در جهت مخالف هستند.
الف) فرض کنید محورهای مرکزی آنها در فاصله‌ی w از هم قرار دارند، شار مغناطیسی بر واحد طول عبوری از ناحیه ی بین این محورها را بدست آورید.



$$x \leq R: \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i x}{2\pi R^2} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(w-x)}$$

$$R \leq x \leq (w-R): \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

$$(w-R) \leq x \leq w: \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i(w-x)}{2\pi R^2}$$

مسئله- ۲۰:

$$x \leq R: \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i x}{2\pi R^2} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(w-x)}$$

$$R \leq x \leq (w-R): \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

$$(w-R) \leq x \leq w: \quad B = B_{\text{سمت چپ}} + B_{\text{سمت راست}} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i(w-x)}{2\pi R^2}$$

$$\Phi_B = \int_0^R \left(\frac{\mu_0 i x}{2\pi R^2} + \frac{\mu_0 i}{2\pi(w-x)}\right) \ell \mathrm{d}x + 2\int_R^{w-R} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi x}\right) \ell \mathrm{d}x$$
$$+ \int_{w-R}^{w} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi x} + \frac{\mu_0 i(w-x)}{2\pi R^2}\right) \ell \mathrm{d}x$$

برای صرفه‌نظر کردن شار داخل سیمها، انتگرالهای اول و سوم را کنار می‌گذاریم،

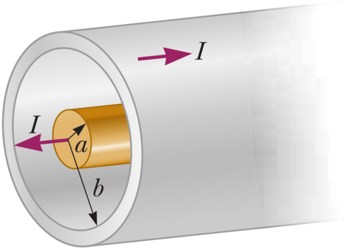
مسئله– ۲۰:

$$\Phi_B = 2\int_R^{w-R}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi x}\right)\ell \mathrm{d}x$$

شار بر واحد طول : $\dfrac{\Phi_B}{\ell} = 2\dfrac{\mu_0 i}{2\pi}\ln\left(\dfrac{w-R}{R}\right)$

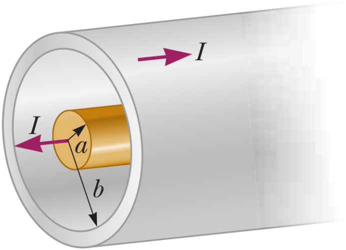
$$\frac{\Phi_B}{\ell} = \frac{\mu_0 i}{\pi}\ln\left(\frac{w-R}{R}\right)$$

مسئله–۲۱: مطابق شکل، رابطه‌ی القای یک سیم به شعاع a و یک استوانه‌ی توخالی هم محور به شعاع b را بدست آورید. طول محور ℓ بزرگتر از a و b است. مطابق شکل جریانهای مخالف از آنها عبور می‌کند.



القاییدگی

مسئله–۲۱:



$$r \leq R: \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

$$a \leq b < b: \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

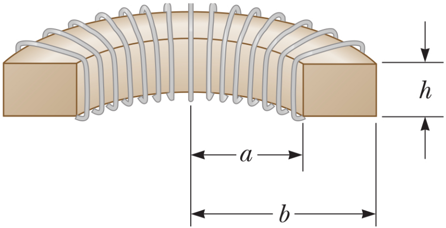
$$r > b: \quad B = 0$$

$$\Phi_B = \int_0^a \left(\frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\right) \ell \mathrm{d}r + \int_a^b \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) \ell \mathrm{d}r$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 \ell I}{4\pi} + \frac{\mu_0 \ell I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

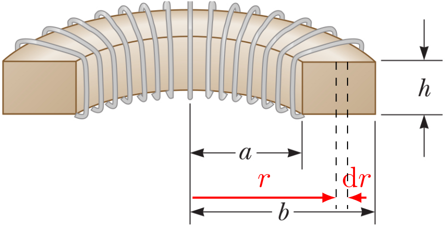
القاییدگی فضای بین دو استوانه+القاییدگی داخل سیم $= \ln\left(\frac{b}{a}\right) \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} + \frac{\mu_0 \ell}{4\pi} = \frac{\Phi_B}{I} = L$

مسئله–۲۲: رابطه‌ی القای یک جنبره با مقطع مستطیلی را بدست آورید.



القاییدگی

مسئله–۲۲:

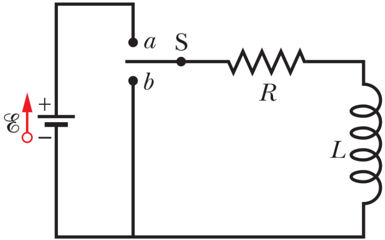


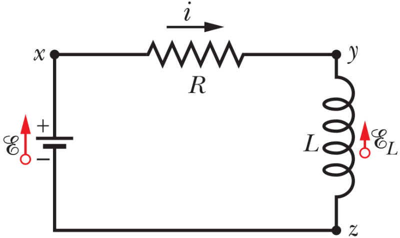
$$\oint \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 N i \Rightarrow B(2\pi r) = \mu_0 N i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

$$\Phi_B = \int \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \int_a^b \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} h \mathrm{d}r = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

مدار RL

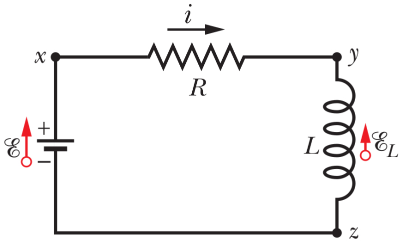




$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \Rightarrow N\Phi_B = Li$$

$$\varepsilon_L = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



شرایط اولیه

$$i_{\text{کل}}(t=0)=0$$

با استفاده از قضیه حلقه

$$V_x - Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \varepsilon = V_x$$

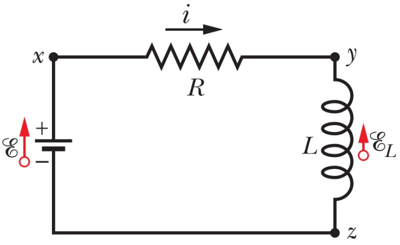
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = \varepsilon$$

$$i_{\text{کل}} = i_{\text{همگن}} + i_{\text{ناهمگن}}$$

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{\text{همگن}} + Ri_{\text{همگن}} = 0 \\ L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{\text{ناهمگن}} + Ri_{\text{ناهمگن}} = \varepsilon \end{cases}$$

مدار RL

شرایط اولیه



$$i_{\text{کل}}(t=0)=0$$

$$i_{\text{کل}}=i_{\text{همگن}}+i_{\text{ناهمگن}}$$

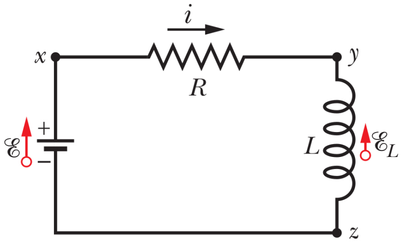
$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{\text{همگن}}+Ri_{\text{همگن}}=0\\ L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{\text{ناهمگن}}+Ri_{\text{ناهمگن}}=\varepsilon\end{cases}$$

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{\text{همگن}}+Ri_{\text{همگن}}=0,\quad \text{جواب پیشنهادی}:\ i_{\text{همگن}}=Ae^{\alpha t}$$

$$L\alpha Ae^{\alpha t}+RAe^{\alpha t}=0\Rightarrow(L\alpha+R)Ae^{\alpha t}=0\Rightarrow\alpha=-\frac{R}{L}$$

$$i_{\text{همگن}}=Ae^{-Rt/L}$$

مدار RL



شرایط اولیه

$$i_{\text{کل}}(t=0)=0$$

$$i_{\text{کل}} = i_{\text{همگن}} + i_{\text{ناهمگن}}$$

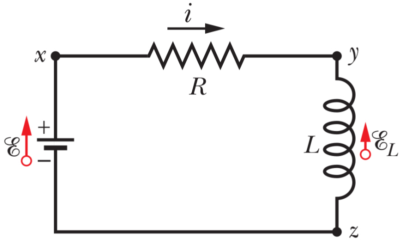
$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{\text{همگن}} + R i_{\text{همگن}} = 0 \\ L\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{\text{ناهمگن}} + R i_{\text{ناهمگن}} = \varepsilon \end{cases}$$

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_{\text{ناهمگن}} + R i_{\text{ناهمگن}} = \varepsilon, \quad \text{جواب پیشنهادی} : \; i_{\text{ناهمگن}} = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \cdots$$

$$B_0 = \frac{\varepsilon}{R}, \; B_1 = B_2 = \cdots = 0$$

$$i_{\text{ناهمگن}} = \frac{\varepsilon}{R}$$

مدار RL



شرایط اولیه

$$i_{\text{کل}}(t=0)=0$$

$$i_{\text{کل}}=i_{\text{همگن}}+i_{\text{ناهمگن}}$$

$$i_{\text{کل}}=\frac{\varepsilon}{R}+Ae^{-Rt/L}$$

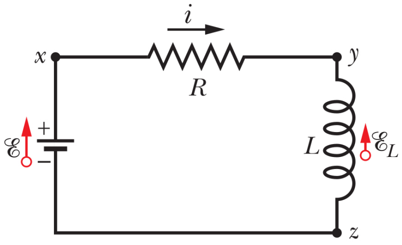
اعمال شرایط اولیه

$$i_{\text{کل}}(t=0)=0\Rightarrow\frac{\varepsilon}{R}+A=0\Rightarrow A=-\frac{\varepsilon}{R}$$

$$i_{\text{کل}}=\frac{\varepsilon}{R}(1-e^{-t/\tau}),\quad \tau=L/R$$

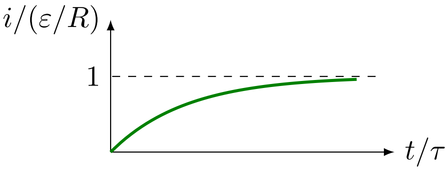
$$\lim_{t/\tau\to\infty}i_{\text{کل}}=\frac{\varepsilon}{R}$$

مدار RL

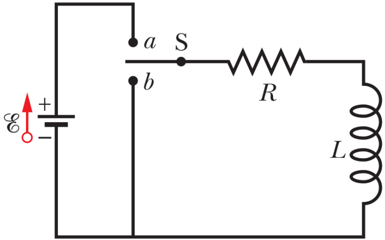


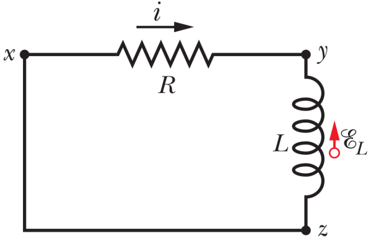
$$i_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \quad \tau = L/R$$

$$\lim_{t/\tau \to \infty} i_{\text{کل}} = \frac{\varepsilon}{R}$$



مدار RL





شرایط اولیه

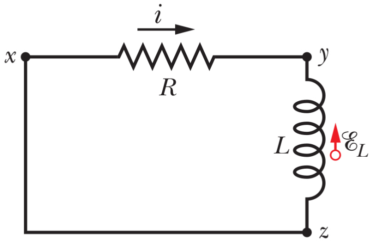
$$i(t=0)=\frac{\varepsilon}{R}$$

با استفاده از قضیه حلقه

$$V_x - Ri - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = V_x$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$$

مدار RL



شرایط اولیه

$$i(t=0)=\frac{\varepsilon}{R}$$

با استفاده از قضیه حلقه

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=0$$

جواب پیشنهادی : $i=Ae^{\alpha t}$

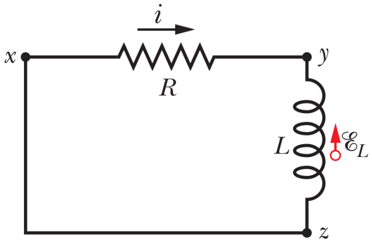
$$L\alpha Ae^{\alpha t}+RAe^{\alpha t}=0\Rightarrow(L\alpha+R)Ae^{\alpha t}=0\Rightarrow\alpha=-\frac{R}{L}$$

$$i=Ae^{-Rt/L}$$

اعمال شرایط اولیه

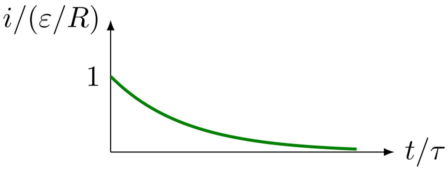
$$i(t=0)=\frac{\varepsilon}{R}\Rightarrow A=\frac{\varepsilon}{R},\quad i=\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/\tau},\quad \tau=L/R$$

مدار RL



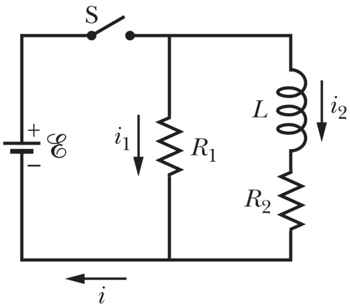
$$i = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/\tau}, \quad \tau = L/R$$

$$\lim_{t/\tau \to \infty} i = 0$$



مدار RL

مسئله–۲۳:



$$\varepsilon - i_1 R_1 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{\varepsilon}{R_1}$$

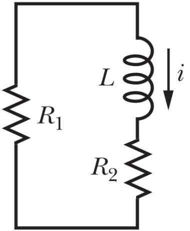
$$-L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - R_2 i_2 + R_1 i_1 = 0$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + R_2 i_2 = \varepsilon, \quad i_2(t=0) = 0$$

$$i_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} + Ae^{-t/\tau}, \quad \tau = L/R_2$$

$$i_2 = \frac{\varepsilon}{R_2}(1 - e^{-t/\tau})$$

مسئله-۲۳:



$$i(t=0) = \frac{\varepsilon}{R_2}$$

$$-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - R_2 i - R_1 i = 0$$

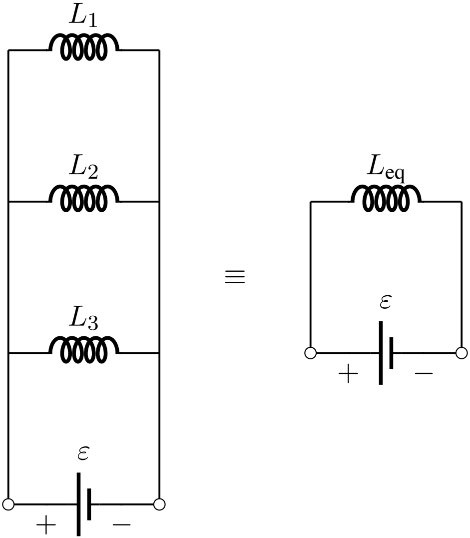
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + (R_1 + R_2)i = 0$$

$$i = Ae^{-t/\tau}, \quad \tau' = L/(R_1 + R_2)$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_2}e^{-t/\tau'}$$

القاییدگی-القاگرهای موازی

$$i_{\text{کل}} = i = i_1 + i_2 + i_3$$



رابطه‌ی مشتق جریان با نیروی محرکه القایی دو سر القاگر

$$-L_1 \mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t = \varepsilon \Rightarrow \mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t = -\varepsilon/L_1$$

$$-L_2 \mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t = \varepsilon \Rightarrow \mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t = -\varepsilon/L_2$$

$$-L_3 \mathrm{d}i_3/\mathrm{d}t = \varepsilon \Rightarrow \mathrm{d}i_3/\mathrm{d}t = -\varepsilon/L_3$$

و

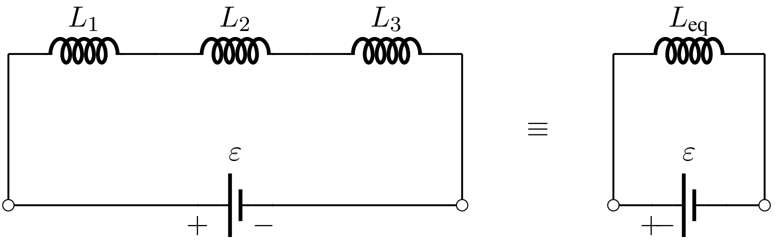
$$-L_{\rm eq} \mathrm{d}i/\mathrm{d}t = \varepsilon \Rightarrow \mathrm{d}i/\mathrm{d}t = -\varepsilon/L_{\rm eq}$$

$$\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = \mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t + \mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t + \mathrm{d}i_3/\mathrm{d}t$$

$$-\varepsilon/L_{\rm eq} = -\varepsilon/L_1 + -\varepsilon/L_2 + -\varepsilon/L_3$$

$$\frac{1}{L_{\rm eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$$

ظرفیت-خازنهای متوالی



$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

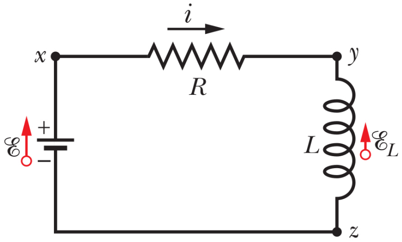
رابطه‌ی مشتق جریان با نیروی محرکه القایی دو سر هر القاگر

$$\varepsilon = -L_{\text{eq}}\mathrm{d}i/\mathrm{d}t, \quad \varepsilon_1 = -L_1\mathrm{d}i/\mathrm{d}t, \quad \varepsilon_2 = -L_2\mathrm{d}i/\mathrm{d}t, \quad \varepsilon_3 = -L_3\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$$

$$-L_{\text{eq}}\mathrm{d}i/\mathrm{d}t = -L_1\mathrm{d}i/\mathrm{d}t - L_2\mathrm{d}i/\mathrm{d}t - L_3\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$$

$$L_{\text{eq}} = L_1 + L_2 + L_3$$

انباشت انرژی در میدان مغناطیسی



$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i + Ri = \varepsilon$$

ضرب i در طرفین

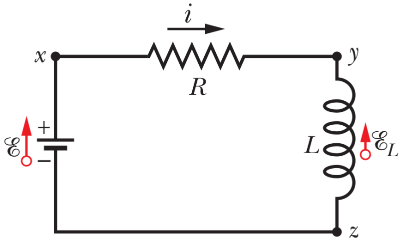
$$Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = \varepsilon i$$

تعبیر عبارت بالا:

- جمله‌ی سمت راست، آهنگ تحویل انرژی به مدار توسط منبع نیروی محرکه‌ی الکتریکی است.
- جمله‌ی دوم سمت چپ، آهنگ اتلاف انرژی بصورت گرما در مقاومت است.
- جمله‌ی اول سمت چپ، آهنگ انباشت انرژی در میدان مغناطیسی است.

$$\frac{\mathrm{d}U_B}{\mathrm{d}t} = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}U_B = Li\mathrm{d}i \Rightarrow \int_0^{U_B}\mathrm{d}U_B = \int_0^i Li\mathrm{d}i \Rightarrow \boxed{U_B = \frac{1}{2}Li^2}$$

انباشت انرژی در میدان مغناطیسی-چگالی انرژی



انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2$$

مقایسه با انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

◄ **چگالی انرژی** برای یک سیملوله بسیار بلند بطول ℓ و سطح مقطع A برابر است با

$$u_B = \frac{\text{انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی}}{\text{حجم}} = \frac{U_B}{A\ell}$$

چون

$$U_B = \frac{1}{2} L i^2$$

داریم

$$u_B = \frac{L i^2/2}{A\ell}$$

انباشت انرژی در میدان مغناطیسی-چگالی انرژی

$$u_B = \frac{Li^2/2}{A\ell}$$

برای یک سیملوله بسیار بلند بطول ℓ و سطح مقطع A برابر است با

$$\begin{cases} L = \mu_0 n^2 \ell A \\ B = \mu_0 i n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = \mu_0 n^2 \ell A \\ i = \frac{B}{\mu_0 n} \end{cases}$$

بنابراین

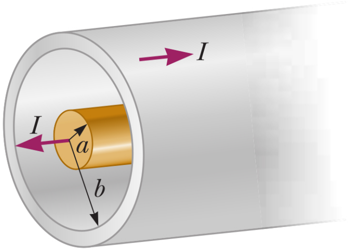
$$u_B = \frac{Li^2/2}{A\ell} = \frac{1}{2}Li^2\frac{1}{A\ell} = \frac{1}{2}\left(\mu_0 n^2 \ell A\right)\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2\left(\frac{1}{A\ell}\right)$$

و نهایتا

$$\boxed{u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

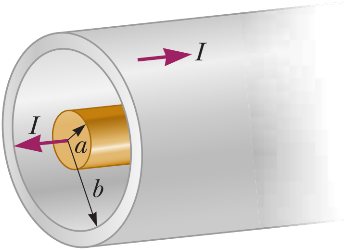
اگرچه این رابطه برای یک سیملوله بدست آمده است ولی برای هر آرایش از میدان مغناطیسی برقرار است.

مسئله-۲۴: یک کابل دراز شامل دو استوانه هم محور به شعاع‌های a و b است. رسانای داخلی کابلی حامل جریان i و رسانای خارجی ممسیر برگشت را تامین می‌کند. الف) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی مربوط به طول ℓ از این کابل را بدست آورید. ب) القاییدگی طول ℓ از این کابل هم محور چقدر است؟



انباشت انرژی در میدان مغناطیسی-چگالی انرژی

مسئله-۲۴:



$$r \le a: \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

$$a \le b < b: \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$r > b: \quad B = 0$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}, & r \le a \\ \frac{\mu_0^2 I^2}{8\pi^2 r^2}, & a \le b < b \\ 0, & r > b \end{cases}$$

$$U_B = \int u_B \mathrm{d}V = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^4}\int_0^a r^2 2\pi\ell r \mathrm{d}r + \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2}\int_a^b \frac{1}{r^2} 2\pi\ell r \mathrm{d}r$$

انباشت انرژی در میدان مغناطیسی-چگالی انرژی

مسئله-۲۴:

$$U_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^4}\int_0^a r^2 2\pi\ell r \mathrm{d}r + \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2}\int_a^b \frac{1}{r^2} 2\pi\ell r \mathrm{d}r$$

$$U_B = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi a^4}\int_0^a r^3 \mathrm{d}r + \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\int_a^b \frac{1}{r}\mathrm{d}r$$

$$U_B = \frac{\mu_0 I^2 \ell}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2 \ell}{4\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

اگر رابطه‌ی بالا را با

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2$$

مقایسه کنیم، می‌توانیم القاییدگی را بصورت زیر بدست آورد

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{8\pi} + \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$